

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА



**Цель работы.** Экспериментальное изучение явления потери устойчивости длинных сжатых стержней; проверка справедливости теоретических формул для определения критических нагрузок при различных способах закрепления концов стержня.

## ПОНЯТИЕ О ЯВЛЕНИИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЕ

В конструкциях и сооружениях большое применение находят детали, являющиеся относительно длинными и тонкими стержнями, у которых один или два размера поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. Поведение таких стержней под действием осевой сжимающей нагрузки оказывается принципиально иным, чем при сжатии коротких стержней.

Опыт показывает, что при достижении сжимающей силой  $F$  некоторой критической величины, равной  $F_{кр}$ , прямолинейная форма равновесия длинного стержня оказывается неустойчивой, и при превышении  $F_{кр}$  стержень начинает интенсивно искривляться (выпучиваться). При этом новым (моментным) равновесным состоянием упругого длинного стержня (при  $F > F_{кр}$ ) становится некоторая новая уже криволинейная форма. Это явление носит название **потери устойчивости**.



**Устойчивость** – способность тела сохранять положение или форму равновесия при сравнительно малых возмущающих воздействиях.

**Критическая сила ( $F_{кр}$ )** – нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной прямолинейной формы стержня.

Обычно потеря устойчивости системы сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или разрушением. Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность материала еще далеко не исчерпана. С момента наступления критического состояния до момента разрушения деформации системы нарастают крайне быстро, и практически нет времени принять меры по предотвращению грозящей катастрофы. Таким образом, при расчете на устойчивость критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность.

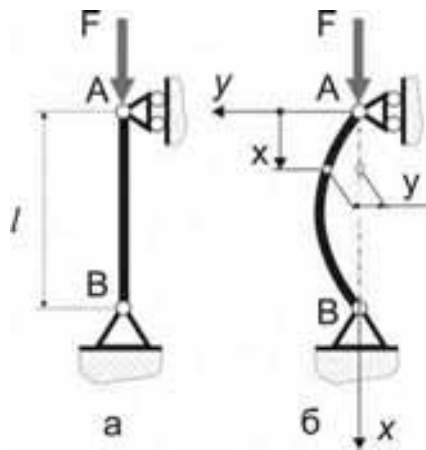
Поэтому наряду с анализом прочности и жесткости необходим анализ устойчивости конструкции. При этом условие устойчивости можно записать в следующем виде:

$$F_{\max} \leq F_{кр}, \quad (1)$$

или в напряжениях 
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{кр} = F_{кр} / A, \quad (2)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $F_{\max}$  – максимальное осевое усилие, действующее на стержень;  $\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение, возникающее в опасном сечении стержня.

**Вывод формулы Эйлера для критической силы.** При определении критической силы, вызывающей потерю устойчивости сжатого стержня, предполагается, что стержень идеально прямой и сила  $F$  приложена строго центрально. Рассматриваемый метод решения основан на том, что при достижении силой  $F$  критического состояния ( $F=F_{\text{кр}}$ ) стержень находится в безразличном состоянии и ему присущи две формы равновесия: прямолинейная и криволинейная (в таких случаях говорят, что происходит ветвление, или бифуркация, равновесных состояний).



**Рис.1.** Схема нагружения стержня осевой сжимающей силой

Для выявления криволинейной формы равновесия достаточно приложить к стержню малую поперечную возмущающую нагрузку  $Q$ , которая вызовет малый прогиб. Если  $F < F_{\text{кр}}$ , то при удалении  $Q$  стержень будет сохранять прямолинейную форму равновесия. Если  $F > F_{\text{кр}}$ , то равновесие стержня становится неустойчивым и сколь угодно малое возмущение достаточно для того, чтобы возникли большие прогибы. Задачу о критической нагрузке сжатого стержня с учетом возможности существования двух форм равновесия при одном и том же значении силы решил академик Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1744 году.

Рассмотрим шарнирно опертый по концам стержень сжатый продольной силой  $F$  (рис.1, а). Положим, что по какой-то причине стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в некотором его сечении появится изгибающий момент  $M$

$$M = -F \cdot y, \quad (3)$$

здесь  $y$  – прогиб стержня в произвольном сечении с координатой  $x$  (рис.1, б).

Для определения критической силы воспользуемся приближенным дифференциальным уравнением упругой линии:



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $J$  – осевой момент инерции сечения стержня;  $E \cdot J$  – жесткость стержня при изгибе. Знаки левой и правой части (4) согласованны в данной системе координат.

Подставив в это уравнение выражение для изгибающего момента (3), получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (5)$$

Введя обозначение

$$\frac{F}{E \cdot J} = k^2, \quad (6)$$

перепишем формулу (5) так:



$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0.$$

Общий интеграл однородного дифференциального уравнения представляется функцией

$$y = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx. \quad (7)$$

Это решение содержит три неизвестные: постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  и параметр  $k$ . Найдем эти величины из граничных условий – условий закрепления стержня по концам:

а) при  $x=0$  прогиб в опоре (точка А) должен быть равен нулю  $y=0$ , тогда из уравнения (7) получим, что  $C_2=0$ , при этом формула приобретает вид



$$y = C_1 \cdot \sin kx. \quad (8)$$

Уравнение (8) указывает на то, что при продольном изгибе изогнутая ось стержня может быть представлена как некоторое число волн синусоиды с амплитудой  $C_1$ .

б) при  $x=l$  прогиб в другой опоре (точка В) должен быть также равен нулю  $y=0$ , тогда из уравнения (8) получим, что  $C_1 \cdot \sin kl = 0$ . Исходя из постановки задачи, коэффициент  $C_1$  заведомо не равен нулю (иначе равен нулю прогиб балки во всех точках, что противоречит постановке задачи). В этом случае получаем

$$\sin kl = 0.$$

Из свойств синусоиды следует, что

$$k = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad (9)$$

где  $n$  – произвольное целое число ( $n \neq 0$ ), которое представляет собой число полу-волн синусоиды, укладываемых на длине изогнутой оси стержня.

Решая совместно уравнения (6) и (9), получим выражение для некоторых фиксированных значений сжимающей силы, при которых возможна криволинейная форма равновесия оси стержня

$$F = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}.$$

Как видим, минимальное значение критическая сила примет при  $n=1$  (на длине стержня укладывается одна полуволна синусоиды) и  $J=J_{\min}$  (стержень искривляется относительно оси с наименьшим моментом инерции)

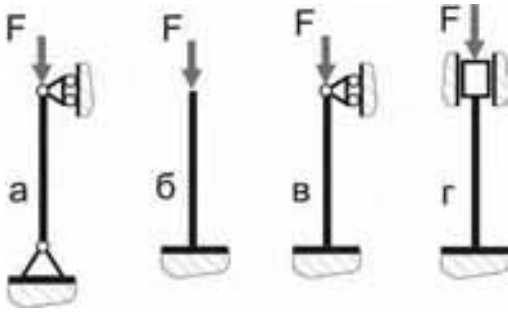


$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l^2}. \quad (10)$$

Это выражение обычно называют формулой Эйлера, а определяемую с ее помощью критическую силу – эйлеровой силой.

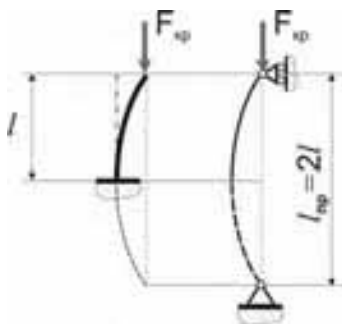
### **Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.**

Формула Эйлера была выведена для так называемого основного случая – в предположении шарнирного опирания стержня по концам (рис.1, рис.2, а). На практике встречаются и другие случаи закрепления стержня (см., например, рис.2, б–г). При этом можно получить формулу для определения критической силы для каждого из этих случаев, решая, как в предыдущем параграфе, дифференциаль-



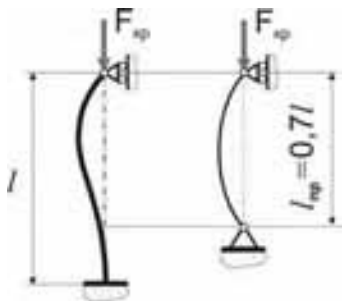
**Рис.2.** Характерные способы закрепления концов стержня при продольном изгибе

стержня по концам (рис.2, б, в, г), получим общую формулу для критической силы  $F_{кр}$ .



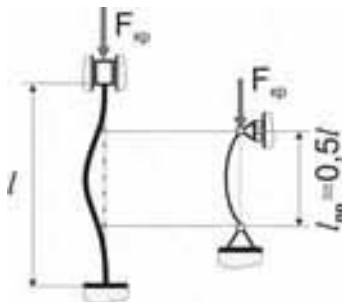
**1-й случай.** Стержень длиной  $l$  заделан одним концом и сжат продольной силой (рис.2, б). Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев вытекает, что ось стержня, заделанного одним концом, находится в тех же условиях, как и верхняя половина шарнирно опертого стержня длиной  $2 \times l$ . Таким образом, критическая сила для стержня длиной  $l$  с одним зашпеленным концом может быть найдена также как и для шарнирно опертой балки длиной  $2 \times l$ , то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(2 \cdot l)^2}. \quad (11)$$



**2-й случай.** Стержень длиной  $l$ , у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно оперт (рис.2, в). Здесь можем сделать вывод, что изогнутая часть стержня, находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной около  $0,7 \times l$ , то есть критическая сила может быть найдена так

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(0,7 \cdot l)^2}. \quad (12)$$



**3-й случай.** Стержень длиной  $l$ , у которого оба конца жестко заделаны (рис.2, г). Из сравнения вида изогнутой оси балки, а также из соображений симметрии, следует, что средняя часть стержня с заделанными концами, находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной  $l/2$ . Таким образом, критическая сила для стержня длиной  $l$  с двумя зашпеленными концами может быть найдена также как и для шарнирно опертой балки длиной  $l/2$ , то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(0,5 \cdot l)^2}. \quad (13)$$

ное уравнение изогнутой оси балки (4) с соответствующими граничными условиями. Однако можно использовать и более простой прием, если вспомнить, что согласно (10) при потере устойчивости на длине шарнирно закрепленного стержня должна укладываться одна полуволна синусоиды.

Рассматривая некоторые характерные случаи закрепления

Все полученные выражения можно объединить в одну общую формулу



$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2}, \quad (14)$$

где  $\omega \times l = l_{пр}$  – приведенная длина стержня;  $l$  – фактическая длина стержня;  $\omega$  – коэффициент приведенной длины, показывающий во сколько раз необходимо изменить длину стержня, чтобы критическая сила для этого стержня стала равна критической силе для шарнирно опертой балки (или, с другой стороны,  $\omega$  показывает, на какой длине стержня для данного вида закрепления укладывается одна половина синусоиды при потере устойчивости).

**Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера.** Введем понятие критического напряжения, то есть нормального напряжения, соответствующего критической силе при потере устойчивости сжатого стержня

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2 \cdot A}. \quad (15)$$

$\frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2$  – квадрат минимального радиуса инерции. Тогда формулу (15) можно записать так



$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \quad (16)$$

Величина



$$\lambda = \frac{\omega \cdot l}{i_{min}} \quad (17)$$

называется г и б к о с т ь ю стержня.

Как видим, критическое напряжение зависит только от упругих свойств материала (модуля Юнга  $E$ ) и гибкости стержня  $\lambda$ . При этом зависимость между  $\sigma_{кр}$  и  $\lambda$  может быть представлена гиперболической кривой, называемой гиперболой Эйлера (см. рис.3).

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии балки. Поэтому использовать эту формулу можно лишь в том случае, когда деформирование материала протекает в соответствии с законом Гука, то есть пока критическое напряжение не превысит предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$  (по диаграмме сжатия материала):



$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}. \quad (18)$$

Используя это соотношение, можно найти условие для определения предельной гибкости стержня  $\lambda_{пр}$ , когда еще возможно применение формулы Эйлера:

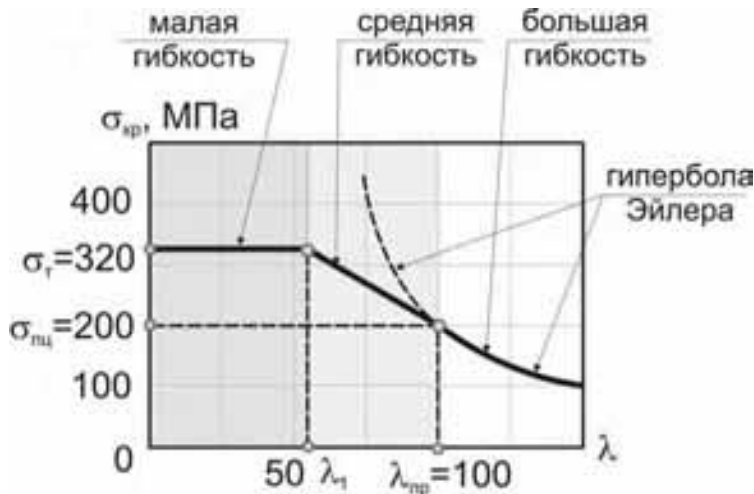


$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}. \quad (19)$$

Например, для малоуглеродистых сталей ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{пц} \approx 200$  МПа) предельная гибкость

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Итак, при  $\lambda \geq \lambda_{\text{пр}}$  для определения критической силы можно пользоваться формулой Эйлера, если же  $\lambda < \lambda_{\text{пр}}$ , то формула Эйлера становится неприемлемой, так как дает завышенные значения критической силы, то есть всегда переоценивает действительную устойчивость стержней (см. рис.3), что не только неправильно, но и опасно.



**Рис.3.** Зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня из углеродистой стали

строю главным образом за счет потери прочности, потеря устойчивости в таких случаях, как правило, не наблюдается. Таким образом, для стержней малой гибкости при сжатии проводят обычный расчет на прочность, принимая в качестве предельного напряжения предел текучести  $\sigma_T$  (для пластичных материалов) или предел прочности  $\sigma_B$  (для хрупких материалов). Этому условию соответствует горизонтальная прямая на рис.3.

Для практических (инженерных) расчетов стержней средней гибкости  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{\text{пр}}$  чаще всего используется эмпирическая зависимость, предложенная русским инженером и механиком Ф. С. Ясинским на основе изучения опытных данных (формула Ясинского):



$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda, \quad (20)$$

где **a** и **b** – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала (например, для стали 40 – **a**=321 МПа, **b**=1,16 МПа).

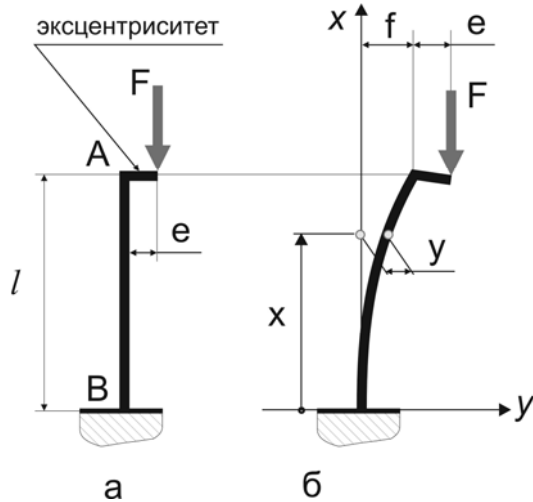
Формуле Ясинского на диаграмме критических напряжений соответствует наклонная прямая (рис.3).

Диаграмма на рис.3 определяет максимальное напряжение, которое может быть приложено при осевом сжатии стержня. При этом напряжении стержень разрушается либо вследствие потери устойчивости, либо вследствие разрушения материала. Причина разрушения определяется гибкостью стержня.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому для расчетов на устойчивость в этой области обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого числа экспериментальных данных.

Прежде всего, выделим стержни с малой гибкостью, у которых  $0 < \lambda < \lambda_1 \approx (0,4 \div 0,6) \cdot \lambda_{\text{пр}}$  (для стали). Эти короткие стержни будут выходить из

**Влияние эксцентриситета приложения нагрузки на величину и «четкость» определения критической силы.** Если описать процесс нагружения идеально прямого стержня под действием центрально приложенной сжимающей силы  $F$  в координатах сила–максимальный прогиб (максимальный прогиб стержня будем обозначать как  $f$ ), то при  $F \leq F_{кр}$  график совпадет с осью ординат ( $f=0$ ).



**Рис.4.** Схема сжатия стержня внецентренной нагрузкой

Однако на практике реализовать условие строго центрального нагружения практически невозможно из-за начального искривления стержня, некоторого несовпадения точки приложения силы с центром тяжести поперечного сечения (рис.4) и ошибок изготовления, что приводит к определенной кривой  $F=F(f)$ .

В частности, решение задачи о прямом защемленном одним концом стержне внецентренно сжатом продольной силой (эксцентриситет приложения нагрузки относительно центра тяжести сечения стержня равен  $e$ , рис.4) показывает следующее. При наличии эксцентриситета приложения нагрузки, как бы мал он ни был, в любом произвольном сечении по длине стержня будет возникать изгибающий момент (рис.4, б), равный

$$M = F \cdot (f + e - y). \quad (21)$$

Подставив выражение для изгибающего момента (21) в уравнение (4) и введя обозначение вида (6), в итоге получим дифференциальное уравнение изогнутой оси внецентренно сжатого стержня

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 \cdot y = k^2 \cdot (f + e),$$

общее решение которого, как известно, выглядит следующим образом

$$y = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + (f + e). \quad (22)$$

Величины постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяют из граничных условий, учитывая, что для рассматриваемого нами случая прогиб ( $y$ ) и угол поворота сечения ( $dy/dx$ ) в начале координат (рис.4, точка B) равны нулю, то есть при  $x=0$   $y=0$  и  $dy/dx = 0$ . Определив  $C_1$  и  $C_2$  и подставив их в (22) окончательно получим уравнение изогнутой оси внецентренно сжатого стержня:

$$y = (f + e) \cdot (1 - \cos kx). \quad (23)$$

Определим величину прогиба  $y=f$  на свободном конце стержня ( $x=l$ ):

$$f = \frac{e}{\cos kl} \cdot (1 - \cos kl). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получим другой вид уравнения изогнутой оси, откуда оказывается исключенным параметр  $f$ , а именно,

$$y = \frac{e}{\cos kl} \cdot (1 - \cos kx). \quad (25)$$

Анализ выражения (25) показывает, что потеря устойчивости ( $y \rightarrow \infty$ ) в данном случае может происходить при определенных значениях коэффициента  $k$ , которые найдем из условия:

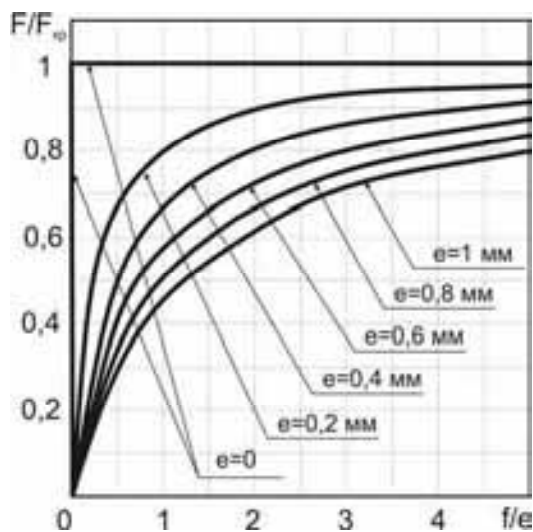
$$k = \frac{\pi \cdot n}{2 \cdot l}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в условие (6), в итоге приходим к выражению для определения критической силы для стержня с заземленным концом вида (11).

Удобно в выражении (24) исключить параметр  $k$ , заменяя его согласно (6), а также вводя в зависимость (24) критическую силу по формуле (11). В этом случае выражение для прогиба свободного конца стержня примет вид:

$$f = e \cdot \left[ \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_{кр}}}\right)} - 1 \right]. \quad (27)$$

Рис.5 иллюстрирует графики прогибов свободного конца стержня  $f$  при различных величинах  $e$ , построенные по формуле (27). Анализ диаграмм на рис.5 и выражения для критической силы (11) показывает, что величина эксцентриситета влияет только на «четкость» определения, но не на величину самой критической силы  $F_{кр}$ .



**Рис.5.** Диаграмма прогибов сжатого стержня при различных величинах эксцентриситета приложения нагрузки

Функция  $F/F_{кр} = \varphi(f/e)$  имеет горизонтальную асимптоту при  $F/F_{кр} = 1$  (см. рис.5). Случай  $e=0$  соответствует центрально приложенной силе и график функции  $F=F(f)$  совпадает с осью ординат на интервале от 0 до  $F_{кр}$ . Для  $e>0$  и любой фиксированной величины  $F < F_{кр}$  прогиб  $f$  линейно зависит от  $e$ .

Таким образом, для определения  $F_{кр}$  необходимо построить полную диаграмму  $F=F(f)$  при достаточно малых величинах  $e$ , что увеличивает «четкость» определения горизонтальной асимптоты  $F=F_{кр}$  и более соответствует понятию «малости» деформаций, положенных в основу вывода дифференциального уравнения изогнутой оси балки (4).

## ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

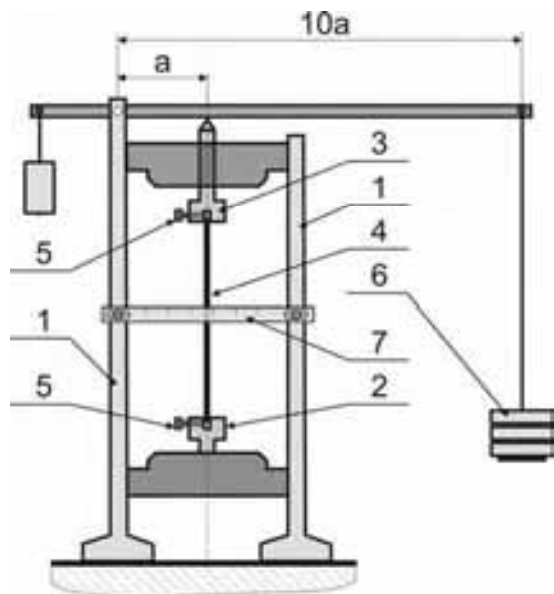
Экспериментальное определение критической силы производится для трех различных способов закрепления концов стержня: 1 – оба конца закреплены шарнирно (рис.2, а); 2 – один конец заземлен, другой закреплен шарнирно (рис.2, в); 3 – оба конца заземлены (рис.2, г). При испытаниях применяется призматический образец прямоугольного сечения достаточного большой гибкости, изготов-



ленный из стали У7. Размеры образца (длина стержня  $l$ , ширина  $h$  и толщина  $b$  его поперечного сечения) приведены на экспериментальной установке.



Перед началом испытаний необходимо подсчитать величину гибкости стержня по формуле (17), чтобы убедиться в том, что стержень имеет большую гибкость ( $\lambda > \lambda_{пр}$ ) и при определении критической силы  $F_{кр}$  может быть применена формула Эйлера (14).



**Рис.6.** Схема лабораторной установки для испытаний на продольный изгиб

Установка состоит из жесткой рамы 1, нижнего 2 и верхнего 3 захватов для закрепления образца 4. Фиксация образца в захватах испытательной установки осуществляется крепежными болтами 5. Приложение нагрузки к образцу и ее изменение производится посредством набора грузов, устанавливаемых на поддон 6. Для регистрации величины прогиба предназначена специальная измерительная линейка 7 с нанесенными на ней делениями. С целью установки начального положения на «ноль» линейка может вручную перемещаться в пазах в горизонтальном направлении. Для получения большей точности при отсчетах измерительная линейка устанавливается в том сечении образца, где величина прогиба является наибольшей.

Экспериментальная часть лабораторной работы и обработка полученных опытных и расчетных данных ведется в следующей последовательности:




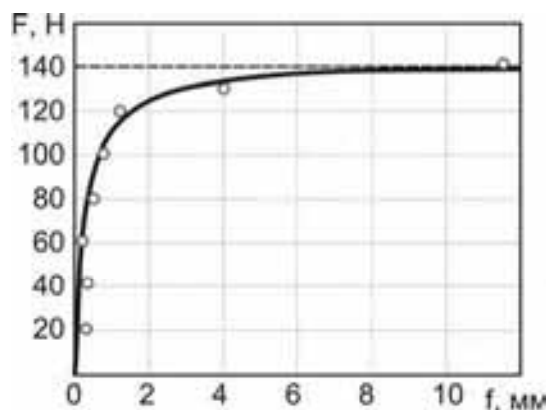
1. Произведите нагружение образца постепенно возрастающей нагрузкой  $F$ . При этом необходимо учитывать не только вес грузов (рис.6, поз.6), действующий на образец через рычаг (10:1), но и вес верхнего захвата установки, равный **2,9 кг** (рис.6, поз.3). Во время выполнения опыта ведите непрерывное наблюдение за поведением исследуемого образца (стержня) и производите отсчет показаний прогибов по мере увеличения нагрузки  $F$ . Для записи показаний максимальных прогибов стержня при различных значениях силы  $F$  рекомендуется составить общую таблицу для различных способов закрепления концов стержня, как это показано, например, в табл.1.

**Таблица 1.**


Номер ступени нагружения	$\omega=1$		$\omega=0,7$		$\omega=0,5$	
	Нагрузка $F$ , Н	Прогиб $f$ , мм	Нагрузка $F$ , Н	Прогиб $f$ , мм	Нагрузка $F$ , Н	Прогиб $f$ , мм
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

Обратите внимание на характер искривления образца. Нарисуйте схему нагружения образца и вид его изогнутой оси. Особое внимание обратите на характерные точки изогнутой оси, а именно, точки, где прогибы равны нулю или максимальны, точки перегибов и точки, где угол поворота сечения равен нулю. При приближении величины  $F$  к критической силе  $F_{кр}$  деформация стержня начнет резко возрастать. Если геометрическая ось образца до опыта была достаточно прямолинейной, а величина эксцентриситета приложения сжимающей нагрузки мала, то достижение  $F_{кр}$  будет отчетливо проявляться быстрым искривлением оси стержня, потерей устойчивости.

 2. По данным проведенного опыта нарисуйте диаграмму прогибов образца в координатах ( $f$ ;  $F$ ) для каждого из случаев закрепления концов стержня. Установите по графику ожидаемую экспериментальную величину критической силы  $F_{кр}^э$  в каждом из рассматриваемых случаев (ориентировочный вид графика приведен на рис.7).



**Рис.7.** График прогибов стержня при продольном изгибе, построенный по экспериментальным данным

 3. По теоретической формуле (14) подсчитайте величину критической силы  $F_{кр}^т$  и сопоставьте ее с величиной  $F_{кр}^э$ , определенной экспериментально. Результаты опытного и теоретического определения критической силы для стержней с различными закреплениями концов рекомендуется занести в отдельную таблицу (табл.2).

**Таблица 2.**

№ опыта	Расчетная схема	Характеристики стержня			Критическая сила, Н		Расхождение, %
		Коэффициент приведенной длины $\omega$	Приведенная длина $l_{пр}$	Гибкость $\lambda$	опытная $F_{кр}^э$	расчетная $F_{кр}^т$	
1.	Оба конца закреплены шарнирно						
2.	Один конец защемлен, другой шарнирно оперт						
3.	Оба конца защемлены						

**Рекомендации по оформлению отчета.** Отчет о проделанной лабораторной работе должен содержать следующие основные разделы:

1. Оборудование и приборы. В этом разделе приведите основные данные экспериментальной установки, ее эскиз, размеры и материал испытуемого образца.
2. Теоретическая часть. Кратко изложите основные понятия о явлении потери устойчивости. Приведите различные схемы закрепления сжатых стержней и запишите формулу для определения критической силы. Укажите пределы примени-

мости формулы Эйлера при расчете сжатых стержней, запишите выражение для предельной гибкости стержня, а также зависимости для расчета сжатых стержней за пределом пропорциональности.

3. Описание эксперимента и обработка данных. Опишите порядок проведения эксперимента, приведите результаты опытов, оформленные таблицами. Отметьте, как влияет способ закрепления концов стержня на величину критической силы.

4. Выводы. Сформулируйте отдельными краткими предложениями полученные основные результаты работы согласно поставленной цели исследования.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. При каких размерах сжатых стержней особое значение приобретает явление потери устойчивости прямолинейной формы?
2. Дайте определение критической силы. Как обозначается критическая сила?
3. В чем состоит основное различие расчета на прочность сжатых коротких и длинных стержней? Запишите для этих случаев условия прочности.
4. Запишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси сжимаемого стержня.
5. Запишите выражение изгибающего момента для сжатого стержня с двумя шарнирно опертыми концами.
6. Запишите общее решение дифференциального уравнения изогнутой оси сжимаемого стержня.
7. Проанализируйте уравнение изогнутой оси стержня с целью определения величины критической силы. Нарисуйте вид изогнутой оси и отметьте на ней характерные точки.
8. Почему уравнение изогнутой оси, полученное на основании решения приближенного дифференциального уравнения, не может быть достоверным во всех случаях? Какова область его применения?
9. Проанализируйте уравнения для определения критической силы при различных способах закрепления стержней.
10. Запишите общий вид формулы для определения критической силы (формула Эйлера). Дайте ее полный анализ.
11. Дайте определение приведенной (свободной) длины стержня.
12. Дайте определение коэффициента приведенной длины. Назовите величины коэффициента для характерных случаев крепления стержня.
13. Для стержней, закрепленных различным образом, покажите на рисунке приведенную длину.
14. Почему в формуле Эйлера записывается  $J_{\min}$ , а не  $J_{\max}$ ?
15. По какой формуле определяется гибкость сжимаемого стержня?
16. При каких значениях гибкости формула Эйлера может быть применима и почему?
17. Приведите формулу Ясинского. Как определить коэффициенты, входящие в состав этой формулы?
18. Опишите принцип работы испытательной установки на продольный изгиб.
19. В чем заключается трудность опытного определения критической силы?

20. Каково влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы? Приведите примеры.
21. Во сколько раз будет изменяться величина критической силы, если для одного и того же стержня изменять способы закрепления его концов? Приведите обоснование сделанным выводам, используя соответствующую формулу.
22. Во сколько раз будет изменяться величина критической силы, если длину стержня увеличить (уменьшить) в два, три и т. д. раз? Приведите обоснование сделанным выводам.
23. Во сколько раз будет изменяться величина критической силы, если площадь поперечного сечения стержня увеличить (уменьшить) в два, три и т. д. раз? Дать ответ для общего случая, для круглого сечения и для прямоугольного сечения с постоянной толщиной  $b$ .
24. Изменится ли величина критической силы при изменении материала стержня (например, сталь, медь, алюминий, дерево)?
25. Изменится ли величина критической силы, если заменить стержень, изготовленный из стали 45, точно таким же, но изготовленным из стали У8?

## ПРАВИЛА ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ



1. Запрещается приступать к работе до получения инструктажа по технике безопасности от преподавателя и росписи в журнале.
2. Не разрешается работать на одной установке одновременно более чем двум экспериментаторам.
3. При проведении эксперимента необходимо следить за положением грузов на поддоне, не допуская их падения.

---

**Составители:**

Вячеслав Петрович Багмутов

Игорь Николаевич Захаров

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА**

Методические указания к лабораторной работе

Редактор А. К. Саютина

Темплан 2002 г., поз.№ .

Подписано в печать \_\_\_\_\_ . Заказ № \_\_\_\_\_.

Формат 60×84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 200 экз. Бесплатно.

Волгоградский государственный технический университет.

400131 Волгоград, пр. им. В. И. Ленина, 28.

Типография РПК «Политехник»

Волгоградского государственного технического университета.

400131 Волгоград, ул. Советская, 35.