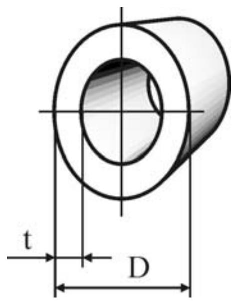
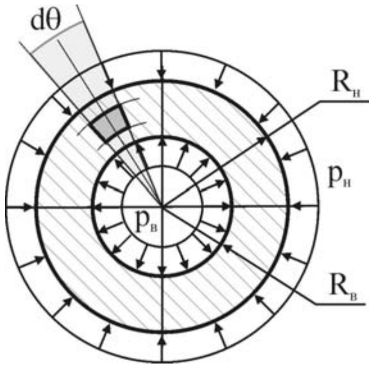
Специальные вопросы курса сопротивление материалов: расчет толстостенных цилиндров; расчет тонкостенных оболочек.

13. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

13.1. Расчет на прочность толстостенный цилиндров. Задача Ламе



Рассмотрим полый круглый цилиндр со стенкой постоянной толщины t подверженный действию внутреннего $p_в$ и наружного давлений $p_н$. Вследствие симметрии цилиндра и нагрузок, возникающие деформации и напряжения будут также симметричны относительно оси. При этом т о л с т о с т е н н ы м будем считать цилиндр, для которого $t \geq 0{,}1 \cdot D$ (где D – наружный диаметр). Решение таких задач было предложено французским механиком Ламе



Дано:

$p_н$, $p_в$, $R_н$, $R_в$, E, μ, G

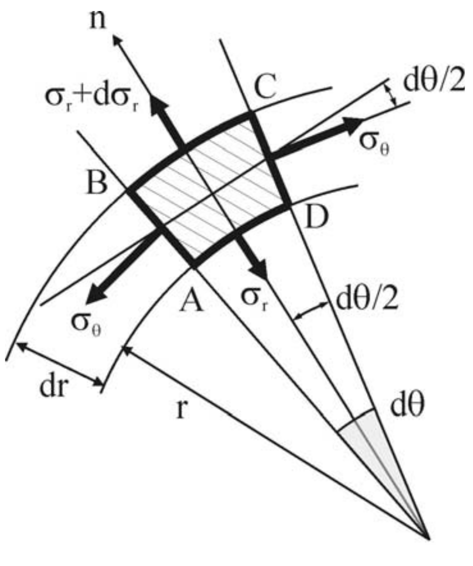
Определить:

Напряжения в стенках цилиндра

Решение

Статическая сторона задачи

Рассмотрим равновесие элементарной трапеции $ABCD$, выделенной в сечении цилиндра и соответствующей центральному углу $d\theta$. На боковых гранях трапеции (AB и CD) будут действовать о к р у ж н ы е напряжения σ_θ, на внутренней поверхности элемента (AD) – р а д и а л ь н ы е напряжения σ_r, а на внешней (BC) – радиальные напряжения $\sigma_r + d\sigma_r$. По причине осевой симметрии цилиндра и нагрузок перекашиваться элемент не будет, а значит, на его гранях не будут возникать и касательные напряжения. Следовательно, напряжения σ_θ и σ_r – главные, причем в силу указанной осевой симметрии сечения и нагрузок величина окружных напряжений σ_θ не зависит от полярного угла θ.



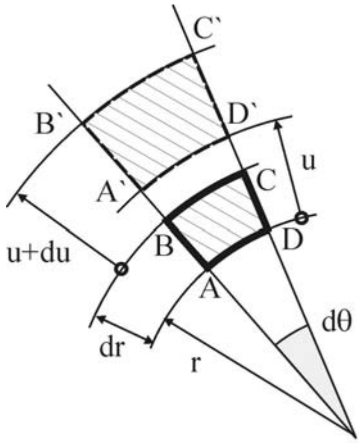
Запишем уравнения равновесия для элемента $ABCD$, спроецировав все силы на нормаль к цилиндрической поверхности:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \qquad -\sigma_r \cdot r \cdot d\theta + \left(\sigma_r + d\sigma_r\right) \cdot \left(r + dr\right) \cdot d\theta - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot dr \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0 .$$

Учитывая, что sin($d\theta$/2)≈$d\theta$/2, и пренебрегая бесконечно малыми величинами высоких порядков по сравнению с остальными, данное выражение можем переписать следующим образом:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \qquad (13.1)$$

Задача является один раз внутренне статически неопределимой.



Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформации элемента *ABCD*. Деформация элемента симметрична относительно оси и поэтому вызовет лишь радиальное перемещение всех точек цилиндра. При этом точки *A* и *D* сместятся в радиальном направлении на величину u в положение *A′* и *D′*, а точки *B* и *C* – на величину *u*+*du* в положение *B′* и *C′*.

Относительная р а д и а л ь н а я деформация грани *AB*:

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{BB' - AA'}{AB} = \frac{(u + du) - u}{dr} \Rightarrow \qquad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \qquad (13.2)$$

Относительная о к р у ж н а я деформация грани *AD*:

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{(r + u)\cdot d\theta - r\cdot d\theta}{r\cdot d\theta} \Rightarrow \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \qquad (13.3)$$

Физическая сторона задачи

Запишем закон Гука для плоского напряженного состояния:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_r + \mu\cdot\varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_\theta + \mu\cdot\varepsilon_r). \end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

Математическая сторона задачи

Подставив выражения (13.2) и (13.3) в формулы (13.4), получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left(\frac{du}{dr} + \mu\cdot\frac{u}{r}\right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left(\frac{u}{r} + \mu\cdot\frac{du}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13.5)$$

После подстановки выражений (13.5) в уравнение равновесие (13.1) получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами относительно u:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0.$$

Общее решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$u=C_1\cdot r+\frac{C_2}{r}. \tag{13.6}$$

Подставляя решение (13.6) в формулы (13.5), получим выражения для определения напряжений в точках на расстоянии r от оси цилиндра:

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)-C_2\cdot\frac{1-\mu}{r^2}\right];$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)+C_2\cdot\frac{1-\mu}{r^2}\right].$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий, а именно – на внешней поверхности цилиндра радиальные напряжения равны внешнему давлению, а на внутренней – внутреннему:

$$\begin{cases} r=R_\text{н} \quad \sigma_r=-p_\text{н} \Rightarrow \quad \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)-C_2\cdot\dfrac{1-\mu}{R_\text{н}^2}\right]=-p_\text{н}; \\ r=R_\text{в} \quad \sigma_r=-p_\text{в} \Rightarrow \quad \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot\left[C_1\cdot(1+\mu)-C_2\cdot\dfrac{1-\mu}{R_\text{в}^2}\right]=-p_\text{в}. \end{cases}$$

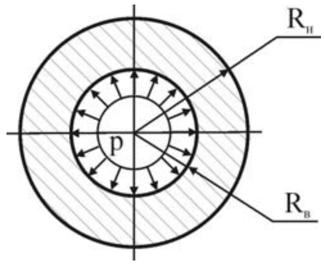
Решая полученные уравнения совместно, найдем, что

$$C_1=\frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{R_\text{в}^2\cdot p_\text{в}-R_\text{н}^2\cdot p_\text{н}}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2};$$

$$C_2=\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{R_\text{в}^2\cdot R_\text{н}^2\cdot(p_\text{в}-p_\text{н})}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2}.$$

Окончательно выражения для σ_θ и σ_r запишем следующим образом:

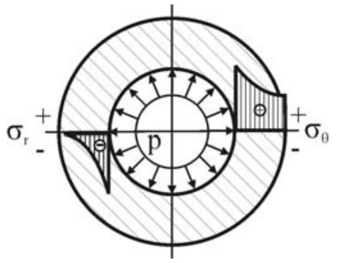
$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=\frac{R_\text{в}^2\cdot p_\text{в}-R_\text{н}^2\cdot p_\text{н}}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2}-\frac{R_\text{в}^2\cdot R_\text{н}^2\cdot(p_\text{в}-p_\text{н})}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2}\cdot\frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta&=\frac{R_\text{в}^2\cdot p_\text{в}-R_\text{н}^2\cdot p_\text{н}}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2}+\frac{R_\text{в}^2\cdot R_\text{н}^2\cdot(p_\text{в}-p_\text{н})}{R_\text{н}^2-R_\text{в}^2}\cdot\frac{1}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$



Расчет толстостенных цилиндров на прочность рассмотрим для частного случая, когда имеет место только внутреннее давление ($p_н$=0, $p_в$=p). Здесь выражения (13.7) приобретут следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{R_в^2}{R_н^2 - R_в^2} \cdot \left[1 - \frac{R_н^2}{r^2}\right] \cdot p;$$

$$\sigma_\theta = \frac{R_в^2}{R_н^2 - R_в^2} \cdot \left[1 + \frac{R_н^2}{r^2}\right] \cdot p.$$



Отметим, что радиальные напряжения σ_r в этом случае всюду сжимающие, а окружные σ_θ – всюду растягивающие (то есть σ_1=σ_θ, σ_3=σ_r) и достигают наибольших значений на внутренней поверхности цилиндра (r=$R_в$):

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = -p; \\ &\sigma_\theta = \frac{1 + \dfrac{R_в^2}{R_н^2}}{1 - \dfrac{R_в^2}{R_н^2}} \cdot p. \end{aligned}\right\} \qquad (13.8)$$

Запишем условие прочности по III теории прочности:

$$\sigma_{экв_{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].$$

Учитывая (13.8), найдем, что

$$\sigma_{экв_{III}} = \frac{2}{1 - \dfrac{R_в^2}{R_н^2}} \cdot p \le [\sigma].$$

Определим допускаемое внутреннее давление в цилиндре при безграничном увеличении толщины стенки, то есть при $R_н \to \infty$. В этом случае

$$\sigma_{экв_{III}} = 2 \cdot p \le [\sigma] \Rightarrow$$

$$[p] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

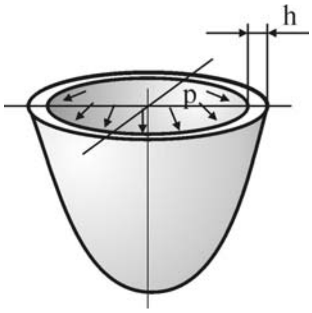
Как видим, начиная с определенного внутреннего давления [p], увеличение толщины стенки цилиндра перестает быть эффективным способом увеличения прочности. Дальнейшее увеличение прочности возможно либо за счет использования более прочных материалов (увеличение [σ]), либо за счет ме-

роприятий, направленных на создание внешнего давления на наружной поверхности цилиндра (см. формулу (13.7)).
Для этого можно, например, сделать цилиндр составным, при этом его внутренний слой необходимо запрессовать с натягом в наружный, за счет чего и создается внешнее давление на поверхности внутреннего слоя.

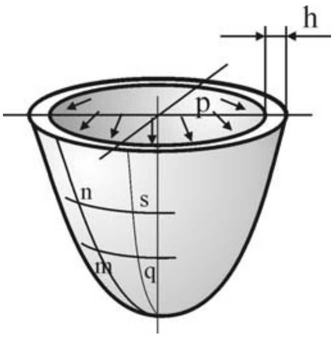
13.2. Расчет тонкостенных сосудов (оболочек). Уравнение Лапласа

В различных областях техники широко применяются такие элементы конструкций, которые с точки зрения их расчета на прочность могут быть отнесены к тонким оболочкам (цистерны, резервуары, баллоны и т. д.).

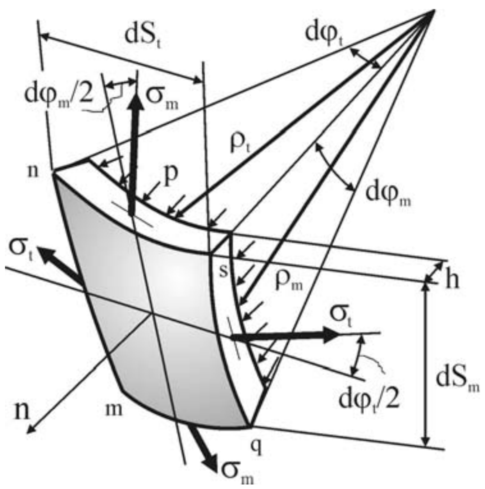
При расчете тонкостенных оболочек для упрощения решения задачи принимают ряд гипотез. Наиболее просто данная задача решается в рамках безмоментной теории оболочек, согласно которой из шести внутренних усилий отлична от нуля лишь нормальная к сечению сила (мембранная сила), а все моменты и поперечные силы равны нулю.



Рассмотрим сосуд, имеющий форму тела вращения и подверженный внутреннему давлению p, симметрично распределенному относительно оси вращения.



Выделим элемент $mnsq$, вырезанный из стенки сосуда двумя меридиональными сечениями mn и sq и двумя сечениями mq и ns, нормальными к меридиану. Из-за симметрии по граням элемента $mnsq$ будут действовать только нормальные напряжения: σ_m – меридиональные, σ_t – окружные, равнодействующая которых и будет уравновешивать внутреннее давление в сосуде.



Запишем уравнение равновесия элемента *mnsq*, проецируя все силы на нормаль *n* к его поверхности:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \qquad 2\sigma_m \cdot h \cdot ds_t \sin\frac{d\varphi_m}{2} + 2\sigma_t \cdot h \cdot ds_m \sin\frac{d\varphi_t}{2} - p \cdot ds_t ds_m = 0,$$

где h – толщина стенки; ds_t, ds_m – размеры элемента в окружном и меридиональном направлениях; $d\varphi_t$, $d\varphi_m$ – центральные углы в окружном и меридиональном направлениях, соответствующие граням элемента.

Учитывая, что ввиду малости углов

$$\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2,$$

а также, что

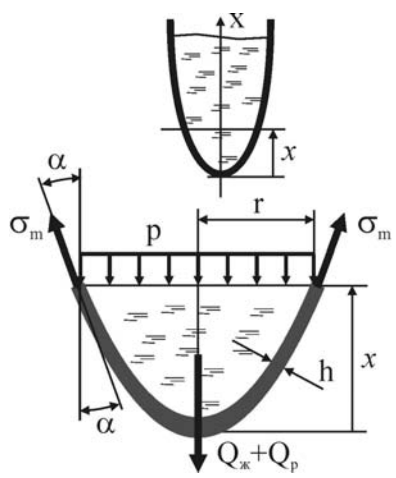
$$d\varphi_t = ds_t / \rho_t, \; d\varphi_m = ds_m / \rho_m,$$

перепишем уравнение равновесия следующим образом:

$$\sigma_m \cdot h \cdot ds_t \cdot \frac{ds_m}{\rho_m} + 2 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot ds_m \cdot \frac{ds_t}{\rho_t} - p \cdot ds_t \cdot ds_m = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}.$$

Это основное уравнение, связывающее напряжения для тонкостенных сосудов вращения, впервые дано Лапласом (у р а в н е н и е Л а п л а с а).



Второе уравнение получим, рассмотрев равновесие нижней части резервуара с сечением радиуса r, ортогональным к оси вращения сосуда. В этом случае давление жидкости в отрезанной части сосуда p, ее собственный вес $Q_ж$ и вес самого отсеченного резервуара $Q_р$ будут уравновешиваться меридиональными напряжениями на грани отсеченной части:

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \cos\alpha - p \cdot \pi \cdot r^2 - Q_ж - Q_р = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_m = \frac{p \cdot r}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha} + \frac{Q_ж + Q_р}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \cos\alpha}.$$

Данное выражение часто именуется у р а в н е н и е м р а в н о в е с и я з о н ы или просто у р а в н е н и е м з о н ы .

Зная уравнение меридиональной кривой можно найти α, r, $Q_ж$ и $Q_р$, а стало быть и σ_m.