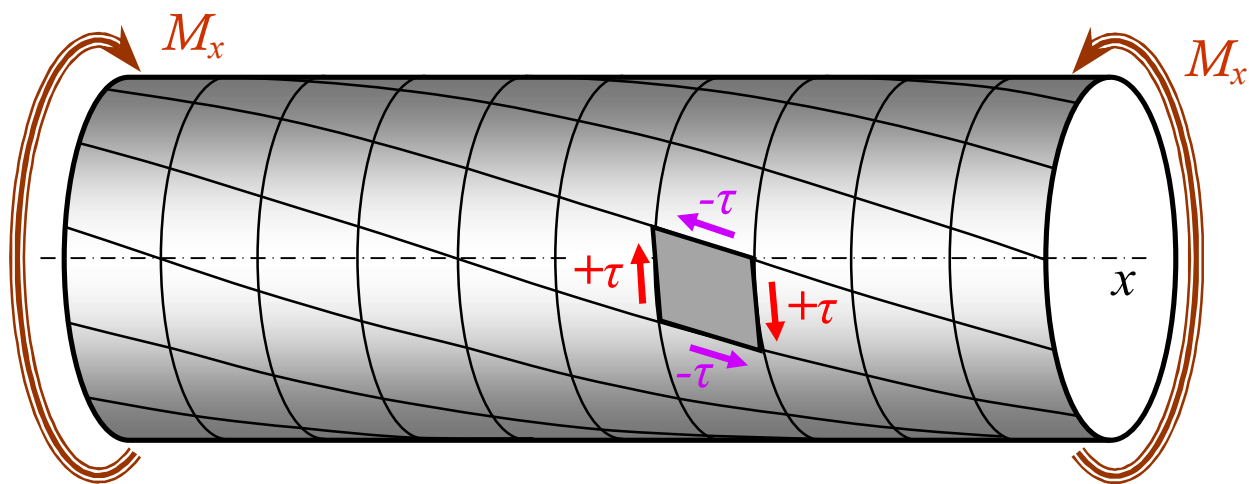


В. П. БАГМУТОВ, А. А. БЕЛОВ,  
О. В. КОНДРАТЬЕВ, А. С. СТОЛЯРЧУК

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

В. П. БАГМУТОВ, А. А. БЕЛОВ,  
О. В. КОНДРАТЬЕВ, А. С. СТОЛЯРЧУК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ РАСЧЕТА ВАЛА  
НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Учебное пособие



Волгоград

2008

УДК 539. 3

Рецензенты:

кафедра «Общетехнические дисциплины» Волгоградского филиала Российского государственного университета туризма и сервиса, зав. кафедрой канд. техн. наук *В. А. Рыгин*;  
д-р техн. наук, проф. кафедры «Информационные системы в экономике» Волгоградского кооперативного института филиала Российского университета кооперации *Е. П. Богданов*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета.

### **Багмутов, В. П.**

Теоретические основы расчета вала на прочность и жесткость: учеб. пособие / В. П. Багмутов, А. А. Белов, О. В. Кондратьев, А. С. Столярчук; Волгоград. гос. техн. ун-т. – Волгоград, 2008. – 31 с.  
ISBN 978–5–9948–0110–9

Даны общие понятия напряженно-деформированного состояния в области закона Гука, для некоторой точки нагруженного тела, а также краткие сведения о широко применяемых в расчетной практике теориях прочности.

Описаны графический и аналитический способы определения главных напряжений в точке в случае плоского напряженного состояния применительно к расчету вала на прочность при кручении. Приводится методика расчета вала на прочность и жесткость.

Предназначено для студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов» в полном объеме.

Ил. 18 . Библиогр.: 4 назв.

ISBN 978–5–9948–0110–9

- © Волгоградский государственный технический университет, 2008
- © В. П. Багмутов, А. А. Белов, О. В. Кондратьев, А. С. Столярчук, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИТЕРИЯХ ПРОЧНОСТИ . . . . .	5
1.1. Общие понятия о напряженном состоянии. Тензор напряжений. Инвариантность тензора . . . . .	5
1.2. Главные площадки и главные напряжения . . . . .	7
1.3. Виды напряженного состояния . . . . .	8
1.4. Линейное напряженное состояние (на примере растяжения)	9
1.5. Плоское напряженное состояние. Аналитический и графический способы расчета главных напряжений . . . . .	11
1.6. Деформации при объемном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука . . . . .	13
1.7. Понятие о теориях прочности . . . . .	15
2. КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	20
2.1. Внутренние усилия при кручении . . . . .	20
2.2. Напряжения при кручении . . . . .	21
2.3. Расчет на прочность при кручении . . . . .	23
2.4. Деформация при кручении. Расчет вала на жесткость . . . . .	24
2.5. Пример расчета вала на прочность и жесткость . . . . .	25
3. Вопросы для самопроверки . . . . .	29
Список рекомендуемой литературы . . . . .	30

## ВВЕДЕНИЕ

Кручение относится к простым видам сопротивления. Однако для выполнения расчетов при кручении неизбежно обращение к другим разделам курса сопротивления материалов. Это видно из приведенного на рис. 1 алгоритма расчета. Целью настоящего учебного пособия является помочь студенту в осознанном и грамотном выполнении отдельных этапов расчета и установлении их взаимосвязи. Много внимания в данном пособии уделяется анализу напряженного состояния и классическим теориям прочности, применительно к расчету вала, что и определило последовательность изложения материала.

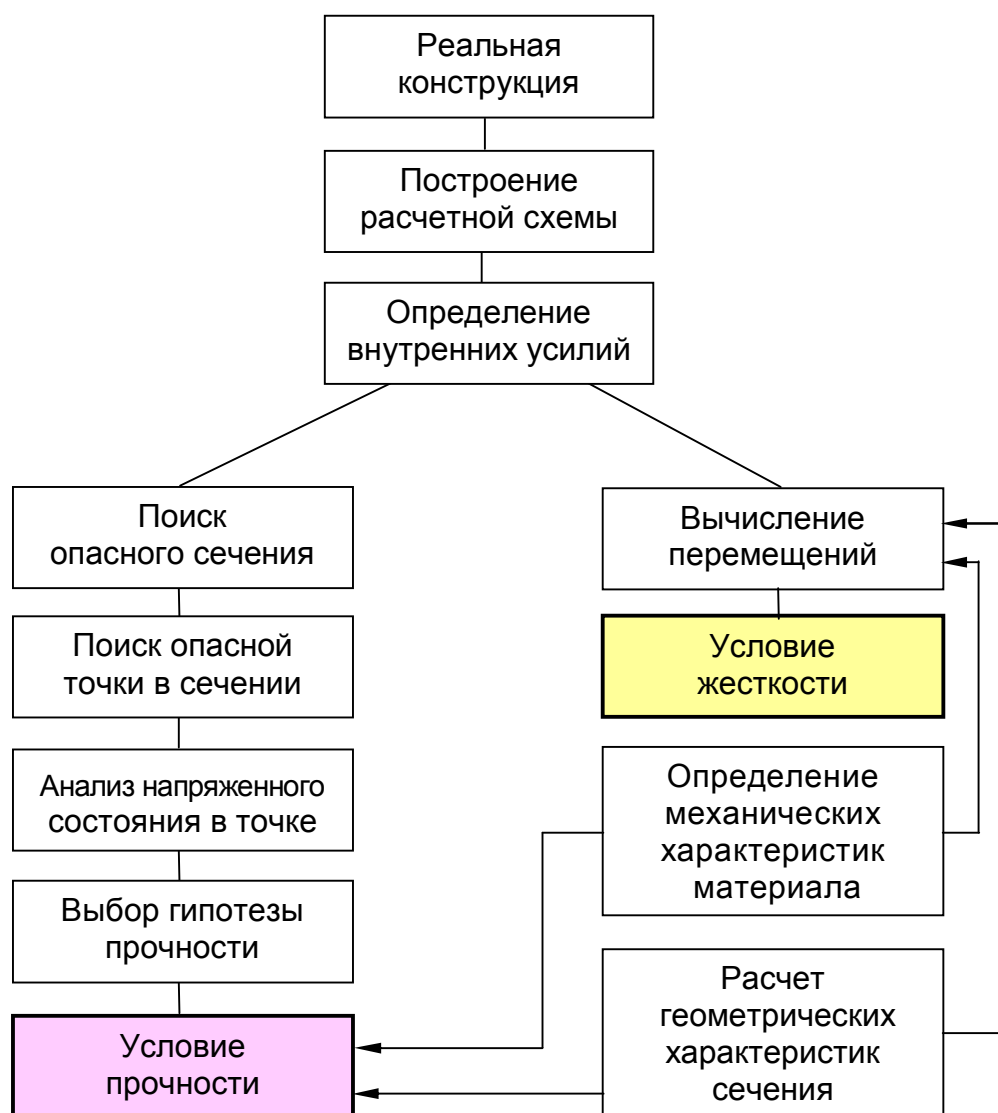


Рис. 1. Схема расчета на прочность и жесткость

# 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИТЕРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Теория напряжений (и деформаций) была создана Коши<sup>1</sup>. Выведено три уравнения равновесия элементарного четырехгранника, доказан закон парности касательных напряжений, введено понятие главных осей (площадок), главных напряжений и др.

## 1.1. Общие понятия о напряженном состоянии. Тензор напряжений. Инвариантность тензора

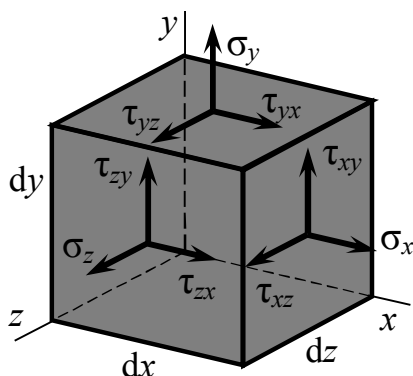


Рис. 2. Напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда

В твердом теле, нагруженном произвольной “системой сил”<sup>2</sup>, через любую его точку можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, вызывающие линейные и угловые деформации. В окрестности точки выделяют элементарный объем материала в виде параллелепипеда, для которого напряженное состояние можно считать однородным (рис. 2).

*Напряжение* – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий, то есть внутренние силы, приходящиеся на единицу площади в окрестности рассматриваемой точки. Полное напряжение  $p$ , уравнивающее внешнюю нагрузку, раскладывают на составляющие: по нормали к сечению ( $\sigma$ ) и в плоскости сечения ( $\tau$ ), причем  $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$  (см. подраздел 1.4).

*Напряжение нормальное  $\sigma$*  – перпендикулярно к сечению.

*Напряжение касательное  $\tau$*  – действует в плоскости сечения.

*Напряженное состояние ( $\sigma, \tau$ )* – совокупность напряжений, действующих по трем любым ортогональным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

Грань часто называют элементарной площадкой (или проще: площадкой). Первый индекс в обозначении указывает направление нормали к площадке (адрес площадки). Второй индекс указывает ось, в направлении которой действует напряжение. В обозначении нормальных напряжений  $\sigma$  присутствует только первый индекс, поскольку очевидно, что второй совпадает с ним.

<sup>1</sup> Огюстен Луи Коши (Cauchy A. L. 1789–1857) – французский ученый. Опубликовал более 800 работ по математике, механике, физике, астрономии. Теория напряжений предложена в 1822 г.

<sup>2</sup> Под “системой сил” здесь и в дальнейшем понимается вся совокупность внешних силовых факторов (силы, моменты, распределенные нагрузки и пр.).

Напряженное состояние в окрестности точки определяется девятью компонентами и описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

**Тензор** [от лат. *tendere* – натягивать, напрягать; математическое понятие] – величина особого рода, задаваемая числами и законами их преобразования; является развитием и обобщением вектора и матрицы. Вектор – это тензор первого ранга, а скаляр – тензор нулевого ранга.

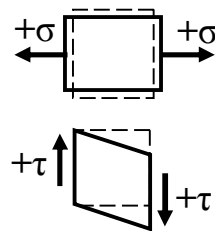
Тензорное исчисление широко применяется в механике, гидравлике, электродинамике, газодинамике и других областях науки.

В первой строке тензора ставят напряжения на первой площадке  $x$ ; во второй – на площадке  $y$ . Тензор содержит 9 компонент. Параллелепипед, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, находится в равновесии под действием сил, приложенных к его граням. Нормальные силы на гранях параллелепипеда взаимно уравновешены и, следовательно, три уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Составив уравнения суммы моментов всех сил относительно координатных осей (см. рис. 2), например, оси  $z$ :  $(\tau_{xy} \cdot dz \cdot dy) dx - (\tau_{yx} \cdot dz \cdot dx) dy = 0$ , можно получить следующие три равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Эти равенства называют **законом парности касательных напряжений**: если по какой-либо площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку.

**Правила знаков.** Нормальные напряжения вызывают удлинение или укорочение граней параллелепипеда. Растягивающие напряжения считаются положительными. Касательные напряжения вызывают смещение граней, их сдвиг, изменение прямых углов на тупой и острый. Касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремится вращать грань по ходу часовой стрелки.



Вследствие закона парности касательных напряжений тензор становится симметричным относительно главной диагонали. Вместо девяти имеем только шесть независимых компонент.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

**Инвариантность тензора.** Инвариант [фр. *invariant* – неизменяющийся]. Если взамен исходной системы осей  $(x, y, z)$  выбрать какую-то новую систему  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , компоненты тензора изменятся. Однако сам тензор напряжений, как количественная характеристика напряженного состояния, остается тем же (*инвариантность тензора – его независимость от принятой системы координат*).

Сказанное поясняется на примере вектора (частного случая тензора), показанного на рис. 3.

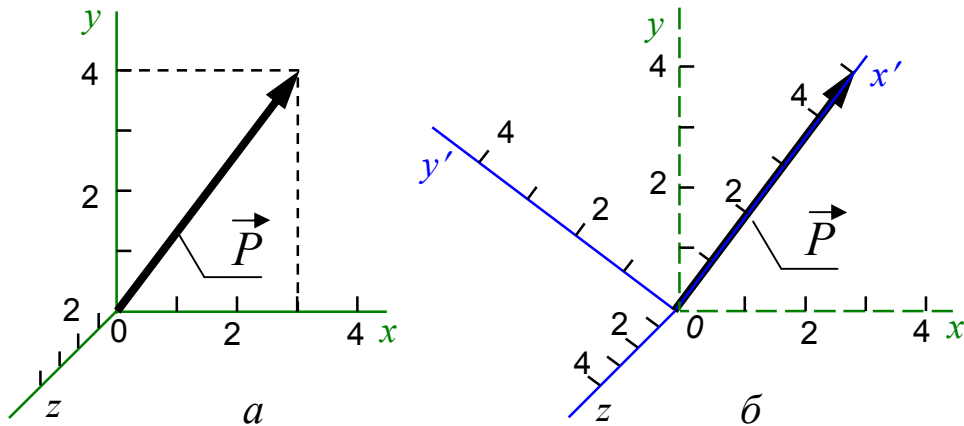


Рис. 3. Варианты описания вектора в разных системах координат: *a* – случайно выбранная система; *б* – система, в которой одна из осей совпадает с направлением вектора

В системе координат  $x, y, z$  (рис. 3, *a*) вектор  $\vec{P}$  определен матрицей, членами которой являются координаты конца вектора  $(3, 4, 0)$ , а в системе осей  $x', y', z$  (рис. 3, *б*) для того же вектора – матрицей  $(5, 0, 0)$ . Обратите внимание: положение вектора в пространстве и его величина ( $p = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$ ) остались неизменными, но выбрана такая система координат, в которой вектор проецируется только на одну из осей в натуральную величину, а обе проекции на другие оси равны нулю.

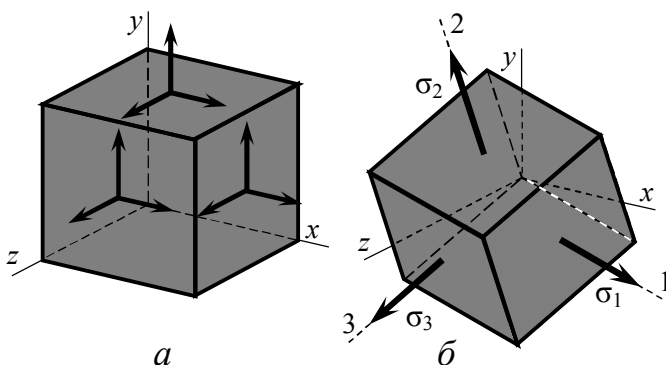


Рис. 4. Напряженное состояние в произвольной системе координат (*a*); главные площадки с действующими на них главными напряжениями (*б*)

## 1.2. Главные площадки и главные напряжения

Операции над тензором сложнее операций над вектором, однако, в любой точке нагруженного тела можно найти такие три ортогональные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю (рис. 4, *б*). Количество независимых компонентов уменьшается до трех. На языке матричной алгебры это означа-



ет привести матрицу к диагональному виду.

*Площадки, по которым касательные напряжения отсутствуют, называются главными. Нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными напряжениями.* Они принимают экстремальные значения. Главные напряжения нумеруют в порядке убывания величины напряжения в алгебраическом смысле

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

На рис. 4, б цифрами 1, 2 и 3 показаны *главные направления напряженного состояния* – направления, параллельные главным напряжениям. Тензор напряжений в этом случае, **не меняя своей величины** (инвариантный тензор) принимает вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Большое внимание к главным напряжениям в инженерной расчетной практике объясняется не только относительной простотой описания напряженного состояния в точке тела с их помощью, но, в первую очередь, свойством экстремальности этих величин и, как следствие, возможностью интегральной оценки прочности в этой точке на их основе (используя принцип инвариантности тензора). Поэтому определение главных напряжений является необходимым этапом при расчетах на прочность в общем случае напряженного состояния.

### 1.3. Виды напряженного состояния

Различают три вида напряженного состояния: “линейное” (рис. 5, а), если две пары граней свободны от напряжений; “плоское” (рис. 5, б), если одна пара граней свободна от напряжений и объемное (рис. 5, в). Последние два случая называют сложным напряженным состоянием. На рис. 5 напряжения показаны только на видимых площадках.

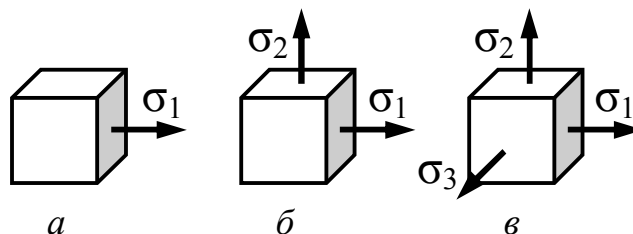


Рис. 5. Виды напряженного состояния: а – линейное; б – плоское; в – объемное

На рис. 5 напряжения показаны только на видимых площадках.

Определить вид напряженного состояния и расставить индексы 1, 2 или 3 при напряжениях можно, лишь **вычислив** главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Так напряженное состояние, изображенное на рис. 6, а, на первый взгляд кажется плоским (т. е. одно из главных напряжений отсутствует). Однако при некоторых сочетаниях нормальных и касательных напряжений

оно может являться линейным. Один из таких вариантов (первая строка таблицы) интерпретирован в виде круга Мора<sup>3</sup>.

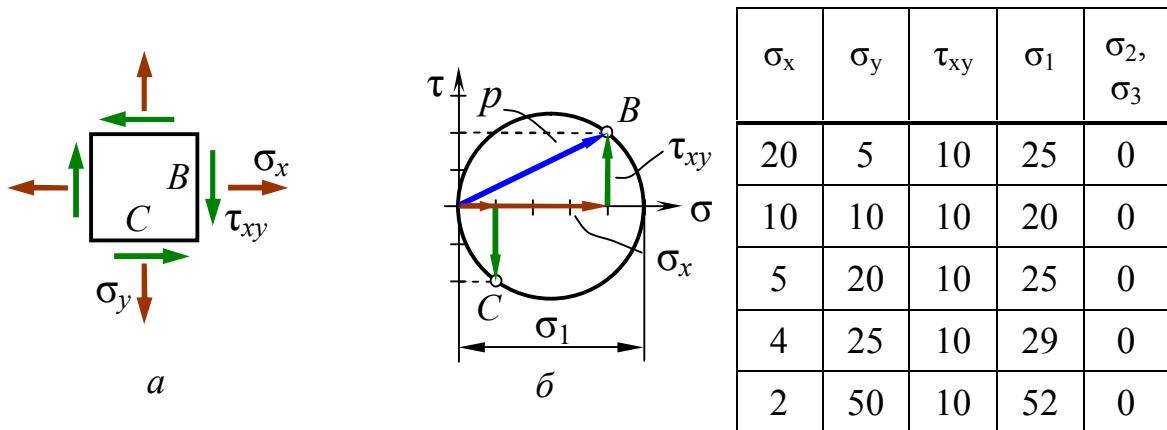


Рис. 6: *a* – нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях произвольно ориентированного элемента; *б* – графическое изображение напряженного состояния, показанного на рис. 6, *a*

#### 1.4. Линейное напряженное состояние (на примере растяжения)

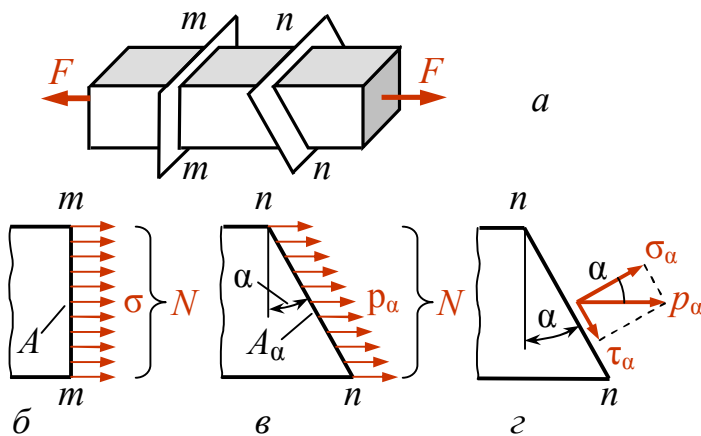


Рис. 7. Пример линейного напряженного состояния [3]

Рассмотрим простейший случай: деформацию растяжением. В поперечном *m-m* сечении бруса (рис. 7, *a*) от действия продольной внешней нагрузки *F* возникает внутреннее усилие *N* ( $N = F$ ) и соответственно напряжение  $\sigma = N/A$  (рис. 7, *б*). Очевидно, площадь  $A_\alpha$  произвольно ориентированной наклонной площадки *n-n* (рис. 7, *в*)

больше площади *A* поперечного сечения:  $A_\alpha = A/\cos \alpha$ . Полное напряжение  $p_\alpha$  на наклонной площадке

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha. \quad (1)$$

Как видно, полное напряжение на наклонной площадке  $p_\alpha$  меньше (если  $\alpha \neq 0$ ) нормального напряжения в поперечном сечении  $\sigma = \sigma_{\max}$ . В свою очередь, полное напряжение  $p_\alpha$  может быть разложено на проекции (всегда меньше) нормальную  $\sigma_\alpha$  и касательную  $\tau_\alpha$  (рис. 7, *з*):

<sup>3</sup> Отто Христиан Мор (Mohr O. H. 1835–1918) – немецкий механик и инженер, профессор Высшей технической школы в Дрездене. Круговая диаграмма предложена в 1882 г.

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \\ \tau_{\alpha} &= p_{\alpha} \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (2)$$

Выражения (2) показывают, как изменяются напряжения, если наклонное сечение располагается под различными углами. Для практики интересны площадки, на которых возникают экстремальные значения напряжений. Для отыскания положения этих площадок следует приравнять нулю первую производную выражений (2)

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -\sigma \sin 2\alpha; \quad \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Когда  $\alpha = 0$  плоскость  $n-n$  совпадает с плоскостью поперечного сечения  $m-m$ . В этом случае нормальное напряжение максимально ( $\sigma_{\max}$ ), касательное напряжение равно нулю. Такая площадка называется главной. По мере увеличения угла  $\alpha$ , нормальное напряжение убывает и становится равным нулю при  $\alpha = \pi/2$ , а это показывает, что между продольными “волоконками”<sup>4</sup> стержня (параллельными его геометрической оси) нормальные напряжения отсутствуют, что теоретически подтверждает гипотезу отсутствия боковых давлений при растяжении.

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha; \quad \frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90^{\circ}; \quad \alpha = 45^{\circ}.$$

Касательное напряжение  $\tau_{\alpha}$  равно нулю в двух случаях: при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = \pi/2$ . Своего максимального значения  $\tau_{\max} = \sigma_{\max}/2$  оно достигает при  $\alpha = \pi/4$ , так как  $\sin 2(\pi/4) = 1$ . *Площадка, по которой касательное напряжение достигает экстремального значения, называют площадкой сдвига.*

Несмотря на то, что максимальное касательное напряжение составляет лишь половину максимального нормального напряжения, его роль в процессах разрушения бывает значительной. Например, при “вязком” разрушении типа «конус-чашка»<sup>5</sup> цилиндрического образца наблюдаются два механизма разрушения. Центральная часть образца (дно чашки) перпендикулярна его оси – результат действия нормальных напряжений (механизм разрушения отрывом). Периферия (конус и стенки чашки) – следствие сдвиговых процессов от касательных напряжений (механизм разрушения сдвигом). Этот вид разрушения рассматривается в лабораторной работе “Характеристики прочности и пластичности металлов”. С другой стороны, даже при “хрупком” разрушении вблизи поверхности образца наблюдаются “губы среза” – также действие касательных напряжений.

<sup>4</sup> Естественно, никаких волокон в обычных конструкционных материалах нет, за исключением композиционных, которые в данном пособии не рассматриваются. Это понятие вводится абстрактно.

<sup>5</sup> “Конус – чашка” это технический термин (такой вид имеет часть образца в зоне разрыва).

Из анализа формул (1) и (2) следуют два важных вывода. Во-первых, любое из значений  $\rho_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  меньше напряжения  $\sigma = \sigma_{\max} = \sigma_1$  (см. рис. 6, б) в поперечном сечении, следовательно наклонные сечения не столь опасны (при всех прочих равных условиях: независимость механизмов разрушения от угла  $\alpha$ ; одинаковые механические свойства по разным направлениям для изотропного материала и др.).

Именно поэтому во всех видах расчета на прочность находят напряжения в поперечном сечении и используют характеристики поперечного сечения. Во-вторых, напряжения зависят от угла наклона площадки, а таких площадок в нагруженном теле можно рассматривать бесчисленное множество, значит и вариантов описания напряженного состояния будет бесчисленное множество. Этим и объясняется необходимость отыскания положения главных площадок и величин главных напряжений.

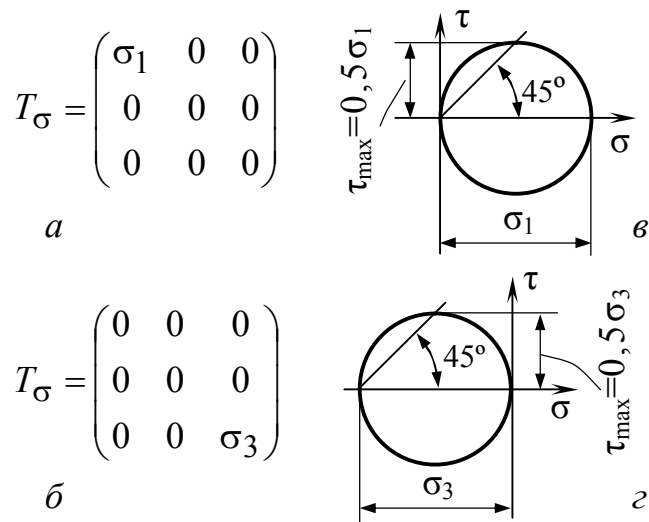


Рис. 8. Тензоры напряжений (а), (б) и круги Мора (в), (г) для случаев растяжения и сжатия соответственно

### 1. 5. Плоское напряженное состояние. Аналитический и графический способы расчета главных напряжений

Плоское напряженное состояние встречается на практике во многих случаях. В частности, оно возникает при поперечном изгибе балок; в сферической или цилиндрической оболочках, находящихся под давлением жидкости или газа (цистерна, газовый баллон, сферический газгольдер), в тонкой пластине, нагруженной взаимно уравновешенной системой сил; при кручении и пр.

При плоском напряженном состоянии два экстремальных напряжения из трех главных  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$  аналитически определяют по формуле

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (3)$$

а положение главных площадок – углом  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) записаны для плоскости  $x$ ;  $y$ . Аналогично их можно записать и для двух других плоскостей ( $y$ ;  $z$  и  $z$ ;  $x$ ).

Графическое определение выполняется построением круга Мора. Покажем оба варианта на примере трубчатого образца (полого вала) лабораторной установки (см. лаб. раб. “Исследование плоского напряженного состояния” [6]).

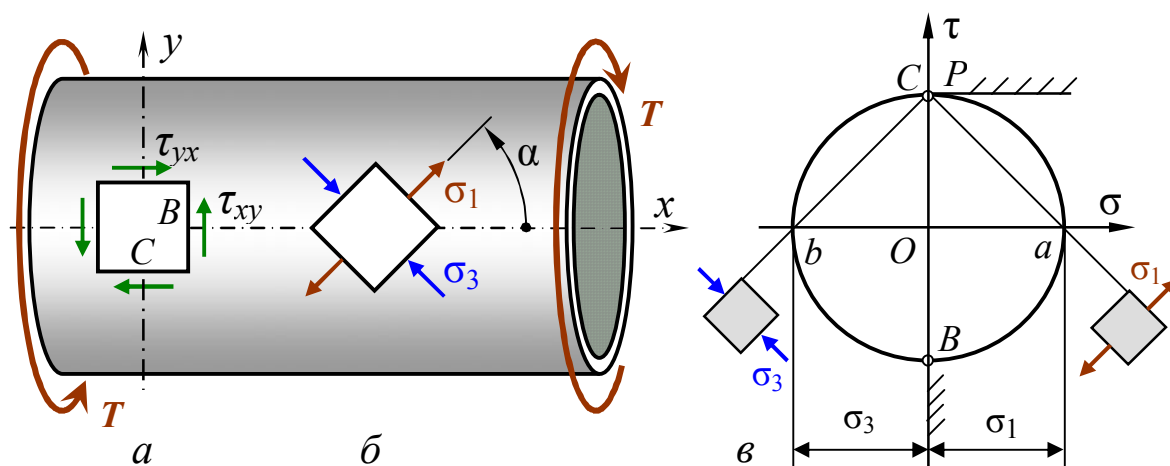


Рис. 9. Анализ напряженного состояния в образце лабораторной установки графическим способом

**Графическое решение.** Под действием приложенной нагрузки в поперечных сечениях образца (вала), имеющего кольцевое сечение, возникает только один внутренний силовой фактор – внутренний крутящий момент  $T$  (рис. 9, а, б). Систему координат  $(x, y)$  выберем так, чтобы ось  $x$  абсцисс совпала с геометрической осью образца. Грани  $B$  и  $C$  элемента (рис. 9, а) ориентируем так, чтобы они были ортогональны выбранным осям координат. Вдоль пары граней  $B$  действует пара касательных напряжений –  $\tau_{xy}$  (знак отрицательный, так как они создают крутящий момент против часовой стрелки), а вдоль граней  $C$  – равные им по модулю (закон парности касательных напряжений) напряжения  $+\tau_{yx}$ . Величина этих напряжений, действующих на поверхности сечения, определяется (см. подраздел 2.3) так:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (5)$$

Напряженное состояние на любой грани элемента характеризуется парой напряжений  $(\sigma, \tau)$ . В нашем примере:  $B(0, \tau_{xy})$  и  $C(0, \tau_{yx})$  или  $B(0, \tau_{\max})$  и  $C(0, \tau_{\max})$ . В координатной системе напряжений  $\sigma - \tau$  (рис. 9, в) поставим точки  $B$  и  $C$  (отображающие на диаграмме Мора напряженное состояние соответствующей грани) на оси  $\tau$ , поскольку  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Из центра  $O$  радиусом  $OB = OC$  проведем окружность. Круг пересекает ось  $\sigma$  в двух точках:  $a$  и  $b$ . Ординаты этих точек равны нулю, следовательно, эти точки соответствуют главным площадкам, на которых касательные напряжения отсутствуют ( $\tau = 0$ ). Абсциссы этих точек равны главным напряжениям  $Oa = \sigma_1 = \tau_{\max}$ ,  $Ob = \sigma_3 = -\tau_{\max}$ . Остается указать, что оставшееся второе главное напряжение отсутствует, то есть  $\sigma_2 = 0$ , в силу имеющего ме-

сто плоского напряженного состояния. Найдем положение главных площадок. Площадка  $B$  на рис. 9,  $a$  ориентирована вертикально; на рис. 9,  $b$  через точку  $B$  проводим вертикальную линию (штриховка). Площадка  $C$  ориентирована горизонтально; через одноименную точку на рис. 9,  $b$  проводим горизонтальную линию. Точка пересечения указанных линий определит положение полюса, который обозначается буквой  $P$  (в рассматриваемом примере совпадает с точкой  $C$ ). Из полюса  $P$  в точки  $a$  и  $b$  проводим лучи, которые определяют положение главных площадок. Угол  $aPb$  прямой (опирается на диаметр) – грани главных площадок взаимно перпендикулярны и ориентированы под углом  $45^\circ$  к продольной оси бруса, что очевидно из построения. Положение главных площадок (на которых действуют ранее найденные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ) показано на рис. 9,  $b$ .

**Аналитическое решение.** Поскольку  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  (вдоль осей  $x, y$  напряжений нет), то из формулы (3)

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = +\tau_{xy} = \tau_{\max}; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = -\tau_{xy} = -\tau_{\max}; \quad \sigma_2 = 0.$$

В формуле (4) перед дробью знак « $-$ », напряжение  $\tau_{xy} < 0$ , а знаменатель формулы равен нулю, следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = +\infty; \quad 2\alpha = 90^\circ; \quad \alpha = +45^\circ.$$

Значение угла откладывают против хода часовой стрелки (см. рис. 9,  $b$ ), так как положительный знак угла определяется поворотом оси абсцисс к оси ординат.

В данном случае имеет место напряженное состояние “чистый сдвиг”. **Чистый сдвиг** – частный случай сложного (двухосного) напряженного состояния, при котором на гранях элемента возникают только касательные напряжения.

Как видно по рис. 9, вместо элемента, подвергающегося действию только касательных напряжений (рис. 9,  $a$ ), можно выделить новый, по граням которого действуют только нормальные напряжения (рис. 9,  $b$ ). Таким образом, элемент, изображенный на рис. 9,  $a$ , испытывает деформацию чистого сдвига, а материал этого элемента в то же время претерпевает в некоторых направлениях растяжение или сжатие.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений для чистого сдвига

## 1.6. Деформации при объемном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука

При растяжении в упругой области образца длиной  $\ell$  и поперечным сечением  $a \times b$  между относительными продольной и поперечными деформациями существует постоянное отношение  $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} \right|$ , где

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ (удлинение, } \Delta \ell > 0);$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \text{ (укорочение, } \Delta a < 0);$$

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta b}{b} \text{ (укорочение, } \Delta b < 0),$$

где  $\Delta a = a_1 - a$  и  $\Delta b = b_1 - b$  – абсолютные деформации стержня в поперечных направлениях, а  $\Delta \ell = \ell_1 - \ell$  – в продольном;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации (Пуассона).

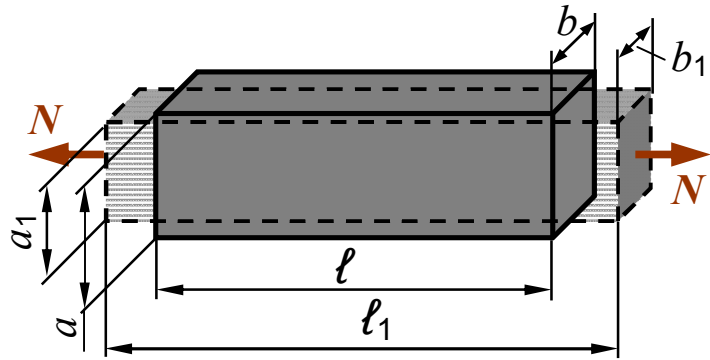


Рис. 10. Схема деформирования стержня при растяжении

Продольная относительная деформация стержня связана с напряжением законом Гука  $\varepsilon = \sigma/E$ .

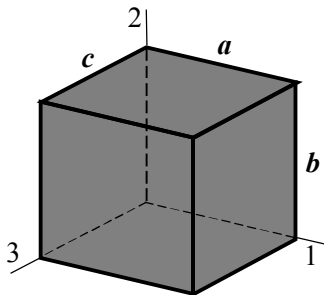


Рис. 11. Элементарный объем

Аналогичные зависимости справедливы и для элементарного объема с размерами ребер  $a \times b \times c$  в направлении главных деформаций (рис. 11).

**Главные деформации** – относительные удлинения ребер параллелепипеда, параллельные главным напряжениям;  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ .

Для линейного напряженного состояния, когда действует только  $\sigma_1$  (рис. 12, а) грань  $a$  удлиняется, грани  $b$  и  $c$  укорачиваются. Тогда согласно закону Гука

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon'_2 = -\mu \varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon'_3 = -\mu \varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Аналогично для направления 2: если действует только  $\sigma_2$ , то укорачиваются грани  $a$  и  $c$ , грань  $b$  удлиняется (рис. 12, б). Деформации в трех направлениях

$$\varepsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon''_3 = -\mu \varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon''_1 = -\mu \varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}.$$

Так же и для третьего направления (рис. 12, в).

$$\varepsilon'''_3 = \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon'''_1 = -\mu \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon'''_2 = -\mu \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

На основании принципа суперпозиции деформацию  $\varepsilon_1$  можно представить следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1,$$

где  $\varepsilon'_1$  – относительное удлинение в направлении  $\sigma_1$ , вызванное действием только напряжения  $\sigma_1$  (при  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ );  $\varepsilon''_1$  – относительное удлинение в направлении  $\sigma_1$ , вызванное действием только напряжения  $\sigma_2$  (при  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ );

$\varepsilon_1'''$  – относительное удлинение в направлении  $\sigma_1$ , вызванное действием только напряжения  $\sigma_3$  (при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ).

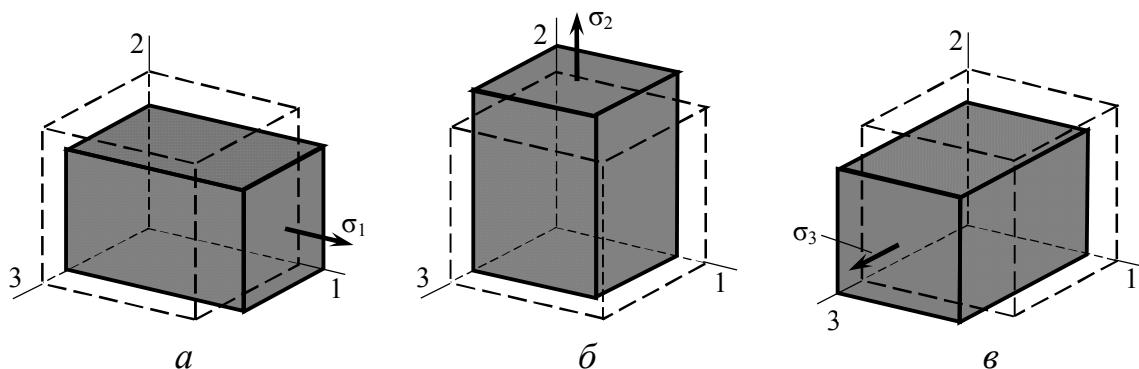


Рис. 12. Элементарный объем под действием главных напряжений первого  $\sigma_1$  (а), второго  $\sigma_2$  (б) и третьего  $\sigma_3$  (в)

Сложив эти величины, будем иметь

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогично получим выражения и для двух других главных деформаций. В результате запишем *обобщенный закон Гука для изотропного тела*, то есть зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями в общем случае объемного напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

## 1. 7. Понятия о теориях прочности

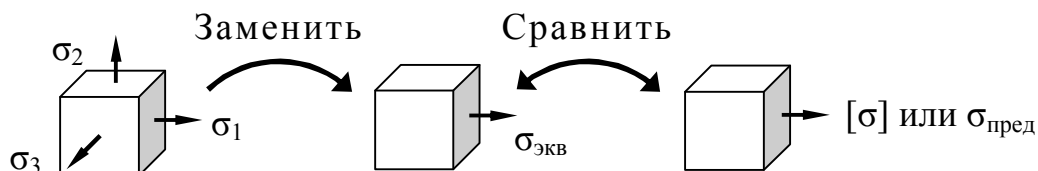
Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состояниях соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны (тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы), что экспериментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, т. е. простому растяжению или сжатию. Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, достаточно полно приведены в справочной литературе.



Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением, как показано на схеме.

**Эквивалентное напряжение**  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.



Создан ряд теорий (гипотез, критериев) прочности (более 20), позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентным ему одноосным напряженным состоянием.

В качестве причин наступления опасного состояния считают: *а)* нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем отрыва; *б)* линейные деформации; *в)* касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига; *г)* энергия деформации и другие.

Следует заметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.

### ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (первая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное нормальное напряжение не превзойдет допустимого, определенного при простом растяжении*

$$\sigma_{\text{ЭКВ(I)}} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

Здесь  $[\sigma]$  – допустимое напряжение при растяжении. Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея (XVII). Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений, не учитывает появления пластических деформаций. Даёт удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекло, керамика, камень, кирпич, бетон, гипс.

## ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (вторая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении*

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon].$$

Гипотеза предложена Э. Мариоттом (1682), развита Б. Сен-Венаном (XIX). Из первой строки обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния (6)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_{\max}.$$

Для линейного напряженного состояния, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Решая совместно последние три равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(II)}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Экспериментально гипотеза подтверждается слабо, в расчетной практике применялась в начале прошлого века.

## ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (третья теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении*

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Гипотеза предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871). Для объемного напряженного состояния

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (7)$$

При простом растяжении (линейном напряженном состоянии,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Решая совместно последние два равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(III)}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (8)$$

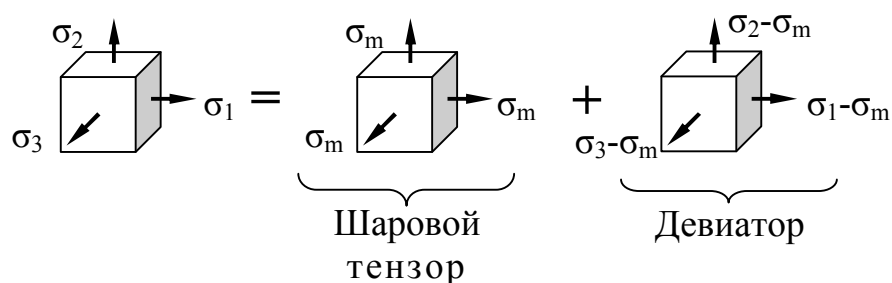
Гипотеза не учитывает действие второго главного напряжения  $\sigma_2$ . Хорошо согласуется с опытом для пластичных материалов.

**ГИПОТЕЗА УДЕЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ  
ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ – ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ**  
(четвертая теория прочности)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превзойдет допустимого значения, определенного при простом растяжении*

$$u_{\phi} \leq [u].$$

Согласно гипотезе, высказанной Д. Максвеллом в 1856 г. и разработанной М. Хубером в 1930 г., удельную потенциальную энергию деформации следует разложить на две компоненты, одна из которых отвечает за изменение объема, а другая – формы. В расчетах учитывать лишь одну из них – последнюю. Напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , действующие по граням параллелепипеда, тоже можно разложить на две компоненты, как показано на схеме:



$$\sigma_1 = (\sigma_1 - \sigma_m) + \sigma_m;$$

$$\sigma_2 = (\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_m; \quad \text{где} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

$$\sigma_3 = (\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_m,$$

Первая компонента – шаровой тензор, по граням которого действует среднее напряжение  $\sigma_m$ , отвечает только за изменение объема (одинаковое удлинение всех ребер). Вторая компонента – девиатор (лат. *deviatio* – отклонение) отвечает за изменение формы элементарного параллелепипеда.

Энергия формоизменения для объемного напряженного состояния (вывод опускается):

$$u_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении, когда  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , приняв  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$ , получим:

$$u_{\phi} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_1^2.$$

Тогда условие прочности по четвертой теории можно записать так:

$$\sigma_{\text{экв(IV)}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (9)$$

четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

## Комментарии к III и IV теориям прочности

Радиусы трех кругов Мора, построенных в плоскостях действия трёх главных напряжений (рис. 13), являются ни чем иным, как максимальными

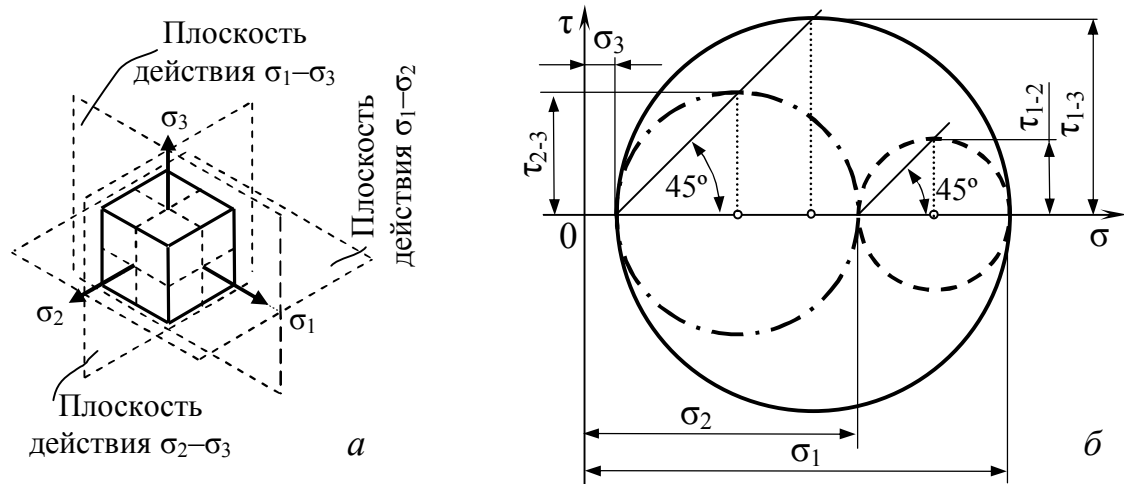


Рис. 13. Объемное напряженное состояние (а); круги Мора для объемного напряженного состояния (б)

касательными напряжениями, действующими по площадкам сдвига ( $\alpha = 45^\circ$ ), то есть полусуммой главных напряжений (см. рис. 8, 9):

$$\tau_{\max 1-2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{\max 2-3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{\max 1-3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Если в третьей теории прочности использовались напряжения лишь на одной площадке сдвига, то в четвертой учтены максимальные касательные напряжения на всех трёх площадках [см. формулу (9)]. Вероятно поэтому экспериментальные результаты несколько ближе к расчётным именно по IV теории прочности. Обсуждаемые критерии в практике расчетов занимают равноправное положение.

### ГИПОТЕЗА КУЛОНА-МОРА (ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА, 1900)

*Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если круг Мора не выходит за пределы огибающих кругов, построенных на допускаемых напряжениях при простом растяжении и сжатии.*

$$\sigma_{\text{экв(V)}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Гипотеза (её иногда называют пятой и обозначают римской цифрой V) применяется для материалов, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (чугун, бетон, ...). В случае, если допускаемые напряже-

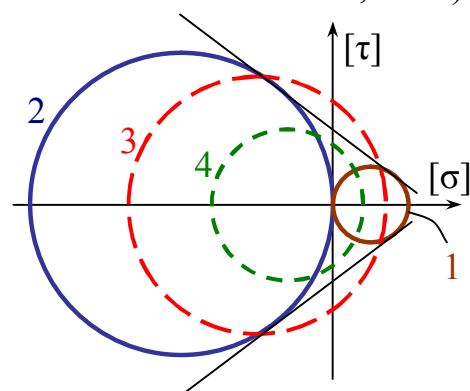


Рис. 14. Круги Мора: для осевого растяжения (1); осевого сжатия (2); опасного напряженного состояния (3); безопасного напряженного состояния (4)

ния при растяжении  $[\sigma_+]$  и сжатии  $[\sigma_-]$  одинаковы, теория Мора совпадает с третьей теорией прочности.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую или третью теории прочности (строго говоря – теории перехода локального объема в пластическое состояние) для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть пластичных, и теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.

## 2. КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**Кручение** – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – крутящий момент  $T$ . Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси.

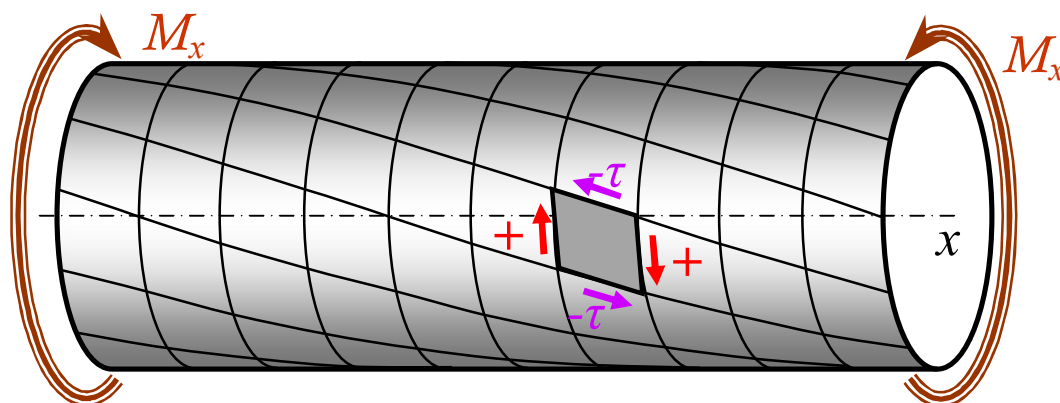


Рис. 15. Модель закручиваемого бруса

Брус, работающий на кручение, называют валом. Вал – вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент. Принято внешние силовые факторы называть вращающими или скручивающими моментами и обозначать буквой  $M$ , внутренние усилия – крутящим моментом  $T$  (англ. *torsion*; фр. – *torque*).

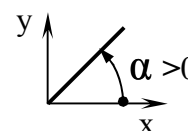
### 2.1. Внутренние усилия при кручении

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. График изменения крутящих моментов по длине бруса называют эпюрой крутящих моментов.

**Правило знаков.** В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило:

крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.

Положительные касательные напряжения вызваны положительным крутящим моментом (рис. 15). Аналогичное правило знаков применяют в курсе математики, теоре-



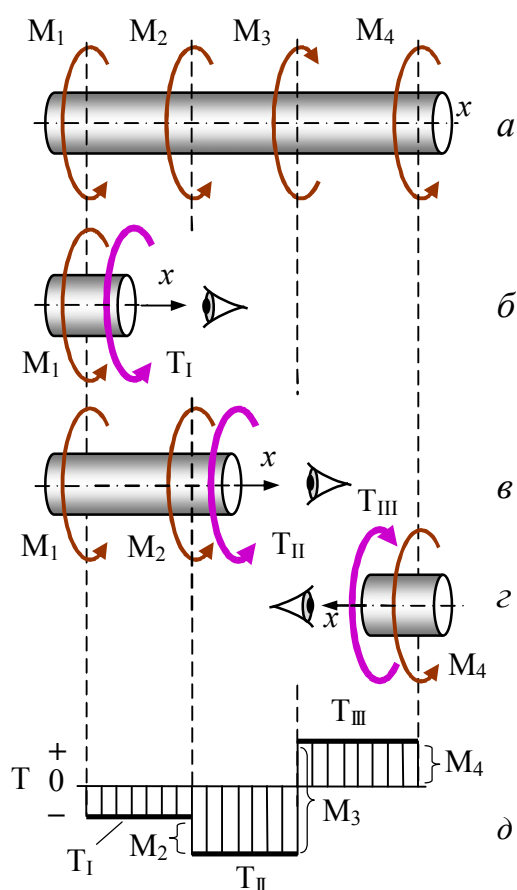


Рис. 16. Схема определения внутренних усилий при кручении

2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми.
3. Расстояния вдоль оси бруса между поперечными сечениями не изменяются.

Расчетная формула должна установить связь напряжений с внутренними усилиями. Рассмотрим несколько этапов решения задачи.

- *Статическая сторона задачи* – условие равновесия (рис. 17, в):  
 $\tau \cdot dA$  – элементарное усилие;  
 $\rho(\tau \cdot dA)$  – элементарный крутящий момент;  
 $T$  – равнодействующий момент касательных напряжений:

$$T = \int_A \rho \tau dA. \quad (10)$$

Для нахождения сдвигающих напряжений  $\tau$  рассмотрим

- *физическую сторону задачи* – закон Гука при сдвиге
 
$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (11)$$
 связывающий касательное напряжение  $\tau$  и сдвиговую деформацию  $\gamma$ , которую найдем, рассмотрев
- *геометрическую* (деформационную) *сторону задачи*.

тической механики, физике (правило буравчика для кругового тока).

На рис. 16, б:  $\sum M_x = 0$ ;

$T_I + M_1 = 0$ ; откуда  $T_I = -M_1$ .

На рис. 16, в:  $\sum M_x = 0$ ;

$T_{III} + M_1 + M_2 = 0$ ; откуда  $T_{III} = -M_1 - M_2$ .

На рис. 16, г:  $\sum M_x = 0$ ;

$T_{III} - M_4 = 0$ ; откуда  $T_{III} = M_4$ .

На эпюре крутящих моментов (рис. 16, д) место расположения скачков (показаны фигурными скобками), их направление и величина соответствуют внешним приложенным вращающим моментам.

## 2.2. Напряжения при кручении

Теория кручения брусков, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

1. Поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии (гипотеза Бернулли).

2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми.

3. Расстояния вдоль оси бруса между поперечными сечениями не изменяются.

Расчетная формула должна установить связь напряжений с внутренними усилиями. Рассмотрим несколько этапов решения задачи.

- *Статическая сторона задачи* – условие равновесия (рис. 17, в):  
 $\tau \cdot dA$  – элементарное усилие;  
 $\rho(\tau \cdot dA)$  – элементарный крутящий момент;  
 $T$  – равнодействующий момент касательных напряжений:

$$T = \int_A \rho \tau dA. \quad (10)$$

Для нахождения сдвигающих напряжений  $\tau$  рассмотрим

- *физическую сторону задачи* – закон Гука при сдвиге
 
$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (11)$$
 связывающий касательное напряжение  $\tau$  и сдвиговую деформацию  $\gamma$ , которую найдем, рассмотрев
- *геометрическую* (деформационную) *сторону задачи*.

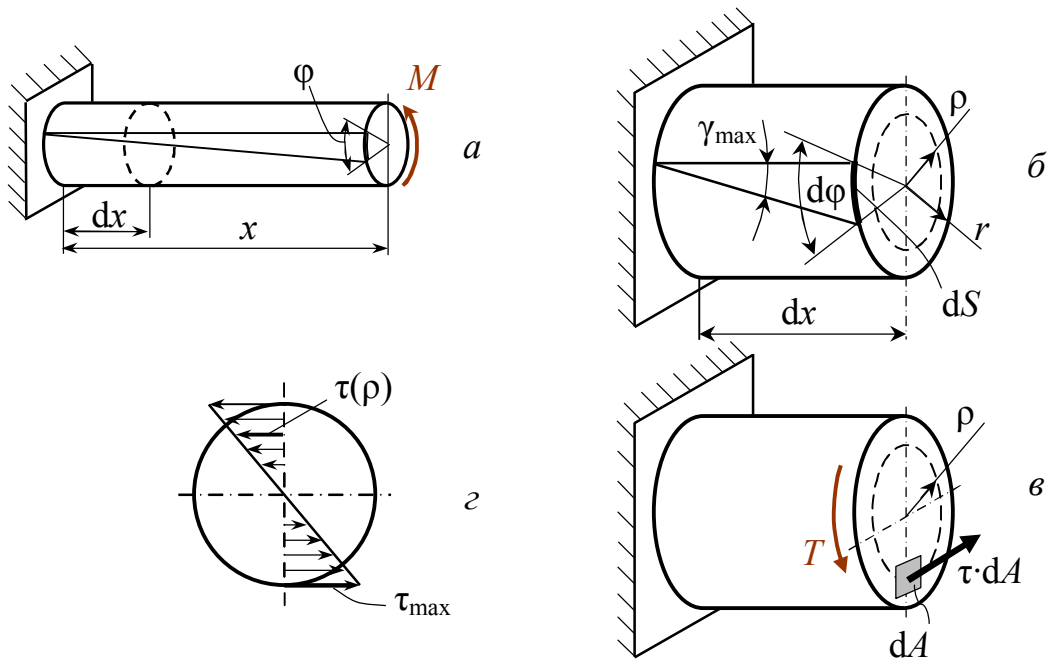


Рис. 17. Схемы к выводу формулы напряжений при кручении

Правый торец бруса длиной  $x$  (рис. 17, а) под действием внешнего скручивающего момента  $M$  повернется на некоторый угол  $\varphi$ . В элементе длиной  $dx$  – аналогичный угол  $d\varphi$  (рис. 17, б). Образующая цилиндра отклоняется от исходного положения на угол  $\gamma$ . На поверхности элемента радиусом  $r$  угол  $\gamma$  принимает максимальное значение

$$\gamma_{\max} \approx \operatorname{tg} \gamma_{\max} = \frac{dS}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

Внутри элемента в цилиндре произвольного радиуса  $\rho$

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (12)$$

- **Математическая сторона задачи** объединяет рассмотренные ранее этапы. Уравнение (12) подставим в уравнение (11), получим

$$\tau = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (13)$$

а уравнение (13) в уравнение (10)

$$T = \int_A \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначая  $\int_A \rho^2 dA = I_p$  – полярный (относительно полюса – продольной оси  $x$ ) момент инерции, получим

$$T = G \cdot I_p \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p}. \quad (14)$$

Относительный угол закручивания элементарного участка  $d\varphi/dx$  (14) подставляем в (13)

$$\tau = G \cdot \rho \frac{T}{G \cdot I_p}$$

и получим напряжение в произвольной точке поперечного сечения

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}. \quad (15)$$

Закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении – линейный. В центре  $\tau = 0$ , так как  $\rho = 0$ ; на периферии, где  $\rho_{\max} = r$ ,  $\tau = \tau_{\max}$ , (рис. 17, з).

### 2.3. Расчет на прочность при кручении

Принимая отношение  $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{I_p}{r} = W_p$ , условие прочности можно представить

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (16)$$

где значение  $T_{\max}$  выбирают из эпюры крутящих моментов по модулю;  $W_p$  – полярный момент сопротивления круглого или кольцевого поперечного сечений. Для круга

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4; \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3. \quad (17)$$

Для кольцевого сечения

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4); \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \quad (18)$$

где отношение внутреннего диаметра  $d$  кольцевого сечения к наружному  $D$  называют *коэффициентом пустотелости*  $c = d/D$ .

Если сечение некруглое (прямоугольное, треугольное, эллиптическое и др.) используют  $I_k$ ,  $W_k$ , которые вычисляют по специальным формулам.

**Допускаемое напряжение** при кручении назначают, исходя из выбранной теории прочности. При кручении (см. подраздел 1.5) было найдено:  $\sigma_1 = \tau$ , а  $\sigma_3 = -\tau$ . Подставляя эти значения в условие III теории прочности [формула (8)], получим:  $\sigma_{\text{экв(III)}} = \tau - (-\tau) = 2\tau$ . Переходя к допускаемым напряжениям, найдем

$$[\sigma] = 2[\tau], \quad \text{откуда} \quad [\tau] = 0,5[\sigma].$$

Если использовать IV теорию прочности, то

$$\sigma_{\text{экв(IV)}} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + (-\tau - \tau)^2]} = \sqrt{3} \cdot \tau, \quad \text{или} \quad [\sigma] = \sqrt{3} \cdot [\tau],$$

откуда  $[\tau] \approx 0,577 [\sigma]$ .



### Виды расчетов на прочность:

а) поверочный: известен диаметр вала и допустимое напряжение; вычисляют  $\tau_{\max}$  (16) и сравнивают его с  $[\tau]$ , определяя недогрузку или перегрузку в процентах; если сопоставить  $\tau_{\max}$  с пределом текучести  $\tau_T$ , можно найти коэффициент запаса прочности.

б) проектный: известны внешние нагрузки и допустимые напряжения ( $[\tau]$  или  $[\sigma]$ ) или характеристики прочности материала ( $\tau_T$  или  $\sigma_T$ ); определяют внутренние усилия (крутящие моменты), вычисляют диаметр вала. в) определение допустимой нагрузки: по известным размерам вала и характеристикам прочности материала находят допустимый крутящий момент.

### 2.4. Деформация при кручении. Расчет вала на жесткость

Угол  $d\varphi$  закручивания элементарного участка  $dx$  из уравнения (14):

$$d\varphi = \frac{T}{G \cdot I_p} dx.$$

Угол закручивания всего вала

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{T}{G \cdot I_p} dx.$$

Для вала постоянной жесткости сечения (произведение  $G \cdot I_p$ ) на длине  $\ell$  и постоянства крутящего момента  $T$

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_p}. \quad (19)$$

Полученную зависимость называют законом Гука при кручении (сформулирован Кулоном<sup>6</sup> в 1784 г. спустя 106 лет после Гука примерно так: крутящий момент пропорционален углу закручивания).

За меру жесткости принимают относительный угол закручивания, то есть угол, приходящийся на единицу длины вала

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{T}{G \cdot I_p}, \text{ рад/м.}$$

Условие жесткости при кручении:

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \text{ рад/м,}$$

где допустимый относительный угол закручивания  $[\theta]$  имеет размерность рад/м. Чаще пользуются градусной мерой угла закручивания:

$$\theta^\circ = \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta^\circ], \text{ град/м.} \quad (20)$$

Допустимый угол закручивания зависит от назначения вала; принимают  $[\theta^\circ] = 0,3-1$  град/м.

---

<sup>6</sup> Шарль Огюстен Кулон (Coulomb), (1736 – 1806) – французский математик, астроном, военный инженер, строитель мостов и дорог, академик. Занимался механикой, электричеством, магнетизмом.

## 2.5. Пример расчета вала на прочность и жесткость

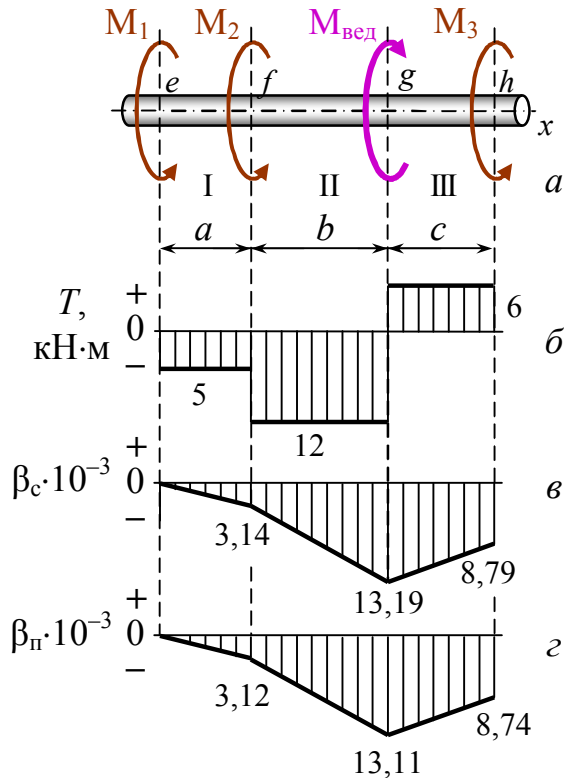


Рис. 18. Схема нагружения вала (а), эпюра крутящих моментов (б), эпюры углов закручивания сплошного (в) и полого (г) валов

Для расчетов на прочность и жесткость необходимо найти положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала (рис. 18, а). Воспользовавшись методом сечений (см. подраздел 2.1), определим внутренние усилия и построим эпюру крутящих моментов (рис. 18, б). Опасными являются все сечения на II участке:  $T_{\max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

### II. Проектный расчет вала сплошного сечения

а) Из условия прочности при кручении  $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$

находим необходимый момент сопротивления полярный для сплошного круглого сечения

$$W_p \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{\pi D^3}{16}, \text{ откуда диаметр вала } D \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0914 \text{ м}.$$

Здесь допускаемое касательное напряжение принято по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Если принять допускаемое касательное напряжение по четвертой теории прочности:  $[\tau] = 0,577 [\sigma] = 0,577 \cdot 160 = 92,3 \text{ МПа}$ , то

Из условия прочности и жесткости выполнить проектный расчет: определить диаметры сплошного и полого ( $c = 0,8$ ) валов. Результаты округлить согласно ГОСТ. Построить эпюры углов закручивания вала. Валы сопоставить по металлоёмкости и жесткости.

Дано:

$$M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad a = 0,6 \text{ м},$$

$$M_2 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad b = 0,8 \text{ м},$$

$$M_3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad c = 0,7 \text{ м}.$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}, \quad [\theta] = 0,8 \text{ град/м}.$$

### I. Определение внутренних усилий

Значение ведущего момента

$M_{\text{вед}}$  определим из условия равновесия вала:  $\sum M_x = 0$ ;

$$M_{\text{вед}} - M_1 - M_2 - M_3 = 0, \text{ откуда } M_{\text{вед}} = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12 \cdot 10^3}{\pi \cdot 92,3 \cdot 10^6}} = 0,0872 \text{ м.}$$

Диаметры отличаются всего на  $\frac{9,14 - 8,72}{9,14} \cdot 100 = 4,6 \%$ .

б) Из условия жесткости при кручении  $\theta = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta]$

находим необходимый момент инерции полярный для сплошного круглого сечения:

$$I_p \geq \frac{T_{\max}}{G[\theta]} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad \text{откуда диаметр вала}$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}}{G[\theta]} \cdot \frac{180^\circ}{\pi^2}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 12 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi^2}} = 0,102 \text{ м.}$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига, упругая постоянная; для стали  $G = 80$  ГПа.

Чтобы размеры вала удовлетворяли обоим условиям – как прочности, так и жесткости, следует назначить диаметр, больший из двух найденных. Согласно ГОСТ 6636–69 принимаем диаметр вала  $D = 105$  мм.

### III. Деформация вала сплошного сечения

Углы закручивания вала на каждом из трех участков определим по закону Гука, вычислив предварительно значение жесткости сечения при кручении

$$GI_p = G \frac{\pi D^4}{32} = 80 \cdot 10^9 \frac{\pi \cdot 0,105^4}{32} = 0,955 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2:$$

$$\varphi_I = \frac{T_I a}{GI_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6} = -0,00314;$$

$$\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{GI_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6} = -0,01005;$$

$$\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{GI_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6} = 0,00440.$$

Установив начало отсчета на левом конце вала (сечение  $e$ ), вычислим углы закручивания других характерных сечений вала сплошного сечения:

$$\beta_{c,e} = 0.$$

$$\beta_{c,f} = \varphi_I = -3,14 \cdot 10^{-3}.$$

$$\beta_{c,g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,14 + 10,05) \cdot 10^{-3} = -13,19 \cdot 10^{-3}.$$

$$\beta_{c,h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -(3,14 + 10,05 - 4,40) \cdot 10^{-3} = -8,79 \cdot 10^{-3}.$$

Строим эпюру углов закручивания сплошного вала (рис. 18, в)

### IV. Проектный расчет вала пустотелого сечения

а) Из условия прочности при кручении  $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$

находим необходимый момент сопротивления полярный для пустотелого сечения

$$W_p \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \text{ откуда диаметр вала}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_{\max}}{\pi [\tau] (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6 (1 - 0,8^4)}} = 0,1090 \text{ м.}$$

Здесь допускаемое касательное напряжение по III теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

б) Из условия жесткости при кручении  $\theta = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta]$

находим необходимый момент инерции полярный для пустотелого круглого сечения:

$$I_p \geq \frac{T_{\max}}{G [\theta]} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \text{ откуда диаметр вала}$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 T_{\max}}{G [\theta] (1 - c^4)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi^2}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 12 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 (1 - 0,8^4)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi^2}} = 0,1167 \text{ м.}$$

Чтобы размеры вала удовлетворяли обоим условиям – как прочности, так и жесткости, следует назначить диаметр больший из двух найденных. Согласно ГОСТ 6636–69 принимаем диаметр вала  $D = 120 \text{ мм}$ .

#### V. Деформация вала пустотелого сечения

Углы закручивания вала на каждом из трех участков определим по закону Гука, вычислив предварительно значение жесткости сечения при кручении

$$G I_p = G \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = 80 \cdot 10^9 \frac{\pi \cdot 0,12^4}{32} (1 - 0,8^4) = 0,961 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2:$$

$$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00312;$$

$$\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00999;$$

$$\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,961 \cdot 10^6} = 0,00437.$$

Установив начало отсчета на левом конце вала (сечение  $e$ ), вычислим углы закручивания других характерных сечений полого вала:

$$\beta_{II,e} = 0.$$

$$\beta_{II,f} = \varphi_I = -3,12 \cdot 10^{-3}.$$

$$\beta_{II,g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,12 + 9,99) \cdot 10^{-3} = -13,11 \cdot 10^{-3}.$$

$$\beta_{II,h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -(3,12 + 9,99 - 4,37) \cdot 10^{-3} = -8,74 \cdot 10^{-3}.$$

Строим эпюру углов закручивания полого вала (рис. 18,  $z$ ).

VI. Сопоставление металлоемкости  
и жёсткости валов двух вариантов исполнения

Таблица. Результаты расчёта валов

Поперечное сечение вала	Наружный диаметр вала, мм			Площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	Угол закручивания крайнего сечения
	Из условия прочности	Из условия жёсткости	Принято по ГОСТ		
Сплошное	91,4	102	105	8659	0,00879
Полое	109	116,7	120	4072	0,00874

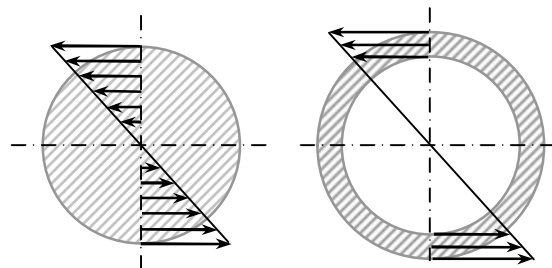
Результаты расчёта представлены в таблице. Металлоемкость вала определяется его объёмом, то есть произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длина вала неизменна, сопоставим площади поперечных сечений сплошного вала с полым

$$\frac{A_{\text{спл}}}{A_{\text{пол}}} = \frac{(\pi/4)D_{\text{спл}}^2}{(\pi/4)D_{\text{пол}}^2(1-c^2)} = \frac{105^2}{120^2(1-0,8^2)} = 2,13.$$

**Выводы:**

1. Из условий прочности и жесткости найдены диаметры вала двух вариантов исполнения, сплошного и пустотелого: 105 и 120 мм соответственно.
2. Вычислены деформации валов на каждом из участков, построены эпюры углов закручивания валов сплошного и пустотелого. Жесткость полого вала несколько выше вала сплошного сечения.
3. Сопоставлены металлоемкости валов двух вариантов исполнения. Расход металла для вала сплошного сечения более, чем в два раза превышает аналогичный показатель для вала пустотелого, поэтому предпочтение следует отдать валу пустотелому.

**Примечание.** Полученный результат по сопоставлению металлоемкости валов ожидаем. Как следует из эпюры распределения касательных напряжений при кручении достаточно большой объем материала, сосредоточенный около центра тяжести сечения, испытывает напряжения ниже допустимого, и вклад этого материала в общую прочность конструкции невелик. Поэтому целесообразно убирать неработающий материал из этой области. Конструкции из полого сечения созданы природой: камыш, тростник, бамбук, злаковые культуры, трубчатые кости птиц и млекопитающих. В авиации и космонавтике используют полые валы, в строительстве – пустотные плиты перекрытий.



### 3. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение объемному, плоскому и линейному напряженным состояниям.
2. Дайте определение главным площадкам и главным напряжениям.
3. Запишите тензор напряжений в матричной форме.
4. Что означает понятие «инвариантность тензора»?
5. Какая связь существует между главными напряжениями и главными деформациями для изотропного тела?
6. Как найти величину главных нормальных напряжений аналитически?
7. Как найти величину главных нормальных напряжений графически?
8. Как найти положение главных площадок аналитически и графически?
9. Дайте определение площадкам сдвига.
10. Как вычислить величину касательных напряжений в произвольной точке поперечного сечения при кручении?
11. Как вычислить величину максимальных касательных напряжений при кручении?
12. Чему равна величина главных нормальных напряжений при кручении?
13. Что такое полярный момент инерции и как его вычислить для круглого сплошного и полого сечения? Какова его размерность?
14. Что такое полярный момент сопротивления и как его вычислить для круглого сплошного и полого сечения? Какова его размерность?
15. Какие гипотезы прочности применяют при расчете диаметра вала?
16. При каких видах нагружения возникает объемное, плоское, линейное напряженные состояния? Приведите примеры.
17. Как определить диаметр вала из условия жесткости?
18. Как определить диаметр вала из условия прочности?
19. Из каких соображений окончательно назначают диаметр вала?
20. Какие деформации называют главными?
21. Какое напряженное состояние возникает в произвольной точке при кручении бруса круглого поперечного сечения? Нарисуйте круг Мора.
22. Какое напряженное состояние возникает в произвольной точке сечения при растяжении стержня? Нарисуйте круг Мора.
23. Стержень растягивают силой, приложенной вдоль его оси. Возникнут ли в каком-либо сечении стержня касательные напряжения? Если да, то в каком и как их определить?
24. Чему равна величина главных нормальных напряжений при сжатии? Нарисуйте круг Мора для этого вида нагружения (деформации).
25. Какого порядка действий следует придерживаться в расчетах элементов конструкций?
26. Какое правило знаков принято для нормальных и касательных напряжений?
27. Какое правило знаков целесообразно принять для крутящего момента?

28. Каков закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении вала при кручении?
29. В чем особенность применения полого вала по сравнению с валом сплошного сечения?
30. Приведите примеры пустотелых элементов в природе и технике.
31. На сколько значительно отличаются результаты расчетов диаметра вала, выполненные с применением III и IV теорий прочности?
32. Приведите примеры нагружений, при которых возникают различные виды напряженных состояний.
33. Дайте определение понятию «чистый сдвиг». Как найти главные напряжения при чистом сдвиге?
34. Как ориентированы главные площадки по отношению к оси бруса при чистом сдвиге?
35. Как изменится угол закручивания вала, если его диаметр увеличить вдвое?
36. Как изменится напряжение в поперечном сечении вала, если его диаметр увеличить вдвое?
37. Как изменится угол закручивания вала, если его длину увеличить вдвое?
38. Как изменится напряжение в поперечном сечении вала, если его длину увеличить вдвое?

### **Список рекомендуемой литературы**

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов: учебник для вузов/ А. В. Александров, В. Д., Потапов, Б. П., Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. *Дарков, А. В.* Сопротивление материалов: учебник для техн. вузов/ А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
3. Сопротивление материалов: учеб. пособие / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская [и др.]; под ред. Н. А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2000. – 430 с.
4. *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов: учебник для втузов/ В. И. Феодосьев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.
5. Исследование плоского напряженного состояния: метод. указ. / Багмутов В. П., Белов А. А., Кондратьев О. В.; ВолгГТУ. – Волгоград, 2007. – 16 с.

Учебное издание

Вячеслав Петрович **Багмутов**  
Андрей Анатольевич **Белов**  
Олег Викторович **Кондратьев**  
Александр Станиславович **Столярчук**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ВАЛА  
НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ**

Учебное пособие

Редактор А. К. Саютина

Темплан 2008 г. Поз. № 57. Подписано в печать. 15.12.2008.  
Формат 60×84 1/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага газетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1, 86.  
Уч.-изд. л. 1,76. Тираж 250 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.  
400131 Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28.

РПК «Политехник»  
Волгоградского государственного технического университета  
400131 Волгоград, ул. Советская, 35