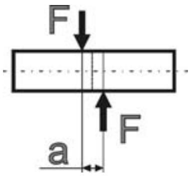
8. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. СДВИГ

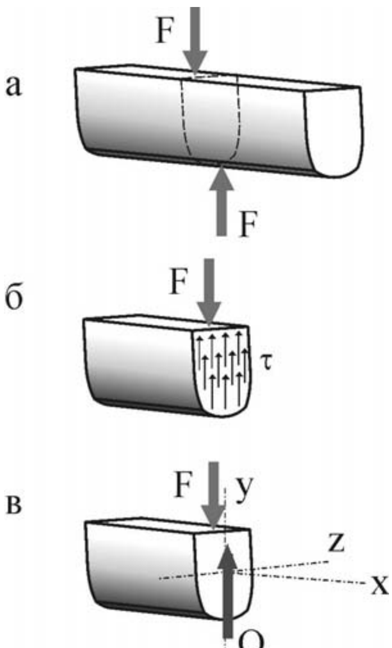
8.1. Определение внутренних усилий при сдвиге

Кроме деформации растяжения или сжатия (см. лекцию № 3) материал нагруженного элемента конструкции может испытывать деформацию сдвига.

Сдвиг – вид сопротивления, при котором стержень нагружен двумя равными силами (на малом расстоянии друг от друга), перпендикулярными к оси бруса и направленными в противоположные стороны.



Примером такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, деформация заклепок, болтов, сварных швов между металлическими листами и т. п. Вообще же на практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций и чаще всего изгибом.



Установим формулы для внутренних усилий, напряжений и деформаций, необходимые при расчете на сдвиг элементов конструкций, имеющих форму бруса. Пусть известна внешняя нагрузка F, вызывающая сдвиг одной части бруса относительно другой. Используя метод мысленных сечений (см. рисунок), находим величину внутренних усилий, действующих в сечении бруса. Очевидно, что в данном случае нагружения из шести уравнений равновесия лишь одно не обращается тождественно в ноль:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad Q_y = F.$$

Таким образом, при сдвиге из шести внутренних усилий (N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z) в сечении элемента конструкции возникают только одно – поперечная сила (Q_y или Q_z).

8.2. Определение напряжений при сдвиге. Понятие о чистом сдвиге

Так как поперечная сила Q_y (или Q_z) является единственным внутренним усилием, возникающим в сечении стержня при сдвиге, и при этом она лежит в плоскости этого сечения, то и напряжения, возникающие здесь, должны лежать в плоскости сечения стержня. То есть при сдвиге в точках поперечного сечения стержня возникают только касательные напряжения τ.

В соответствии с определением (см. лекцию № 1), касательные напряжения τ, действующие в поперечном сечении (A) бруса, представляют собой интенсивность внутренних поперечных сил

$$\tau = \frac{dQ}{dA},$$

исходя из чего можем записать (опуская соответствующие индексы):

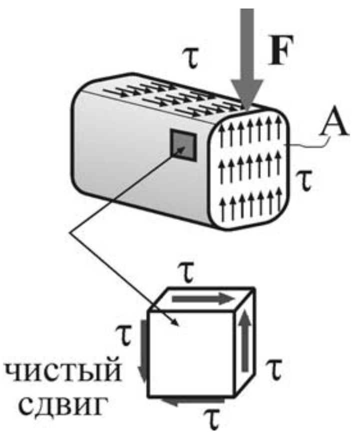
$$Q = \int_A \tau \cdot dA.$$

При сдвиге условно считают, что касательные напряжения равномерно распределены по площади поперечного сечения ($\tau = const$), поэтому

$$Q = \tau \cdot A.$$

Тогда **касательные напряжения** при сдвиге определяются так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \Rightarrow \qquad \tau = \frac{F}{A}. \qquad (8.1)$$



Рассмотрим характер напряженно-деформированного состояния, которое возникает в точках стержня при сдвиге.

По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях бруса, так же как и в его поперечных сечениях будут возникать только касательные напряжения. Тогда на гранях (параллельных соответствующим осям координат) бесконечно малого элемента, «вырезанного» в окрестности любой точки стержня при сдвиге, будут действовать только касательные напряжения τ. Такой случай напряженного состояния называют **чистым сдвигом**.

Чистый сдвиг – частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения.

Определим величину и направление главных напряжений при чистом сдвиге:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2},$$

так как $\sigma_x = \sigma_y = 0$, то можем записать

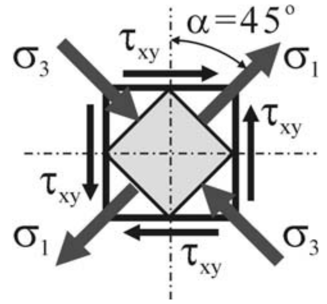
$$\sigma_1 = \tau_{xy}, \qquad \sigma_3 = -\tau_{xy}.$$

Направление главных площадок определяется углом α, который найдем по формуле

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

учитывая, что $\sigma_x = \sigma_y = 0$,

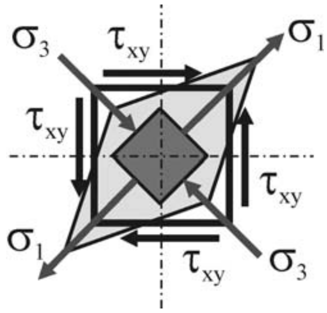
$$\mathrm{tg}2\cdot\alpha=-\infty \Rightarrow \qquad 2\cdot\alpha=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \qquad \alpha=-\frac{\pi}{4}.$$



Как видим, при чистом сдвиге главные напряжения одинаковы по величине, противоположны по знаку (σ_1=–σ_3=τ_{xy}) и направлены под углом 45^o к оси стержня (третья главная площадка элемента совпадает с ненагруженной фасадной гранью элемента, следовательно σ_2=0).

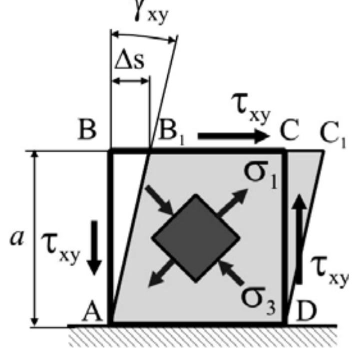
8.3. Определение деформаций и закон Гука при чистом сдвиге

Рассмотрим деформацию квадратного элемента при чистом сдвиге (см. рисунок).



Поскольку по граням элемента не действуют нормальные напряжения, то вдоль граней нет и удлинений. В то же время диагональ, совпадающая с направлением σ_1, удлинится, а другая диагональ, совпадающая с направлением сжимающего напряжения σ_3, укоротится. В результате квадрат трансформируется в ромб без изменения длины граней. Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов.

Более наглядное представление о деформации элемента при сдвиге можно получить, закрепив одну из граней (см. рисунок).



Малый угол γ_{xy}, на который изменяется первоначально прямой угол элемента при сдвиге, называется **углом сдвига** или **относительным сдвигом**:

$$\gamma_{xy} = \angle BAB_1 .$$

Величину абсолютного смещения грани обозначают Δs и называют **абсолютным сдвигом**.

Из треугольника BAB_1 следует, что

$$\mathrm{tg}\gamma_{xy} = \frac{\Delta s}{a}.$$

Учитывая малость угла, можно считать, что

$$\mathrm{tg}\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy},$$

тогда окончательно запишем взаимосвязь между относительным и абсолютным сдвигом элемента

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta s}{a}. \qquad (8.2)$$

Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге можно проследить по так называемой д и а г р а м м е с д в и г а , которую получают обычно из опытов на кручение тонкостенных трубчатых образцов (в стенках которых, как увидим далее, также возникает напряженное состояние чистого сдвига). Для пластичных материалов диаграмма сдвига аналогична диаграмме растяжения и имеет с ней одинаковые характерные участки, в том числе и участок упругости.

Рассматривая деформацию сдвига в пределах упругости, найдем, что между углом сдвига γ_{xy} и касательными напряжениями τ_{xy} существует линейная зависимость, которая носит название **закона Гука при сдвиге** и может быть выражена следующими формулами:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \qquad (8.3)$$

где G – коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости при сдвиге или модулем упругости второго рода и является константой для данного материала. Модуль сдвига может быть определен аналитически, если известны величины модуля Юнга и коэффициента Пуассона:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)}.$$

Заметим, что все рассмотренные характеристики упругости материала E, μ, G, K взаимосвязаны, однако в сопротивлении материалов и в теории упругости только две из них (чаще всего E и μ) принимаются независимыми.

Подставляя выражения (8.1) и (8.2) в формулы (8.3), можно записать закон Гука при сдвиге и во «внешних формах» (через абсолютные деформации и внутренние усилия):

$$\Delta s = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A},$$

где a – расстояние между сдвигаемыми гранями; A – площадь грани.

Удельную потенциальную энергию деформации (см. лекцию № 6) при сдвиге определим, учитывая, что $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_3 = -\tau_{xy}$, следующим образом:

$$u = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \right) \right] \Rightarrow$$

$$u = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{2 \cdot E} \cdot \tau^2 = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}.$$

8.4. Расчет на прочность и допускаемые напряжения при сдвиге

Проверим прочность элемента, испытывающего деформацию чистого сдвига. Пусть касательные напряжения на гранях элемента максимальны и равны τ_{max}, а допускаемое напряжение для материала при растяжении – $[\sigma]$.

Если для материала известна величина допускаемых касательных напряжений при сдвиге $[\tau]$, то условие прочности может быть записано в виде:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A} \le [\tau]. \qquad (8.4)$$

Величина допускаемых напряжений $[\tau]$ зависит от свойств материала, характера нагрузки, типа элементов конструкции и для чистого сдвига определяется обычно по III теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}_{\text{III}}} \le [\sigma].$$

Учитывая, что по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}_{\text{III}}} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

а при чистом сдвиге

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max},$$

можем записать

$$\tau_{max} - (-\tau_{max}) \le [\sigma],$$

или

$$\tau_{max} \le \frac{[\sigma]}{2}. \qquad (8.5)$$

Сравнивая выражения (8.4) и (8.5), заметим, что по III теории прочности

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Полученную величину допускаемых касательных напряжений $[\tau]$ используют при расчетах на прочность деталей, испытывающих деформацию сдвига, в соответствии с условием прочности (8.4).