В.П.БАГИЧУТОВ, Н.В.ВОЛОХОВА

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

ВОЛГОГРАД 1995

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.П.Багмутов, Н.В.Волохова

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Волгоград 1995

УДК 620.10

Статически неопределимые стержневые системы: Учебное пособие / В.П.Багмутов, Н.В.Волохова. - ВолгГТУ, Волгоград, 1995. - 43 с.
JSBN 5 - 230 - 03704 - 0

Содержит справочные сведения, необходимые при решении статически неопределимых стержневых систем и задания к расчетно-проектировочной работе.

Предназначено для студентов механических специальностей.

Ил. 13. Табл. 2. Библиогр. - 4 назв.

Рецензенты: Шапочкин В.И., Краев А.С.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета

© Волгоградский государственный технический университет, 1995

JSBN 5-230-03704-0

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Выполнение расчетов на прочность и жесткость статически неопределимой стержневой системы с учетом условий ее изготовления и эксплуатации.

Система, усилия в которой нельзя определить при помощи одних только уравнений равновесия, называется *статически неопределимой*.

Порядок статической неопределимости равен числу лишних неизвестных, т.е. разности между числом подлежащих определению усилий и числом независимых уравнений равновесия.

Переход от статически определимой к статически неопределимой системе стержней чаще всего вызван необходимостью увеличить жесткость и прочность конструкции.

Распределение усилий в статически неопределимой системе при заданной системе внешних сил зависит от соотношения жесткостей стержней, величины и знака отклонений длин стержней от своих номинальных размеров (т.е. зазоров и натягов) и изменения температур стержней. Это обстоятельство используется при оптимизации статически неопределимых стержней.

Работа предусматривает:

проведение проверочного расчета на прочность элементов заданной расчетной схемы;

выполнение проектировочного расчета по подбору площадей сечений при заданном соотношении между ними.

Замечание: выполнение учебно-исследовательской работы (УИРС) по анализу работоспособности конструкции с учетом возможных изменений условий ее изготовления и эксплуатации или оптимизации стержневой системы в свете выбранного критерия оптимальности осуществляется в рамках индивидуального задания на базе данных се-

местровых задач.

При любой постановке задачи отчет по работе должен содержать решение по определению внутренних усилий в общем (буквенном) виде и в такой форме, которая представляется исполнителю наиболее удобной для расчетов на ЭВМ при проведении УИРС.

2. ПЛАН РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ

2.1. В первом пункте решения задачи составляется максимально возможное **число независимых уравнений равновесия** (т.е. рассматривается **статическая сторона решения задачи**). При определении внутренних усилий используется, как обычно, метод мысленных сечений.

Полагаем, что система стержней уже собрана в конструкцию, поэтому зазоры и натяги на этом этапе в расчетных схемах не показываем.

> При проведении УИРС желательно получить решение по определению внутренних усилий в аналитической и, по возможности, в более компактной форме. Поэтому можно ограничиться составлением необходимого количества целесообразных независимых уравнений равновесия, из которых исключены реакции опор. Естественно, порядок статической неопределимости при этом не должен меняться.

2.2. Во втором пункте решения задачи необходимо записать **уравнения совместности деформаций** (т.е. рассмотреть **геометрическую сторону решения задачи**). Их количество должно быть равно числу лишних неизвестных (порядку статической неопределимости задачи). Рисуется схема рассчитываемой системы в деформированном состоянии и рассматриваются геометрические соотношения между абсолютными деформациями стержней с учетом величин зазоров или натягов.

2.3. На третьем этапе рассматривается **физическая сторона решения задачи.** Чтобы получить уравнения совместности деформаций, в которые, как и в уравнения равновесия входили бы внутренние усилия (в том числе и неиввестные), деформации стержней нужно выразить

через внутренние усилия, используя соответствующие физические соотношения.

В данном пособии используется традиционная запись физических соотношений в форме алгебраической суммы линейных зависимостей абсолютных деформаций от усилий (непосредственно **закон Гука**) и температуры. Особое внимание здесь уделяется знакам всех величин, входящих в указанные физические соотношения.

2.4. Затем переходят к четвертому пункту, являющемуся **математической стороной решения** статически неопределимой задачи. Подставив значения абсолютных деформаций, согласно физическим соотношениям в записанные ранее уравнения совместности деформаций, получаем недостающие уравнения. Записываем систему n-уравнений с n-неизвестными и , решая ее, определяем внутренние усилия. Далее на основе этого решения проводится проверочный, проектировочный или оптимизационный расчет.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К СОСТАВЛЕНИЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

3.1. Общие обозначения для всех расчетных схем

F_{adm} или $[F]$ - допускаемая величина внешней силы;
F - величина внешнего усилия.

Для i-стержня:
Δt_i - изменение температуры;
l_i - длина;
A_i - площадь поперечного сечения;
E_i - модуль Юнга;
α_i - коэффициент линейного расширения материала;
N_i - внутреннее усилие ($N_i>0$ - растягивающее усилие, $N_i<0$ - сжимающее усилие);
σ_i - нормальное напряжение;
$\sigma_{adm.i}$ или $[\sigma_i]$ - допускаемое напряжение;
$\sigma_{y.i}$ или $\sigma_{T.i}$ - предел текучести;
k_T или k_{adm} - нормативный коэффициент запаса прочности,
k', k'' - действительные коэффициенты запаса прочности по допускаемому напряжению и по пределу текучести.

Δl_i - абсолютная деформация ($\Delta l_i > 0$ - растяжение стержня, $\Delta l_i < 0$ - сжатие стержня);

U_i - величина проекции полного перемещения выделенного шарнира на линию расположения i-стержня в исходном или деформированном состоянии;

δ_i - величина зазора или натяга.

3.2. При решении статически неопределимых задач целесообразно, как это было указано выше, все решение разделить на четыре пункта. Рассмотрим особенности оформления этих пунктов на примере следующих типовых задач.

Расчетная схема **а**: система, содержащая шарнирно опертый жесткий стержень (рис.1)

Дано: F, $\Delta t_1 > 0$, l_1, l_2, $\Delta t_3 < 0$, A_i, $E_i = E$, a, b, c, γ, δ_3, $\sigma_{adm,i} = \sigma_{adm}$, A_1, A_2, A_3, $\sigma_{T,i} = \sigma_T$.

Определить напряжения и коэффициенты запаса прочности стержней.

Рис.1

Расчетная схема **б**: система с пересекающимися стержнями в одном узле (рис.2)

Дано: $A_1 = A_3$, $A_4 = A_5$, A_2, $E_1 = E_3$, $E_4 = E_5$, E_2, $l_1 = l_3$, $l_4 = l_5$, l_2, β, γ, σ_{adm}, δ_2, a, b.

Определить величину допускаемой нагрузки F_{adm}

Рис.2

Расчетная схема в: система стержней, пересекающихся в двух узлах (рис.3)

Дано: F, β, γ, σ_{adm}, δ_4, a, b.

Определить размеры поперечного сечения стержней при заданном соотношении площадей:

A_1/A_2; A_1/A_3; A_1/A_4.

Рис.3

Расчетная схема **г:** стержень, закрепленный между абсолютно жесткими стенками (рис.4)

Дано: F_1, F_2, a, b, A.

Построить эпюру перемещений

Рис.4

3.3. Статическая сторона решения задачи (уравнения статики)

Для того, чтобы в результате вычислений получить не только величину, но и знак внутреннего усилия, соответствующий общепринятому правилу, следует предварительно считать все стержни растянутыми, т.е. внутренние усилия должны быть направлены от мысленного сечения.

3.3.1. Система, показанная на рис.1

Мысленно рассечем стержни 1, 2 и 3 и приложим в сечениях растягивающие внутренние усилия (рис.5).

Записываем наиболее удобное для данного случая целесообразное уравнение равновесия:

$$\Sigma M_A = N_1 \cdot a + N_2 \cdot (a+b) - N_3 \cdot \sin\gamma \cdot a - F \cdot (a+b+c) = 0 \qquad (1)$$

Рис.5

отсюда следует - задача два раза статически неопределима.

3.3.2. Система, показанная на рис.2

Существенные упрощения решения возникают при использовании симметрии при расчете статически неопределимых систем. Система называется *симметричной*, если она геометрически и физически симметрична и внешние температурно-силовые факторы, приложенные к ней, симметричны относительно оси симметрии. Физическая симметрия предполагает симметричное расположение упругих и тепловых свойств стержней.

В частности, для симметричной системы со стержнями, пересекающимися в одном узле, можно показать путем последовательной разрезки симметрично расположенных стержней, что усилия в них одинаковы.

Из уравнений равновесия $\Sigma x = 0$, находим для схемы (рис.6а) $N_1 = N_3$, для схемы (рис.6б) - $N_4 = N_5$. Таким образом, вырезав узел A, в котором сходятся все стержни (рис.6в), с учетом равенств $N_1 = N_3$, $N_4 = N_5$, имеем:

$$\Sigma Y = 0, \quad 2 \cdot N_1 \cdot \cos\beta + N_2 - 2 \cdot N_4 \cdot \cos\gamma - F = 0 , \qquad (2)$$

откуда следует, что задача дважды статически неопределима.

Рис.6

3.3.3. Система, показанная на рис.3

Вырежем два узла, в которых сходятся стержни (рис.7а и 7б).

Рис.7

Для каждого из узлов запишем уравнение равновесия:

$$\Sigma Y = 0, \quad 2\cdot N_1\cdot\cos\beta - N_2 - F = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad N_2 - 2\cdot N_3\cdot\cos\beta - N_4 = 0 \quad . \qquad (4)$$

Задача два раза статически неопределима .

3.3.4. Система, показанная на рис.4

Рис.8

Для системы, изображенной на рис.8, достаточно записать лишь одно целесообразное уравнение равновесия, а именно:

$$\Sigma Y = 0, \; R_A - F_1 + F_2 - R_B = 0. \qquad (5)$$

Система один раз статически неопределима. Внутренние усилия на любом участке целесообразно записывать через одну и ту же реакцию, например, R_A, которая становится искомой неизвестной. Реакция R_B находится из вышеприведенного уравнения равновесия.

3.4. Геометрическая сторона решения задачи (условия совместности деформаций)

Запишем для всех рассмотренных расчетных схем **а, б, в, г** (рис.1 -4) условия совместности деформаций.

Показываем положение стержней в новом деформированном состоянии прерывистыми линиями.

Ввиду малости перемещений в упругодеформируемых системах считаем углы между стержнями неизменяемыми.

При вычерчивании отрезков, изображающих абсолютные деформации стержней, дуги окружностей заменяем перпендикулярами.

При записи уравнений совместности деформаций удобно пользоваться следующей методикой по установлению связи между абсолютной деформацией Δl_i i-стержня и величиной зазора или натяга δ_i. Так как модуль абсолютной деформации, по определению, есть разность между конечной длиной стержня l_{ki} и его начальной длиной l_{oi} при растяжении, или разность между l_{oi} и l_{ki} при сжатии, то в дальнейшем, для удобства определения знака, будем полагать для любого i-стержня

$$\Delta l_i = l_{ki} - l_{oi}. \qquad (6)$$

Таким образом, поскольку мы рассматриваем геометрический этап решения задачи, а геометрия описывает длины положительными числами, то, очевидно, принимается, что $l_{ki} \geqslant l_{oi}$, т.е. стержень растянут. В противном случае

$$\Delta l_i = l_{oi} - l_{ki}$$

и стержень считался бы сжатым, что было бы учтено знаком минус при составлении физических соотношений.

Определяя l_{ki} и l_{oi}, как длины пунктирной и сплошной линий с учетом зазоров или натягов δ_i и проекций перемещений U_i подвижных концов стержня, получаем искомую связь:

$$\Delta l_i = \Delta l_i(U_i \cdot \delta_i). \qquad (7)$$

Решая функцию (7) относительно U_i получаем те перемещения, которые и входят в уравнения совместности деформаций стержневой системы.

3.4.1. Система, показанная на рис.1

Полагаем, что для рассматриваемой расчетной схемы **а** предусмотрен проектировщиком или имеется фактический зазор δ_3 для третьего стержня (рис.9). В этом случае проекции перемещений концов стержней U_1, U_2 совпадают с их абсолютными деформациями

$$U_1 = \Delta l_1 ; \qquad (8)$$
$$U_2 = \Delta l_2 .$$

Рис.9

Для стержня 3 функция (7) с учетом буквенных обозначений сплошной ДВ и пунктирной $Д_1В_1$ линий, имеет вид

$$\Delta l_3 = l_{k3} - l_{03} = Д_1В_1 - ДВ = \delta_3 - U_3.$$

Отсюда перемещение U_3:

$$U_3 = \delta_3 - \Delta l_3 \quad . \tag{9}$$

Поскольку данная задача дважды статически неопределима, необходимо записать два независимых уравнения совместности деформаций, например:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{a}{a + b} \quad , \qquad U_1 = \frac{U_3}{\sin \gamma}$$

или с учетом выражений (8), (9)

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{a + b} \quad ; \tag{10}$$

$$\Delta l_1 = \frac{\delta_3 - \Delta l_3}{\sin \gamma} \quad . \tag{11}$$

3.4.2. Система, показанная на рис.2

Пусть в схеме предусмотрен натяг δ_2 для стержня 2. Тогда на рис.10, где показано положение стержней в деформированном состоя-

нии $U_1 = U_3 = \Delta l_1$; $U_4 = U_5 = \Delta l_4$; $\Delta l_2 = l_{k2} - l_{02} = A_1Д_1 - АД = U_2 - \delta_2$, откуда следует:

$$U_2 = \Delta l_2 + \delta_2 \qquad (12)$$

Рис.10

Из треугольников AA_1B и AA_1C для которых сторона AA_1, соответствующая перемещению U_2, общая, запишем:

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos\beta}, \quad U_2 = \frac{U_4}{\cos\gamma},$$

или с учетом (12)

$$\Delta l_2 + \delta_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos\beta}; \qquad (13)$$

$$\Delta l_2 + \delta_2 = \frac{\Delta l_4}{\cos\gamma}. \qquad (14)$$

3.4.3. Система, показанная на рис.3

Пусть фактическая длина стержня 4 меньше номинальной на величину зазора δ_4. Тогда для стержня 4 (рис.11)

$\Delta l_4 = l_{k4} - l_{04} = B_1Д_1 - ВД = \delta_4 - U_4$, откуда

$$U_4 = \delta_4 - \Delta l_4. \qquad (15)$$

Рис.11

Для стержня 2:

$$\Delta l_2 = l_{k2} - l_{02} = A_1B_1 - AB = BB_1 - AA_1 = U_4 - AA_1 , \qquad (16)$$

где $AA_1 = U_1 / \cos\beta$. (17)

Для стержней 1 и 3:

$$U_1 = \Delta l_1, \qquad U_3 = \Delta l_3. \qquad (18)$$

Так как система дважды статически неопределима, то составляем два уравнения деформаций:

$$\Delta l_2 = U_4 - \frac{U_1}{\cos\beta} \quad ; \qquad (19)$$

$$U_4 = \frac{U_3}{\cos\gamma} \quad , \qquad (20)$$

или с учетом соотношений (15) - (18)

$$\Delta l_2 = \delta_4 - \Delta l_4 - \frac{\Delta l_1}{\cos\beta} \; ; \qquad (21)$$

$$\delta_4 - \Delta l_4 = \frac{\Delta l_3}{\cos\gamma} \quad . \qquad (22)$$

3.4.4. Система, показанная на рис.4

Для этой системы деформации участков на рисунке показать неудобно. Однако, какими бы не были деформации всех участков, общая деформация стержня будет равна нулю (если заделка принимается за абсолютно жесткую). Тогда условие совместимости деформации для данной один раз статически неопределимой задачи можно записать в виде

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0 \quad .$$

Внимание: при определении деформаций и напряжений имеем дело с четырьмя участками длиною $l_1 = a$, $l_2 = b$, $l_3 = a$, $l_4 = b$ (рис.4).

3.5. Физическая сторона решения задачи

Как было оговорено выше в п.2.3, закон Гука для линейных деформаций записываем в форме алгебраической суммы силовой и температурной деформаций, т.е. для случая растяжения (сжатия) стержня в виде

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} + \alpha_i \cdot \Delta t_i \cdot l_i \ . \qquad (23)$$

Модуль Юнга E_i характеризует жесткость материала i-стержня. Произведение E_iA_i определяет жесткость поперечного сечения этого стержня, а соотношение E_iA_i / l_i - жесткость всего стержня. В выражение (23) нужно подставить с собственными знаками величины N_i, Δl_i, Δt_i, причем $N_i > 0$, если внутреннее усилие направлено от мысленного сечения при рассмотрении статической стороны задачи; $\Delta l_i > 0$, если использовано выражение (6). При противоположном направлении усилия или записи $\Delta l = l_{oi} - l_{ki}$ на втором этапе расчета N_i и Δl_i меньше нуля. Заметим, что правило определения знака деформаций (6) и универсальное и не зависит от наличия или отсутствия зазоров, натягов.

Деформации стержней для разобранных выше задач будут определяться следующими физическими уравнениями:

для схемы **а** (рис.1)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha_1 \cdot \Delta t_1 \cdot l_1 ,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} , \qquad (24)$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} - \alpha_3 \cdot | \Delta t_3 | \cdot l_3 ;$$

для схемы **б** (рис.2)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} , \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} , \quad - \Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E_4 \cdot A_4} ; \qquad (25)$$

для схемы **в** (рис.3)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} , \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} , - \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} , \Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E_4 \cdot A_4} ; \qquad (26)$$

для схемы **г** (рис.4)

$$\Delta l_1 = \frac{R_A \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} , \qquad \Delta l_2 = \frac{(R_A - F_1) \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} ,$$

$$\Delta l_3 = \frac{(R_A - F_1) \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} , \qquad \Delta l_4 = \frac{(R_A - F_1 + F_2) \cdot l_4}{E_4 \cdot A_4} . \qquad (27)$$

3.5. Математическая сторона решения задачи

В соответствии со сформулированными выше четырьмя пунктами, следует записать систему n-уравнений с n-неизвестными вида:

$$\begin{aligned} a_{11}N_1 + a_{12}N_2 + a_{13}N_3 + \ldots + a_{1n}N_n &= b_1, \\ a_{21}N_1 + a_{22}N_2 + a_{23}N_3 + \ldots + a_{2n}N_n &= b_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_{n1}N_1 + a_{n2}N_2 + a_{n3}N_3 + \ldots + a_{nn}N_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (28)$$

Здесь a_{ij} - численные коэффициенты при неизвестных;

b_i - свободные члены;

$N_i = N_i\ (E_1, E_2, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots A_1 \ldots \Delta t_1 \ldots)$

Система формируется из уравнений равновесия и совместности, где деформации выражены через усилия в соответствии с физическими соотношениями.

Рассмотрим математическую сторону решения приведенных выше четырех задач , приняв следующие числовые значения исходных данных.

3.5.1. Для схемы **а** (рис.1):

$F = 20$ кН; $a = 1$ м; $b = 0{,}8$ м; $c = 0{,}5$ м; $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2\cdot10^5$ МПа; $\delta_3 = 0{,}6$ мм; $\Delta t_1 = 30^\circ$; $\Delta t_3 = -20^\circ$; $A_1 = A_2 = A_3 = A = 3\cdot10^{-4}$ м^2; $\gamma = 30^\circ$; $l_1 = 0{,}5$ м; $l_2 = 1$ м;

$\alpha = 1{,}25\cdot10^{-5}$ 1/град; $\sigma_T = 240$ МПа; $\sigma_{adm} = 160$ МПа .

Подставляя выражения (24) в уравнение совместности деформаций (10) и (11), получим:

$$\frac{\dfrac{N_1\cdot l_1}{E\cdot A} + \alpha\cdot\Delta t_1\cdot l_1}{\dfrac{N_2\cdot l_2}{E\cdot A}} = \frac{a}{a+b}\ ,$$

$$\frac{N_1\cdot l_1}{E\cdot A} + \alpha\cdot\Delta t_1\cdot l_1 = \frac{\delta_3 - \dfrac{N_3\cdot l_3}{E\cdot A} + \alpha\cdot|\Delta t_3|\cdot l_3}{\sin\gamma}\ . \qquad (29)$$

Решим совместно систему трех уравнений (1) и (29) с тремя неизвестными N_1, N_2, N_3 :

$$\begin{cases} N_1 a + N_2(a+b) - N_3 \sin\gamma\cdot a = F\ (a+b+c), \\ \dfrac{N_1(a+b)}{c_1} - \dfrac{N_2\, a}{c_2} = -\ \alpha\cdot\Delta t_1\cdot l_1\ (a+b), \\ \dfrac{N_1 \sin\gamma}{c_1} + \dfrac{N_3}{c_3} = -\ (\alpha\cdot\Delta t_1\cdot l_1\cdot\sin\gamma + \alpha\cdot|\Delta t_3|\cdot l_3 - \delta_3) = 0, \end{cases} \qquad (30)$$

где $c_1 = \dfrac{E\cdot A}{l_1}$, $c_2 = \dfrac{E\cdot A}{l_2}$, $c_3 = \dfrac{E\cdot A}{l_3}$.

После подстановки числовых значений система (30) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} N_1 + 1{,}8N_2 - 0{,}5N_3 = 46000, \\ 1{,}5N_1 - 1{,}66N_2 = -33750, \\ 0{,}4N_1 + 1{,}9N_3 = 79375, \end{cases}$$

решая которую находим $N_1 = 11116$ Н, $N_2 = 30075$ Н, $N_3 = 39436$ Н.

Определим напряжения, возникающие в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{11116}{3\cdot 10^{-4}} = 37 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{30375}{3\cdot 10^{-4}} = 101 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{39436}{3\cdot 10^{-4}} = 131 \text{ МПа}.$$

Наиболее напряженным является третий стержень с коэффициентом запаса прочности по пределу текучести

$$k' = \sigma_T / \sigma_3 = 240/131 = 1{,}8$$

при нормативном коэффициенте запаса прочности $k_T = \sigma_T / \sigma_{adm} = 240/160 = 1{,}5$. Коэффициент запаса по допускаемым напряжениям $k'' = \sigma_{adm} / \sigma_3 = 160/131 = 1{,}22$.

3.5.2. Для схемы **б**, показанной на рис.2, примем следующие числовые значения: $A_1 = 1$ см^2, $A_2 = 2$ см^2, $A_4 = 2{,}5$ см^2, $a = 1{,}5$ м, $b = 1$ м, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $\delta_2 = 0{,}5$ мм, $\sigma_{adm} = 160$ МПа

Подставим выражения (25) в уравнения (13) и (14):

$$\frac{N_2\cdot l_2}{E\cdot A_2} + \delta_2 = \frac{N_1\cdot l_1}{E\cdot A_1\cdot \cos\beta}, \tag{31}$$

$$\frac{N_2\cdot l_2}{E\cdot A_2} + \delta_2 = -\frac{N_4\cdot l_4}{E\cdot A_4\cdot \cos\gamma}. \tag{32}$$

Запишем систему уравнений (2), (31) и (32)

$$\begin{cases} 2\,N_1 \cos\beta + N_2 - 2\,N_4 \cos\gamma = F\,, \\ \dfrac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1 \cdot \cos\beta} - \dfrac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \delta_2\,, \\ \dfrac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \dfrac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4 \cdot \cos\gamma} = -\,\delta_2 \end{cases} \qquad (33)$$

После подстановки числовых значений она приобретает вид

$$\begin{cases} 1{,}72\,N_1 + N_2 - 1{,}4\,N_4 = F\,, \\ N_1 - 0{,}375\,N_2 = 5000\,, \\ 0{,}375\,N_2 + 0{,}4\,N_4 = -5000\,. \end{cases}$$

Откуда следуют выражения, связывающие внутренние усилия, напряжения и внешнюю силу F:

$N_1 = 0{,}13F + 1677$; $N_2 = 0{,}34F - 8862$; $N_3 = -0{,}32F - 4260$,

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}13F + 1677}{1 \cdot 10^{-4}} = \left(0{,}13F + 1677\right) \cdot 10^4;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}34F - 8862}{2 \cdot 10^{-4}} = \left(0{,}17F - 4431\right) \cdot 10^4;$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{-0{,}32F - 4260}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = \left(-0{,}13F - 1704\right) \cdot 10^4.$$

Предположим, что наиболее нагруженным окажется 4 стержень. Тогда F_{adm} определим из условия прочности этого стержня

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} \leqslant \sigma_{adm}\,; \quad -0{,}13F - 1704 = 16000;$$

$$F_{adm} = \frac{16000 - 1704}{0{,}13} = 110000 \text{ Н} = 110 \text{ кН}.$$

Проверим прочность 1 и 2 стержней

$$N_1 = 15{,}97 \text{ кН}, \quad N_2 = 28{,}54 \text{ кН}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{15{,}97 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = 159{,}7 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{28{,}54 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 142{,}7 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение во втором стержне составляет:

$$\frac{\sigma_{adm} - \sigma_2}{\sigma_{adm}} = \frac{160 - 142{,}7}{160} 100 = 11\ \% .$$

3.5.3. Для схемы **в** (рис.3) приняты следующие числовые данные: $F = 30$кН; $A_1/A_2 = 2$; $A_1/A_3 = 1$; $A_1/A_4 = 3$; $\beta = 30^\circ$; $\gamma = 45^\circ$; $a = 1$ м; $b = 1{,}5$ м; $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E = 2\cdot10^5$ МПа; $\sigma_{adm} = 160$ МПа; $\delta_4 = 5\cdot10^{-4}$ м.

Подставив выражения (25) в (21) и (22), запишем систему четырех уравнений (из них два уравнения статики (3) и (4) с четырьмя неизвестными N_1, N_2, N_3, N_4:

$$\begin{cases} 2N_1\cos\beta - N_2 = F , \\ N_2 - 2N_3\cos\gamma - N_4 = 0 , \\ \dfrac{N_1 l_1}{EA_1\cos\beta} + \dfrac{N_2 l_2}{EA_2} + \dfrac{N_4 l_4}{EA_4} = \delta_4 , \\ \dfrac{N_3 l_3}{EA_3\cos\gamma} - \dfrac{N_4 l_4}{EA_4} = -\delta_4 . \end{cases} \qquad (34)$$

После подстановки числовых значений получим:

$$\begin{cases} 1{,}72N_1 - N_2 = 30000 , \\ N_2 - 1{,}4N_3 - N_4 = 0 , \\ 1{,}34N_1 + 3N_2 + 3N_4 = 10^6\cdot A_1 , \\ 2N_3 - 3N_4 = -10^6\cdot A_1 . \end{cases}$$

Тогда:

$$N_1 = 3{,}75\cdot10^6\cdot A_1 + 14561;$$
$$N_2 = 6{,}5\cdot10^6\cdot A_1 - 4895;$$
$$N_3 = -13\cdot10^6\cdot A_1 - 2368;$$
$$N_4 = 25{,}5\cdot10^6\cdot A_1 - 1578.$$

Запишем выражения, связывающие напряжения с площадями сечений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3{,}75\cdot10^6\cdot A_1 + 14561}{A_1} = 3{,}75\cdot10^6 + \frac{14561}{A_1} ;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2 2}{A_1} = \frac{(6{,}5\cdot10^6\cdot A_1 - 4895)2}{A_1} = 13\cdot10^6 - \frac{9790}{A_1} ;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{A_1} = \frac{-13\cdot10^6\cdot A_1 - 2368}{A_1} = -13\cdot10^6 - \frac{2368}{A_1} ;$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{N_4 3}{A_1} = \frac{(25{,}5\cdot10^6\cdot A_1 - 1578)3}{A_1} = 76{,}5\cdot10^6 - \frac{4734}{A_1} .$$

Предположим, что наиболее нагруженным является первый стержень. Из условия прочности первого стержня определяем площадь его поперечного сечения, когда $\sigma_1 = \sigma_{adm}$, или

$$3{,}75\cdot10^6 + \frac{14561}{A_1} = 160\cdot10^6,$$

$$A_1 = \frac{14561}{160\cdot10^6 - 3{,}75\cdot10^6} = 9{,}3\cdot10^{-5}\ м^2 .$$

Остальные площади находим в соответствии с заданными соотношениями:

$$A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{9{,}3\cdot10^{-5}}{2} = 4{,}65\cdot10^{-5}\ м^2;$$

$$A_3 = A_1 = 9{,}3\cdot10^{-5}\ м^2;$$

$$A_4 = \frac{A_1}{3} = \frac{9{,}3\cdot10^{-5}}{3} = 3{,}1\cdot10^{-5}\ м^2.$$

Рабочие напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = 160\ МПа;\ \sigma_2 = 13\cdot10^6 - \frac{9790}{9{,}3\ 10^{-5}} = -\ 92\ МПа.$$

Недонапряжение $\frac{160 - 92}{160}\cdot100 = 42\ \%$.

$$\sigma_3 = -\ 13\cdot10^6 - \frac{4734}{9{,}3\ 10^{-5}} = -\ 48\ МПа.$$

Недонапряжение $\frac{160-48}{160}\cdot100 = 70\ \%$.

$$\sigma_4 = 76{,}5\cdot10^6 - \frac{4734}{9{,}3\cdot10^{-5}} = 25{,}5\ МПа .$$

Недонапряжение $\frac{160-25{,}5}{160}\cdot 100 = 84\ \%$.

Стержни 2, 3 и 4 недогружены. Для лучшего использования материала стержней следует задаться другим, более рациональным соотношением площадей поперечных сечений, изменить величины зазора или провести оптимизационный расчет с целью приближения данной конструкции к равнопрочной.

3.5.4. Пусть для схемы г (рис.4) $F_1 = 25$ кН, $F_2 = 40$ кН, $A = 1$ см^2, $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}3$ м, $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2\cdot10^5$ МПа. Подставив (27) в уравнение совместности деформаций $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0$, получим:

$$\frac{R_A \cdot a}{E \cdot 1{,}5A} + \frac{(R_A - F_1)b}{E \cdot 1{,}5A} + \frac{(R_A - F_1)a}{E \cdot A} + \frac{(R_A - F_1 + F_2)b}{E \cdot 2A} = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{1{,}65\ F_1 - 0{,}45\ F_2}{2{,}05};$$

$$R_A = \frac{1{,}65\ 25000 - 0{,}45\ 40000}{2{,}05} = 11341\ \text{Н} = 11{,}34\ \text{кН}.$$

Определим внутренние усилия по участкам:

$N_1 = R_A = 11341$ Н ,

$N_2 = R_A - F_1 = 11341 - 25000 = -13659$ Н ,

$N_3 = N_2 = -13659$ Н ,

$N_4 = R_A - F_1 + F_2 = 11341 - 25000 + 40000 = 26341$ Н .

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{1{,}5A} = \frac{11341}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 75{,}6\ \text{МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{1{,}5A} = -\frac{13659}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = -91\ \text{МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = -\frac{13659}{10^{-4}} = -136{,}6\ \text{МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{26341}{2 \cdot 10^{-4}} = 131{,}7\ \text{МПа}.$$

Определим перемещения характерных сечений по отношению к верхней заделке (рис.12):

$\delta_A = 0$,

$$\delta_{C-C} = \Delta l_1 = \frac{N \cdot a}{E \cdot A \cdot 1{,}5} = \frac{11341 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5} = 7{,}56 \cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

$$\delta_{Д-Д} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 7{,}56 \cdot 10^{-5} - \frac{13659 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5} = -6{,}1 \cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

$$\delta_{M-M} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -6{,}1 \cdot 10^{-5} - \frac{13659 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = -19{,}76 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

$$\delta_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = -19{,}76 + \frac{26341 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 2} =$$

$$= -19{,}76 + 19{,}76 = 0.$$

Эпюра перемещений строится с использованием этих значений и линейной зависимости деформации от длины участка по закону Гука. Кроме этой эпюры δ на рис.12 показаны также эпюры усилий N и напряжений σ.

Рис.12

Замечание: разрывы (скачки) на эпюре N вызваны сосредоточенными силами и численно равны им по абсолютной величине.

ВНИМАНИЕ! Системы уравнений (30), (33) и (34) подготовлены к использованию для решения учебно-исследовательских задач (УИРС).

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Прежде чем приступить к выполнению расчетно-проектировочной работы, ответьте на приведенные ниже вопросы. Таким способом вы проверите знание теоретического материала и подготовитесь к защите выполненной работы.

1. Объясните смысл выражения: "статически определимая, но геометрически неизменяемая система". Приведите пример.

2. Будет ли зависеть величина внутренних усилий в стержнях статически определимой системы:от характеристик упругости материала?

от неточности изготовления стержней?

от изменения температуры?

от характеристики прочности материала?

3. Объясните на примере применение метода мысленных сечений для определения внутренних усилий в стержневых системах.

4.Какая система называется статически неопределимой? Добавлением связей переведите нарисованные вами статически определимые системы в системы один раз статически неопределимые. Добавлением связей переведите полученные один раз статически неопределимые системы в системы два раза статически неопределимые.

5. Может ли быть статически неопределимая, но одновременно геометрически изменяемая система? Объясните ответ?

6. Покажите на примере, как определить порядок статической неопределимости системы, основываясь на понятии "необходимых" и "лишних" связей.

7. Что такое "лишняя неизвестная?" Какую силу целесообразно принять за "лишнюю неизвестную"?

8. Нарисуйте любую несколько раз статически неопределимую стержневую систему. Применяя метод отбрасывания "лишних связей", покажите, сколько раз данная система была статически неопределимой.

9. Какие внутренние усилия возникают в элементах стержневых систем с шарнирными соединениями?

10. Какое правило знаков принимается для внутренней осевой силы?

11. Какой знак внутренней осевой силы целесообразно принять при составлении уравнений равновесия? Нарисуйте схему .

12. На сколько самостоятельных пунктов целесообразно разделить решение при расчете статически неопределимых систем? Приведите пример.

13. Как учитывается влияние изменения температуры стержней в статически неопределимых системах при определении внутренних усилий? Напишите соответствующие уравнения.

14. Как учитывается влияние отклонений длин стержней от номинальных размеров в статически неопределимых системах? Напишите соответствующие уравнения.

15. При изменении размеров поперечного сечения отдельных стержней в статически неопределимой системе будут ли изменяться внутренние усилия в них? Обоснуйте ответ, используя уравнения, необходимые для раскрытия статической неопределимости. Изменится ли ответ, если система будет статически определимой. Объясните почему.

16. Представим себе, что стержни изготовлены из "абсолютно жесткого материала". Можно ли из таких стержней на практике собрать статически неопределимую конструкцию? Можно ли из таких стержней на практике собрать статически определимую конструкцию? Дайте подробное объяснение; приведите необходимые схемы.

5. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЕ "СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ"

5.1, Выберите схемы задания (рис.13), номер которого соответствует вашему порядковому номеру в журнале группы.

5.2. Составьте индивидуальный шифр, которым вы будете пользоваться при выборе исходных данных для решения задач.

5.2.1. Для составления шифра напишите подряд свою фамилию и имя прописными буквами, например:

В А С И Н В А Л Е Н Т И Н

5.2.2. Используя табл. 5.1 выпишите цифры, соответствующие этим написанным буквам, и подпишите их под буквами, начиная с первой, например:

В А С И Н В А Л Е Н Т И Н
3 1 7 9 3 3 1 1

(для данного задания достаточно использовать первые 8 букв).

Таблица 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А Л Х	Б М Ц	В Н Ч	Г О Ш	Д П Щ	Е,Ё Р Ь,Ъ	Ж С Ы	З Т Э	И,Й У Ю	К Ф Я

5.2.3. Затем подпишите под каждой цифрой строчные буквы в алфавитном порядке

В А С И Н В А Л Е Н Т И Н
3 1 7 9 3 3 1 1
а б в г д е ж з

5.2.4. Приведем пример выбора данных к задаче 1

В соответствии с номером фамилии студента, оказавшейся, например, третьей по журналу группы, выбираем по рисунку схему 3 (две задачи). Затем из табл. 5.2 в соответствии с полученным шифром записываем числовые значения:

$\frac{3}{а}$ - $F = 40$ кН

$\frac{1}{б}$ - $a = 0{,}4$ м

$\frac{7}{в}$ - $b = 0{,}75$ м

$\frac{9}{г}$ - $c = 0{,}58$ м

$\frac{3}{д}$ - $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ м

$\frac{3}{е}$ - $\beta = 40^{\circ}$

$\frac{1}{ж}$ - $\gamma = 20^{\circ}$

$\frac{1}{з}$ - $A = 3 \cdot 10^{-4}$ м^2

Таблица 5.2

Цифры шифра	F, кН	a, м	b, м	c, м	$\delta_1 \cdot 10^4$ м	β, град	γ, град	$A \cdot 10^4$ $м^2$
1	20	0,4	1,00	0,6	3,0	20	20	3
2	30	0,42	1,20	0,68	4,0	30	30	4
3	40	0,45	1,10	0,72	5,0	40	40	5
4	50	0,52	0,90	0,76	6,0	50	50	7
5	60	0,60	0,80	0,83	7,0	60	60	7
6	70	0,65	0,70	0,89	8,0	25	25	8
7	80	0,74	0,75	0,95	2,0	35	35	4,5
8	90	0,82	0,95	0,50	3,5	45	45	5,5
9	130	0,85	0,60	0,58	4,5	55	55	6,5
0	140	0,90	0,55	0,46	5,5	65	65	8,5
	а	б	в	г	д	е	ж	з

5.3. Для задачи 1 определить напряжения в стальных стержнях и коэффициент запаса прочности, если σ_{adm} = 200 МПа, σ_T = 300 МПа, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

5.4. Для задачи 2. Определить площади поперечного сечения стальных стержней, если σ_{adm} = 160 МПа, $A_1/A_2 = 1{,}5$; $A_1/A_3 = 2$.

1
a
1
2
в
c
F
3
δ_3
в
a
в
c
c
1
F
1
a
3
2
3
в
2
F
3
в
1
2
4
δ_4
c
a
c
1
2
3
в
F
a
c
c
3
a
1
F
δ_1
в
a
2
a
β
3
c
F
3
3
2
c
1
1
в
a
a

Рис.I3, лист I

Рис.13, лист 2

Рис.13, лист 3

10
δ1
в
3
2
1
F
a
c
в
1
2
F
c
a
в
11
a
δ1
1
в
F
3
2
в
a
c
1
a
2
F
2
в
c
c
12
δ2
1
2
в
β
γ
в
3
F
a
c
a
a
1
2
в
F
a
c

Рис.13, лист 4

Рис.13, лист 5

Рис.13, лист 6

Рис.13, лист 7

Рис.13, лист 8

Рис.13, лист 9

Рис.13, лист 10

Рис.13, лист II

Рис.I3, лист I2

37

38

Рис.13, лист 13

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. -М.: Наука, 1986.- 512 с.

2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1976.- 608 с.

3. Дарков А.В., Шпира Г.С. Сопротивление материалов. -М.: Высшая школа. - 1975. - 754 с.

4. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. - М.: Высшая школа. - 1988. - 432 с.

Рис.I3, лист I3