

## 7. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

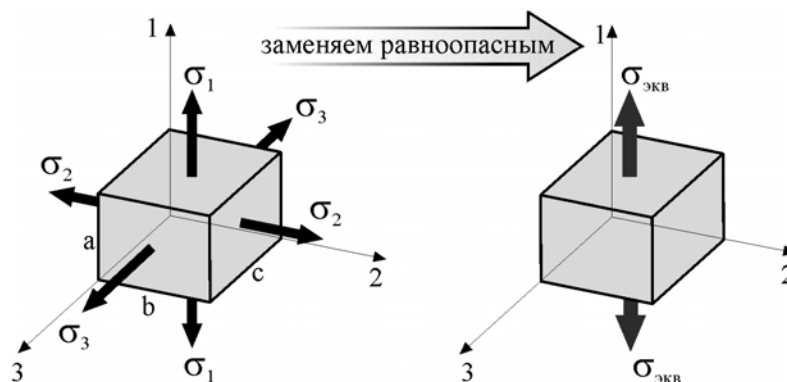
### 7.1. Задачи теорий прочности. Эквивалентные напряжения

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. Если напряженное состояние в элементах сооружения является одноосным (линейным), то определение момента появления опасных деформаций или разрушения осуществляется достаточно просто путем сопоставления максимальных деформаций или напряжений в опасном сечении элемента конструкции с допусковым.

Рассмотрим вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии (плоском или объемном). В этом случае, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношений между ними. Экспериментально найти величины этих предельных напряжений, как это делалось при растяжении-сжатии, не представляется возможным – число возможных сочетаний величины и направления главных напряжений при сложном напряженном состоянии бесконечно велико. Приходится вводить некоторый **критерий прочности или пластичности** – гипотезу (предположение) о преимущественном влиянии на прочность материала при сложном напряженном состоянии того или иного фактора, который якобы и ответственен за возникновение опасного состояния материала. Предельное же значение этого фактора, определяющего прочность (пластичность) материала, находят из обычных опытов на растяжение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет перейти от сложного напряженного состояния к эквивалентному, равноопасному ему (с точки зрения прочности материала) простому одноосному растяжению.

Введем понятие эквивалентного напряжения.

**Эквивалентное напряжение** ( $\sigma_{\text{экв}}$ ) – это напряжение, под действием которого материал в условиях простого растяжения-сжатия оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием.



Тогда, для того чтобы провести расчет на прочность при сложном напряженном состоянии, необходимо сначала «перейти» от сложного напряженного состояния к простому растяжению, то есть, используя наиболее подходящий для данного случая критерий прочности или пластичности, найти эквивалентное напряжение. Затем необходимо сравнить это эквивалентное напряжение с допускаемым, найденным из опытов на растяжение:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma].$$

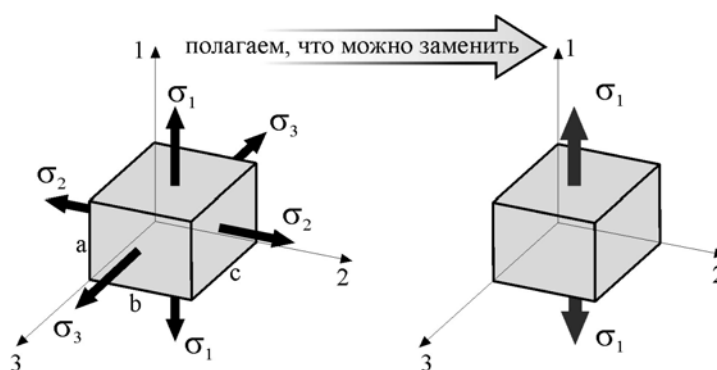
Основной же задачей при выработке критерия прочности оказывается правильный выбор основного фактора, влияющего на прочность материала при сложном напряженном состоянии.

## 7.2. Классические критерии прочности (теории прочности)

### **I. Критерий наибольших нормальных напряжений**

В качестве первого критерия прочности, называемого обычно первой теорией прочности, был принят критерий наибольших нормальных напряжений, в соответствии с которым причиной разрушения материала считались наибольшее (из трех главных) нормальное напряжение.

Согласно этому критерию, разрушение материала при сложном напряженном состоянии, как и при простом растяжении-сжатии, наступает от действия всего лишь одного напряжения  $|\sigma|_{\text{max}}$ , при этом действие двух других напряжений не учитывается.



Таким образом, эквивалентные напряжения для пластичного материала будут равны наибольшему по модулю главному напряжению:

$$\sigma_{\text{экв}_1} = |\sigma|_{\text{max}},$$

а условие прочности запишется следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв}_1} \leq [\sigma].$$

Обратим внимание, что эквивалентные напряжения всегда положительная величина.

Данная теория прочности в настоящее время практически не используется, так как она подтверждается экспериментами лишь для некоторых очень хрупких материалов (камень, кирпич, керамика и т. п.).

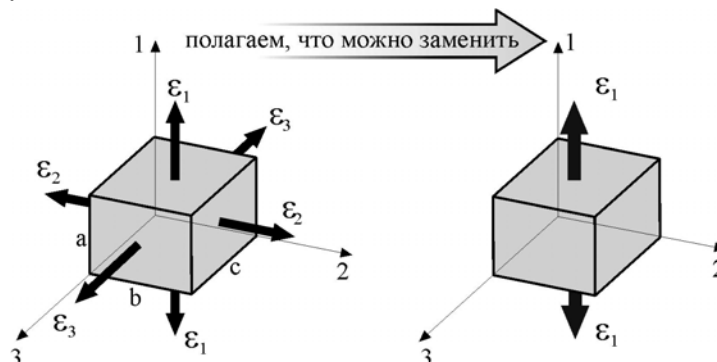
## II. Критерий наибольших линейных деформаций

Согласно второй теории прочности, в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию.

Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает, когда наибольшая линейная деформация достигает своего допустимого значения, то есть

$$|\varepsilon|_{max} \leq [\varepsilon].$$

При этом допустимая деформация материала определяется при простом растяжении-сжатии.



Используя обобщенный закон Гука, запишем данное условие прочности в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет равно  $\varepsilon_1$ , тогда

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Допускаемые деформации при растяжении-сжатии связаны с допускаемыми напряжениями также по закону Гука:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Таким образом, условие прочности можем записать в виде:

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\sigma_{эkvII} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3),$$

а, окончательно, условие прочности:

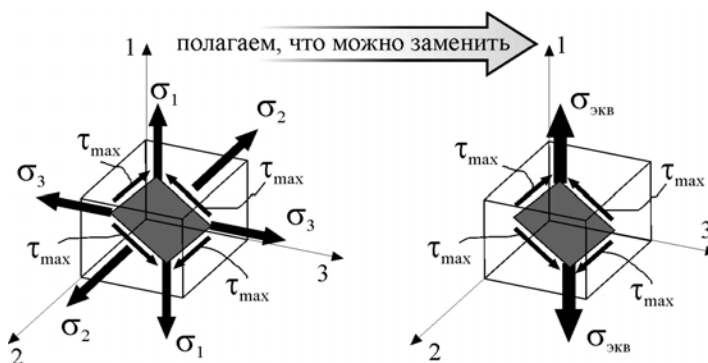
$$\sigma_{эkvII} \leq [\sigma].$$

Данная теория также в настоящее время редко применяется в инженерной практике, так как находит экспериментальное подтверждение лишь для некоторых хрупких материалов (легированный чугун, высокопрочная сталь).

### III. Критерий наибольших касательных напряжений

Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории, предполагается, что предельное состояние материала наступает, когда наибольшее касательное напряжение достигает своего допустимого значения, которое определяется из опытов на растяжение-сжатие. В этом случае условие прочности принимает вид:

$$\tau_{max} \leq [\tau].$$



Максимальные касательные напряжения при объемном напряженном состоянии определяются как

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

тогда допускаемые касательные напряжения, определяемые при простом растяжении, можно найти следующим образом:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Таким образом, окончательно, условие прочности по III теории прочности запишем в виде:

$$\sigma_{эkv_{III}} \leq [\sigma],$$

где эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эkv_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

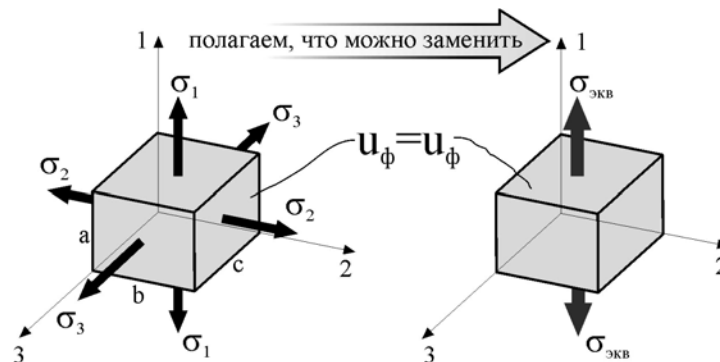
Третья теория прочности хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения  $\sigma_2$ , которое, как показывают эксперименты, также оказывает, хотя и не значительное, влияние на прочность материалов.

### IV. Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения

В качестве критерия прочности в этом случае принимают количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего

предельного значения, которое определяется из опытов на простое растяжение-сжатие. Здесь условие прочности можно записать так:

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}].$$



Запишем удельную потенциальную энергию формоизменения через главные напряжения при объемном напряженном состоянии

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6 \cdot E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

откуда при растяжении-сжатии

$$[u_{\phi}] = \frac{1+\mu}{3 \cdot E} \cdot [\sigma]^2.$$

Отсюда, условие прочности, записанное через нормальные напряжения, примет вид

$$\sigma_{\text{эқвIV}} \leq [\sigma],$$

при этом эквивалентные напряжения будем определять по формуле:

$$\sigma_{\text{эқвIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. При этом четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. По сути дела эти две теории более правильно называть теориями пластичности.

## V. Теория Мора

Согласно теории Мора, два напряженных состояния равноопасны, если для соответствующих двух главных напряжений ( $\sigma'_1, \sigma'_3$  и  $\sigma''_1, \sigma''_3$ ) соблюдается соотношение

$$\sigma'_1 - k \cdot \sigma'_3 = \sigma''_1 - k \cdot \sigma''_3.$$

Отсюда вытекает формула для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{\text{эқвM}} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3.$$

Здесь коэффициент  $k$  представляет собой отношение предельных напряжений при одноосном растяжении и при одноосном сжатии. Если принять, что коэффициенты запаса прочности по отношению к предельным напряжениям растяжения и сжатия одинаковы, то  $k$  можно определить из выражения:

$$k = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Окончательно условие прочности по теории Мора запишется следующим образом

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Теория прочности Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разными сопротивлениями растяжению и сжатию. Как видим, гипотеза Мора (как и III теория) не учитывает влияния промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  – это несомненный ее недостаток. Опыты показывают, что достаточно точные результаты гипотеза Мора дает для напряженных состояний смешанного типа, то есть для тех случаев, когда  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую (или третью) теории прочности для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть для хрупких материалов (для них в настоящее время пока еще применяют и вторую теорию прочности).