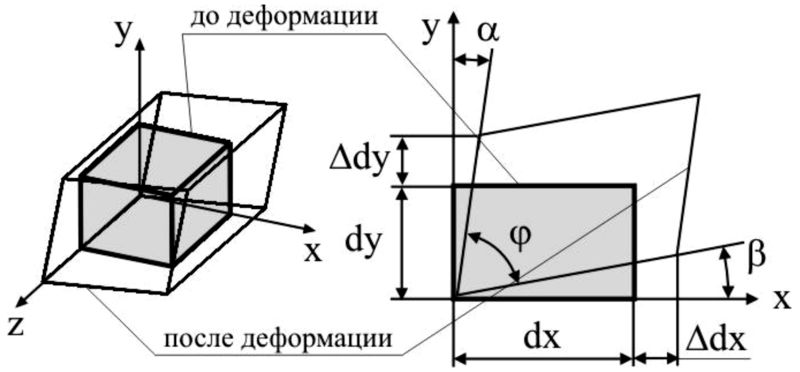
Теория деформированного состояния. Понятие о тензоре деформаций, главные деформации. Обобщенный закон Гука для изотропного тела. Деформация объема при трехосном напряженном состоянии. Потенциальная энергия деформации. Потенциальная энергия изменения формы и объема.

6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1. Деформированное состояние в точке. Главные деформации

Под действием внешних сил элементы машин и конструкций изменяют свои первоначальные форму и размеры. Как правило, такие изменения невелики, но в ряде случаев могут препятствовать нормальной работе. Умение определять деформации, установление их допустимых величин имеют важное значение при проектировании и расчете конструкций. Рассмотрение деформаций необходимо также для выяснения закона распределения напряжений в элементах конструкций, при решении статически неопределимых задач, для оценки работоспособности по условиям прочности.

Рассмотрим особенности деформирования материала в окрестности некоторой точки *A* деформируемого тела. Вырежем около точки *A* внутри сплошного тела бесконечно малый параллелепипед. В процессе деформации тела точки выделенного элемента будут перемещаться, сам он – деформироваться, то есть будут искажаться первоначально прямые углы между гранями и изменяться длины их ребер.



Отношение изменения длины ребра параллелепипеда к первоначальной длине ребра определяет **относительную линейную деформацию** (ε_x, ε_y, ε_z) элемента вдоль соответствующей оси

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d\mathrm{x}}{dx}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Искажение первоначально прямого угла между ребрами элемента в плоскостях его граней определяет **угол сдвига** или **угловую деформацию** (γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}) в соответствующей плоскости, например, для плоскости *xy* (см. рисунок) $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$. Если угол $\varphi = 90^{\circ} - (\alpha + \beta)$ – острый, то угол сдвига считается положительным. Растяжение ребер отвечает положительным значениям ε_x, ε_y, ε_z.

Деформации элемента в трех ортогональных плоскостях представим в виде матрицы

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

которая, по аналогии с тензором напряжений, называется т е н з о р о м м а л ы х д е ф о р м а ц и й, или сокращенно – т е н з о р о м д е ф о р м а ц и й.

Деформированное состояние в точке – это совокупность относительных линейных деформаций и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через данную точку.

При этом можно сделать утверждение, что деформированное состояние в точке вполне определено, если задан тензор деформаций для этой точки.

Аналогично напряженному состоянию можно указать такие три ортогональные направления (с индексами 1, 2, 3), называемые **главными осями деформации**, для которых угловые деформации равны нулю, при этом линейные деформации принимают свои экстремальные значения (ε_1 – максимум, ε_3 – минимум, ε_2 - минимакс), причем по алгебраической величине

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Деформации ε_1, ε_2 ,ε_3 в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, называются **главными деформациями** в точке.

Для главных направлений тензор деформаций получит наиболее удобный вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора деформаций при повороте осей изменяются совершенно аналогично компонентам тензора напряжений (по законам тензорного преобразования). Так, при плоском напряженном состоянии деформации в некоторой плоскости на произвольной наклонной площадке можно выразить через главные деформации и угол наклона α следующим образом:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2\alpha;$$
$$\frac{1}{2}\cdot\gamma_\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cdot\sin 2\alpha.$$

Главные деформации можно выразить через произвольные деформации по двум взаимно перпендикулярным площадкам в виде:

$$\varepsilon_{\substack{max\\min}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + 4 \cdot \left(\gamma_{xy}/2\right)^2},$$

а положение главных площадок будет задаваться углом α, который определяется из выражения:

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2 \cdot \left(0,5 \cdot \gamma_{\alpha\beta}\right)}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}.$$

6.2. Обобщенный закон Гука при объемном напряженном состоянии

Изучая простое растяжение-сжатие, мы выяснили, что относительная продольная деформация

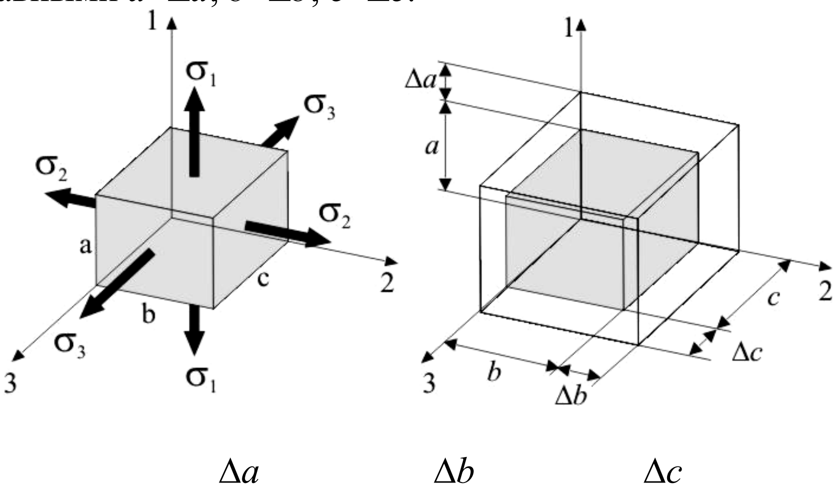
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

а относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}.$$

Эти два равенства выражали закон Гука (зависимость между напряжениями и деформациями) при простом растяжении или сжатии, то есть при линейном напряженном состоянии. Далее установим связь между напряжениями и деформациями в общем случае объемного напряженного состояния.

Рассмотрим деформацию элемента тела, выбрав этот элемент в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$, по граням которого действуют главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 (для вывода предполагаем, что все они положительны). Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными $a+\Delta a$; $b+\Delta b$; $c+\Delta c$.



Величины

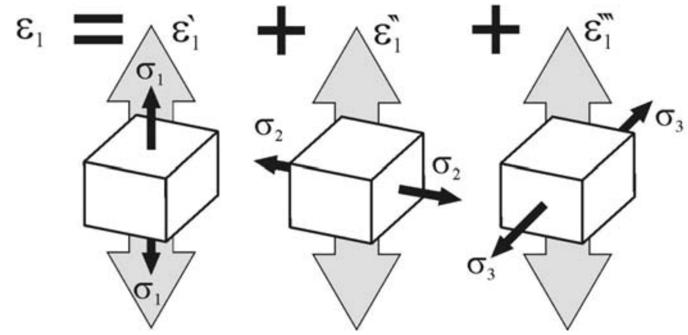
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \qquad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

называются г л а в н ы м и д е ф о р м а ц и я м и и представляют собой относительные удлинения в главных направлениях.

Применяя принцип суперпозиции, деформацию ε_1 можно представить следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

где ε_1' – относительное удлинение в направлении σ_1, вызванное действием только напряжений σ_1 (при $\sigma_2=\sigma_3=0$); ε_1'' – относительное удлинение в направлении σ_1, вызванное действием только напряжений σ_2 (при $\sigma_1=\sigma_3=0$); ε_1''' – относительное удлинение в направлении σ_1, вызванное действием только напряжений σ_3 (при $\sigma_1=\sigma_2=0$).



Поскольку деформации в направлении напряжения σ_1 в данном случае являются продольными, а деформации в направлении напряжений σ_2 и σ_3 – поперечными (см. рисунок), то, применяя формулы закона Гука для продольных и поперечных деформаций при линейном напряженном состоянии, находим, что

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \qquad \varepsilon_1'' = -\mu\cdot\frac{\sigma_2}{E}, \qquad \varepsilon_1''' = -\mu\cdot\frac{\sigma_3}{E}.$$

Сложив эти величины, будем иметь

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_2}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \mu\cdot\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right].$$

Аналогично получим выражения и для двух других главных деформаций. В результате запишем **обобщенный закон Гука для изотропного тела**, то есть зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями в общем случае объемного напряженного состояния:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \mu\cdot\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right];$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \mu\cdot\left(\sigma_3+\sigma_1\right)\right];$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \mu\cdot\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\right].$$

Данные выражения справедливы и для относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_x - \mu\cdot\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right];$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_y - \mu\cdot\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right];$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_z - \mu\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right].$$

При этом угловые деформации на соответствующих площадках будут вычисляться как

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где G – модуль сдвига.

Далее будет показано, что модуль сдвига G можно выразить через E и μ. Следовательно, для изотропного тела угловые деформации не влияют на линейные деформации и наоборот (однако, для анизотропного тела в общем случае это утверждение неверно).

6.3. Объемная деформация при сложном напряженном состоянии

Установим связь между относительным изменением объема ε_V и главными напряжениями. До деформации элемент занимал объем $V_0=a\times b\times c$. В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned} V &= (a+\Delta a)\cdot(b+\Delta b)\cdot(c+\Delta c) = \\ &= a\cdot b\cdot c\cdot\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0\cdot(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3) = \\ &= V_0\cdot(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Учитывая незначительную величину относительных деформаций по сравнению с единицей, последними четырьмя слагаемыми можем пренебречь, как величинами более высокого порядка малости. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{V-V_0}{V_0} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 3\cdot\varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}$ – средняя деформация в точке.

Выразив главные деформации через главные напряжения при помощи обобщенного закона Гука, получим

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\cdot\mu}{E}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3).$$

Если ввести среднее напряжение в точке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3},$$

то последнее равенство можно преобразовать до вида закона Гука для объемной деформации

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_0}{K}, \qquad (6.1)$$

где $K=\dfrac{E}{3\cdot(1\text{-}2\cdot\mu)}$ – модуль объемной упругости.

6.4. Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии

До сих пор для анализа напряженного и деформированного состояния элементов конструкции нами рассматривались д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е м е т о д ы , основанные на статических, геометрических и физических соотношениях, описывающих поведение, «условия жизни» частицы (малого элемента) материала. Существуют и другие методы анализа (э н е р г е т и ч е с к и е м е т о д ы), основанные на изучении общих количественных характеристик конструкции, таких как энергия деформации, работа внешних сил при деформации конструкции в целом и т. п. Далее получим формулы для потенциальной энергии деформации, часто используемые в таких методах.

Потенциальная энергия деформации (U) – это энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации (u) – это величина потенциальной энергии деформации, приходящаяся на единицу объема тела.

В соответствии с законом сохранения энергии без учета ее рассеивания (диссипации), потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела:

$$U = A_F .$$

Тогда в случае простого растяжения (сжатия) потенциальную энергию деформации можно определить как

$$U = \int_0^{\Delta l} F \cdot d\left(\Delta l\right),$$

где F и Δl – значения усилия и удлинения в промежуточный момент нагружения.

Учитывая, что на упругом участке усилие прямо пропорционально удлинению растягиваемого стержня (по закону Гука), легко найти данный интеграл (площадь треугольника под кривой деформирования на рисунке):

$$U = \frac{F \cdot \Delta l}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F \cdot \Delta l}{2 \cdot A \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}.$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трех главных напряжений при объемном напряженном состоянии, то есть, суммируя потенциальную энергию деформации от каждого напряжения, получим

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}.$$

Подставляя сюда выражения деформаций из обобщенного закона Гука, получим выражение для удельной потенциальной энергии через главные напряжения

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \right) \right].$$

При дальнейшем рассмотрении вопроса о прочности материала при объемном напряженном состоянии удобно рассматривать удельную потенциальную энергию как состоящую из двух частей:

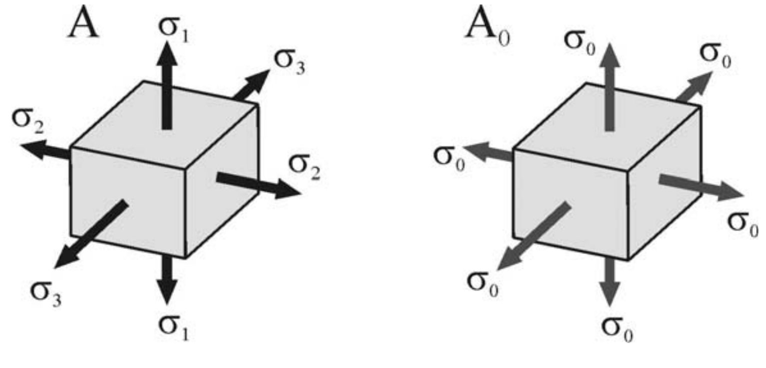
1) удельной потенциальной энергии изменения объема u_v, то есть энергии, накапливаемой за счет изменения объема V рассматриваемого элементарного объема (одинакового изменения всех его размеров без искажения его формы);

2) удельной потенциальной энергии формоизменения $u_ф$, то есть энергии, накапливаемой за счет изменения формы элементарного объема (расходуемой на превращение кубика в параллелепипед)

$$u = u_v + u_ф .$$

Подсчитаем величину обеих составляющих удельной потенциальной энергии.

Рассмотрим два элементарных объема A и A_0, по граням первого из которых действуют произвольные главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3, а по граням второго – три главных растягивающих напряжения, равные по величине среднему напряжению $\sigma_0=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$.



Удельная потенциальная энергия деформации элемента в первом состоянии (A) равна

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \right) \right].$$

Удельная потенциальная энергия деформации элемента во втором состоянии (A_0) равна

$$u_0 = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2 \cdot \mu \cdot \left(\sigma_0 \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \sigma_0 + \sigma_0 \cdot \sigma_0 \right) \right] = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \sigma_0^2.$$

Очевидно, что деформация второго состояния A_0 проходит без искажения формы, так как действующие по его граням одинаковые главные напряжения σ_0 вызывают одинаковое изменение размеров по всем направлениям, поэтому потенциальная энергия формоизменения в этом случае равна нулю $u_{ф_0} = 0$. Значит потенциальная энергия изменения объема в этом случае

$$u_{V_0} = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot K}.$$

Нетрудно убедиться, что, согласно (6.1), относительное изменение объема обоих кубиков одинаково, то есть

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{V_0} = \frac{\sigma_0}{K}.$$

Следовательно, потенциальная энергия изменения объема у них также одинакова:

$$u_V = u_{V_0}.$$

Отсюда

$$u_V = \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot K} \cdot = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu)}{2 \cdot E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

окончательно запишем формулу для определения удельной потенциальной энергии изменения объема

$$u_V = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{6 \cdot E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Теперь найдем удельную потенциальную энергию формоизменения

$$u_ф = u - u_V.$$

Подставляя вместо u и u_V их выражения через главные напряжения, получим

$$u_ф = \frac{1 + \mu}{6 \cdot E} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$