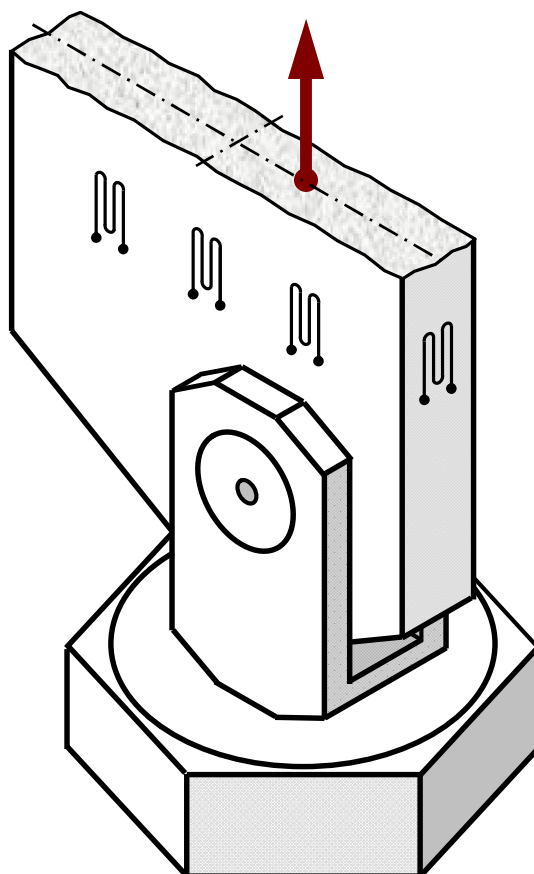


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА "СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе



Волгоград 2016

УДК 539.38 (075)

Рецензент
доцент кафедры «Технология материалов» ВолгГТУ
канд. техн. наук *В. Ф. Даненко*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Исследование внецентренного растяжения: метод. указания / сост.
В. П. Багмутов, О. В. Кондратьев, А. С. Столярчук. – Волгоград:
ИУНЛ ВолгГТУ, 2016. – 13 с.

В работе описана методика расчета нормальных напряжений в различных точках поперечного сечения при внецентренном растяжении, а также методика построения ядра сечения. Описана процедура экспериментальной проверки теоретической формулы для расчета напряжений.

Приводится список рекомендуемой литературы, вопросы для контроля знаний студентов (вопросы для самопроверки), а также правила по технике безопасности при проведении лабораторного исследования.

Указания предназначены для студентов различных форм обучения при изучении курсов прикладной механики и сопротивления материалов.

©Волгоградский государственный
технический университет, 2016

Учебное издание

Вячеслав Петрович **Багмутов**

Олег Викторович **Кондратьев**

Александр Станиславович **Столярчук**

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе

Темплан 2016 г. (учебно-методическая литература). Поз. № 215.

Подписано в печать 2016 г. Формат 60×84 1/16. Бумага газетная.

Гарнитура Times / печать офсетная. Усл. печ. л. 1.

Тираж 10 экз. Заказ .

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 7.

Цель работы. Экспериментально проверить формулу для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (или сжатии) бруса. Установить связь эпюры распределения нормальных напряжений по поперечному сечению с точкой приложения внешней силы. Построить ядро сечения.

1. Теоретическая часть

Наряду с простыми видами сопротивления: растяжением ($N \neq 0$), сдвигом ($Q \neq 0$), изгибом ($M \neq 0$) и кручением ($T \neq 0$) в инженерной практике чаще встречаются случаи приложения нагрузок, при которых в поперечных сечениях возникают различные сочетания перечисленных выше внутренних усилий. Имеет место **сложное сопротивление**. В зависимости от комбинации внутренних усилий сложное сопротивление условно подразделяют на конкретные варианты. Наиболее распространенными на практике являются следующие комбинации:

- изгиб кривой и пространственный;
- изгиб с растяжением;
- изгиб с кручением;
- кручение с растяжением и некоторые другие.

Изгиб с растяжением – вариант сложного сопротивления, при котором на брус действуют не только продольные, но и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса.

В этом случае в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: действующие в двух плоскостях изгибающие моменты M_z и M_y , кроме того поперечные силы Q_z и Q_y , а также продольная сила N . Таким образом, возникает сложный изгиб с растяжением или сжатием.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил Q_z и Q_y (для «длинных балок» с отношением $l/h > 10$ их влияние на прочность и деформируемость незначительно), можно считать напряженное состояние в опасных точках материала линейным, а поэтому перейти к более простому случаю – внецентренному растяжению.

Внецентренное растяжение – частный случай изгиба с растяжением, при котором брус растягивается внешними силами, параллельными геометрической оси бруса так, что их равнодействующая не совпадает с осью, а проходит через точку P (полюс силы) на некотором расстоянии от центра тяжести сечения.

1.1. Внутренние усилия и напряжения

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях бруса, определяют как обычно *методом сечений* (см. рис. 1; реакции в опоре условно не показаны). Рассекают тело в произвольном сечении x

(рис. 1, а), **О**тбрасывают одну из частей (левую по рисунку), **З**аменяют действие отброшенной части внутренними усилиями (рис. 1, б) и, рассматривая условия равновесия оставшейся части бруса, составляют шесть **У**равнений статики: три проекции главного вектора и три проекции главного момента внутренних усилий на оси координат.

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N = F; \quad \sum M_x = 0; \quad T = 0; \\ \sum Y = 0; \quad Q_y = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = F \cdot z_P; \\ \sum Z = 0; \quad Q_z = 0; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = F \cdot y_P. \end{aligned}$$

Здесь y_P, z_P – координаты полюса P – точки приложения внешней силы F .

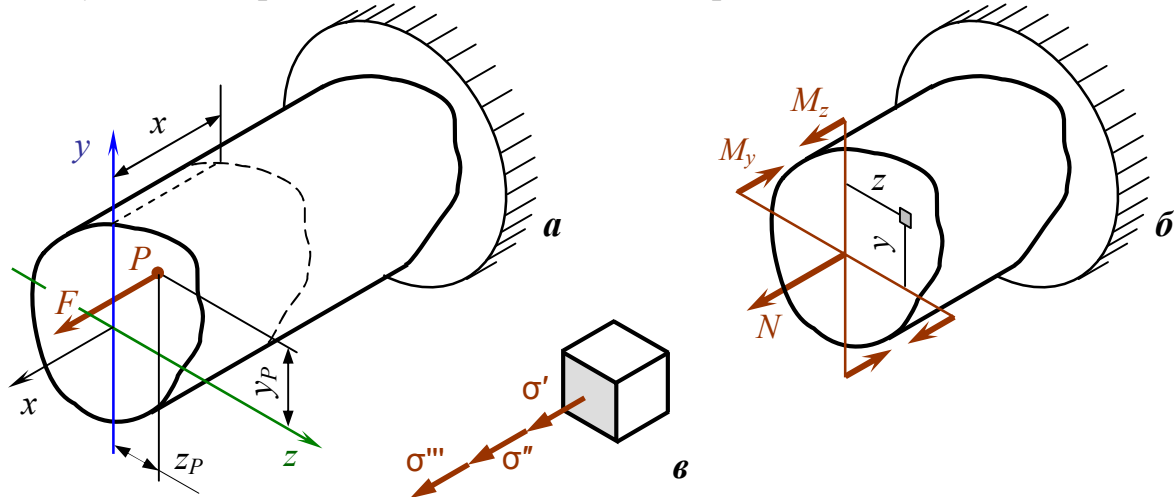


Рис. 1

Таким образом, возникает растяжение, а также изгиб в двух плоскостях. Отличны от нуля три внутренних усилия (рис. 1, б), от которых образуются нормальные напряжения σ', σ'' и σ''' , действующие по одной из трех пар граней «элемента объема» (рис. 1, в; на противоположной грани элемента напряжения условно не показаны). Две другие пары граней свободны от напряжений. То есть, имеет место **линейное напряженное состояние**. Принимая принцип суперпозиции, напряжения в произвольной точке (в элементе объема) можно представить как сумму трех слагаемых

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (1)$$

В расчетах на прочность необходимо определять положение *опасных точек*, в которых действуют наибольшие напряжения. Для этого подставим в формулу (1) вместо y и z координаты наиболее удаленных от нейтральной линии точек: y_{\max} ; z_{\max} (см. пункт 1.2 на с. 6). Учитывая $J_z/y_{\max} = W_z$ и $J_y/z_{\max} = W_y$ (W – моменты сопротивления сечения относительно соответствующей оси), запишем условие допуска к эксплуатации, которое часто не совсем корректно называют «условием прочности», в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2)$$

Подставляя значения внутренних усилий в формулу (1), а также умножив и разделив знаменатель на площадь поперечного сечения A , получим:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_P \cdot y}{A \cdot J_z / A} + \frac{F \cdot z_P \cdot z}{A \cdot J_y / A}.$$

Учитывая $i^2 = \frac{J}{A}$ – квадрат радиуса инерции сечения, определим напряжение в произвольной точке поперечного сечения с координатами z и y :

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (3)$$

Поскольку возникает линейное напряженное состояние (ЛНС), то расчетное напряжение [формулы (1), (3)] является либо первым, либо третьим главным напряжением. Знак напряжения зависит и от знаков координат исследуемой точки бруса, и от знака внешней силы. *Применение гипотез прочности (при расчете на прочность) в случае ЛНС не нужно!*

О правиле знаков внутренних усилий. Формула (1) выведена для случая положительных значений как внутреннего усилия N , так и изгибающих моментов M_z, M_y , вызывающих растягивающие напряжения в точке, принадлежащей первой четверти системы координат ($z > 0, y > 0$). Поэтому *оси координат поперечного сечения бруса следует назначать так, чтобы полюс P (точка приложения силы) находился в первом квадранте*. Если сила, приложенная к брусу, сжимающая, то ее числовое значение берется со знаком минус.

Анализ формулы (3).

1. Отсутствие в формуле координаты x свидетельствует о неизменности напряжений вдоль геометрической оси бруса.

2. В случае приложения внешней силы в центре тяжести торцевого сечения ($z_P = 0, y_P = 0$), напряжения в каждой точке любого сечения одинаковы и равны $\sigma = F/A$, то есть центральное растяжение является частным случаем внецентренного.

3. Переменные z, y входят в формулу в первой степени, следовательно, функция является уравнением прямой; нормальные напряжения распределяются по линейному закону, а значит должна быть «нейтральная линия» (НЛ), на которой напряжения отсутствуют (равны нулю).

1.2. Уравнение нейтральной линии

Нейтральная линия (или **нейтральная ось**) – геометрическое место точек, в которых нормальные напряжения в поперечном сечении бруса равны нулю.

Приравняв нулю правую часть уравнения (3), и полагая $F/A \neq 0$ (**н о д у м а й т е** – почему?), получим уравнение НЛ в виде

$$1 + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение к форме уравнения прямой в отрезках

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1,$$

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой линией на осях координат (y, z). В нашем случае уравнение нейтральной линии, будет записано:

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_P}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_P}\right)} = 1. \quad (4)$$

Свободный член полученного уравнения не равен нулю, следовательно, **нейтральная линия через начало координат не проходит!** Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и z , соответственно равны:

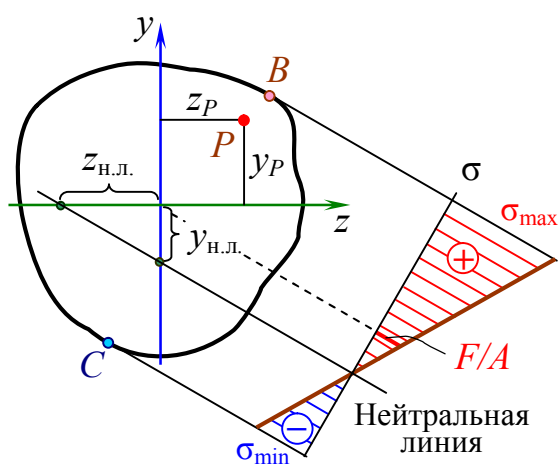


Рис. 2

$$y_{\text{н.л.}} = -\frac{i_z^2}{y_P}; \quad z_{\text{н.л.}} = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (5)$$

По найденным значениям отрезков проводят нейтральную линию и находят наиболее удаленные от нее точки (рис. 2, точки B и C), проводя касательные к сечению параллельные НЛ прямые. Так находят «опасные точки» (точки с наибольшими по модулю напряжениями).

Уравнения (5), связывающие координаты полюса P – точки приложения внешней нагрузки с положением нейтральной линии, являются гиперболическими функциями. Чем ближе полюс P к центру тяжести сечения (y_P, z_P меньше), тем нейтральная линия проходит дальше от сечения, а «в пределе» стремится к бесконечности. И наоборот – по мере удаления точки приложения силы от центра тяжести нейтральная линия асимптотически приближается к нему. Однако пересечь центр тяжести нейтральная

линия не может [см. анализ формулы (3)]. Подставив в выражение (3) координаты центра $y_{\text{цт}} = 0$ и $z_{\text{цт}} = 0$, получим $\sigma_{\text{цт}} = F/A$ (см. рис. 2).

Иногда нейтральная линия может разделить поперечное сечение на области, в которых действуют напряжения разных знаков (рис. 2). Некоторые материалы (чугун, силумин, керамика, кирпичная кладка при строительстве дома) хорошо сопротивляются сжатию и плохо – растяжению. Поэтому в случае сжимающей нагрузки необходимо уметь определять ту ограниченную область ее приложения, для которой во всем поперечном сечении не возникнут опасные растягивающие напряжения. Эту ограниченную область (часть всего сечения) называют «ядром сечения».

1.3. Ядро сечения

Ядро сечения – ограниченная область вокруг центра тяжести поперечного сечения бруса, при приложении нагрузки в которой напряжения во всем поперечном сечении имеют один знак.

Контур ядра сечения строят путем окатывания нейтральной линией границ всего поперечного сечения, не пересекая его. То есть решают задачу обратную той, в которой определяли положение нейтральной линии: куда следует прикладывать силу, чтобы нейтральная линия не пересекала контур сечения, а только касалась его. Для решения обратной задачи преобразуют формулы (5) к виду (6). Далее – задают не-

$$y_{\text{я}} = y_P = -\frac{i_z^2}{y_{\text{н.л.}}}; \quad z_{\text{я}} = z_P = -\frac{i_y^2}{z_{\text{н.л.}}}. \quad (6)$$

сколько положений нейтральной линии, касательной к сечению (например, н.л.1, н.л.2, н.л.3 на рис. 3); для каждого положения НЛ определяют по две координаты точек их пересечения с осями ($z_{\text{н.л.1}}, y_{\text{н.л.1}}; z_{\text{н.л.2}}, y_{\text{н.л.2}}; z_{\text{н.л.3}}, y_{\text{н.л.3}}$). Затем по формулам (6) определяют координаты точек контура ядра сечения (точки 1; 2; 3).

Соединив, найденные точки (с координатами $y_{\text{я}}$, $z_{\text{я}}$) получают контур ядра. Таким образом, **контур ядра сечения – геометрические место точек приложения внешней силы, при котором нейтральная ось окатывается вокруг сечения, не пересекая его.** Следовательно, напряжения во всем сечении имеют один знак.

Обратите внимание: ней-

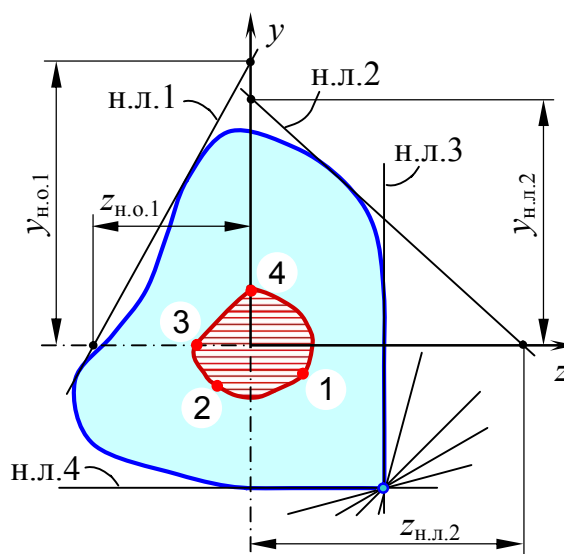


Рис. 3

ральная линия и полюс P лежат по разные стороны от начала координат [в формулах (5) и (6) знак минус перед дробью]. Кроме того, вращению нейтральной линии вокруг угловой точки сечения (на рисунке, для примера, показан ряд последовательных положений: переход от н.л.3 к н.л.4) соответствует прямолинейный участок контура ядра сечения (отрезок между точками 3 и 4).

1.4. Влияние эксцентриситета приложения силы на распределение напряжений при внецентренном растяжении

Применительно к настоящей лабораторной работе, когда точка приложения силы F лежит на оси z поперечного сечения бруса (рис. 4), то есть $y_P = 0$, формула (3) принимает более простой вид:

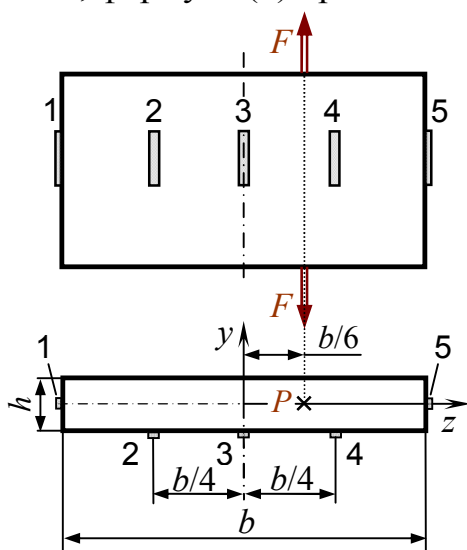


Рис. 4

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} \right).$$

В этом случае напряжения оказываются функцией только одного аргумента (z). Отсюда вытекает вывод: эпюру напряжений строят вдоль оси z .

Наглядное представление о влиянии эксцентриситета (отклонения от центра) на величину максимальных напряжений дает рисунок 5. При центральном приложении нагрузки составляющая от изгибающего момента пропадает; имеет место частный случай – осевое растяжение. По мере увеличения эксцентриситета ($a < b < c$) увеличивается вклад напряжений от изгибающего момента. С одной стороны образца (левой по рисунку) результирующие напряжения уменьшаются (складываются составляющие с разными знаками), но с другой – растут. Напряжения в центре тяжести сечения остаются неизменными: $\sigma = F/A$.

Таким образом, внецентренное приложение силы всегда приводит к увеличению наибольших напряжений, по сравнению с центральным. Для симметричного сечения, используемого в работе, когда нейтральная линия касается контура сечения (рис. 5, в), превышение напряжений достигает двукратного по сравнению с осевым растяжением (р а с с м о т р и т е подобные треугольники на эпюре σ_x). В этом случае сила приложена на контуре ядра сечения.

Если силу приложить за пределами контура ядра сечения (рис. 5, г), то нейтральная линия пересекает сечение, возникают напряжения разных знаков, а максимальное напряжение на периферии становится еще больше.

Если силу приложить за пределами контура ядра сечения (рис. 5, г), то нейтральная линия пересекает сечение, возникают напряжения разных знаков, а максимальное напряжение на периферии становится еще больше.

Вывод: внецентренное приложение силы опаснее осевого!

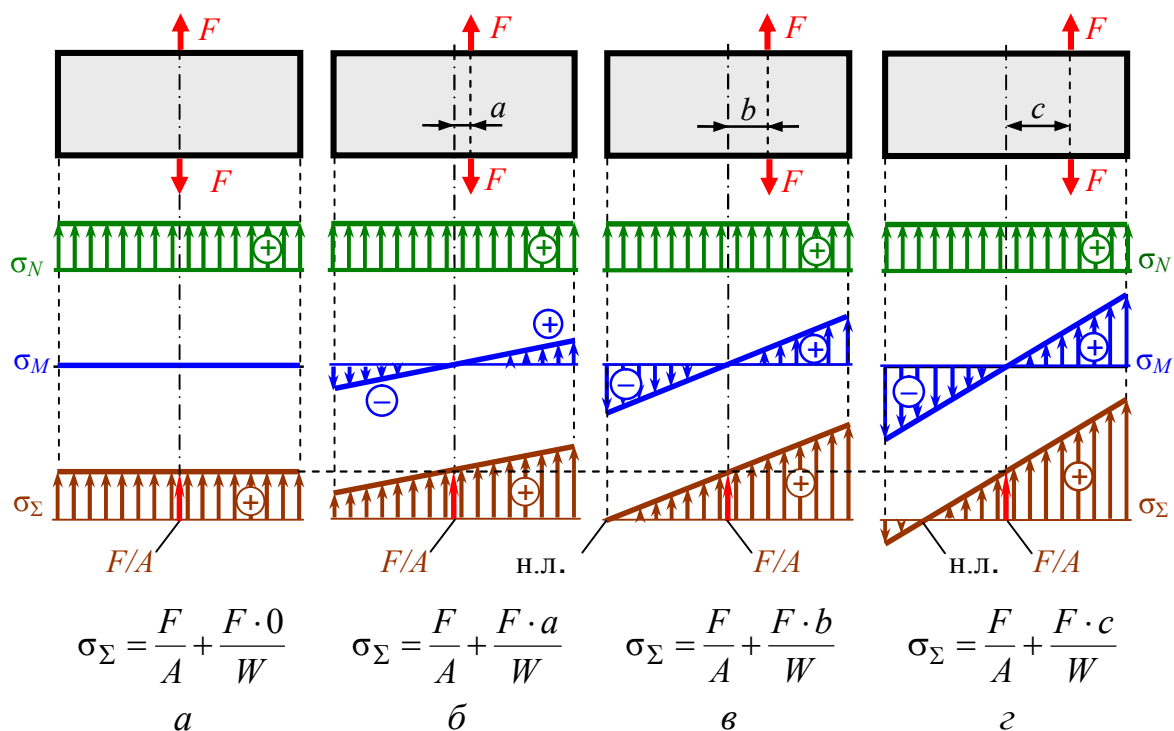


Рис. 5

2. Испытательное оборудование, образец

Нагружение внецентренным растяжением проводят на испытательной машине с механическим приводом УМЭ-10ТМ (г. Армавир, Россия).

Исследование выполняют на стальном образце прямоугольного поперечного сечения размерами $b \times h = 150 \times 15$ мм, на поверхности которого наклеены тензодатчики омического сопротивления для измерения деформаций (рис. 6). Определение деформаций проводится с помощью прибора ИДЦ-1 (индикатор деформаций цифровой).

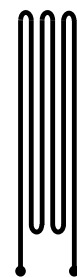


Рис. 6

3. Проведение эксперимента и обработка опытных данных

Для измерения деформаций включить прибор ИДЦ-1 в электросеть и дать ему «прогреться» не менее 10 мин.

Показания прибора, вычисление приращений показаний и напряжений Таблица 1

Нагрузка, Н	Датчик 1		Датчик 2		Датчик 3		Датчик 4		Датчик 5	
	n_1	Δn_1	n_2	Δn_2	n_3	Δn_3	n_4	Δn_4	n_5	Δn_5
5000										
50 000										
Напряже- ние, МПа										

Приложить к образцу предварительную нагрузку и снять показания прибора n_i для измерения деформаций в каждой из пяти точек.

Последовательно проделать то же самое при максимальной нагрузке. Данные занести в табл. 1.

Определить приращение показаний Δn_i каждого датчика. Экспериментальные напряжения определить по закону Гука, записанному для линейного напряженного состояния (**вспомните** – почему *линейного*?)

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i = E \cdot \Delta n_i \cdot K,$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль нормальной упругости материала образца, выполненного из стали; K – цена деления прибора, то есть коэффициент, связывающий приращение показаний Δn прибора с относительной деформацией ε в конкретной точке образца (указан на рабочем месте).

4. Рекомендации по оформлению отчета

- В теоретической части отчета дайте определение основным понятиям: *внецентренное растяжение, нейтральная линия* и др. Опишите – какие внутренние усилия и напряжения возникают в этом частном случае сложного сопротивления; какой вид напряженного состояния (и почему) имеет место?
- В расчетной части запишите формулу (3) в упрощенном виде (см. пункт 1.4; стр. 8) для определения напряжений в произвольной точке поперечного сечения лабораторного образца. Приведите в символьном виде (в общем виде) значения площади и радиуса инерции сечения, входящих в эту формулу.
- В расчетной части, пользуясь рисунком 5, запишите в символьном виде координаты пяти исследуемых точек сечения $z_1 \dots z_5, y_1 \dots y_5$ и полюса силы z_P, y_P .
- В символьном виде найдите напряжения в пяти точках сечения. Оцените, во сколько раз наибольшее напряжение на периферии превышает напряжение в центре тяжести сечения (анализ делайте в общем виде)?
- Подставьте числовые значения приложенной силы F и размеров b, h образца в записанные ранее формулы; сделайте вычисления. Результаты расчетов занесите в соответствующую таблицу протокола.
- Постройте эпюру напряжений по теоретическим значениям. На эту эпюру нанесите точки, соответствующие экспериментально найденным напряжениям. Определите степень их отклонения (в процентах) от теоретических значений. Покажите – как проходит нейтральная линия.
- Выполнив расчеты, постройте ядро сечения. Оцените, какова форма (геометрическая фигура) ядра сечения и его доля от всего поперечного сечения образца.
- Сделайте выводы: а) о соотношении наибольших напряжений при осевом и внецентренном растяжении; б) о величине отклонения экспери-

ментальных данных от результатов теоретического расчета; в) о форме и относительных размерах ядра сечения; г) о положении нейтральной линии относительно сечения.

5. Правила по технике безопасности

- ◆ Запрещено приступать к работе на лабораторной установке до получения подробного инструктажа по технике безопасности от преподавателя и росписи в журнале по ТБ.
- ◆ Разрешается проводить испытания только с участием преподавателя.

6. Вопросы для самопроверки

1. Назовите внутренние усилия, возникающие при внецентренном растяжении (сжатии).
2. Какой принцип положен в основу вывода формулы для нормальных напряжений при внецентренном растяжении?
3. Перечислите напряжения в поперечных сечениях бруса при его внецентренном растяжении, возникающие от различных внутренних усилий.
4. На схеме элементарного объема материала образца покажите действующие по его граням напряжения; установите вид напряженного состояния, возникающего при внецентренном растяжении (сжатии).
5. Выведите формулу для расчета нормальных напряжений при внецентренном растяжении бруса.
6. Какой вид принимает формула для нормальных напряжений, если точка приложения силы находится на одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения?
7. Получите формулу для определения напряжения в центре тяжести поперечного сечения для бруса, подверженного внецентренному растяжению. Проведите анализ этой формулы.
8. Запишите уравнения нейтральной линии в отрезках при внецентренном растяжении.
9. Если нейтральную линию приближать к центру поперечного сечения, то в каком направлении при этом станет перемещаться точка приложения силы? Почему?
10. Может ли нейтральная линия проходить за границей поперечного сечения (не пересекая его)? Если может, то где при этом находится точка приложения силы?
11. Если нейтральную линию удалять в бесконечность, то куда стремится точка приложения силы? Как называют такой случай нагружения?

12. Если нейтральная линия вращается в плоскости поперечного сечения вокруг неподвижной точки, то как при этом перемещается точка приложения силы?
13. Определите графически напряжения в любой точке поперечного сечения бруса, если дана эпюра нормальных напряжений.
14. Будут ли изменяться напряжения в точках поперечного сечения на линии, параллельной нейтральной линии?
15. Каким образом можно найти наиболее напряженные (наиболее опасные!) точки поперечного сечения бруса, испытывающего внецентренное растяжение?
16. По какому закону распределяются нормальные напряжения в плоскости поперечного сечения? Является ли эта зависимость функцией одного аргумента или нет?
17. Могут ли в некоторых областях поперечного сечения при внецентренном *сжатии* бруса возникать *растягивающие* (то есть *положительные*) напряжения? Если могут, то почему?
18. Остается ли справедливой гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) при внецентренном растяжении?
19. Возникают ли касательные напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении?
20. Возникают ли касательные напряжения при внецентренном растяжении в сечениях, наклоненных под углом 45° к геометрической оси бруса? Если да, то чему они равны? [Для ответа на этот вопрос вспомните – какой вид напряженного состояния здесь имеет место].
21. Дайте определения понятиям *ядро сечения* и *контур ядра сечения*.
22. Если точка приложения внецентренной силы будет перемещаться по прямолинейному участку контура ядра сечения, то как при этом будет вести себя нейтральная линия?
23. Какую форму имеет ядро сечения для прямоугольника, квадрата, кольца, двутавра, швеллера? Приведите объяснения, рассуждая теоретически (без вычислений).
24. В какой характерной точке, при выполнении данной лабораторной работы, была приложена сила к образцу и в каких точках поперечного сечения измеряли деформации?
25. С помощью какого прибора определяли деформации (по которым затем вычисляли напряжения) при выполнении настоящей лабораторной работы? Приведите основные технические данные прибора.
26. Объясните физический принцип измерения деформаций с помощью

тензодатчиков омического сопротивления (тензорезисторов).

27. Нарисуйте схему тензорезистора и укажите его элементы. [По вопросам №№ 25...27 см. метод. указания к лабор. работам: «Упругие свойства металлов», 2011; «Исследование плоского поперечного изгиба балки», 2014 – ВолгГТУ, Волгоград].

Список рекомендуемой литературы

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. *Дарков, А. В.* Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
3. *Костенко, Н. А.* Сопротивление материалов: учеб. пособие / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская и др. – М.: Высш. шк., 2000. – 430 с.
4. *Водопьянов, В. И.* Краткий курс сопротивления материалов: учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев; ВолгГТУ. – Волгоград, 2006. – 84 с.
5. *Багмутов, В. П.* Сопротивление материалов. Конспект лекций, тетрадь вторая: учеб. пособие / В. П. Багмутов, И. Н. Захаров. – 2-е изд. перераб.; ВолгГТУ. – Волгоград, 2015. – 78 с.