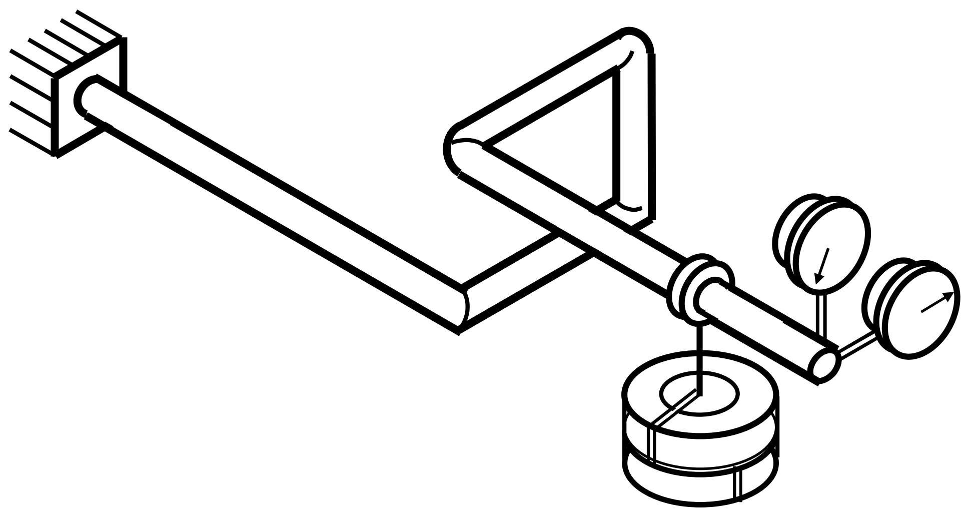
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе



Волгоград 2017

УДК 539.37 (проверить)

Р е ц е н з е н т
канд. техн. наук, доцент *С. Н. Паршев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Энергетический метод определения перемещений: метод. указания / сост. О. В. Кондратьев, А. А. Седов. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2017. – 12 с.

Изложена методика экспериментального и аналитического определения перемещений сечения в пространственном ломаном брусе. Для аналитического расчета используется способ Максвелла-Мора. Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы студентами, изучающими курс «Сопротивление материалов».

Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

© Волгоградский государственный
технический университет, 2017

Учебное издание

Олег Викторович **Кондратьев**
Александр Александрович **Седов**

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Методические указания к лабораторной работе

Темплан 2017 г. (учебно-методическая литература). Поз. 141

Подписано в печать ____.____.2017 г. Формат 60 х 84 1/16
Бумага офсетная. гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,16
Уч.- изд. л. Тираж 10 экз. Заказ .
Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, просп. Ленина, 28, корп. 1

***Цель работы**: экспериментальная проверка теоретической формулы для определения перемещений в упругой системе энергетическим методом по способу Максвелла-Мора.*

1. Постановка задачи. Программа исследования

Умение вычислять перемещения различных сечений конструкций необходимо во многих случаях. Это – оценка жесткости конструкции при статическом нагружении, исследование колебаний упругих систем, расчет конструкций при ударном приложении нагрузок. На основе определения деформаций разработаны методы определения опорных реакций и внутренних силовых факторов в статически неопределимых системах.

Перемещения в равновесных статически нагруженных упругих системах довольно просто определить с использованием энергетического метода [1, 2]. Этот метод является универсальным. С его помощью можно вычислять перемещения не только в простых конструкциях типа стержень, вал, балка, но и в сложных, типа плоских и пространственных рам, пространственных ломаных брусьев. Рассчитываемая конструкция может быть загружена любой системой внешних сил, а геометрическая ось – иметь прямолинейную или изогнутую форму.

Энергетический метод базируется на двух принципах: начале возможных перемещений и законе сохранения энергии. Применительно к упругим системам принцип «начало возможных перемещений» формулируется так: ***если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точки системы равна нулю***. Закон сохранения энергии для таких систем при статическом приложении нагрузки отражает ***равенство потенциальной энергии упругой деформации, накапливаемой в деформируемом теле, и работы, совершаемой внешними силами на его деформирование***.

На основе последнего принципа разработан широко применяемый в инженерной практике способ Ма̀ксвелла-Мора. Разработан он Д. К. Максвеллом в 1864 г., а в расчетную практику введен О. Т. Мором в 1874 г. Метод является разновидностью теоремы К. А. Кастильяно*, согласно которой ***частная производная от потенциальной энергии U деформации тела по какой-либо внешней силе Ф равна перемещению δ точки приложения этой силы по направлению ее действия***

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi}. \qquad (1)$$

* **Джеймс Клерк Ма́ксвелл** (*James Clerk Maxwell*; 1831 – 1879) – британский физик и математик. Член Лондонского королевского общества (1861).
Христиан Отто Мор (*Christian Otto Mohr*; 1835 – 1918) — немецкий инженер и ученый в области теоретической механики и сопротивления материалов.
Карло Альберто Кастильяно (*Castigliano C. A.* 1847 – 1884) – итальянский механик и инженер.

В настоящей лабораторной работе выполняется экспериментальная проверка теоретически разработанного энергетического метода определения перемещений. Поставленная задача решается двумя путями:

– определением перемещения *непосредственным замером* с помощью измерительного инструмента на лабораторной установке;

– *теоретическим расчетом* по способу Максвелла-Мора в той же точке и том же направлении.

2. Оборудование, приборы

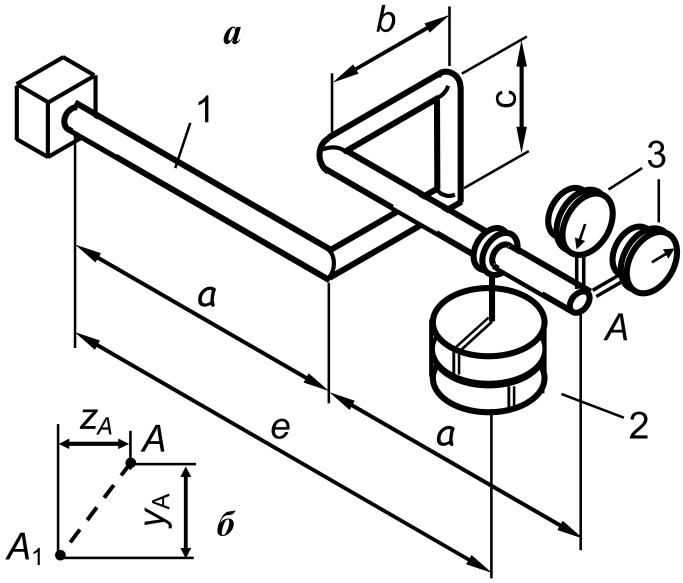


Рис. 1. Вид (*а*) испытательной установки и схема (*б*) измерения составляющих перемещения свободного конца *A* образца

Испытуемый образец 1 представляет собой пространственный ломаный брус постоянного по длине поперечного сечения. Один из концов бруса защемлен. Нагружение бруса осуществляется сосредоточенной силой посредством грузов 2, уложенных на каретке, положение которой можно изменять. Перемещение свободного конца *A* бруса регистрируется двумя индикаторами 3 часового типа, один из которых измеряет горизонтальную составляющую перемещения z_A, а другой – вертикальную y_A (ось x – продольная).

Таблица 1

Основные данные испытательной установки

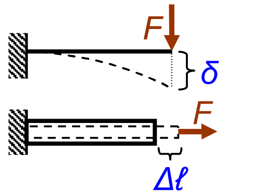
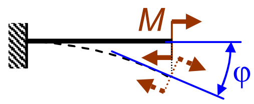
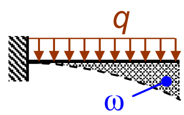
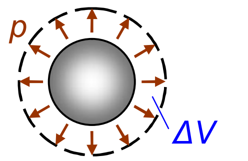
Длины участков	a, мм	325
	b, мм	200
	c, мм	150
	e, мм	(задается преподавателем)
Поперечное сечение – кольцо	Наружный диаметр D, мм	26
	Внутренний диаметр d, мм	20

3. Теоретическое решение задачи

Напомним, изложенные в теоретическом курсе понятия обобщенной силы и обобщенного перемещения.

Обобщенной силой *называют* <u>*силовой*</u> *фактор, который удобно выделить особо при рассмотрении потенциальной энергии деформации упругой системы.*

Обобщенным перемещением *называют деформационный фактор, который будучи умноженным на соответствующую обобщенную силу, дает величину с размерностью работы.*
Некоторые примеры обобщенных сил и соответствующих им перемещений

Обобщенная сила	Обобщенное перемещение	Работа W действия силы	Схема
Сосредоточенная сила F, Н	Линейное: прогиб δ, удлинение $\Delta\ell$, м	Н·м	
Моменты: изгибающий M, крутящий T, Н·м	Угловое: углы поворота и закручивания φ, рад	Н·м	
Распределенная по длине нагрузка q, Н/м	Площадь, описываемая деформированной балкой ω, $м^2$	Н·м	
Распределенная по площади (давление) p, $Н/м^2$	Изменение объема ΔV, $м^3$	Н·м	

По способу Максвелла-Мора упругая система рассматривается в *двух* состояниях: *действительном (или грузовом)* – нагруженном всеми внешними силами, *фиктивном (или единичном)* – нагруженном только единичным обобщенным силовым фактором, соответствующим искомому перемещению. Соответствие должно быть по *трем* пунктам:

а) разновидности прикладываемого силового фактора (изгибающий момент, сосредоточенная сила);

б) точке его приложения (в данной лабораторной работе – сечения, где установлены измерительные приборы);

в) направлению действия (горизонтальное, вертикальное).

Напомним, линейному перемещению соответствует сосредоточенная сила ($F_1 = 1$), угловому – момент (пара сил $M_1 = 1$). Единичный силовой фактор (в любом случае – величина безразмерная) прикладывают в точку, перемещение которой требуется найти. Направление единичного силового фактора (силы или момента) соответствует направлению искомого перемещения.

В общем случае число слагаемых интеграла Максвелла-Мора для определения перемещения δ равно числу видов внутренних усилий: трем моментам и трем силам. Интеграл Максвелла-Мора записывают так:

$$\delta = \sum \int_s \frac{M_z\, M_{1z}}{E\, J_z} \mathrm{d}s + \sum \int_s \frac{M_y\, M_{1y}}{E\, J_y} \mathrm{d}s + \sum \int_s \frac{T\, T_1}{G\, J_\kappa} \mathrm{d}s + \\ + \sum \int_s \frac{N\, N_1}{E\, A} \mathrm{d}s + \sum \int_s \frac{Q_z\, Q_{1z}}{G\, A} \mathrm{d}s + \sum \int_s \frac{Q_y\, Q_{1y}}{G\, A} \mathrm{d}s, \tag{2}$$

где M_z, M_y, T – изгибающие и крутящий моменты в произвольном поперечном сечении каждого участка системы, возникающие от внешних нагрузок, действующих на упругую систему только до этого сечения рассматриваемого участка [3];

N, Q_z, Q_y – осевое и поперечные внутренние усилия в том же сечении каждого участка;

M_{1z}, M_{1y}, T_1, N_1, Q_{1z}, Q_{1y} , – внутренние усилия, вызванные действием единичного силового фактора в тех же произвольных поперечных сечениях;

J_z, J_y, $J_к$, A – геометрические характеристики поперечного сечения бруса ($J_{\text{к}}$ – момент инерции при кручении; для сечения в форме круга $J_{\text{к}} = J_p$);

E, G – модули нормальной и касательной упругости материала бруса;

s – протяженность участка бруса, в пределах которого производится интегрирование; в общем произвольном случае s – длина дуги; в брусе с прямолинейной осью в качестве s принимают длину участка ℓ, а протяженность элементарного участка $\mathrm{d}s \equiv \mathrm{d}x$;

В практических расчетах балок, пространственных и плоских рам последними тремя слагаемыми приведенной формулы обычно пренебрегают, поскольку их вклад в общую сумму на два-три порядка меньше, чем от первых трех. Применительно к настоящей лабораторной работе интеграл Максвелла-Мора используют в виде

$$\delta = \sum \int_\ell \frac{M_z\, M_{1z}}{E\, J_z} \mathrm{d}x + \sum \int_\ell \frac{M_y\, M_{1y}}{E\, J_y} \mathrm{d}x + \sum \int_\ell \frac{T\, T_1}{G\, J_p} \mathrm{d}x, \tag{3}$$

где суммирование (Σ) производят по количеству участков. Напомним, границей участка может служить точка приложения силового фактора, изменение направления геометрической оси, изменение формы или размеров поперечного сечения.

Для аналитического определения перемещений в произвольной упругой системе рекомендуется следующий порядок.

1. Нарисовать действительную (грузовую) систему и загрузить ее *всеми* внешними нагрузками (рис. 2, *а*). Нарисовать фиктивную (единичную) систему, имеющую такие же размеры, форму и способы закрепления, как и действительная. Нагрузить фиктивную систему единичным силовым фактором (*одним*), соответствующим искомому перемещению (пример нагружения для определения горизонтального перемещения показан на рис. 2, *б*).

2. Определить внутренние усилия на всех участках грузовой системы; результат занести в табл. 2.
3. Определить внутренние усилия на всех участках единичной системы; результат занести в табл. 2.
4. Значения внутренних усилий подставить в интеграл Максвелла-Мора и решить его.

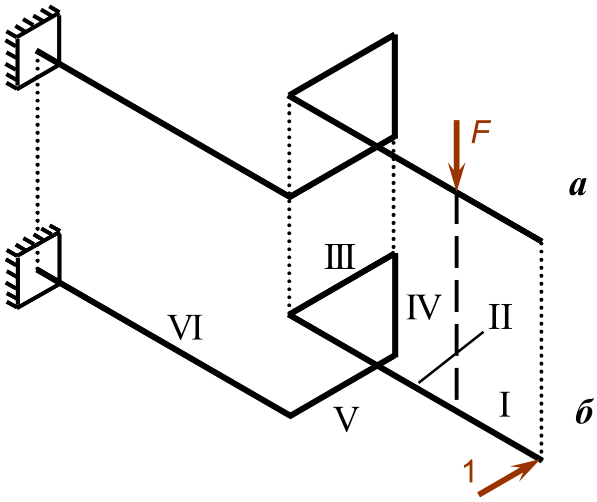


Рис. 2. Схема нагружения грузовой (*а*) и единичной (*б*) систем и разбиения их на участки для определения горизонтальной составляющей перемещения свободного конца бруса

При выполнении третьего и четвертого пунктов, необходимо учитывать, что ось x – продольная на всех участках. Момент относительно оси $\boldsymbol{x}$ является крутящим; относительно осей $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ – изгибающим. Знаменатели в интеграле Максвелла-Мора *соответствуют* разновидностям внутренних усилий и являются жесткостью при изгибе и кручении относительно соответствующих осей. Определяем внутренние усилия, размещая начало текущей системы координат в центре тяжести произвольного сечения каждого участка, двигаясь каждый раз от свободного конца бруса в сторону защемления.

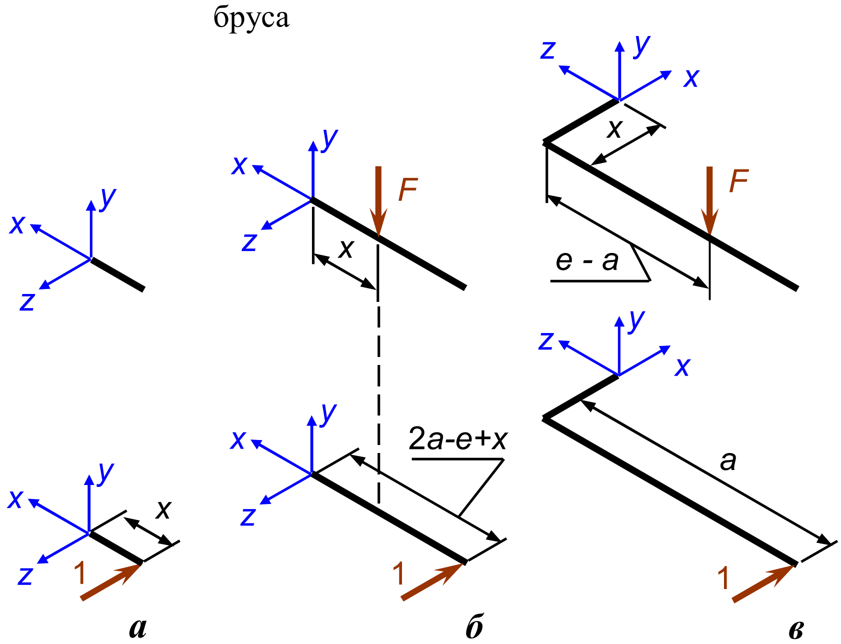


Рис. 3. Пример схем для определения внутренних усилий на первых трех участках ломаного бруса

В качестве примера покажем, как определять внутренние усилия на первых трех участках ломаного бруса. **Первый участок** (рис. 3, *а*). В грузовой системе в пределах участка внешних нагрузок нет. Следовательно, и внутренние усилия равны нулю. В единичной системе внешняя сила, равная **1**, пересекает ось x и параллельна оси z, следовательно, $M_{1x} = T_1 = 0$; $M_{1z} = 0$. Отличным от нуля является лишь $M_{1y} = 1 \cdot x_{\mathrm{I}}$.

Второй участок (рис. 3, *б*). В грузовой системе $M_x = T = 0$, так как сила F пересекает ось x; $M_y = 0$ поскольку ось y и сила F параллельны. Изгибающий момент относительно оси z: $M_z = -F \cdot x_{\mathrm{II}}$. В единичной системе $M_{1x} = T_1 = 0$; $M_{1z} = 0$. Отличным от нуля является $M_{1y} = 1 \cdot (e - a + x_{\mathrm{II}})$.

Третий участок (рис. 3, *в*). В грузовой системе отличными от нуля являются крутящий момент $M_x = T = F\cdot(e - a)$ и изгибающий момент в вертикальной плоскости $M_z = -F\cdot x_{III}$. В единичной системе только один момент отличен от нуля – в горизонтальной плоскости $M_{1y} = 1\cdot a$.

Замечание о знаках. Знаки моментов устанавливаются в соответствии с правилами, принятыми в сопротивлении материалов, однако для решения поставленной задачи не имеет значение, какое именно правило принято. Важно, чтобы оно для грузовой и единичной систем было единым хотя бы в пределах участка, поскольку под интегралом Максвелла-Мора *произведение* моментов.

Таблица 2

Внутренние усилия на участках бруса от внешней нагрузки и единичной силы

Внутр. усилия	I участок $\le x_I \le$	II участ. $\le x_{II} \le$	III участ. $\le x_{III} \le$	IV участ. $\le x_{IV} \le$	V участ. $\le x_V \le$	VI участ. $\le x_{VI} \le$
$M_x = T$						
M_y						
M_z						
$M_{1x} = T_1$						
M_{1y}						
M_{1z}						

Для удобства вычислений интеграла Максвелла-Мора полезно воспользоваться связью между геометрическими характеристиками $J_p = 2\cdot J_{oc}$ и упругими постоянными (принимая для стали $\mu = 0{,}25$)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0{,}25)} = 0{,}4\,E.$$

Тогда получим $G\cdot J_p = 0{,}8\,E\cdot J_{oc}$.

4. Применение способа (правила) Верещагина

Интеграл Максвелла-Мора можно решить как традиционным путем, так и графическим способом (предложен А. К. Верещагиным*). Способ решения интеграла графическим путем заключается в перемножении *площади* Ω *эпюры* изгибающего или крутящего момента, построенной для действительной системы на *ординату* M_{1C} *эпюры* фиктивной системы, взятую под центром тяжести площади эпюры действительной системы

* Верещагин Андрей Константинович (1896-1959) – физик. В 1924 г. будучи студентом МИИТ предложил правило для вычисления интеграла Максвелла-Мора.

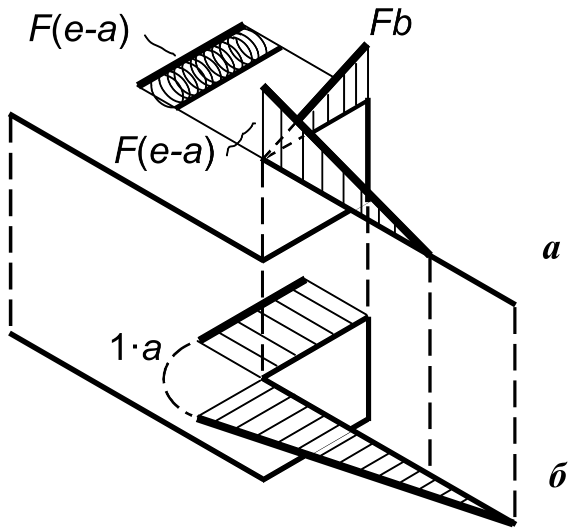


Рис. 4. Эпюры изгибающих и крутящих моментов для грузовой (*а*) и единичной (*б*) систем на первых трех участках ломаного бруса

$$\delta = \Sigma \frac{\Omega_M \cdot M_{1C}}{E \cdot J_{\text{ос}}} + \Sigma \frac{\Omega_T \cdot T_{1C}}{G \cdot J_p}. \qquad (4)$$

Эффект от применения способа особенно ощутим для систем, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости. Именно этими свойствами обладает рассматриваемый ломаный брус. Для таких систем удобно строить эпюры по характерным сечениям [4]. В качестве примера на рис. 4 приведены эпюры для первых трех участков. Эпюры изгибающих моментов построены на растянутой части бруса в плоскостях действия моментов; эпюра крутящего момента показана спиральной линией. Для приведенного на рис. 4 примера оба слагаемых формулы (4) равны нулю, поскольку эпюры изгибающих моментов в разных плоскостях, а крутящих моментов в единичной системе на рассматриваемых участках нет.

5. Экспериментальное решение задачи

Рекомендуется следующий порядок проведения эксперимента.

1. Установить каретку с гиревым подвесом в положение, определяемое заданным расстоянием «*е*».
2. Записать начальные показания индикатора для регистрации вертикальной или горизонтальной составляющей перемещения в соответствии с индивидуальным заданием.
3. Нагрузить образец принятым значением силы F; записать показания индикатора.
4. Установку разгрузить;
5. Найти составляющие перемещения в заданном направлении Δy_A или Δz_A, вычисляя разности показаний индикатора;
6. Результаты эксперимента занести в табл. 3.

Таблица 3

Показания индикаторов при определении перемещений

Нагрузка F, Н	Отсчеты по индикаторам и приращения отсчетов на каждую ступень нагружения, мм			
	y_A	Δy_A	z_A	Δz_A
0				
$F =$				

6. Выводы

Результаты аналитического и экспериментального определения составляющих перемещения свободного конца ломаного бруса занести в табл. 4. Сопоставить эти результаты и найти отклонение в процентах расчетного значения по сравнению с экспериментальным

$$\eta = \frac{\left|\delta_{A,\text{э}} - \delta_{A,\text{т}}\right|}{\delta_{A,\text{э}}} \cdot 100\,, \tag{5}$$

где индекс «т» означает теоретический расчет, а «э» – экспериментальное значение.

Сделать вывод о возможности применения энергетического метода расчета перемещений.

Таблица 4

Результаты определения перемещения свободного конца ломаного бруса

Горизонтальная составляющая перемещения z_A, мм			Вертикальная составляющая перемещения y_A, мм		
Эксперим.	Теоретич.	Расхождение	Эксперим.	Теоретич.	Расхождение

7. Вопросы для самопроверки

1. Почему энергетический метод определения перемещений является наиболее общим?
2. Запишите интеграл Максвелла-Мора и объясните смысл всех его элементов.
3. Объясните понятие «обобщенная сила», используемое при определении перемещений энергетическим методом.
4. Объясните понятие «обобщенное перемещение». Приведите примеры обобщенной силы и обобщенного перемещения.
5. По каким критериям устанавливаются границы участков бруса, рамы?
6. Какие состояния упругой системы необходимо рассмотреть для определения перемещений методом Максвелла-Мора?
7. Одинаковое ли количество участков должна иметь упругая система в действительном (грузовом) и фиктивном (единичном) состояниях при вычислении перемещений методом Максвелла-Мора? Если нет, то в каком состоянии больше? Любой вариант ответа объяснить.
8. Какие «обобщенные единичные силовые факторы» применяют при определении линейных и угловых перемещений методом Максвелла-Мора?

9. Укажите основные этапы вычисления перемещений методом Максвелла-Мора (приведите необходимые схемы). С какой целью в инженерной практике вычисляют перемещения в упругих системах?
10. Перечислите внутренние усилия, учитываемые в общем случае определения перемещений методом Максвелла-Мора.
11. Какие внутренние усилия достаточно учитывать при определении перемещений длинных брусьев?
12. Какие геометрические характеристики необходимо учитывать при определении перемещений методом Максвелла-Мора в общем случае?
13. Влияют ли упругие характеристики материала на величину перемещений?
14. Учитываются ли прочностные свойства материала при определении перемещений методом Максвелла-Мора?
15. Что означает знак «минус», полученный в результате расчета перемещений?
16. Перечислите способы определения перемещений, разработанные на основе энергетического метода.
17. В каких случаях для определения перемещений способ Верещагина целесообразно предпочесть остальным?
18. В чем отличие способа определения перемещений, предложенных Максвеллом и Мором, от способа, основанном на применении теоремы Кастильяно?
19. Требуется определить перемещение произвольного сечения внутри пролета балки. Какой из способов для решения этой задачи применить целесообразно, каким способам эта задача не под силу?

Примечания:

1. Бỏльшая часть приведенных выше вопросов используется преподавателем при отчете настоящей лабораторной работы.
2. Если затрудняетесь ответить на вопросы, смотрите литературные источники [1, 2].

8. Требования техники безопасности

1. Соблюдать осторожность при установке грузов на гиревой подвес. Падение грузов может привести к травме.
2. Грузы хранятся в специально отведенном месте экспериментальной установки. Запрещается класть грузы на другие места экспериментальной установки, а также столы, стулья.
3. Допускается работать на установке только одному экспериментатору.

9. Список рекомендуемой литературы

1. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. *Багмутов В. П.* Энергетические методы решения упругих систем: Учеб. пособие / В. П. Багмутов, С. Н. Паршев. – ВолгГТУ, Волгоград, 1997. – 41 с.
3. *Алхименков Т. Б.* Внутренние усилия: Методические указания к изучению курса «Сопротивление материалов» (контрольно-обучающий модуль 4) / ВолгПИ, Волгоград, 1988. – 28 с.
4. *Водопьянов В. И.* Эпюры внутренних силовых факторов (подготовка к тестированию): Учебное пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, З. П. Журкина. – ВолгГТУ, Волгоград, 2000. – 53 с.