Понятие о статически определимых и неопределимых системах. Порядок решения статически неопределимых задач. Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении и сжатии (на примере семестрового задания). Влияние температуры, монтажных зазоров и натягов на прочность статически неопределимой конструкции.

4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

4.1. Основные сведения о статически неопределимых системах

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни усилия в связях (реакции опор), ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций. Такие системы называют *статически неопределимыми*.

Статически неопределимые системы – это упругие стержневые системы (конструкции), в которых количество неизвестных внутренних усилий и реакций опор больше числа уравнений статики, возможных для этой системы.

Кроме уравнений статики для расчета таких систем (конструкций) приходится привлекать дополнительные условия, описывающие деформацию элементов данной системы. Их условно называют *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности деформаций* (а сам метод решения иногда называют методом сравнения деформаций).

Степень статической неопределимости системы – это разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы.

Количество дополнительных уравнений перемещений, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

4.2. Порядок решения статически неопределимых задач

Статически неопределимые конструкции будем рассчитывать, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задач. При этом будем придерживаться следующего порядка:

1. **Статическая сторона задачи**. Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия. Определяем степень статической неопределимости.
2. **Геометрическая сторона задачи**. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между деформациями и перемещениями отдельных элементов конструкции и записываем *уравнения совместности деформаций* (уравнения перемещений).

3. **Физическая сторона задачи**. На основании закона Гука выражаем перемещения или деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные (пока) усилия.
4. **Математическая сторона задачи (синтез)**. Решая совместно статические, геометрические и физические уравнения, находим неизвестные усилия.

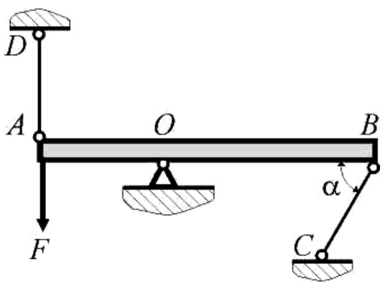
Рассмотрим примеры расчета некоторых простейших статически неопределимых конструкций.

4.3. Примеры решения статически неопределимых задач

Пример 1

Дано:

Стальные стержни BC и AD поддерживают абсолютно жесткую (недеформирующуюся) балку AB, на которую действует сила F. Площади поперечных сечений и длины стержней известны: $A_{BC}=A$, $A_{AD}=2\cdot A$, $l_{OB}=2\cdot l_{OA}$, $l_{BC}=l_{AD}$.



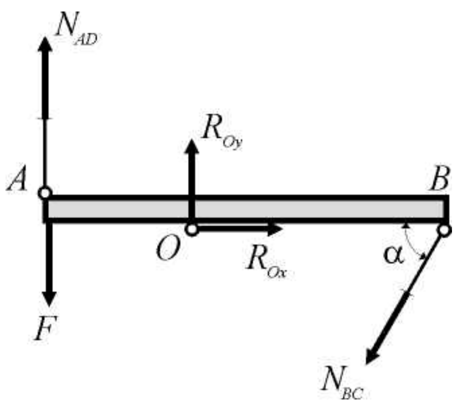
Определить:

Внутренние усилия N_{AD} и N_{BC}, возникающие в стержнях.

Решение.

1. **Статическая сторона задачи**

Покажем все силы, действующие на конструкцию, включая реакции опор и внутренние усилия в стержнях. Для этого, используя метод мысленных сечений, «разрежем» стержни и избавимся от всех наложенных на систему связей.



Внутренние усилия в стержнях для удобства расчета будем считать растягивающими (положительными) и направленными от сечения стержня.

Выясним степень статической неопределимости. Балка находится в равновесии под действием пяти сил (F, R_{Ox}, R_{Oy}, N_{AD}, N_{BC}), из которых **четыре** неизвестны (R_{Ox}, R_{Oy}, N_{AD}, N_{BC}). Статика для плоской системы сил дает **три** уравнения равновесия

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_O = 0,$$

следовательно, заданная система **один** раз статически неопределима:

4 (неизвестных)–3 (уравнения статики)=1 (степень статич. неопр. системы).

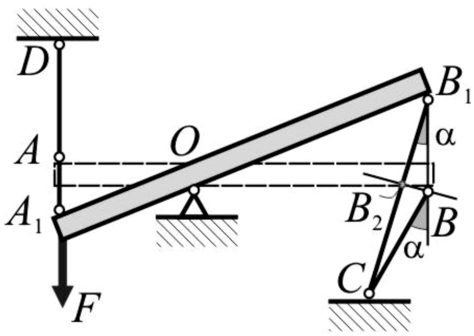
Так как определять реакции шарнира по условию задачи не требуется, то из трех используем только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow \quad N_{AD} \cdot l_{OA} - F \cdot l_{OA} + N_{BC} \cdot l_{OB} \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$N_{AD} + 2 \cdot N_{BC} \cdot \sin\alpha = F. \tag{4.1}$$

2. **Геометрическая сторона задачи**

Для составления дополнительного уравнения (уравнения совместности деформаций) рассмотрим систему в деформированном виде.



Балка AB повернется вокруг шарнира O, при этом точки A и B займут новые положения A_1 и B_1. Вследствие малости перемещений узлов конструкции действительные перемещения точек A и B по дугам окружности заменим перемещениями по вертикальным прямым AA_1 и BB_1. По той же причине будем считать, что углы между элементами конструкции до и после деформации остаются постоянными.

Из подобия треугольников OAA_1 и OBB_1 имеем

$$\frac{AA_1}{l_{OA}} = \frac{BB_1}{l_{OB}} \Rightarrow \qquad BB_1 = \frac{l_{OB}}{l_{OA}} \cdot AA_1 \Rightarrow \qquad BB_1 = 2 \cdot AA_1,$$

при этом заметим, что удлинение стержня AD равно перемещению AA_1:

$$\Delta l_{AD} = AA_1.$$

Так как $A_1D > AD$, то, очевидно, что стержень AD растягивается, и его удлинение будем считать п о л о ж и т е л ь н ы м .

Построим треугольник BB_1B_2, опустив перпендикуляр из точки B на отрезок B_1C (получим точку B_2).

Удлинение стержня BC найдем из рассмотрения треугольника BB_1B_2, учитывая, что $\Delta l_{BC}=B_1B_2$,

$$\Delta l_{BC} = B_1B_2 = BB_1 \cdot \sin\alpha.$$

Так как $B_1C > B_2C$, то, очевидно, что стержень BC растягивается, и его удлинение будем считать положительным.

Учитывая, что $BB_1 = 2 \cdot AA_1$ запишем уравнение совместности деформаций стержней AD и BC:

$$\Delta l_{BC} = BB_1 \cdot \sin\alpha = 2 \cdot AA_1 \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \Delta l_{AD} \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Delta l_{BC} = 2 \cdot \Delta l_{AD} \cdot \sin\alpha. \tag{4.2}$$

3. **Физическая сторона задачи**

Здесь необходимо установить связь между перемещениями и внутренними усилиями. Такая связь устанавливается при помощи закона Гука с учетом знаков Δl и N (в данной задаче они–положительны):

$$\Delta l_{AD} = \frac{N_{AD} \cdot l_{AD}}{E \cdot A_{AD}},$$
$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}}. \tag{4.3}$$

4. **Математическая сторона задачи (синтез)**

Подставим выражения закона Гука (4.3) в формулы уравнения совместности деформаций (4.2):

$$\frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = 2 \cdot \frac{N_{AD} \cdot l_{AD}}{E \cdot A_{AD}} \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$
$$N_{BC} = N_{AD} \cdot \sin\alpha .$$

Данное уравнение вместе с уравнением равновесия (4.1) образуют, так называемую, п о л н у ю с и с т е м у у р а в н е н и й, решение которой позволяет найти все неизвестные усилия в стержнях:

$$\begin{cases} N_{BC} = N_{AD} \cdot \sin\alpha, \\ N_{AD} + 2 \cdot N_{BC} \cdot \sin\alpha = F, \end{cases}$$

$$N_{AD} = \frac{F}{1 + 2 \cdot \sin^2\alpha}, \qquad N_{BC} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{1 + 2 \cdot \sin^2\alpha}.$$

Напряжения в стержнях при растяжении:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}}, \qquad \sigma_{AD} = \frac{N_{AD}}{A_{AD}}.$$

Если в задаче требуется определить площади сечений стержня, то необходимо воспользоваться у с л о в и е м п р о ч н о с т и:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} \le [\sigma], \qquad \sigma_{AD} = \frac{N_{AD}}{A_{AD}} \le [\sigma],$$

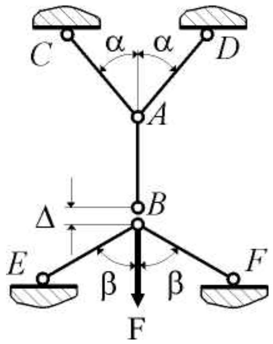
отсюда

$$A_{BC} = A \ge \frac{N_{BC}}{[\sigma]}, \qquad A_{AD} = 2 \cdot A \ge \frac{N_{AD}}{[\sigma]},$$

при этом необходимо проверить оба условия, а площадь A принять равной большему из двух полученных значений.

Отметим, что при решении статически неопределимых задач обязательно должны быть заданы либо площади сечений стержней, либо, по крайней мере, соотношения этих площадей.

Пример 2
Дано:

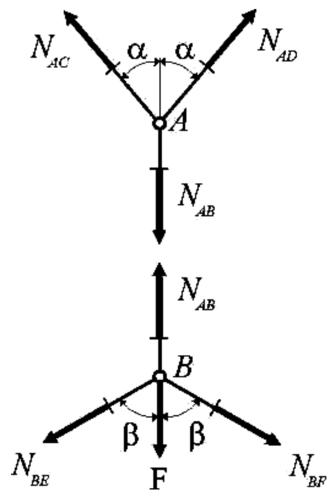


Стержневая система, состоящая из стержней одинаковой длины l и одинаковой площади сечения A, загружена силой F. При этом при сборке системы за счет зазора Δ в стержнях были созданы начальные (монтажные) напряжения и температурные напряжения за счет нагрева стержня AB на температуру t.

Определить:
Внутренние усилия, возникающие в стержнях.

Решение
1. **Статическая сторона задачи**

Применяя метод мысленных сечений, вырежем каждый из шарниров A и B и запишем для них уравнения равновесия.



Шарнир A

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_{AC} = N_{AD}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad N_{AB} = 2 \cdot N_{AC} \cdot \cos\alpha$$

Шарнир B

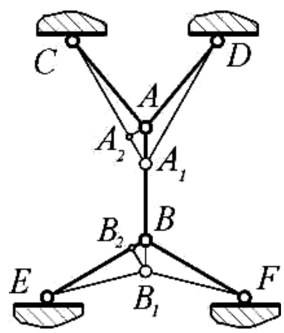
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_{BE} = N_{BF}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad N_{AB} = 2 \cdot N_{BE} \cdot \cos\beta$$

Как видим, в данные четыре уравнения входят пять неизвестных внутренних усилий, то есть система один раз статически неопределима (дополнительно требуется составить одно уравнение совместности деформаций стержней).

2. **Геометрическая сторона задачи**

Рассмотрим систему в деформированном состоянии и запишем уравнения, связывающие перемещения элементов системы с деформациями стержней.



$$\Delta l_{AC} = A_1A_2,\ \text{растяжение}\ \left(A_1C > AC\right);$$

$$\Delta l_{BE} = BB_2,\ \text{сжатие}\ \left(B_1E < BE\right);$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta + \left(BB_1 - AA_1\right),\ \text{растяжение.}$$

Заметим, что деформацию стержня AB в данном случае считаем растягивающей, полагая $BB_1 > AA_1$ и учитывая монтажный зазор Δ, для устранения которого при сборке стержень AB необходимо растянуть.

Рассматривая треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2, найдем:

$$BB_1 = \frac{BB_2}{\cos\beta}, \quad AA_1 = \frac{A_1A_2}{\cos\alpha}.$$

После подстановки, получим уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_{AB} = \Delta + \frac{\Delta l_{BE}}{\cos\beta} - \frac{\Delta l_{AC}}{\cos\alpha}.$$

3. **Физическая сторона задачи**

Запишем закон Гука, здесь же необходимо учесть и температурные деформации $\alpha_t \cdot t \cdot l_{AB}$ (α_t – коэффициент линейного расширения материала стержня):

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot A_{AB}} + \alpha_t \cdot t \cdot l_{AB},$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E \cdot A_{AC}},$$

$$\Delta l_{BE} = -\frac{N_{BE} \cdot l_{BE}}{E \cdot A_{BE}}.$$

Здесь учтено, что все усилия и деформации стержней приняты положительными.

4. **Математическая сторона задачи (синтез)**

Подставим выражения закона Гука в уравнение совместности деформаций:

$$N_{AB} = -\left(\frac{N_{BE}}{\cos\beta} + \frac{N_{AC}}{\cos\alpha} - \frac{\Delta \cdot E \cdot A_{AB}}{l_{AB}} + \alpha_t \cdot t \cdot E \cdot A_{AB} \right).$$

Решая данное уравнение совместно с уравнениями равновесия, найдем неизвестные внутренние усилия в стержнях.