17. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Одной из важнейших задач сопротивления материалов является задача определения деформаций конструкции под действием произвольной системы сил. Такая задача возникает при оценке жесткости и устойчивости элементов конструкции, при расчете деталей на динамические нагрузки, при раскрытии статической неопределимости системы.

До сих пор нами изучались некоторые частные случаи определения деформаций, пригодные при решении простейших задач. Далее рассмотрим общий метод определения деформаций любых упругих конструкций, в основе которого лежит основной принцип механики – закон сохранения энергии.

17.1. Потенциальная энергия деформации в общем случае нагружения

Сформулируем, прежде всего, закон сохранения энергии применительно к упругим системам при статическом нагружении.

Потенциальная энергия внешних сил U_P, действующих на тело, находящееся в равновесии, полностью переходит в потенциальную энергию деформации U этого тела:

$$U=U_P.$$

Так как мерой энергии, превратившейся в другой вид, является работа, произведенная силами, действующими на конструкцию, то предыдущую запись можем выразить несколько иначе.

Потенциальная энергия деформации U численно равна работе внешних сил A_P, проделанной ими при этой деформации:

$$U=A_P.$$

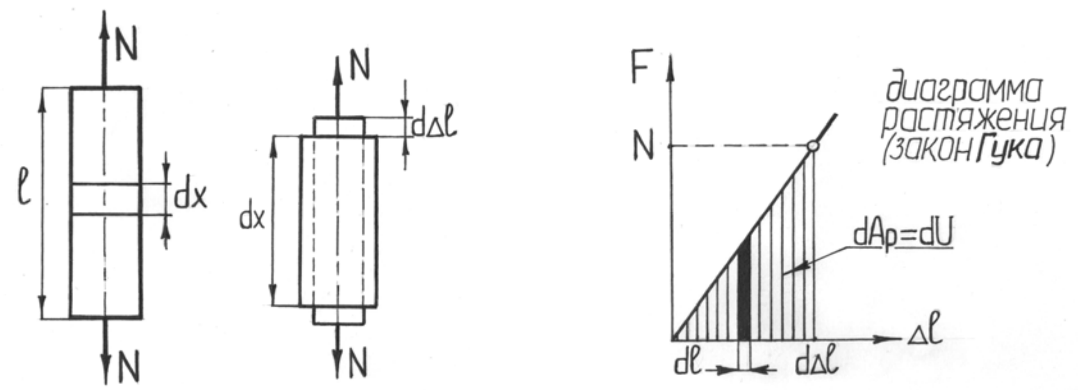
Далее рассмотрим возможности использования этого закона для определения деформаций системы, но сначала вспомним, как определяется потенциальная энергия деформации при простых видах сопротивления, и выведем общую формулу для расчета энергии деформации.

а) потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии)

Рассмотрим элемент стержня длиной dx, который под действием осевого усилия N получил удлинение $d\Delta l$.

Потенциальная энергия деформации элемента dx равна (см. рисунок)

$$dU = \frac{N \cdot d\Delta l}{2}.$$



Удлинение $d\Delta l$ найдем при помощи закона Гука

$$d\Delta l = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A}.$$

Подставим выражение закона Гука в формулу для потенциальной энергии

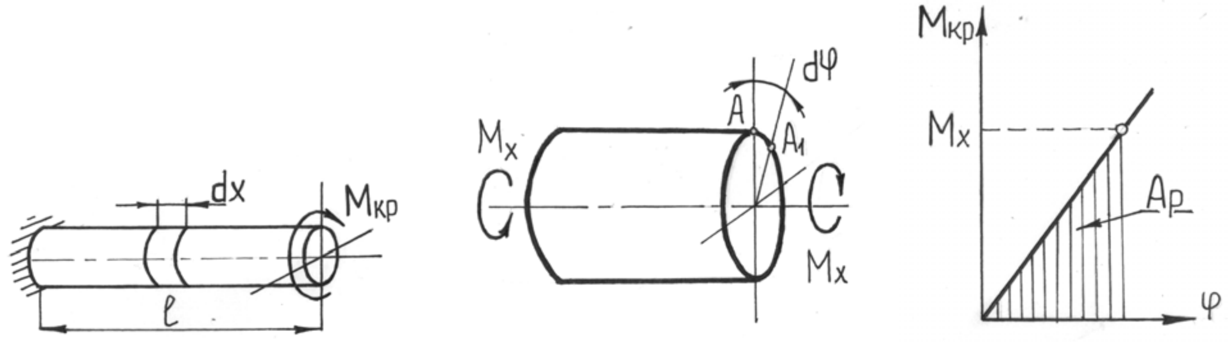
$$dU = \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A}.$$

Чтобы найти энергию деформации всего стержня, необходимо проинтегрировать последнее равенство по длине l стержня

$$U = \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A}.$$

б) потенциальная энергия деформации при кручении

Рассмотрим элемент вала длиной dx, который под действием крутящего момента M_x закрутился на угол $d\varphi$.



Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{M_x \cdot d\varphi}{2}.$$

Угол $d\varphi$ найдем при помощи закона Гука

$$d\varphi = \frac{M_x \cdot dx}{G \cdot J_p}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

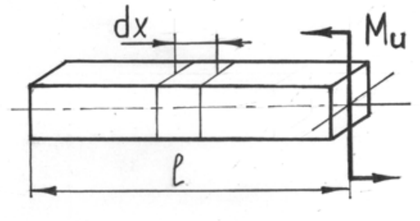
$$dU = \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p}.$$

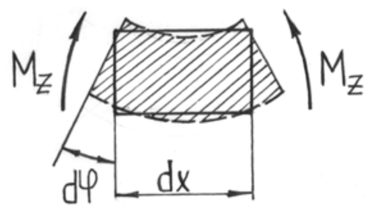
Чтобы найти потенциальную энергию деформации всего вала необходимо проинтегрировать последнее равенство по его длине l

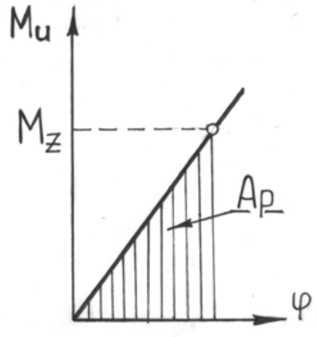
$$U = \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p}.$$

в) потенциальная энергия деформации при чистом изгибе

Рассмотрим элемент балки длиной dx, сечения которого под действием изгибающего момента $M_и$ повернулись на угол $d\varphi$.







Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{M_z \cdot d\varphi}{2}.$$

Угол $d\varphi$ найдем при помощи закона Гука при изгибе

$$d\varphi = \frac{M_z \cdot dx}{E \cdot J_z}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

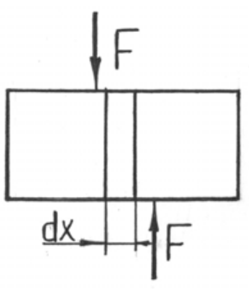
$$dU = \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}.$$

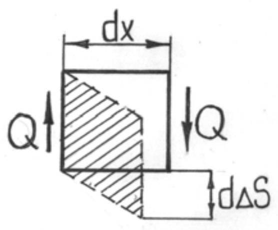
Чтобы найти потенциальную энергию деформации всей балки необходимо проинтегрировать последнее равенство по ее длине l

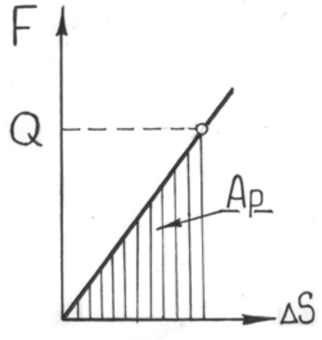
$$U = \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}.$$

г) потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге

Рассмотрим элемент балки длиной dx, сечения которого под действием поперечной силы Q сдвинулись на величину $d\Delta S$.







Потенциальная энергия деформации в этом случае

$$dU = \frac{Q \cdot d\Delta S}{2}.$$

Абсолютный сдвиг $d\Delta S$ найдем при помощи закона Гука

$$d\Delta S = \frac{Q \cdot dx}{G \cdot A}.$$

Подставим закон Гука в формулу для потенциальной энергии

$$dU = k \cdot \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A},$$

где k – коэффициент, зависящий от формы сечения.
Потенциальная энергия деформации всей балки

$$U = k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A}.$$

Потенциальную энергию деформации в самом общем случае нагружения найдем, используя принцип суперпозиции и учитывая, что для стержня с несколькими участками полученные интегралы необходимо просуммировать по всем участкам:

$$U = \sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n k_y \cdot \int_l \frac{Q_y^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} + \sum_n k_z \cdot \int_l \frac{Q_z^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} +$$

$$+ \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_y^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_y} + \sum_n \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}$$

17.2. Обобщенные силы и обобщенные перемещения

Из анализа выражений, полученных в предыдущем параграфе, можем сделать следующее заключение.
Потенциальная энергия деформации (или, с другой стороны, работа силы) численно равна половине произведения величины силового фактора на значение перемещения, соответствующего этой силе:

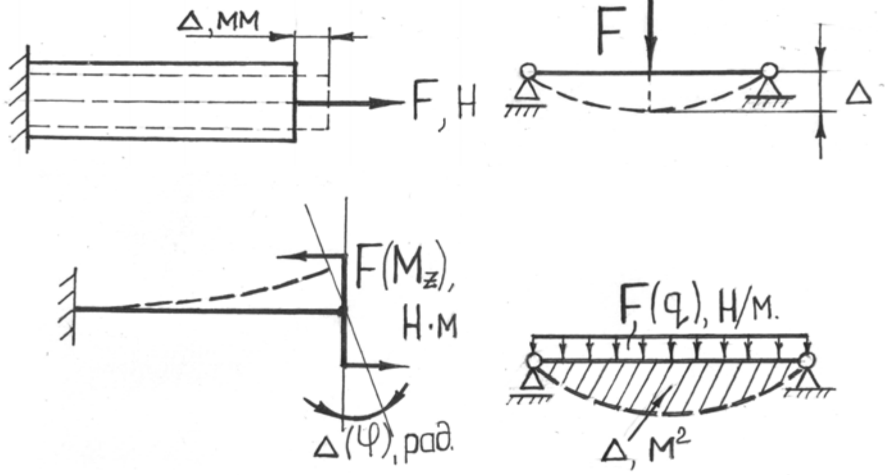
$$U\,(= A) = \frac{F \cdot \Delta}{2}. \qquad (17.1)$$

Таким образом, появляется возможность решать задачу в общем виде, не конкретизируя ни силовые факторы, ни перемещения. При этом вводят понятия обобщенной силы (F) и обобщенного перемещения (Δ).

Обобщенная сила – это сила или группа сил, которую удобно выделить при подсчете потенциальной энергии деформации.
Обобщенной силой может быть сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка или их сочетание.

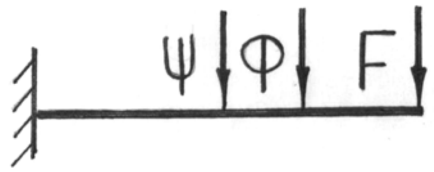
Обобщенное перемещение – это тот вид перемещения (линейное, угловое, объемное и т. д.), на котором рассматриваемая обобщенная сила производит работу.

Заметим, что выбирать обобщенное перемещение необходимо таким образом, чтобы произведение обобщенного перемещения на обобщенную силу представляло собой работу (размерность работы – Н·м). Таким образом, для сосредоточенной силы, принятой за обобщенную, обобщенным перемещением будет являться линейное перемещение точки приложения силы. Если в качестве обобщенной силы выбран момент, то обобщенным перемещением будет являться угол поворота сечения в точке приложения момента.



Далее рассмотрим возможности применения изложенного материала к определению перемещений в упругих системах.

17.3. Теорема Кастильяно

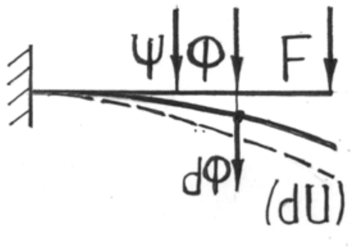


Рассмотрим упругую конструкцию (для простоты – консольную балку), нагруженную произвольной системой сил F, Φ, Ψ и т. д. При этом все силовые факторы будем считать независимыми переменными, то есть при изменении одного из них другие не изменяются.

Далее для вывода теоремы рассмотрим два возможных случая последовательного приложения указанных сил.

1-й случай

Все рассматриваемые силы F, Φ, Ψ приложим к балке одновременно. Очевидно, что балка под действием приложенной системы сил изогнется, при этом внешние силы совершат некоторую работу, которой (по закону сохранения энергии) будет соответствовать потенциальная энергия деформации системы $U(F, \Phi, \Psi)$.



Теперь дадим одной из переменных (например, Φ) бесконечно малое приращение $d\Phi$. В этом случае потенциальная энергия деформации также должна измениться на какую-то бесконечно малую величину dU.

Так как потенциальная энергия есть сложная функция нескольких независимых переменных, то это бесконечно малое приращение dU можно найти как

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi \, .$$

Таким образом, суммарная потенциальная в этом случае энергия

$$U^{*} = U + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi \, .$$

Рассмотрим теперь нагружение той же балки теми же силами, но приложенными в другой последовательности.

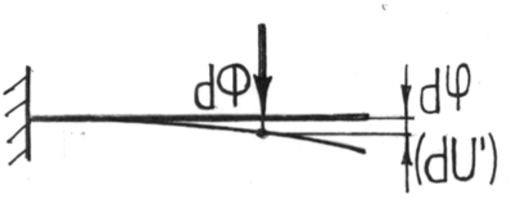
2-й случай

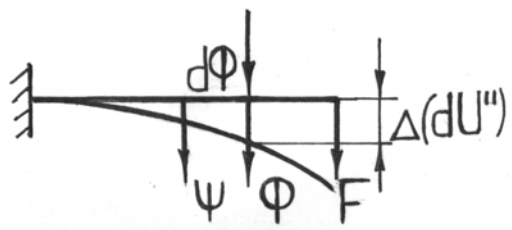
Приложим к балке сначала только бесконечно малую силу $d\Phi$. Под действием этой силы система деформируется и получит какое-то перемещение $d\varphi$, при этом сила $d\Phi$ совершит на этом перемещении работу [см. (17.1)]

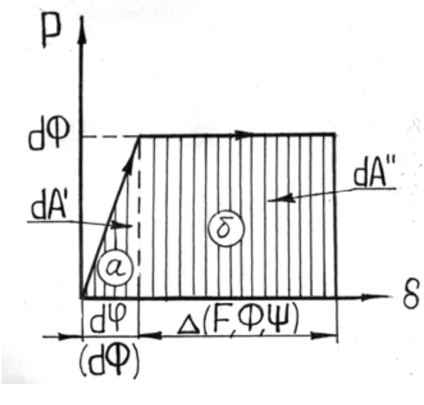
$$dA' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi \, .$$

Потенциальная энергия деформации системы в этом случае

$$dU' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi \, .$$







Теперь загрузим балку основной системой сил F, Φ, Ψ. Потенциальная энергия деформации балки под действием этой системы по-прежнему будет равна U (см. 1-й случай). При этом балка получит некоторое перемещение Δ.

Здесь необходимо учесть, что в этот момент сила $d\Phi$ совершит дополнительную работу dA'' на перемещении Δ (участок ***б*** на рисунке). Так как Δ не зависит от $d\Phi$, то работу dA'' силы в этом случае будем вычислять не по выражению (17.1), а следующим образом:

$$dA'' = d\Phi \cdot \Delta.$$

Таким образом, полную энергию деформации системы в этом случае можно вычислить так:

$$U'' = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi + U + d\Phi \cdot \Delta .$$

Очевидно, что энергия системы не должна зависеть от порядка приложения сил, а значит $U'=U''$. Тогда имеем право записать

$$U + \frac{\partial U}{\partial \Phi} \cdot d\Phi = \frac{1}{2} \cdot d\Phi \cdot d\varphi + U + d\Phi \cdot \Delta .$$

Исключая из этой формулы подобные слагаемые и пренебрегая бесконечно малыми высоких порядков, окончательно запишем

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi} .$$

Данное соотношение есть ничто иное, как математическая запись т е о р е м ы К а с т и л ь я н о, которая гласит следующее: частная производная от потенциальной энергии по обобщенной силе есть обобщенное перемещение, соответствующее этой силе.

Рассмотрим пример использования теоремы Кастильяно для определения деформаций упругой системы. Итак, для определения перемещения нам необходимо взять производную от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе:

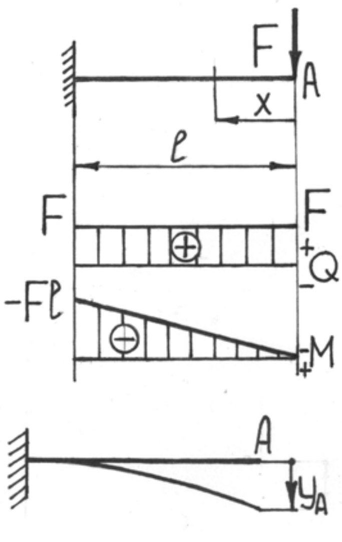
$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi} .$$

При этом сама потенциальная энергия будет определяться из выражения:

$$U = \sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{\text{ос}}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} .$$

Таким образом, окончательно можем записать

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sum_n \int_l \frac{N^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{\text{ос}}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} \right). \quad (17.2)$$



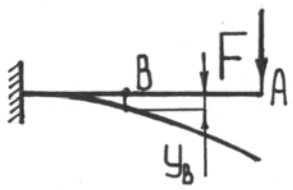
Пусть необходимо найти прогиб консольной балки под действием силы F. В этом случае в поперечных сечениях балки из шести внутренних усилий будут действовать только два – изгибающий момент $M_{\text{и}}= -F \cdot x$ и поперечная сила $Q=F$. Отметим, что при определении деформаций при изгибе действием поперечной силы, как правило, пренебрегают. Тогда, формулу (17.2) можем преобразовать так

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi} \int_0^l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{F^2 \cdot x^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2}{2 \cdot E \cdot J_z} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l \right) \Rightarrow$$

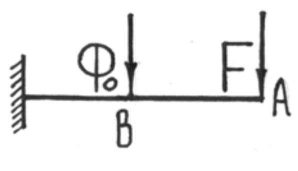
$$\Delta = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2 \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} \right) = \frac{2 \cdot F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} \quad \Rightarrow \quad y_A = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}.$$

Здесь знак «плюс» показывает, что направление перемещения совпадает с направлением действия силы.

17.4. Метод нулевой фиктивной силы



Недостатком метода Кастильяно является возможность определения перемещения только в тех точках, где приложена сила и только в направлении этой силы. Если в предыдущей задаче необходимо определить перемещение точки *B*, то напрямую использовать теорему Кастильяно нельзя – в точке *B* не действует никакая сила. Тогда поступим следующим образом.



Приложим в той точке, где нужно определить перемещение, обобщенную фиктивную силу Φ_0 (фиктивную, – так как ее на самом деле нет, а мы ее приложим). Вычислим потенциальную энергию деформации системы с учетом этой силы, а затем, в соответствии с (17.2), возьмем производную от энергии по этой фиктивной силе и получим формулу для определения перемещения. Для восстановления действительных условий нагружения достаточно в полученной формуле приравнять фиктивную силу нулю:

$$\Delta = \left(\frac{\partial U}{\partial \Phi_0} \right) \Bigg|_{\Phi_0 = 0} .$$

Таким образом, окончательно формула для определения перемещений упругой системы по методу нулевой силы выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \Phi_0} \left(\sum_n \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_n \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_p} + \sum_n \int_l \frac{M_и^2 dx}{2EJ_{ос}} + \sum_n k \int_l \frac{Q^2 dx}{2GA} \right) \Bigg|_{\Phi_0 = 0} . \quad (17.3)$$

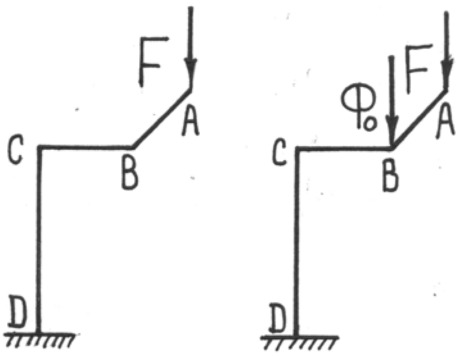
17.5. Метод Максвелла-Мора

Расчет по формуле (17.3) оказывается более удобным, если провести операцию дифференцирования непосредственно под знаком интеграла:

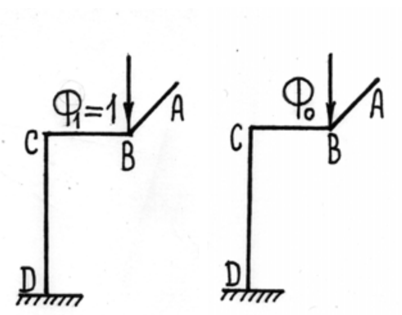
$$\Delta = \left(\sum_n \int_l \frac{\frac{\partial (N^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot E \cdot A} + \sum_n \int_l \frac{\frac{\partial (M_x^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot G \cdot J_p} + \sum_n \int_l \frac{\frac{\partial (M_и^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{ос}} + \sum_n k \cdot \int_l \frac{\frac{\partial (Q^2)}{\partial \Phi_0} \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A} \right) \Bigg|_{\Phi_0 = 0} .$$

Вспоминая правила дифференцирования сложной функции, эту формулу можем переписать так

$$\Delta = \left(\sum_n \int_l \frac{N \frac{\partial N}{\partial \Phi_0}}{E \cdot A} dx + \sum_n \int_l \frac{M_x \frac{\partial M_x}{\partial \Phi_0}}{G \cdot J_p} dx + \sum_n \int_l \frac{M_и \frac{\partial M_и}{\partial \Phi_0}}{E \cdot J_{ос}} dx + \sum_n k \int_l \frac{Q \frac{\partial Q}{\partial \Phi_0}}{G \cdot A} dx \right) \Bigg|_{\Phi_0 = 0} . \quad (17.4)$$



Рассмотрим некоторую конструкцию, загруженную силой F в точке A. Пусть необходимо найти вертикальное перемещение Δ в точке B. Чтобы воспользоваться формулой (17.4), приложим в точку B фиктивную силу Φ_0 и исследуем полученную систему. Для того чтобы найти частные производные и упростить выражение (17.4), проведем следующие рассуждения, при этом будем пользоваться принципом независимости действия сил.



1) Допустим, что в точке, где нам необходимо найти перемещение Δ, приложена фиктивная сила $\Phi_1=1$. Внутренние усилия, которые возникнут в балке от этой силы, обозначим

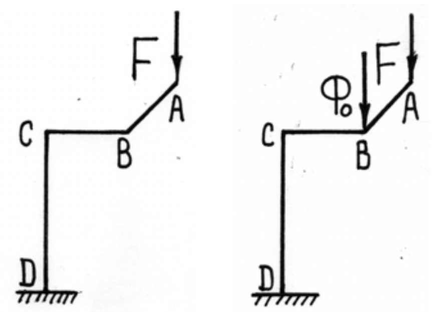
$$N_1,\ M_{x1},\ M_{и1},\ Q_1.$$

2) Очевидно, что если вместо силы $\Phi_1=1$ в ту же точку приложить какую-то другую силу Φ_0, то внутренние усилия от силы Φ_0 можно найти как

$$N_1\cdot \Phi_0,\ M_{x1}\cdot \Phi_0,\ M_{и1}\cdot \Phi_0,\ Q_1\cdot \Phi_0. \qquad (17.5)$$

3) Внутренние усилия от внешних нагрузок (без учета фиктивной силы Φ_0) обозначим следующим образом

$$N_P,\ M_{xP},\ M_{иP},\ Q_P. \qquad (17.6)$$



Окончательно внутренние усилия в сечениях системы с учетом всех сил (внешних и фиктивной), приложенных к ней, определим, просуммировав усилия (17.5) и (17.6):

$$N = N_P + N_1\cdot \Phi_0;$$
$$M_x = M_{xP} + M_{x1}\cdot \Phi_0;$$
$$M_и = M_{иP} + M_{и1}\cdot \Phi_0;$$
$$Q = Q_P + Q_1\cdot \Phi_0.$$

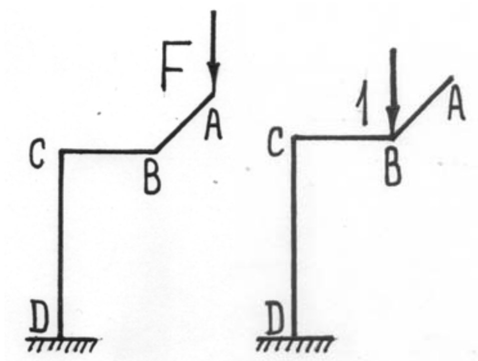
Теперь, для того чтобы воспользоваться формулой (17.4), необходимо взять частные производные от внутренних усилий, а затем приравнять фиктивную силу нулю ($\Phi_0=0$). Получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial \Phi_0} = N_1, \quad N_{(\Phi_0=0)} = N_p;\\
&\frac{\partial M_x}{\partial \Phi_0} = M_{x1}, \quad M_{x(\Phi_0=0)} = M_{x_p};\\
&\frac{\partial M_и}{\partial \Phi_0} = M_{и1}, \quad M_{и(\Phi_0=0)} = M_{иp};\\
&\frac{\partial Q}{\partial \Phi_0} = Q_1, \quad Q_{(\Phi_0=0)} = Q_p.
\end{aligned}\right\} \qquad (17.7)$$

Подставляя зависимости (17.7) в формулу (17.4), окончательно получим выражение для расчета перемещений упругой системы по методу Максвелла-Мора в виде:

$$\Delta = \sum_n \int_l \frac{N_P N_1}{E \cdot A} dx + \sum_n \int_l \frac{M_{xP} M_{x1}}{G \cdot J_p} dx + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}P} M_{\text{и}1}}{E \cdot J_{\text{ос}}} dx + \sum_n k \int_l \frac{Q_P Q_1}{G \cdot A} dx. \qquad (17.8)$$

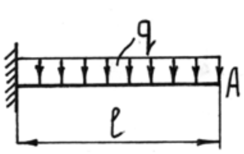
Таким образом, для того чтобы определить перемещения методом Максвелла-Мора, необходимо:



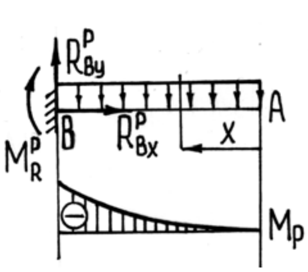
1) рассмотреть **«грузовую» систему**, нагруженную только внешними силами (без учета фиктивных сил), и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;
2) рассмотреть **«единичную» систему**, нагруженную только одной силой – единичной силой Φ_1=1, приложенной в том направлении и в той точке, где требуется найти перемещение, и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;
3) подставить найденные внутренние усилия в интеграл Максвелла-Мора (17.8) и найти перемещение.

Отметим, что для многих стержневых систем действием осевого усилия N и поперечных сил Q можно пренебречь. Тогда выражение (17.8) приводится к виду интеграла Мора, в котором учитываются только изгибающие и крутящие моменты, действующие на систему:

$$\Delta = \sum_n \int_l \frac{M_{xP} \cdot M_{x1}}{G \cdot J_p} \cdot dx + \sum_n \int_l \frac{M_{\text{и}P} \cdot M_{\text{и}1}}{E \cdot J_{\text{ос}}} \cdot dx.$$



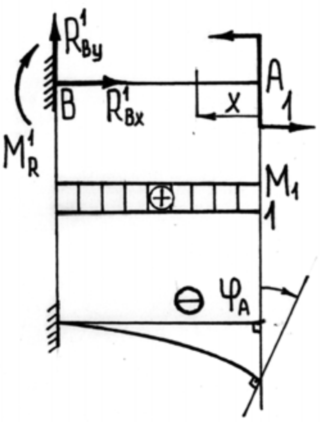
Рассмотрим пример определения перемещений методом Максвелла-Мора. Пусть необходимо определить угловое перемещение φ_A свободного конца консольной балки длиной l, нагруженной распределенной силой q.



Для определения перемещения необходимо рассмотреть две системы: 1) грузовую – нагруженную только внешними силами (нагрузка q и реакции от нее); 2) единичную – нагруженную единичной обобщенной силой, приложенной в точке и в направлении искомого перемещения (здесь также необходимо учитывать и реакции от этой силы). Так как нам необходимо найти угловое перемещение, то в качестве обобщенной единичной силы принимаем момент.

Применяя метод мысленных сечений, определим внутренние усилия, возникающие в сечениях каждой из систем:
а) грузовая система

$$M_{zP} = -\frac{q \cdot x^2}{2};$$



б) единичная система

$$M_{z_1} = 1 \cdot$$

Подставим эти усилия в интеграл Максвелла-Мора и возьмем его

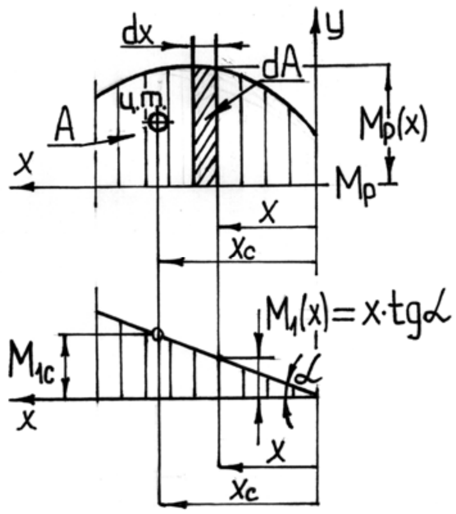
$$\varphi_A = \int_0^l \left(-\frac{q \cdot x^2 \cdot 1}{2 \cdot E \cdot J_z} \right) dx \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = -\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z} \cdot$$

Здесь знак «минус» показывает, что найденное перемещение φ_A и единичный момент направлены в разные стороны.

17.6. Способ Верещагина

При исследовании изгиба стержневых систем оказывается удобным для определения перемещений использовать графо-аналитический метод, предложенный А. Н. Верещагиным (1924).

Так как при определении линейных или угловых перемещений единичная нагрузка будет представлять собой либо силу, либо момент, то эпюра внутреннего изгибающего момента для единичной системы всегда будет ограничена прямыми линиями. В этом случае интеграл Мора можно вычислить следующим образом.



Пусть «грузовая» эпюра M_P имеет криволинейное очертание, а «единичная» эпюра M_1 представляет собой наклонную прямую (с углом наклона α). На «грузовой» эпюре M_P на расстоянии x от начала координат выделим элемент шириной dx. Площадь этого элемента, очевидно, равна $dA=M_P{\cdot}dx$. «Единичный» момент M_1, соответствующий координате x, можно найти через тангенс угла α:

$$M_1 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \, .$$

Запишем теперь интеграл Мора и подставим в него найденные соотношения:

$$\int M_P \cdot M_1 \cdot dx = \int dA \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int x \cdot dA \, . \qquad (17.9)$$

Выражение под знаком последнего интеграла есть ничто иное, как статический момент «грузовой» эпюры относительно оси Oy

$$S_y = \int x \cdot dA \, .$$

С другой стороны, статический момент можно найти как произведение площади на координату центра тяжести «грузовой» эпюры

$$S_y = x_C \cdot A \, .$$

В этом случае интеграл (17.9) можно переписать так:

$$\int M_P \cdot M_1 \cdot dx = A \cdot x_C \cdot \operatorname{tg} \alpha \, .$$

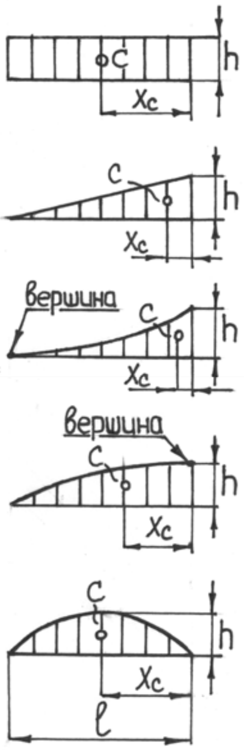
Произведение $x_C \cdot \operatorname{tg} \alpha$ представляет собой величину единичного момента в точке с координатой x_C:

$$M_{1_C} = x_C \cdot \text{tg}\,\alpha\,.$$

Таким образом, выражение для определения перемещения балки при изгибе по методу Верещагина запишем в следующем виде:

$$\Delta = \sum_n \frac{A \cdot M_{1_C}}{E \cdot J_{\text{ос}}}, \tag{17.10}$$

где A – площадь «грузовой» эпюры M_P на данном участке; M_{1_C} – величина «единичного» момента под центром тяжести «грузовой» эпюры на данном участке.



Для удобства использования выражения (17.10) запишем формулы для определения площади и координаты центра тяжести для некоторых характерных эпюр:

а) прямоугольник – $A=h{\cdot}l$, $x_C=l/2$;

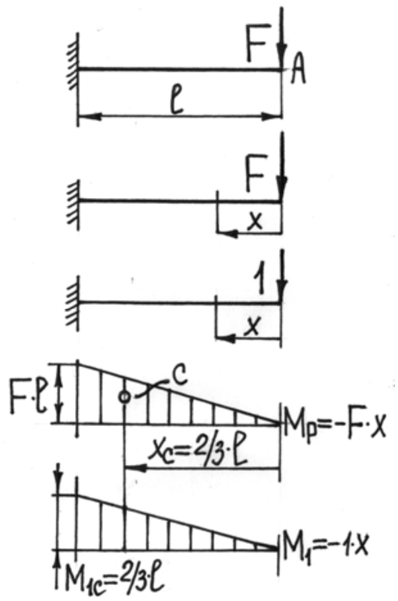
б) треугольник – $A=h{\cdot}l/2$, $x_C=l/3$;

в) вогнутая парабола – $A=h{\cdot}l/3$, $x_C=l/4$;

г) выпуклая парабола – $A=2{\cdot}h{\cdot}l/3$, $x_C=3{\cdot}l/8$;

д) полная парабола – $A=2{\cdot}h{\cdot}l/3$, $x_C=l/2$.

В качестве примера рассмотрим консольную балку длиной l, нагруженную на конце силой F. Определим прогиб свободного края балки.



Проанализируем две системы грузовую, – нагруженную только силой F, и единичную, – нагруженную единичной силой в направлении искомого перемещения.

Построим для каждой из систем эпюру внутреннего изгибающего момента (M_P и M_1).

Площадь «грузовой» эпюры найдем как

$$A = F{\cdot}l{\cdot}l/2.$$

Значение «единичного» момента под центром тяжести «грузовой» эпюры определим из пропорции

$$M_{1_C} = 2 \cdot l/3\,.$$

Тогда искомое перемещение

$$\Delta = \frac{A \cdot M_{1_C}}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} \qquad \Rightarrow \qquad y_A = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}\,.$$

Знак «плюс» показывает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной силы.