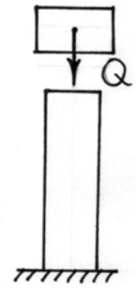
21. УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

21.1. Техническая теория удара

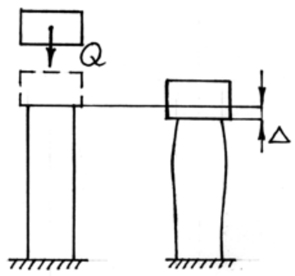


Удар – взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно изменяются скорости этих тел и силы взаимодействия между ними.

Удар в реальных конструкциях возникает при соприкосновении деталей, движущихся с разной скоростью.

Отметим, что точная теория удара связана с изучением местных деформаций в окрестности контакта (контактная задача), а также явления волнового распространения деформаций в упругом теле и оказывается сложной задачей.

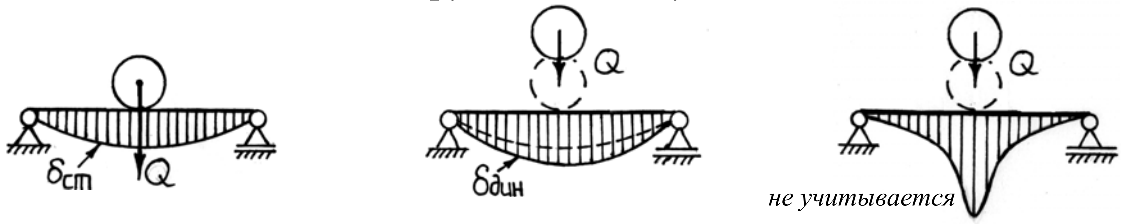
Будем рассматривать приближенную (техническую) теорию удара, основанную на следующих допущениях:



1) удар является неупругим, то есть ударяющее тело не отскакивает от конструкции, а перемещается вместе с ней;

2) предполагается, что напряжения, возникающие в системе от удара, не превышают предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, а потому можно пользоваться законом Гука;

3) предполагается, что эпюра динамических перемещений $\delta_{дин}$ системы от груза Q при ударе в любой момент времени подобна эпюре перемещений $\delta_{ст}$, возникающих от этого же груза, но действующего статически.



Таким образом, предполагается, что $\delta_{дин} = k_д \cdot \delta_{ст}$, а местные эффекты (см. рисунок) не учитываются.

Рассмотрим систему (двухопорную балку), на которую падает груз весом Q. При этом в результате удара конструкция получит некоторую «динамическую» деформацию $\delta_{дин}$.

Если тот же груз Q действует на систему статически (груз лежит на балке), то ее деформация будет равна $\delta_{ст}$.

Динамический коэффициент в этом случае найдем так:

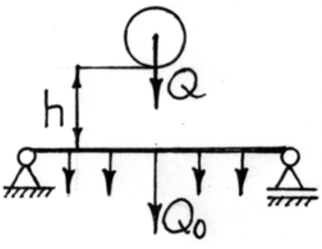
$$k_д = \frac{\delta_{дин}}{\delta_{ст}}.$$

Так как в соответствии с законом Гука напряжения прямо пропорциональны деформациям, то можем записать также

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}}.$$

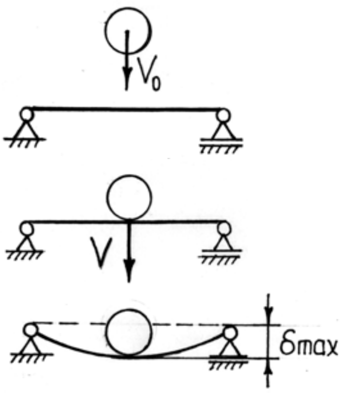
Таким образом, для того чтобы найти напряжения в системе при ударе, необходимо рассмотреть ту же конструкцию, нагруженную теми же силами с т а т и ч е с к и , найти напряжения в элементах конструкции в этом случае, а затем увеличить найденные напряжения на динамический коэффициент.

21.2. Динамический коэффициент при ударе



Определим динамический коэффициент при вертикальном ударе с учетом массы системы. Для этого рассмотрим общий случай удара с учетом массы ударяющего тела (m=Q/g, Q – вес ударяющего груза) и распределенной массы конструкции, испытывающей удар ($m_{\text{о}}$=$Q_{\text{о}}$/g, $Q_{\text{о}}$ – вес системы).

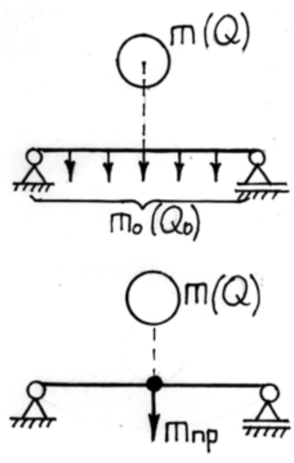
При рассмотрении удара будем различать следующие три момента времени:



1) момент непосредственно перед соприкосновением ударяющего груза Q с упругой системой $Q_{\text{о}}$, при этом скорость груза равна $V_{\text{о}}$, а скорость системы равна нулю;
2) момент соприкосновения груза с системой, при этом скорость груза изменяется и равна скорости V движения системы в точке удара;
3) момент, когда упругая система получает наибольшее перемещение, а скорости груза и системы становятся равными нулю.

Определение динамического коэффициента будем вести в несколько этапов.

Понятие о приведенной массе ударяемой системы

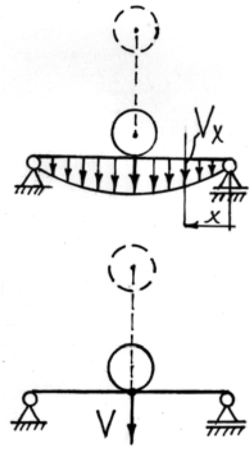


Упругую систему с распределенной массой ($m_{\text{о}}$=$Q_{\text{о}}$/g, $Q_{\text{о}}$ – вес системы) удобно мысленно заменить системой, обладающей теми же упругими свойствами, но с п р и в е д е н н о й массой $m_{\text{пр}}$, сосредоточенной в точке соударения

$$m_{\text{пр}} = \beta \cdot m_{\text{о}} = \beta \cdot \frac{Q_{\text{о}}}{g},$$

где β – коэффициент приведения, который зависит от закона изменения скоростей точек системы по ее объему (всегда β<1).

Величина коэффициента β определяется по признаку равенства кинетической энергии системы с исходной распределенной массой $m_{\text{о}}$ и приведенной массой $m_{\text{пр}}$, то есть приведенная масса $m_{\text{пр}}$ при скорости V должна иметь ту же кинетическую энергию, что и система массой $m_{\text{о}}$ с учетом неравномерного распределения скоростей ее точек по объему:



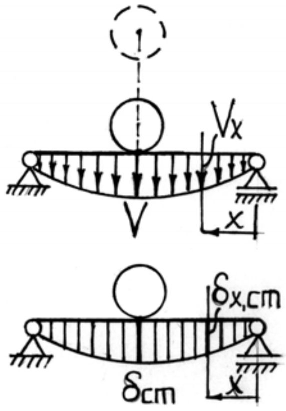
$$\frac{m_{\text{пр}}\cdot V^2}{2}=\int\limits_{m_{\text{о}}}\frac{dm_{\text{о}}\cdot V_x^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \beta\cdot\frac{Q_{\text{о}}}{g}\cdot\frac{V^2}{2}=\int\limits_{Q_{\text{о}}}\frac{dQ_{\text{о}}\cdot V_x^2}{2\cdot g}$$

где $dQ_{\text{о}}$ ($dm_{\text{о}}$) – вес (масса) произвольной элементарной частицы системы, движущейся в первый момент после удара со скоростью V_x; V – скорость точки соударения тел.

Таким образом, найдем

$$\beta=\frac{\int\limits_{Q_{\text{о}}}V_x^2\cdot dQ_{\text{о}}}{V^2\cdot Q_{\text{о}}}.$$

В соответствии с принятыми нами гипотезами, можем записать, что скорости различных точек системы соотносятся так же, как соотносятся перемещения этих точек под действием статически приложенных нагрузок:



$$\frac{V_x}{V}=\frac{\delta_{x,\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}},$$

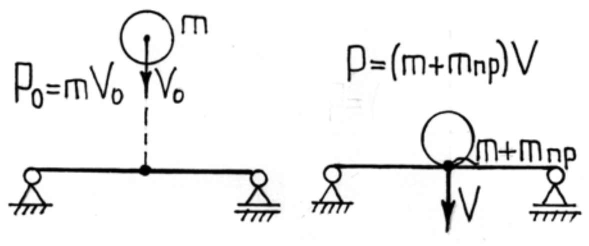
где $\delta_{x,\text{ст}}$ – статическая деформация произвольной точки системы (движущейся при ударе со скоростью V_x); $\delta_{\text{ст}}$ – статическая деформация точки приложения нагрузки (движущейся при ударе со скоростью V).

Тогда коэффициент β можно найти так:

$$\beta=\frac{\int\limits_{Q_{\text{о}}}\delta_{x,\text{ст}}^2\cdot dQ_{\text{о}}}{\delta_{\text{ст}}^2\cdot Q_{\text{о}}}. \qquad (21.1)$$

Скорость движения точки соударения в момент удара

Скорость V точки соударения тел определяется по теореме об изменении **количества движения**, согласно которой при неупругом ударе количество движения до удара равно количеству движения после удара (см. курс теоретической механики), то есть



$$m\cdot V_{\text{о}}=\left(m+m_{\text{пр}}\right)\cdot V \quad\Rightarrow$$

$$\frac{Q}{g}\cdot V_{\text{о}}=\frac{Q+\beta\cdot Q_{\text{о}}}{g}\cdot V \quad\Rightarrow$$

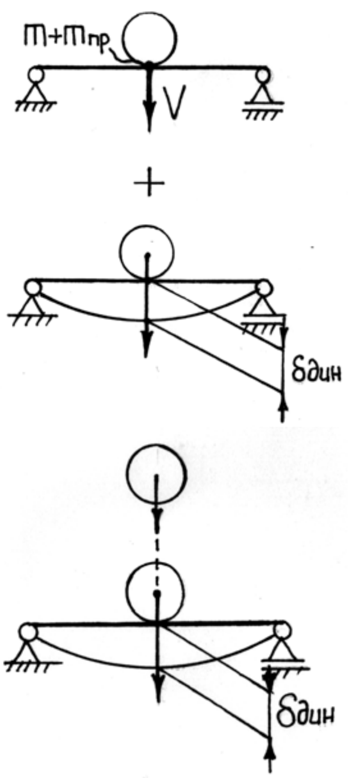
$$V=V_{\text{о}}\cdot\frac{Q}{Q+\beta\cdot Q_{\text{о}}}=V_{\text{о}}\cdot\frac{1}{1+\beta\cdot\dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}}. \qquad (21.2)$$

Формула для динамического коэффициента

Запишем закон сохранения энергии для системы, испытывающей удар, согласно которому сумма кинетической энергии T системы в момент удара и работы A по перемещению груза Q на величину динамического перемещения $\delta_{\text{дин}}$ должна равняться потенциальной энергии динамической деформации системы

$$T + A = U_{\text{дин}}. \qquad (21.3)$$

Найдем кинетическую энергию системы в момент удара:



$$T = \frac{\left(m + m_{\text{пр}}\right) \cdot V^2}{2} = \frac{Q + \beta \cdot Q}{g} \cdot \frac{V^2}{2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости V из формулы (21.2), получим

$$T = \frac{Q + \beta \cdot Q}{g} \cdot \frac{V_{\text{о}}^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}\right)^2} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{V_{\text{о}}^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}\right)}.$$

Работа груза Q на перемещении $\delta_{\text{дин}}$:

$$A = Q \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

Найдем потенциальную энергию деформации системы

$$U_{\text{дин}} = \frac{Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}}{2}.$$

Величину динамической нагрузки $Q_{\text{дин}}$ можно определить, зная величину статической нагрузки Q и динамический коэффициент $k_{\text{д}}$: $Q_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \cdot Q$.

Подставляя найденные величины в выражение (21.3) и учитывая, что динамическое перемещение $\delta_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}}$, получим

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{V_{\text{о}}^2}{2 \cdot \left(1 + \beta \cdot \dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}\right)} + Q \cdot k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}} = \frac{k_{\text{д}}^2 \cdot Q \cdot \delta_{\text{ст}}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$k_{\text{д}}^2 \cdot \delta_{\text{ст}} - 2 \cdot k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}} - \frac{V_{\text{о}}^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \beta \cdot \dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}} = 0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, найдем

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_{\text{о}}^2}{g \cdot \delta_{\text{ст}} \cdot \left(1 + \beta \cdot \dfrac{Q_{\text{о}}}{Q}\right)}}.$$

Если учесть, что груз падает с высоты h, то можем записать

$$V_{\text{о}}^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Тогда

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст} \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{Q_о}{Q}\right)}}\,. \qquad (21.4)$$

Таким образом, для расчета конструкции при ударном нагружении необходимо определить напряжения и деформации в системе, как если бы она была загружена статической нагрузкой равной по величине нагрузке динамической (ударной). Затем найденные «статические» величины домножаются на динамический коэффициент (21.4):

$$\sigma_д = k_д \cdot \sigma_{ст}; \quad \delta_д = k_д \cdot \delta_{ст}.$$

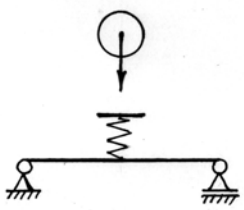
Проанализируем формулу (21.4):

1) Мгновенная нагрузка ($h=0$ или $V_о=0$). При подстановке этих данных в формулу (21.4) получим, что $k_д$=2. То есть, даже если груз мгновенно устанавливается на конструкцию с нулевой высоты или с нулевой скоростью, то напряжения в системе превышают соответствующие статические величины в два раза!

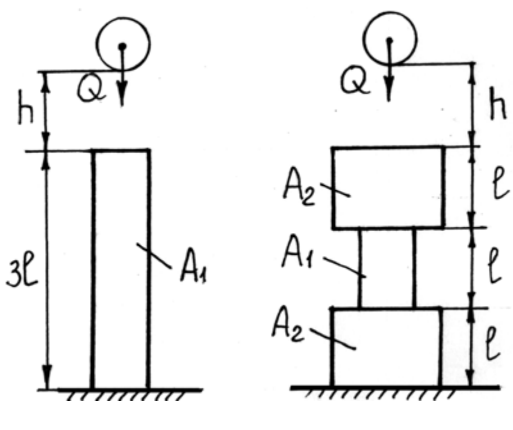
2) Расчет без учета массы груза по сравнению с массой конструкции ($Q_о \ll Q$, то есть $Q_о/Q \approx 0$). В этом случае формула (21.4) приобретает следующий более простой вид, который наиболее часто используется в расчетной практике:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст}}}\,. \qquad (21.5)$$

3) Способ снижения динамического коэффициента. Как видим из формул (21.4) и (21.5), едва ли не единственным способом снижения динамического коэффициента является увеличение величины $\delta_{ст}$ – деформации конструкции при статическом нагружении. То есть при проектировании конструкций, работающих на удар, необходимо стремиться к увеличению податливости системы путем увеличения длины элементов конструкции, установкой буферных пружин (амортизаторов), замены материала другим, с меньшим модулем упругости («постелить соломку»), выравниванием площадей поперечного сечения.



Пример 1. Продольный удар



Проанализируем ударное воздействие груза весом Q при падении с высоты h на две колонны – ступенчатую с площадями ступеней A_1 и A_2 и длиной каждой из ступеней l, а также равномерную площадью A_1 и длиной $3 \cdot l$.

Необходимо сравнить динамические коэффициенты.

Решение

Рассмотрим статическое (неударное) приложение груза Q к колоннам и найдем статические напряжения и деформации каждой из них.

а) статические значения максимальных напряжений

$$\sigma_{1_{\text{ст}}}^{max} = \frac{Q}{A_1}; \quad \sigma_{2_{\text{ст}}}^{max} = \frac{Q}{A_1}.$$

б) статические значения абсолютных деформаций

$$\delta_{1_{\text{ст}}} = \frac{Q\cdot(3\cdot l)}{E\cdot A_1}; \quad \delta_{2_{\text{ст}}} = \frac{Q\cdot l}{E\cdot A_1} + \frac{Q\cdot(2\cdot l)}{E\cdot A_2}.$$

Заметим, что $\delta_{1\text{ст}} > \delta_{2\text{ст}}$, так как $A_1 < A_2$.

в) динамический коэффициент по формуле (21.5)

$$k_{1_{\text{д}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot h}{\delta_{1\text{ст}}}}; \quad k_{2_{\text{д}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot h}{\delta_{2\text{ст}}}}.$$

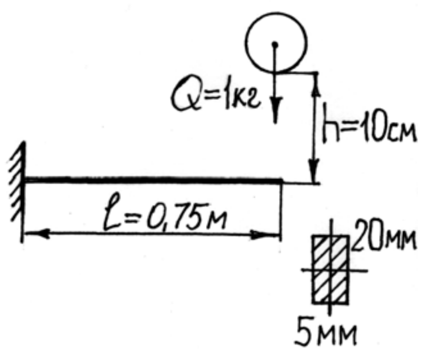
Заметим, что $k_{1_{\text{д}}} < k_{2_{\text{д}}}$, так как $\delta_{1\text{ст}} > \delta_{2\text{ст}}$.

г) динамические значения напряжений и деформаций

$$\sigma_{1_{\text{д}}} = k_{1_{\text{д}}}\cdot\sigma_{1\text{ст}}; \quad \sigma_{2_{\text{д}}} = k_{2_{\text{д}}}\cdot\sigma_{2\text{ст}}; \quad \delta_{1_{\text{д}}} = k_{1_{\text{д}}}\cdot\delta_{1\text{ст}}; \quad \delta_{2_{\text{д}}} = k_{2_{\text{д}}}\cdot\delta_{2\text{ст}}.$$

Как видим, несмотря на то, что первая колонна имеет меньшую площадь сечения, динамические напряжения в ней будут меньше, чем в ступенчатой колонне, так как поглощение энергии удара во втором случае происходит не по всей длине стержня, а на наиболее ослабленном участке.

Пример 2. Ударный изгиб

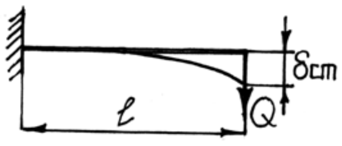


Проанализируем ударное воздействие груза весом Q=1 кг при падении с высоты h=10 см на консольно закрепленную балку длиной l=0,75 м прямоугольного сечения 5×20 мм. Материал балки – сталь, [σ]=160 МПа.

Необходимо определить динамический коэффициент, напряжения и деформации в балке. Проверить на прочность.

Решение

Рассмотрим статическое (неударное) приложение груза Q к балке и найдем статические напряжения и деформации.



а) наибольшие статические значения напряжений

$$\sigma_{\text{ст}}^{max} = \frac{Q \cdot l}{W_z} = \frac{10 \cdot 0,75}{\left(\frac{0,005 \cdot 0,02^2}{6}\right)} = 22,5 \text{ МПа} .$$

б) статические значения деформаций конца балки

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} = \frac{10 \cdot 0,75^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{0,005 \cdot 0,02^3}{12}\right)} = 2,1 \text{ мм} .$$

в) динамический коэффициент по формуле (21.5)

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{0,0021}} = 10,79 .$$

г) динамические значения напряжений и деформаций

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} = 10,79 \cdot 22,5 = 242,74 \text{ МПа} > [\sigma];$$

$$\delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \delta_{\text{ст}} = 10,79 \cdot 2,1 = 22,7 \text{ мм} .$$

Как видим, динамические значения превышают не только соответствующие статические величины, но и допускаемые значения – прочность не обеспечена!