

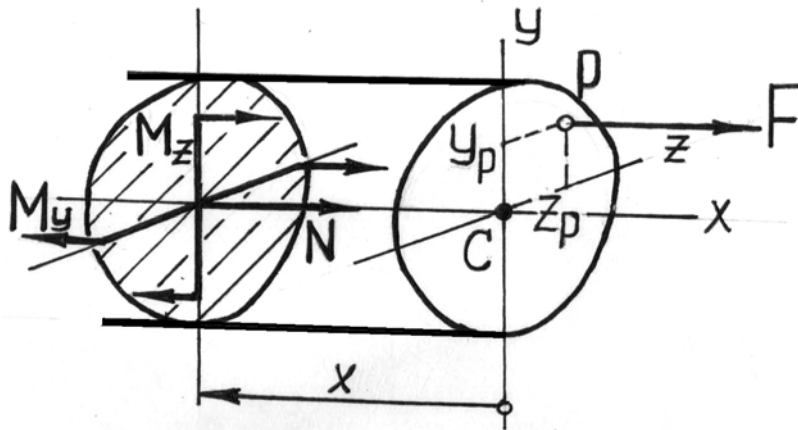
Сложное сопротивление. Внецентренное растяжение-сжатие. Определение внутренних усилий, напряжений при внецентренном растяжении. Определение положения нейтральной оси при внецентренном растяжении. Ядро сечения.

## 15. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

### 15.1. Общие понятия и определения

**Внецентренное растяжение (сжатие)** – нагружение, при котором брус растягивается силами, параллельными его оси и не проходящими через центр тяжести сечения бруса.

Точку  $P$  приложения силы при внецентренном растяжении (сжатии) будем называть *полюсом* силы. При этом расстояние от полюса  $P$  до продольной оси стержня ( $Ox$ ) именуется *эксцентриситетом*.



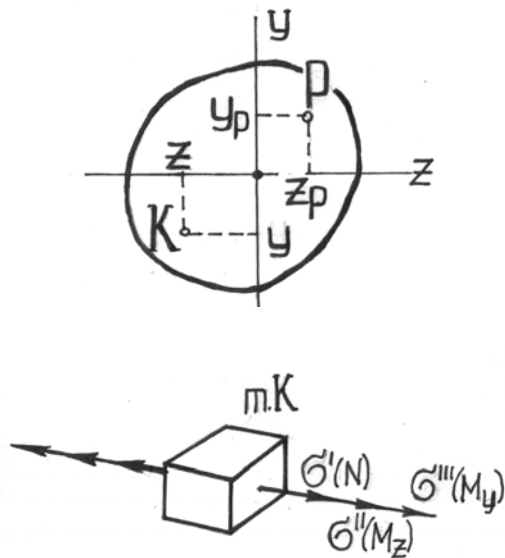
### 15.2. Определение внутренних усилий и напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

Рассмотрим стержень, который растягивается силой  $F$ , приложенной не в центре тяжести сечения стержня, а в некоторой точке  $P$  с координатами  $y_p$  и  $z_p$ . Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N = F; \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot z_p; \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot y_p.\end{aligned}$$

Как видим, из шести внутренних усилий в сечении стержня при внецентренном растяжении действует три – осевое усилие и два изгибающих момента. Таким образом, внецентренное растяжение может рассматриваться как сочетание простого растяжения и двух чистых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях (а потому и относится к сложному сопротивлению).

Для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (в произвольной точке  $K(y, z)$  сечения) найдем напряжения для каждого из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, а затем воспользуемся принципом суперпозиции и суммируем их:



а) нормальные напряжения при простом (центральном) растяжении

$$\sigma' = \frac{N}{A} = \frac{F}{A};$$

б) нормальные напряжения при изгибе

$$\sigma'' = \frac{M_z \cdot y}{J_z} = \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z};$$

$$\sigma''' = \frac{M_y \cdot z}{J_y} = \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y}.$$

Просуммировав, напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) найдем следующим образом:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{A \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{A \cdot z_p \cdot z}{J_y} \right).$$

Учитывая, что радиус инерции сечения  $i = \sqrt{J/A}$ , окончательно запишем

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right). \quad (15.1)$$

При использовании формулы (15.1) необходимо соблюдать традиционное правило знаков: растягивающая сила  $F$  берется со знаком «плюс», сжимающая – «минус», координаты точек  $P(y_p, z_p)$  и  $K(y, z)$  также подставляются со своими знаками «плюс» или «минус».

### 15.3. Определение положения нейтральной оси и величины максимальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

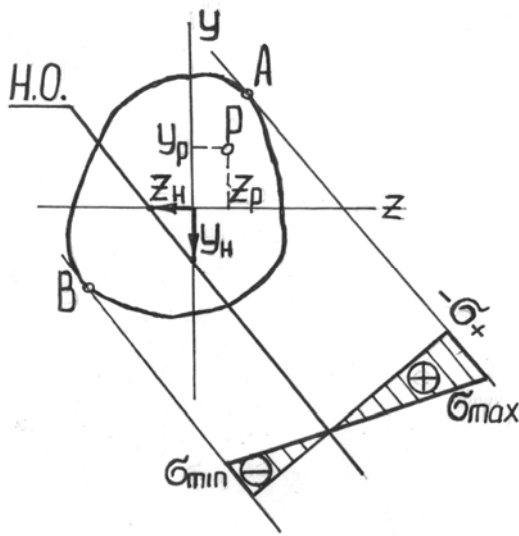
Так как по определению нейтральная ось есть линия, на которой нормальные напряжения равны нулю ( $\sigma=0$ ), то ее уравнение можно получить следующим образом:

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_p}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_p}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{y}{y_H} + \frac{z}{z_H} = 1. \quad (15.2)$$

Полученное выражение (15.2) представляет собой уравнение нейтральной оси – уравнение прямой в отрезках  $y_H$  и  $z_H$ , где

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad z_H = -\frac{i_y^2}{z_p}. \quad (15.3)$$



Анализ полученных соотношений дает возможность заключить следующее: 1) положение нейтральной оси не зависит от величины силы  $F$ ; 2) нейтральная ось лежит по другую сторону от полюса (относительно центра тяжести); 3) при перемещении полюса вдоль прямой нейтральной оси поворачивается относительно некоторой фиксированной точки (это легко доказать, если в уравнении (15.2) «зафиксировать» координаты  $y, z$  для рассматриваемой точки ( $y, z = const$ ), тогда переменные координаты полюса  $y_p$  и  $z_p$  должны подчиняться все тому же уравнению прямой).

Экстремальные нормальные напряжения будут возникать в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{extr} = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_p \cdot y_{уд.}}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_{уд.}}{i_y^2} \right). \quad (15.4)$$

При этом нейтральная ось может делить сечение на две части – сжатую и растянутую, тогда величину максимальных сжимающих или растягивающих напряжений найдем по формуле (15.4), учитывая правила знаков.

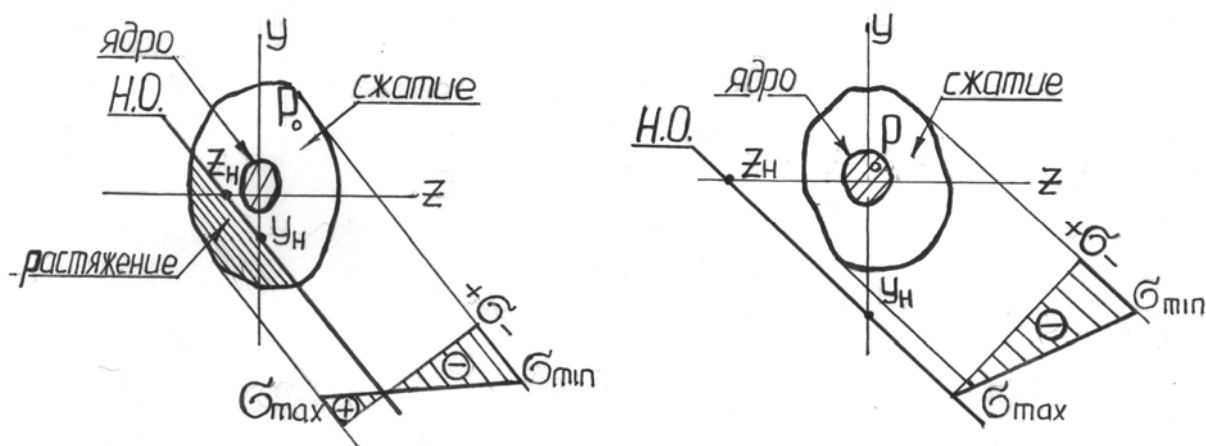
Так как в точках сечения возникает линейное напряженное состояние (действуют только нормальные напряжения), то условие прочности запишется в самом простом виде:

$$|\sigma|_{max} = \left| \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_p \cdot y_{max}}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_{max}}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma].$$

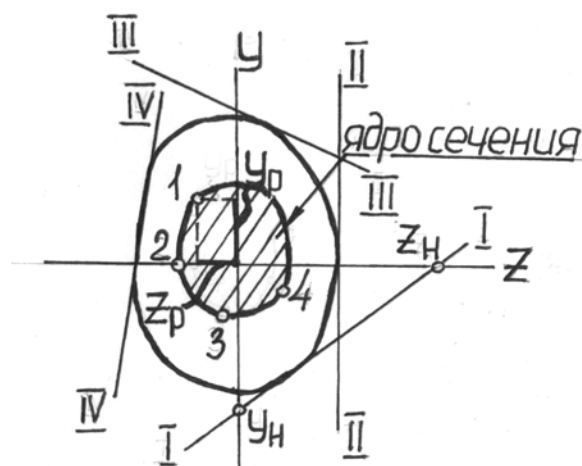
При внецентренном растяжении (сжатии) также имеем три задачи расчета на прочность (см. «Косой изгиб»).

## 15.4. Ядро сечения

Из соотношений, полученных для определения положения нейтральной оси, следует, что нейтральная ось в зависимости от координат полюса может пересекать рассматриваемое сечение или лежать вне его (например, если сила приложена в центр тяжести – имеем простое растяжение, а нейтральная ось удаляется в бесконечность). Представляет интерес найти такие положения полюса, когда нейтральная ось будет лишь касаться сечения, не пересекая его. В этом случае в сечении будут возникать напряжения одного знака, что особенно важно, если нагруженный материал плохо сопротивляется, например, растягивающим напряжениям (бетон, камень, чугун) и желательно чтобы вся конструкция работала лишь на сжатие.



**Ядро сечения** – область вокруг центра тяжести сечения, при приложении силы внутри которой, в сечении возникают напряжения одного знака.



Чтобы построить очертания (контур) ядра сечения, необходимо: 1) задать несколько положений нейтральной оси так, чтобы она лишь касалась контура сечения, но не пересекала его ни в одной точке; 2) определить для каждого из этих положений координаты  $y_n$  и  $z_n$  точек пересечения нейтральной линии с осями  $Oy$  и  $Oz$ ; 3) вычислить для каждого положения нейтральной оси координаты точки приложения силы ( $y_p$  и  $z_p$ ) по формулам [которые получим из (15.3)]

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n}.$$