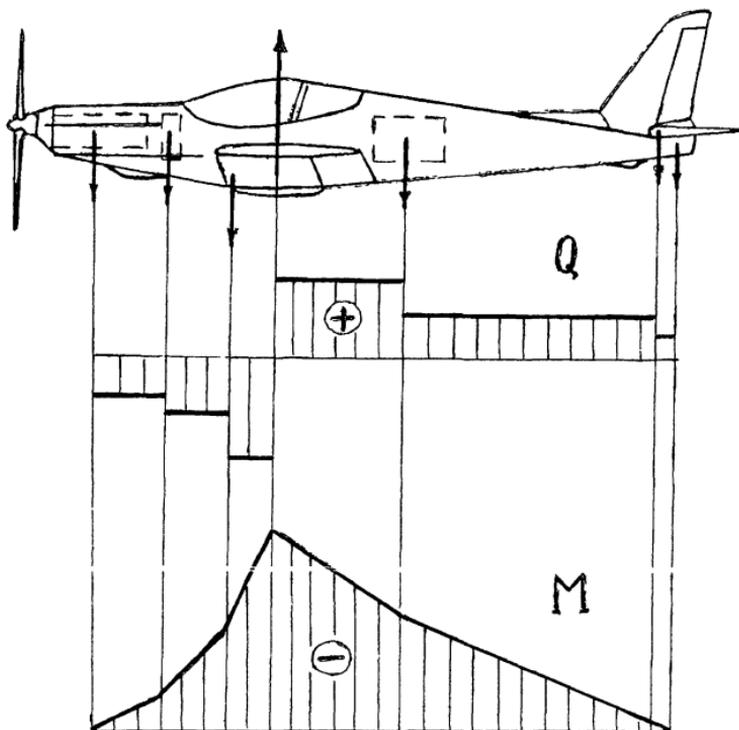


В.П. Багмутов, О.М. Игнатъева

ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БАЛОК



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. П. Багмутов, О. М. Игнатъева

ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ВАЛОК

Учебное пособие

Волгоград 1996

УДК 539.3

Плоский поперечный изгиб балок: Учебное пособие/
В.П.Вагмутов, О.М.Игнатьева. - ВолгоГТУ, Волгоград, 1996.-31 с.
ISBN 5-230-03704-0

Содержит основополагающие элементы теории по теме "Плоский поперечный изгиб балок", общий алгоритм решения задач при расчетах балок на прочность и жесткость, а также справки из истории науки о сопротивлении материалов.

Предназначено для студентов дневной и вечерней форм обучения, изучающих курс сопротивления материалов при подготовке бакалавра техники.

Может быть использовано при выполнении соответствующей расчетно - проектировочной работы по курсу "Сопротивление материалов".

Ил. 15. Библиогр. - 4 назв.

Рецензенты: Носко И.Н., Грязев В.В.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета.

ISBN 5-230-03704-0

© Волгоградский
государственный
технический
университет,
1996

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ И ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Выполнение расчетов на прочность и жесткость балок при плоском поперечном изгибе.

Брусья, работающие на изгиб, называются балками. Если внешние и реактивные усилия лежат в плоскости симметрии балки, то она будет изгибаться в той же плоскости, т.е. изгиб является плоским и прямым.

Если при плоском изгибе внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси x балки, то такой изгиб называют поперечным.

Наряду с геометрической осью балки x , проходящей через центры тяжести сечений, стержень обладает еще осью центров изгиба, к точкам которой должны приводиться поперечные нагрузки, чтобы изгиб не сопровождался кручением.

Если сечение балки обладает осью симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси. Для сечения, имеющего две оси симметрии, центр изгиба лежит на пересечении осей симметрии и совпадает с центром тяжести сечения.

Процедура расчета балок на прочность по допускаемым напряжениям соответствует основополагающей концепции сопротивления материалов, опирающейся на поиск опасного сечения и опасной точки. Выбор опасного сечения связан с анализом внутренних силовых факторов.

При плоском прямом поперечном изгибе балок с прямолинейной осью в их поперечных сечениях возникают внутренние усилия только двух видов: изгибающие моменты M и поперечные (перерезывающие) силы Q .

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях балки при изгибе, определяются с использованием метода мысленных сечений.

Внутренние силовые факторы являются интегральными характеристиками и выражаются через соответствующие напряжения.

Поэтому, для того чтобы правильно рассчитать балку на прочность и жесткость (последнее связано с оценкой ее деформаций), необходимо, прежде всего, научиться определять законы изменения

внутренних усилий и строить их графики (эпюры), чему и посвящается первая часть работы по расчету балок.

Выбор же опасной точки и проверка прочности зависит от характера изменения напряжений по сечению, типа напряженного состояния и вида критерия прочности. Эти вопросы составляют содержание второй части семестрового задания.

Заключительная часть работы посвящена деформациям балки и оценке ее жесткости.

Ниже показана принципиальная блок-схема (рис.ф) решения задачи расчета балки постоянного сечения при плоском поперечном изгибе, соответствующая основным этапам выполнения семестрового задания "Плоский поперечный изгиб балок". Двойные стрелки дают направление расчета в общем случае (применительно к балкам из прокатного профиля), одинарные стрелки соответствуют более коротким процедурам расчета. Штриховые линии указывают на возможность корректировки решений, полученных на предыдущих этапах с учетом последующих решений.

ПРИМЕЧАНИЕ. Выполнение учебно-исследовательской работы (УИРС) по оптимизации балки в свете выбранного критерия оптимальности осуществляется в рамках индивидуального задания на основе данного семестрового задания.

В этом случае решение задачи по определению внутренних усилий Q и M должно даваться в форме, удобной для реализации на ЭВМ. Но при любой постановке вопроса отчет о работе должен содержать функции изменения внутренних усилий от координаты мысленного сечения по участкам в общем (буквенном) виде.

**Блок-схема расчета балок
на прочность и жесткость
при плоском поперечном
изгибе**

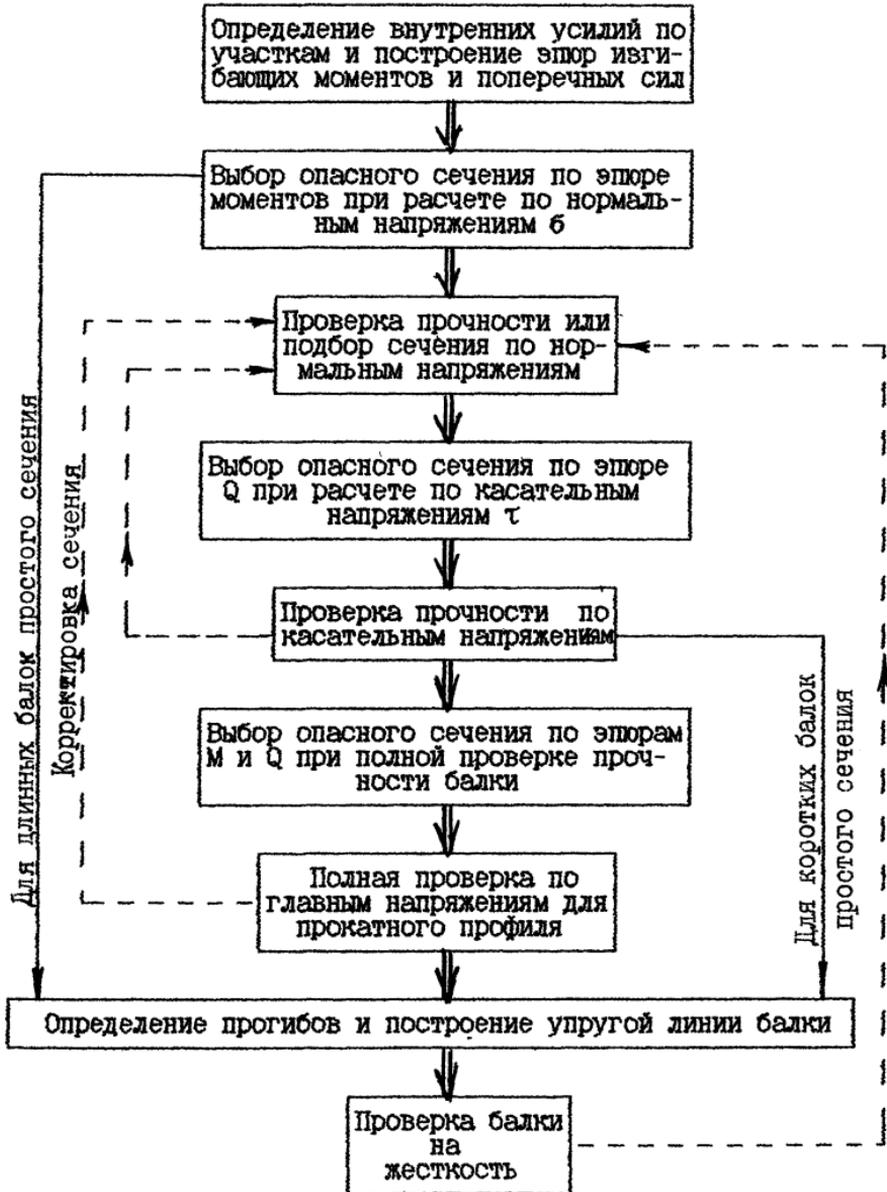


Рис. 1

2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

2.1. Правила знаков для внутренних усилий Q и M

Знак внутренних усилий в сопротивлении материалов устанавливается в соответствии с видом деформации, вызывающей их.

В произвольном сечении балки двумя параллельными поперечными сечениями выделим участок бесконечно малой длины, d_x (рис. 2,а). Под действием изгибающих моментов этот участок изгибается, а под действием поперечных сил - испытывает сдвиг. Виды деформаций данного участка балки (рис. 2,а) изображены на рис. 2,б от изгибающего момента M , на рис. 2,в - от поперечной силы Q .

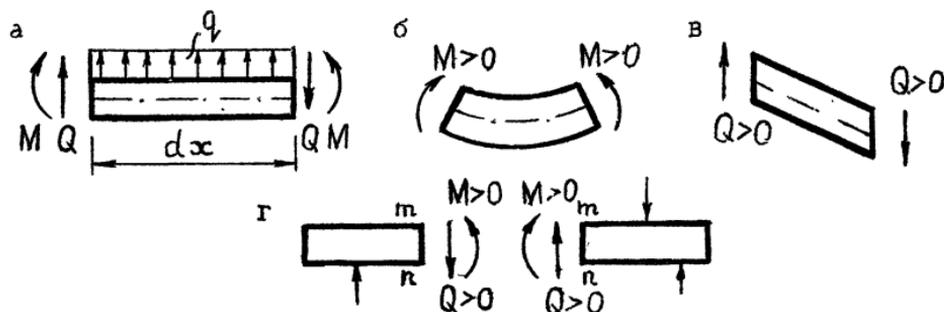


Рис. 2

Для балки с прямолинейной геометрической осью, расположенной горизонтально, положительный внутренний изгибающий момент M изгибает балку выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон; положительные поперечные силы Q вызывают сдвиг элемента таким образом, что его левая грань перемещается вверх, а правая - вниз. Положительные направления Q и M , возникающие в сечении m левой и правой частей балки, показаны на рис. 2,г, отрицательные усилия Q и M соответствуют противоположному направлению. Распределенную нагрузку интенсивностью q считаем положительной, если она направлена вверх.

Из рис. 2, г следует, что при определении внутренних усилий в поперечном сечении балки путем рассмотрения внешних усилий, расположенных **слева** от рассматриваемого сечения, **положительные внутренние поперечные силы** вызываются сосредоточенными силами и распределенными нагрузками, направленными **вверх**, а **положительный внутренний изгибающий момент** вызывается внешними силовыми факторами, изгибающими балку **вверх** относительно сечения.

2.2. Дифференциальные зависимости при изгибе

Правила контроля эпюр

Между интенсивностью q внешней распределенной нагрузки, поперечной силой Q и изгибающим моментом M имеются дифференциальные зависимости, которые облегчают построение эпюр M , Q и дают возможность контролировать их правильность. Для их вывода рассмотрим равновесие элемента балки длиной dx , показанного на рис. 2, а. Здесь 1 далее ось X -геометрическая ось балки, проходящая через центры тяжести сечений. Вследствии малости dx внешнюю нагрузку считаем равномерно распределенной на выделенном участке. Полагаем, что на этом участке отсутствует сосредоточенная внешняя сила. Тогда, из двух уравнений равновесия элемента - суммы проекций всех сил на вертикальную ось Y и суммы моментов всех сил относительно центра тяжести C правого сечения элемента балки:

$$\sum Y = 0 \quad Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum M_C = 0 \quad M + Q \cdot dx + q \cdot (dx)^2/2 - (M + dM) = 0$$

получаем*)

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad (2.2)$$

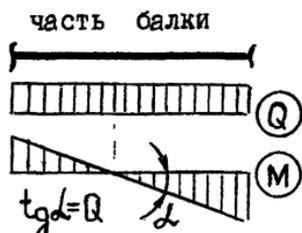
$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad (2.3)$$

или обобщаем

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q. \quad (2.4)$$

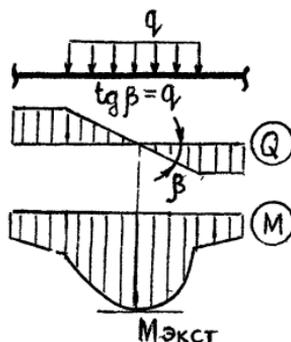
Дифференциальные зависимости (2.2) - (2.4) позволяют установить некоторые особенности эпюр изгибающих моментов и поперечных сил:

1. На участке, где нет распределенной нагрузки ($q = 0$), эпюры Q ограничены прямыми, параллельными нулевой линии, а эпюра M в общем случае - наклонными прямыми.

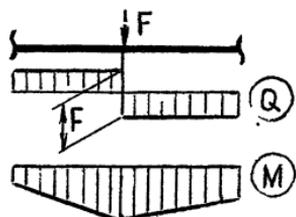


*) Немецкий инженер Л. Шведлер (1851 г.) установил соотношение (2.2) и показал, что "сечение, в котором изгибающий момент достигает своего максимального значения, является в то же самое время и тем сечением, в котором поперечная сила меняет знак".

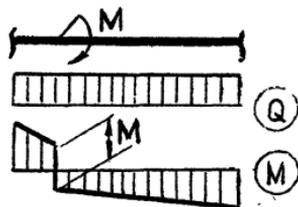
2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M - квадратичными параблами. Если эпюру M строить со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения M откладывать вниз от базисной нулевой линии, то выпуклость эпюры M обращена в сторону действия распределенной нагрузки. Если на этом участке поперечная сила в одном из сечений равна нулю ($Q = -dM/dx = 0$), то в этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение $M_{\text{экст}}$ - максимум или минимум (здесь касательная к эпюре - горизонтальна).



3. В сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q будет скачок, равный значению этой силы и направленный в ту же сторону (при построении эпюры слева направо и откладывании положительных значений от нулевой линии вверх), а эпюра M будет иметь перелом.



4. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент, на эпюре M будет скачок, равный значению момента, на эпюре Q изменений не будет. Направление скачка будет вниз (при построении эпюры слева направо), если сосредоточенный момент действует по ходу часовой стрелки, и вверх, - если против хода часовой стрелки.



2.3. Техника построения эпюр внутренних усилий

Мысленные сечения можно координировать от единого начала координат для всех участков балки или в скользящей системе координат, начало которой обычно связывается с началом или концом выделенного участка, а положительное направление оси X , в зависимости от этого, вправо или влево. Первый способ более удобен при автоматизированном расчете балки на прочность и жесткость на ЭВМ (например, по методу начальных параметров), а также при ее оптимизации, второй - при ручном счете.

Для того, чтобы получить представление о **первом способе** определения внутренних усилий Q и M , расположим начало координат на левом конце балки, а положительную ось x направим вправо. Мысленно отбросим опоры, а действие их на балку заменим опорными реакциями. Если распределенная нагрузка не распространяется до правого конца балки, то необходимо это сделать, компенсировав продолжение аналогичной

нагрузкой противоположного направления. На рис. 2 показана расчетная схема балки, удовлетворяющая данному требованию, причем начало любого i -го участка балки с координатой a_i характеризуется соответствующим набором (в общем случае) из сосредоточенной силы F_i , сосредоточенного момента M_i и началом действия распределенной нагрузки интенсивностью q_i .

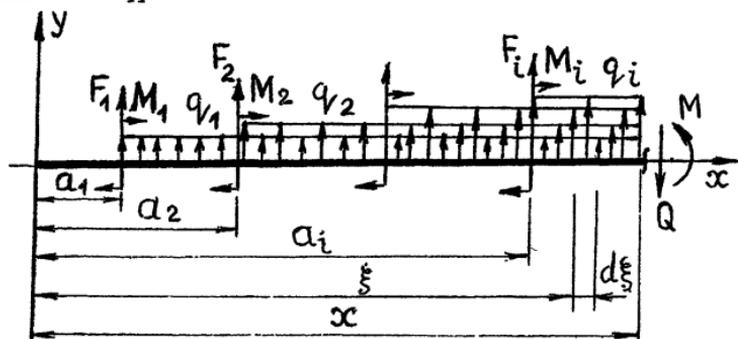


Рис.3

Тогда в произвольном сечении i -го участка на расстоянии x от начала координат поперечная сила Q определится суммой проекций всех внешних сил, действующих на выделенную часть балки, на вертикальную ось Y , а изгибающий момент M — из суммы моментов от всех внешних усилий и сосредоточенных моментов относительно центра тяжести мысленного сечения балки:

$$Q = - \sum_{j=1}^i \left(F_j + \int_{a_j}^x q_j d\xi \right), \quad (2.4)$$

$$M = \sum_{j=1}^i \left(M_j + F_j (x - a_j) + \int_{a_j}^x q_j (x - \xi) d\xi \right). \quad (2.5)$$

Здесь ξ — переменная интегрирования. Пример использования этого способа при определении функций $Q = Q(x)$ и $M = M(x)$ будет дан в разделе, посвященном исследованию деформаций балок методом начальных параметров. Здесь же основное внимание будет обращено на **второй способ** записи уравнений $M(x)$ и $Q(x)$ при координировании мысленных сечений наиболее целесообразным способом и проиллюстрировано на примере балок с характерными нагрузками.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных примеров, напомним правило, которое непосредственно вытекает из метода мыслен-

ных сечений и упрощает запись выражений для Q и M .

Поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на вертикальную ось Y , приложенных к оставленной части балки. Изгибающий момент - алгебраической сумме моментов относительно оси Z , проходящей через центр тяжести сечения, т.е.

ост. часть

$$Q = \Sigma F_{y_i}$$

ост. часть

$$M = \Sigma M_{z_i}$$

Правило знаков для $Q(x)$ и $M(x)$ приведено выше.

На примере нескольких типовых задач рассмотрим построение эпюр внутренних усилий $Q(x)$ и $M(x)$, т.е. графиков функций $Q=Q(x)$, $M=M(x)$.

Пример 1.

Для балки на двух опорах, изображенной на рис. 4, построить эпюры внутренних усилий Q и M .

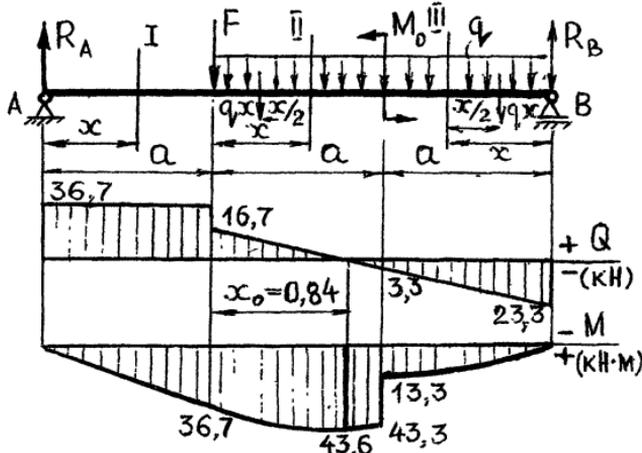


Рис. 4

Дано: $M_0 = 30$ кН·м; $F = 20$ кН; $q = 20$ кН/м; $a = 1$ м.

Из уравнений статики определим опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0 \quad - F \cdot a - q \cdot 2a \cdot 2a + M_0 + R_B \cdot 3a = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot a + 4 \cdot q \cdot a^2 - M_0}{3 \cdot a} = \frac{20 \cdot 1 + 4 \cdot 20 \cdot 1^2 - 30}{3 \cdot 1} = 23.3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad F \cdot 2a + M_0 + q \cdot 2a \cdot a - R_A \cdot 3a = 0,$$

$$R_A = \frac{2 \cdot Fa + M_0 + 2q \cdot a^2}{3 \cdot a} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 1 + 30 + 2 \cdot 20 \cdot 1}{3 \cdot 1} = 36.7 \text{ кН.}$$

Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось Y и проверим правильность определения реакций.

$$\Sigma Y = 0: \quad R_A - F - q \cdot 2a + R_B = 36.7 - 20 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + 23.3 = 0.$$

Для записи функций $Q = Q(x)$ и $M = M(x)$ разобьем балку на участки, появление нового внешнего силового фактора является началом следующего участка (рис. 4, а). Начало первого участка примем на левом конце балки. Используя метод мысленных сечений, запишем для

$$0 < x < a,$$

$$Q = R_A = 36.7 \text{ кН}; \quad M = R_A \cdot x; \quad \text{откуда}$$

$$\text{при } x = 0 \quad M = 0;$$

$$\text{при } x = a \quad M = R_A \cdot x = 36.7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Теперь определим Q и M на втором участке, где $0 < x < a$, начало участка в точке приложения силы F :

$$Q = R_A - F - qx; \quad M = R_A(a + x) - Fx - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}.$$

при $x = 0$, $Q = R_A - F = 36.7 - 20 = 16.7 \text{ кН}$, $M = R_A \cdot a = 36.7 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

при $x = a$, $Q = R_A - F - qa = 36.7 - 20 - 20 \cdot 1 = -36.7 \text{ кН}$,

$$M = R_A \cdot 2 \cdot a - Fa - qa^2/2 = 36.7 \cdot 2 - 20 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2/2 = 43.3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Начало координат на третьем участке выберем на правом конце балки, что обуславливается меньшим числом внешних силовых факторов, чем при подходе слева. Запишем выражения для поперечной силы, изгибающего момента для $0 < x < a$:

$$Q = -R_B + q \cdot x; \quad M = R_B \cdot x - q \cdot x \cdot (x/2).$$

Вычислим Q и M , подставляя значения x :

$$\text{при } x = 0 \quad Q = -R_B = -23.3 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$\text{при } x = a \quad Q = -R_B + q \cdot a = -23.3 + 20 = -3.3 \text{ кН};$$

$$M = R_B \cdot a - q \cdot a^2/2 = 23.3 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2/2 = 13.3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На втором участке знак поперечной силы меняется с плюса на минус, следовательно, в точке $x = x_0$, где $Q = 0$, изгибающий момент принимает экстремальное значение $M_{\text{экст}}$:

$$R_A - F - q \cdot x \Big|_{x=x_0} = 0; \quad x_0 = \frac{R_A - F}{q} = 0.835 \text{ м}.$$

$$M_{\text{экст}} = R_A(a + x_0) - Fx_0 - \frac{qx_0^2}{2} = 36.7(1 + 0.835) - 20 \cdot 0.835 - 20 \cdot \frac{0.835^2}{2} = 43.6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Зная численные значения внутренних усилий Q и M , строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рис. 4, б, в).

Пример 2.

Рассмотрим еще один пример — балку АВ, заделанную одним концом. Такую балку обычно называют консолью (рис. 5а).

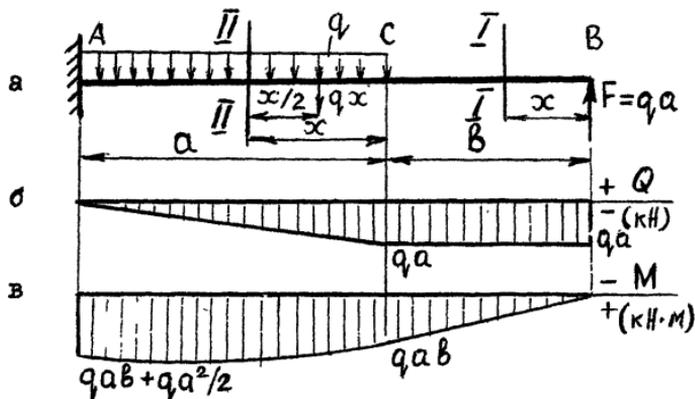


Рис. 5

Так как правый конец балки свободен от закрепления, то нет необходимости определять опорные реакции. При построении эпюр Q и M целесообразно рассматривать силы, расположенные справа от сечения, то есть свободный конец балки.

Необходимо балку разбить на два участка: первый BC длиной b ; второй CA длиной a , так как точка C связана с появлением нового силового фактора — распределенной нагрузки интенсивности q (рис. 5,а)

Взяв сечение I-I на участке BC на расстоянии x от свободного конца балки и записав пределы изменения $0 \leq x \leq b$, вычислим Q и M .

$$Q = -F = -q \cdot a, \quad M = Fx = q \cdot a \cdot b.$$

Поперечная сила на этом участке имеет постоянное значение.

Изгибающий момент

$$\text{в точке B при } x = 0, \quad M = 0;$$

$$\text{в точке C при } x = b, \quad M = q \cdot a \cdot b.$$

Расстояние x до сечения II-II, взятого на втором участке AC, будем откладывать от начала распределенной нагрузки, т.е. от точки C.

Тогда пределы изменения $0 \leq x \leq a$ и

$$Q = -F + q \cdot x; \quad M = F(b + x) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2};$$

в точке С при $x = 0$ $Q = -F = -q \cdot a$,

$$M = F(b + 0) = F \cdot b = q \cdot a \cdot b;$$

в точке А при $x = a$ $Q = -F + q \cdot a = -q \cdot a + q \cdot a = 0$,

$$M = F(b + a) - (q \cdot a^2)/2 = q \cdot a \cdot b + q \cdot a \cdot a - (q \cdot a^2)/2 = q \cdot a \cdot b + (q \cdot a^2)/2.$$

Эпюра изгибающего момента имеет вид параболы, вычислим изгибающий момент при $x = a/2$,

$$M = F(b + a/2) - q \cdot a^2/8 = q \cdot a \cdot b + 3 \cdot q \cdot a^2/8.$$

Максимального значения момент достигнет в точке А, где $Q = 0$.

Эпюры Q и M на рис. 5, б, в.

3. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

3.1. Определение напряжений

Внутренний изгибающий момент, действующий в поперечном сечении балки, является интегральной характеристикой внутренних нормальных усилий, интенсивность которых (иначе нормальное напряжение σ) меняется по высоте поперечного сечения по линейному закону. Нормальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}, \quad (3.1)$$

где I_z - осевой момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси z ; y - ордината точки, где определяется напряжение σ .

Формула (3.1) выведена для случая чистого плоского изгиба прямого стержня, когда в поперечном сечении действует только изгибающий момент M , и на основе следующих гипотез:

1. Продольные волокна, мысленно выделенные из балки, параллельные ее оси, не давят друг на друга. Другими словами они испытывают только деформацию растяжения - сжатия в продольном направлении x и не оказывают давления друг на друга в поперечных направлениях. Тогда в рамках закона Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (3.2)$$

где ϵ - относительная линейная деформация волокон, E - модуль Юнга материала балки (предполагается, что материал имеет одинаковые модули при растяжении и сжатии).

2. Нормальные напряжения σ (или линейные деформации ϵ) равномерно распределены по ширине балки.

3. Каждое поперечное сечение балки, плоское до деформации, остается плоским и нормальным к искривленной оси стержня. Математически это запишется так:

$$\epsilon = \alpha \cdot y, \quad (3.3)$$

где α - коэффициент пропорциональности, имеющий смысл кривизны (величины, обратной радиусу кривизны ρ) изогнутой оси элемента балки длиной Δx , y - вертикальное расстояние от центра тяжести сечения до точки где определяется нормальное напряжение.

На рис. 6 изображена модель стержня, иллюстрирующая гипотезы (3.2), (3.3). Она представляет набор жестких пластинок - "поперечных сечений"; пространство между которыми заполнено "продольными волокнами", условно изображенными в виде упругих пружин.

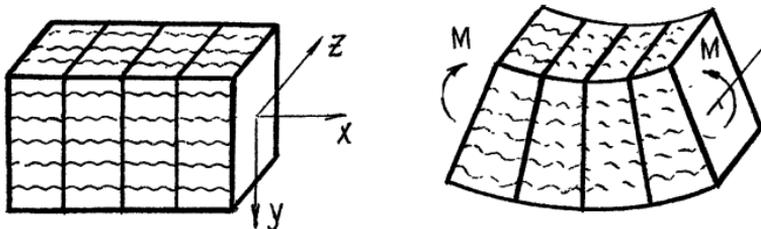


Рис. 6

Внутренняя поперечная сила Q , действующая в поперечном сечении балки (рис. 7, б), является интегральной характеристикой внутренних касательных усилий, распределенных по высоте поперечного сечения по параболическому закону с интенсивностью τ (иначе касательные напряжения). Формула касательных напряжений имеет вид:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z'}{b_y \cdot I_z}, \quad (3.4)$$

где S_z' - статический момент части площади поперечного сечения относительно оси Z , расположенной по одну сторону от той точки, для которой определяется касательное напряжение; b_y - ширина сечения на уровне ординаты y , на котором определяются напряжения τ .

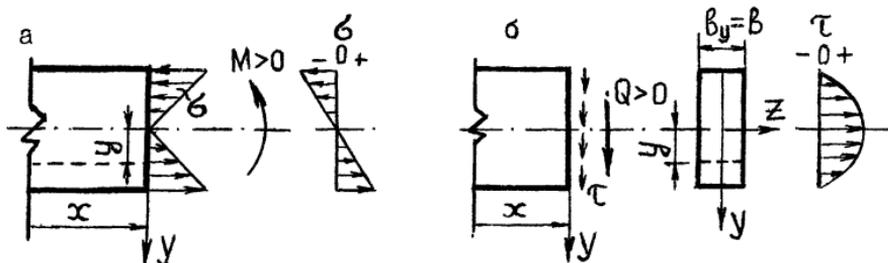


Рис. 7.

Формула (3.4) была получена выдающимся русским инженером - мостовиком проф. Д.И. Журавским в ходе разработки методов расчета деревянных раскосных ферм при проектировании и строительстве Петербургско - Московской железной дороги. *) При ее выводе были сделаны следующие допущения:

1. Касательные напряжения τ по ширине сечения b распределены равномерно.
2. Формула (3.1) считается справедливой и при действии касательных усилий, вызывающих искривление (депланацию) сечения.

Последнее обстоятельство иллюстрируется искажением первоначальной ортогональной сетки продольных и поперечных линий вне зоны чистого изгиба (рис. 8). Более точный анализ показывает, что отклонение фактической эпюры σ от линейной, определяемой формулой (3.1), зависит от отношения длины и высоты балки l/h . Но даже в балках с большим отношением ($l/h > 8 \dots 10$) она может дать заметную погрешность в областях приложения сосредоточенных сил типа опорных реакций, где заметное влияние оказывает нарушение и гипотезы плоских сечений, и гипотезы о ненадавливании продольных волокон.

*) За эту работу Д.И. Журавский был награжден Российской академией наук премией имени Демидова.

Дмитрий Иванович Журавский (1821 - 1891) окончил в 1842 г. Институт инженеров путей сообщения в Петербурге. Метод Д.И. Журавского по исследованию касательных напряжений вошел в отечественные и иностранные учебники по сопротивлению материалов и с тех пор широко применяется инженерами, обнаружив свою особую пригодность при изучении тонкостенных конструкций.

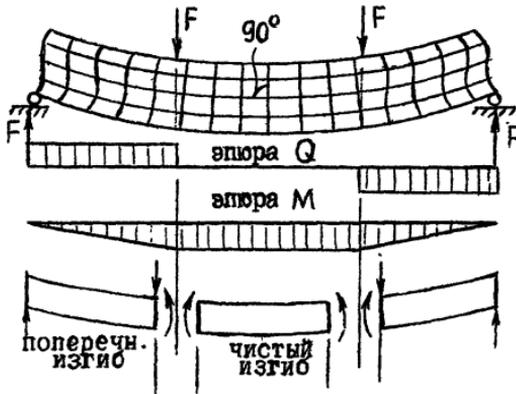


Рис. 8

Формула (3.1) для любой точки поперечного сечения автоматически дает правильный результат по знаку нормального напряжения, если при положительном изгибающем моменте положительное направление оси Y совпадает с направлением выпуклости балки при изгибе.

Знак касательных напряжений соответствует знаку поперечной силы в данном сечении (рис. 9).

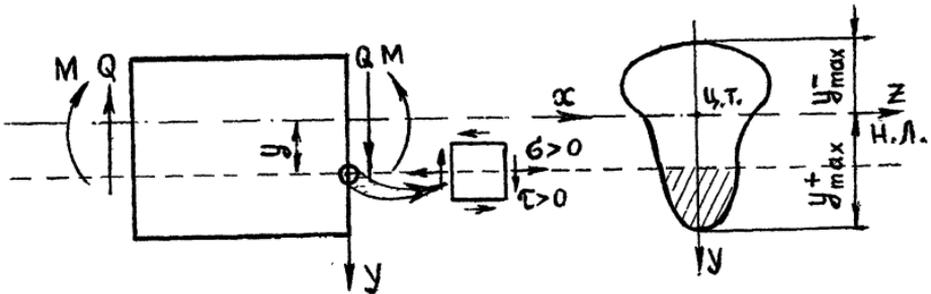


Рис. 9

По высоте сечения балки имеются две зоны растяжения и сжатия, их разделяет нейтральный слой, продольные волокна которого искривляются, но не меняют своей длины ($\epsilon = 0$). Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной или нулевой линией (осью).

Заметим, что в формуле (3.1) координата Y отсчитывается от нейтральной оси Z до точки, в которой определяется напряжение. Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения (рис. 8). Наибольшие по модулю нормальные напряжения $|\sigma|_{\max}$ возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси Z :

$$|\sigma|_{\max} = |M| \cdot |Y|_{\max} / J_z,$$

или

$$|\sigma|_{\max} = |M| / W_z. \quad (3.5)$$

где W_z - момент сопротивления сечения изгибу относительно оси Z , называемый так потому, что отношение наибольших изгибающих моментов, которые могут быть восприняты балками разных поперечных сечений из одинакового материала, равно отношению моментов сопротивления их поперечных сечений:

$$W_z = J_z / |Y|_{\max}. \quad (3.6)$$

В выражениях (3.4), (3.5) $|\sigma|_{\max}$ может быть равен $\sigma_{\max} = \sigma_1$ или $|\sigma_{\min}| = |\sigma_3|$ в рассматриваемом сечении, где действует изгибающий момент M .

Выражение (3.5) используется в условии прочности балки, материал которой одинаково работает на растяжение и сжатие. В противном случае необходимо определять напряжения σ_{\max} , σ_{\min} в опасных (наиболее удаленных) точках крайних растянутых волокон (с координатой $Y_{уд}^+$ от нейтральной оси) и крайних сжатых волокон (с координатой $Y_{уд}^-$) соответственно:

$$\sigma_{\max} = |M| / W_z^+, \quad (3.7)$$

$$|\sigma_{\min}| = |M| / W_z^-, \quad (3.8)$$

где

$$W_z^+ = J_z / |Y_{уд}^+|; \quad W_z^- = J_z / |Y_{уд}^-|; \quad (3.9)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 > 0, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 < 0.$$

Значительный интерес представляют горизонтальные касательные напряжения в полках двутавра τ_z . Если предположить, что по толщине полки они распределяются равномерно, то их значения можно найти по формуле Д.И. Журавского (3.4), где:

$$S_z^* = (0.5 \cdot b - z) \cdot t \cdot (h - t) \cdot 0.5, \quad (3.10)$$

h - высота двутавра, b и t - ширина и толщина полки, условно показанной в виде прямоугольника (рис. 10). d - толщина стенки.

Тогда полагая в формуле (3.4) $b_y = t$, получаем

$$\tau_z = \frac{Q \cdot (0.5b - z)(h - t)}{2 \cdot J_z}, \quad (3.11)$$

откуда следует, что вдоль полки τ_z изменяется по линейному закону. Наряду с τ_z в полках двутавра возникают и вертикальные касательные усилия, которые не могут приниматься равномерно распределенными по

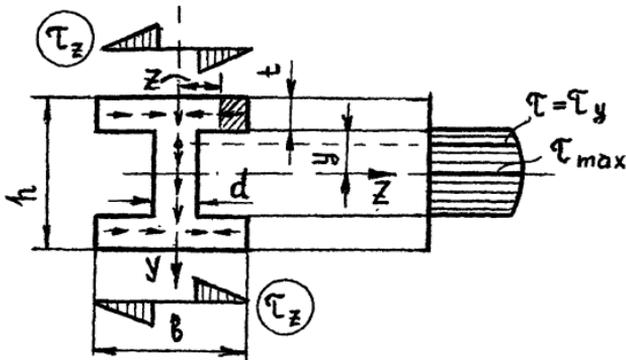


Рис. 40

ширине полки. Однако они малы и ими обычно в расчетах пренебрегают.

На уровне нейтрального слоя вертикальные касательные напряжения τ достигают экстремальных значений

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z'_{\max}}{d \cdot J_z} \quad (3.12)$$

где $S_z'_{\max}$ - статический момент верхней или нижней части сечения по отношению к нейтральной оси.

3.2. Главные нормальные и наибольшие касательные напряжения

На нейтральной оси z (рис. 11) нормальные напряжения равны нулю, а касательные достигают своего наибольшего значения.

В наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения нормальные напряжения достигают наибольших значений, а касательные отсутствуют.

Так как при плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки действуют нормальные и касательные напряжения, то в произвольной точке балки возникает плоское напряженное состояние. Следует обратить внимание на пренебрежение величиной нормального напряжения σ_y по горизонтальным площадкам выделенного элемента, как и на отсутствие нормального напряжения σ_z (рис. 11). Это обстоятельство объясняется принятием гипотезы отсутствия бокового давления между продольными волокнами балки.

Определение величины и знака главных нормальных и наибольших касательных напряжений в произвольной точке балки можно производить как аналитически, так и графически при помощи кругов напряжений.

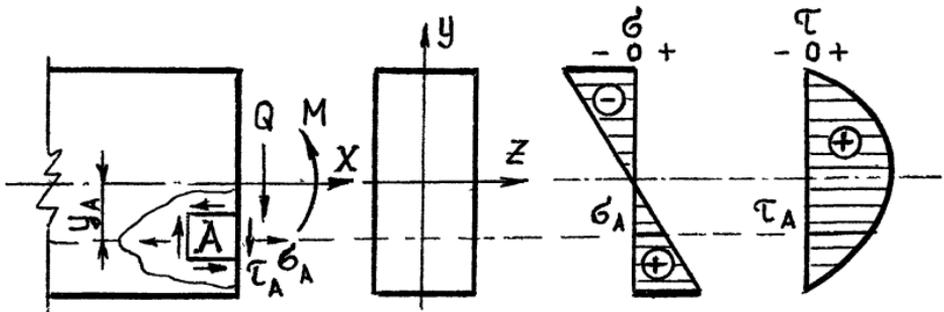


Рис. 11

1. Аналитический способ определения главных нормальных и наибольших касательных напряжений.

При плоском поперечном изгибе главные напряжения и угол наклона главных площадок определяются по формулам :

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (3.14)$$

Тогда наибольшие касательные напряжения в произвольной точке балки равны:

$$\tau_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (3.15)$$

Площадки действия наибольших касательных напряжений наклонены к главным площадкам под углом 45° .

2. Зависимости между напряжениями по произвольной площадке и главными напряжениями в данной точке можно выразить графически при помощи круга напряжений, называемого также кругом Мора. Графическое решение задачи по определению главных напряжений и их направлений по известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, составляет существо обратной задачи.

Более подробно аналитический и графический способ определения напряжений изложен в разделе "Сложное напряженное состояние".

При конструировании композиционных балок, в том числе железобетонных, арматуру располагают таким образом, чтобы именно она воспринимала главные растягивающие напряжения. Поэтому необходимо иметь представление о направлении главных напряжений в различных точках, для чего строят траектории главных напряжений, которые представляют собой две системы взаимно ортогональных кривых, характеризующих направления главных напряжений.

4. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

4.1. Расчет по максимальному изгибающему моменту

Для балок нормальной длины ($l/h > 8$) расчет на прочность начинают с того сечения, где действует максимальный по абсолютной величине изгибающий момент. Это сечение на первом этапе принимают за опасное, т.е. приоритет отдается *нормальным напряжениям*. Рассмотрим более подробно расчет балок на прочность на примере пластичного материала, для которого допускаемые напряжения при растяжении $[6_+]$ и сжатии $[6_-]$ считаются одинаковыми и равными $[6]$ и условие прочности примет вид

$$|\sigma|_{\max} < [6]. \quad (4.1)$$

Тогда в соответствии с формулой (3.5) условие прочности (4.1) примет вид

$$|M|_{\max}/W_z < [6]. \quad (4.2)$$

Откуда необходимый осевой момент сопротивления сечения балки

$$W_z > |M|_{\max}/[6]. \quad (4.3)$$

Зная величину осевого момента сопротивления W_z , можно определить размеры сечения.

Необходимый размер прокатного профиля подбирается по таблицам сортамента соответствующего профиля.

Если рассчитываемая балка имеет сечение нестандартного профиля, например, круглое, то, исходя из известной формулы

$$W_z = \pi \cdot d^3/32,$$

находим

$$d > \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M|_{\max}}{\pi \cdot [6]}}. \quad (4.4)$$

Если балка имеет прямоугольное сечение, то следует предварительно

задаться соотношением его сторон ($h/b = k$), тогда: $W_z = b \cdot h^2/6$,

$$h > \sqrt[3]{6 \cdot k \cdot |M|_{\max} / [\sigma]} \quad (4.5)$$

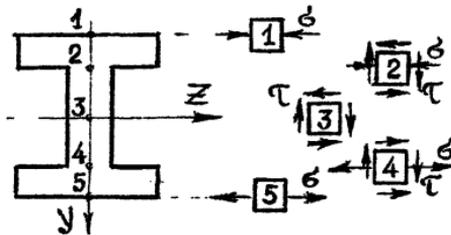


Рис. 12

Рис. 12 демонстрирует изменение типа напряженного состояния при переходе от одних крайних волокон к другим.

Для балок, материал которых неодинаково сопротивляется деформациям растяжения и сжатия, т.е. допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma]$ и сжатие $[\sigma_-]$ не равны друг другу, необходимо при проверке прочности или подборе сечения удовлетворить двум условиям прочности вида:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z^+} < [\sigma_+], \quad (4.6)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{W_z^-} < [\sigma_-]. \quad (4.7)$$

Необходимый момент сопротивления $W_z > \max \{ W_z^-, W_z^+ \}$.

4.2. Расчет по максимальной поперечной силе

Так как в общем случае плоского поперечного изгиба, кроме нормальных, возникают еще и касательные напряжения, то после того, как размеры сечения подобраны по $|M|_{\max}$ или проведена проверка прочности по нормальным напряжениям, следует проверить прочность по касательным напряжениям, особенно для коротких балок.

За опасное здесь принимается то сечение, где действует максимальное по абсолютной величине поперечное внутреннее усилие $|Q|_{\max}$. Максимальное касательное напряжение τ_{\max} на нейтральной оси сечения определяется по формуле Д.И. Журавского (3.12)

$$\tau_{\max} = \frac{|Q|_{\max} \cdot S_{z, \max}^*}{b_y \cdot J_z}$$

В данном случае нас интересуют касательные напряжения на нейтральной оси сечения, поэтому вычисляется момент части сечения, расположенной по одну сторону от главной центральной оси инерции Z.

Для прокатных профилей величина $S'_{z, \max}$ дается в таблицах сортаментов.

Прочность будет обеспечена, если выполняется условие

$$|\tau|_{\max} < [\tau], \quad (4.8)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Если условие прочности (4.8) не выполняется, следует увеличить размеры сечения, определенные из условий прочности по нормальным напряжениям.

Величина допускаемых напряжений на срез зависит от свойств материала, характера нагрузки и типа элементов конструкции. Основания для выбора допускаемых напряжений $[\tau]$ заложены в теории чистого сдвига, где по теории прочности максимальных касательных напряжений

(III теория) $[\tau] = 0.5 \cdot [\sigma]$, а по энергетической теории формоизменения (IV теория)

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0.6 \cdot [\sigma].$$

4.3. Расчет по теории прочности

Для балок, поперечное сечение которых имеет резкое уменьшение сечения вблизи крайних (верхних или нижних) волокон (например, для двутавра), опасным сечением может оказаться не сечение, где действует M_{\max} или Q_{\max} , а новое сечение, где достаточно большими являются одновременно Q и M .

Для этого сечения, которое на данном этапе является опасным, производится проверка прочности в наиболее опасных его точках, находящихся на уровне, где происходит резкое уменьшение ширины сечения. В данных точках при плоском поперечном изгибе материал балки находится в плоском напряженном состоянии. Поэтому проверка прочности должна выполняться с помощью подходящей теории прочности так, чтобы эквивалентное (расчетное) напряжение $\sigma_{\text{экв}} < [\sigma]$. Полагаем, что балка выполнена из пластичного материала, т.е. $[\sigma_+] = [\sigma_-] = [\sigma]$.

Если расчет ведется по теории максимальных касательных напряжений (III теория прочности), то условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}(\text{III}) = \sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma].$$

Эквивалентное напряжение подсчитывается с учетом выражения (3.13) по формуле

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}(\text{III}) = \sqrt{6^2 + 4\tau^2}. \quad (4.9)$$

При использовании энергетической теории прочности формоизменения (IV теория прочности), для которой условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}(\text{IV}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} < [\sigma], \quad (4.10)$$

Эквивалентное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}(\text{IV}) = \sqrt{6^2 + 3\tau^2}. \quad (4.11)$$

Опасную точку в месте резкого изменения ширины сечения обозначим буквой В (рис. 13, б). Полагаем, что она принадлежит тонкой стенке сечения. Напряжение в ней можно определить по известным формулам:

$$\sigma_B = M \cdot Y_B / I_Z; \quad \tau_B = Q \cdot S_Z' / b_B \cdot I_Z,$$

где $b_B = d$ - толщина вертикальной стенки под полкой,

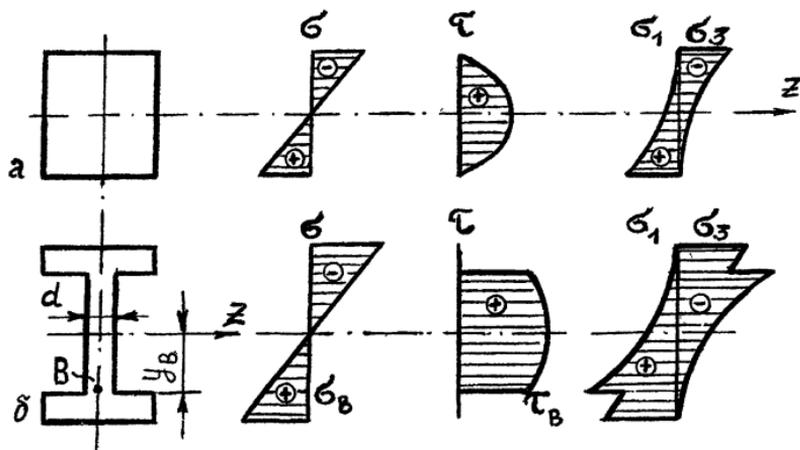


Рис. 13

Эпюры нормальных σ , касательных τ и главных σ_1, σ_3 напряжений для балок прямоугольного профиля изображены на (рис. 13, а) и для балок прямоугольного - (рис. 13, б).

Для балок двутаврового сечения $b_{\text{вкв}}$ в слоях, расположенных под полкой, могут в некоторых случаях оказаться больше напряжений в крайних волокнах, определяя возможность разрушения в опасной точке В.

Пример 3

Для стальной балки, расчет внутренних усилий которой был выполнен в примере 1 (рис. 4):
 а) подобрать двутавровое поперечное сечение;
 б) сделать проверку по касательным напряжениям и полную проверку прочности.

По эпюре изгибающих моментов (рис. 4, в) выбираем опасное сечение, в котором изгибающий момент имеет максимальное по модулю значение

$$|M|_{\text{max}} = 43.6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

1. Допускаемое напряжение принимаем $[6] = 160 \text{ МПа}$. Из условия прочности при изгибе (4.2.) определим необходимый момент сопротивления по формуле (4.3)

$$W_z \geq \frac{|M|_{\text{max}}}{[6]} = \frac{43.6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.272 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 272 \text{ см}^3.$$

По найденному моменту сопротивления выбираем двутавровую балку из сортаментов прокатных профилей.

Для двутавровой балки N 24 $W_z = 289 \text{ см}^3$, размеры и геометрические характеристики - $h = 24 \text{ см}$; $b = 11.5 \text{ см}$; $d = 0.56 \text{ см}$; $t = 0.95 \text{ см}$; $I_z = 3460 \text{ см}^4$; $S'_{z, \text{max}} = 163 \text{ см}^3$.

2. Проверка прочности по максимальным нормальным напряжениям двутавровой балки N 24:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M|_{\text{max}}}{W_z} = \frac{43.6 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 151 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение в балке $([6] - \sigma_{\text{max}}/[6]) \cdot 100 = (160 - 151/160) \cdot 100 = 5.6 \%$.

Условие прочности выполняется.

3. Проверка по максимальным касательным напряжениям. По эпюре поперечных сил находим максимальное по модулю внутреннее усилие

$|Q|_{\text{max}} = 36.7 \text{ кН}$, тогда

$$\tau_{\text{max}} = \frac{|Q|_{\text{max}} \cdot S'_{z, \text{max}}}{d \cdot I_z} = \frac{36.7 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{0.56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 3.09 \cdot 10^7 \text{ Па} = 30.9 \text{ МПа}.$$

Допускаемое касательное напряжение по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0.5 \cdot [6] = 0.5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Так как $\tau_{\text{max}} < [\tau]$, условие прочности выполняется.

4. Проверка по III теории прочности.

Проверку производим для опасной точки поперечного сечения (точка В, рис. 13, б).

Изгибающий момент M для определения σ_B и поперечное усилие Q для определения τ_B выбираем по эпюрам (рис. 4, б, в) для сечения, где M и Q имеют большие значения.

Для нашей задачи это сечение под точкой приложения силы F , где

$$M = 36,7 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \text{и} \quad Q = 36,7 \text{ кН}.$$

Нормальное напряжение в точке В

$$\sigma_B = \frac{M \cdot Y_B}{I_z} = \frac{M \cdot (0,5 \cdot h - t)}{I_z} = \frac{36,7 \cdot 10^3 \cdot (0,5 \cdot 24 - 0,95) \cdot 10^{-2}}{3460 \cdot 10^{-8}} = 117 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение в точке В

$$\tau_B = \frac{Q \cdot S_{z(B)'}}{d \cdot I_z} = \frac{36,7 \cdot 10^3 \cdot 126 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 23,8 \text{ МПа},$$

$$\text{где } S_{z'} = b \cdot t \cdot (0,5 \cdot h - 0,5 \cdot t) = 11,5 \cdot 0,95 \cdot (12 - 0,475) = 126 \text{ см}^3$$

Эквивалентное напряжение в точке В

$$\sigma_{\text{экв(III)}} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{117^2 + 4 \cdot 23,8^2} = 126 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется, $\sigma_{\text{экв}} < [\sigma]$.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ БАЛОК

Деформация балки в произвольном сечении С (рис. 14) характеризуется прогибом f и углом поворота θ .

Прогибом называется линейное перемещение центра тяжести поперечного сечения в направлении, перпендикулярном геометрической оси балки.

Углом поворота сечения называется угловое перемещение поперечного сечения балки вокруг его нейтральной оси (может измеряться углом между начальным и конечным положениями нормали к плоскости поперечного сечения).

При определении изгибных перемещений длинных балок учитывается лишь влияние изгибающих моментов. Ось балки искривляется по кривой, которую называют упругой линией или линией прогибов балки. Она описывается уравнением $f = f(x)$.

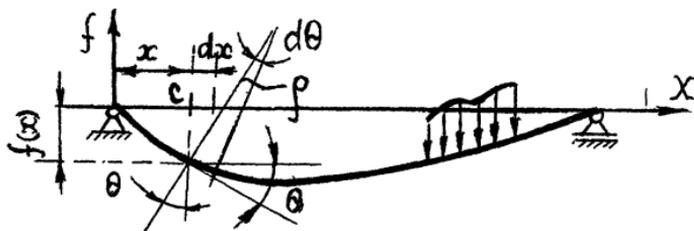


Рис. 14

Так как пренебрегается деформациями сдвига, то, согласно гипотезе плоских сечений, каждое сечение при изгибе остается нормальным к оси изогнутого стержня, т.е. угол наклона касательной к оси x равен углу поворота стержня, как показано на рис. 14.

Если угол θ выражается в радианах, то при малых углах $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ и поэтому получается простая зависимость между функцией углов поворота сечений и функцией прогибов^{*)}

$$\theta = \frac{df}{dx} = f'(x). \quad (5.1)$$

Из формул (3.1) - (3.3) нетрудно получить выражение связи между кривизной κ (или радиусом кривизны ρ , рис. 14) изогнутой оси балки, изгибающим моментом M и изгибной жесткостью сечения EI_z

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_z}. \quad (5.2)$$

Из математического анализа известна формула кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f'''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}. \quad (5.3)$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии на участке балки выглядит так:

$$\frac{f'''}{(1 + (f')^2)^{3/2}} = \frac{M}{E \cdot I_z}. \quad (5.4)$$

Для балок большой жесткости его упрощают, пренебрегая квадратом угла поворота f' по сравнению с единицей. В итоге получается дифференциальное уравнение упругой линии участка балки большой жесткости

^{*)} Задачи определения прогибов для стержней с использованием описанных выше предположений впервые были решены Я.Вернулли и Л.Эйлером. Поэтому такая расчетная модель балки называется балкой Бернулли-Эйлера.

$$f'''' = M/EI_z \quad (5.5)$$

Если ось прогибов f направлена вверх, а ось x - вправо, то изгибающий момент M определяет f'''' как по величине, так и по знаку.

Интегрируя (5.5), получаем общее решения для углов поворота сечений и прогибов на участке балки:

$$\theta = \int \frac{M}{E \cdot I_z} \cdot dx + c_1, \quad (5.6)$$

$$f = \int dx \int \frac{M}{E \cdot I_z} \cdot dx + c_1 \cdot x + c_2. \quad (5.7)$$

Произвольные постоянные c_1 , c_2 , входящие в эти решения, должны определяться из граничных условий для участков балки. Если балка имеет n участков, то в результате имеем $2n$ уравнений в виде условий сопряжения всех участков упругой линии и условий на концах балки.

Однако можно определить деформации балки, не прибегая непосредственно к интегрированию уравнения (5.5). Значительно проще деформации балок определяются **методом начальных параметров** (иногда уравнения метода начальных параметров называют обобщенными или универсальными уравнениями изогнутой оси балки).

Его сущность состоит в том, что для характерного набора частных нагрузок общий интеграл дифференциального уравнения линии прогибов строится как набор соответствующих частных решений, причем в качестве произвольных постоянных выбираются прогиб f_0 и угол поворота θ_0 в начале общей системы координат, единой для всего стержня. Решение по определению прогибов представляется в виде формулы общего вида, которая называется универсальной формулой.

Метод начальных параметров основан на следующих предпосылках: начало координат связывают с крайним (чаще всего левым) сечением; если на каком-то участке действует распределенная нагрузка, то ее продолжают до сечения, в котором определяется прогиб балки или угол поворота сечения, а для восстановления фактически действующей на балку нагрузки вводят компенсирующую нагрузку обратного направления.

Поскольку любой член выражения (2.5) для определения внутреннего изгибающего момента M может быть записан с использованием множителя $(x - a_j)$ в соответствующей степени, то интегрирование

дифференциального уравнения изогнутой оси балки (5.5) ведется без раскрытия скобок $(x - a_j)$.

Если балка имеет постоянную изгибную жесткость сечения, а распределенная нагрузка имеет характер равномерно распределенной на соответствующих участках, то уравнениям метода начальных параметров можно придать следующий вид:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{E \cdot I_z} \sum_{j=1}^i \left[M_j \cdot \frac{(x - a_j)}{1!} + F_j \cdot \frac{(x - a_j)^2}{2!} + q_j \cdot \frac{(x - a_j)^3}{3!} \right] + \sum_{k=1}^i \Delta \theta_k, \quad (5.8)$$

$$f = f_0 + \theta_0 x + \frac{1}{E \cdot I_z} \left[M_j \cdot \frac{(x - a_j)^2}{2!} + F_j \cdot \frac{(x - a_j)^3}{3!} + q_j \cdot \frac{(x - a_j)^4}{3!} \right] + \sum_{k=1}^i \Delta \theta_k (x - b_k). \quad (5.9)$$

Здесь θ и f - соответственно искомый угол поворота и прогиб текущего сечения балки на расстоянии x от начала координат; θ_0 и f_0 - начальные параметры, представляющие собой соответственно угол поворота сечения и прогиб балки в начале координат; F_j , M_j и q_j - внешние силовые факторы (сюда входят заданные нагрузки и реакции опор); a_j - абсцисса начала j -го участка, в котором соответственно приложены сосредоточенные моменты M_j , сосредоточенные силы F_j и начинается распределенная нагрузка q_j ; $\Delta \theta_k$ - скачок углов поворота в шарнире, абсцисса которого b_k ($b_k \leq x$), i - номер участка с сечением.

Пример 4. Определить угол поворота сечения θ и прогиб f под силой F для балки, рассмотренной в примере 1

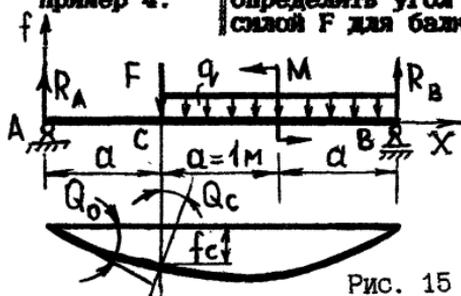


Рис. 15

Начало координат выберем на левой опоре (точка A). Уравнения (5.8), (5.9) для рассматриваемой балки примут следующий вид:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[R_A \cdot \frac{x^2}{2} - F \cdot \frac{(x - a)^2}{2} - q \cdot \frac{(x - a)^3}{6} + M(x - 2a) \right],$$

$$f = f_0 + \theta_0 x + \frac{1}{E \cdot I} \left[R_A \cdot \frac{x^3}{6} - F \cdot \frac{(x-a)^3}{6} - q \cdot \frac{(x-a)^4}{24} + \frac{M(x-2a)^2}{2} \right].$$

Для определения начальных параметров θ_0 , f_0 запишем граничные условия: на левой опоре, т. е. в точке А при $x = 0$ $f_0 = 0$; на правой опоре в точке В при $x = 3a$ $f_B = 0$.

Подставим эти значения в уравнение прогибов и найдем θ_0 :

$$\begin{aligned} f \Big|_{x=3a} = f_B = f_0 + \theta_0 \cdot 3a + \frac{1}{E \cdot I_z} \left[R_A \cdot \frac{(3a)^3}{6} - F \cdot \frac{(2a)^3}{6} - q \cdot \frac{(2a)^4}{24} - M \cdot \frac{a^2}{2} \right] = \\ = 0 + \theta_0 \cdot 3 - \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[36,7 \cdot \frac{3^3}{6} - 20 \cdot \frac{2^3}{6} - 20 \cdot \frac{2^4}{24} - 30 \cdot \frac{1^2}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда:

$$\theta_0 = -5,30 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Вычислим θ_c при $x = a$, т. е. в точке приложения силы F :

$$\begin{aligned} \theta \Big|_{x=a} = \theta_c = \theta_0 + \frac{1}{E \cdot I_z} \left[R_A \frac{a^2}{2} \right] = -5,3 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} \left[36,7 \cdot 10^3 \cdot \frac{1^2}{2} \right] = \\ = -5,3 \cdot 10^{-3} + \frac{18,35}{6920} = -2,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Прогиб f_c при $x = a$:

$$\begin{aligned} f \Big|_{x=a} = f_c = \theta_0 \cdot a + \frac{1}{E \cdot I_z} \left[R_A \frac{a^3}{6} \right] = -5,3 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} \times \\ \times \left[36,7 \cdot 10^3 \cdot \frac{1^3}{6} \right] = -4,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -4,04 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Полученные результаты расчета θ_0 , θ_c , f_c показаны на схеме балки в деформированном состоянии (рис. 15).

ПРИМЕЧАНИЕ. Числовые значения внешних нагрузок и реакций взяты из примера 1.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие внутренние усилия возникают при изгибе?
2. Как определяется знак изгибающего момента?
3. Как определяется знак поперечного усилия?
4. Какая существует зависимость между изгибающим моментом $M(x)$, поперечным усилием $Q(x)$ и распределенной нагрузкой $q(x)$ для произвольного сечения балки?
5. Какие возникают характерные особенности на эпюрах Q и M в сечениях, где приложены внешние нагрузки F , M , q ?
6. По каким формулам определяются нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении балки при плоском поперечном изгибе?
7. В каких точках поперечного сечения балки возникают максимальные нормальные и максимальные касательные напряжения?
8. Как σ и τ изменяются по высоте поперечного сечения прямоугольной формы при плоском поперечном изгибе?
9. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечном сечении двутавровой балки?
10. Как аналитически и графически определяются главные напряжения в различных точках балки при плоском поперечном изгибе?
11. В каких точках поперечного сечения двутавровой балки делается проверка по теориям прочности? Почему?
12. В каких случаях делается проверка прочности балки по максимальным касательным напряжениям?
13. Какими величинами характеризуется деформация балки при плоском поперечном изгибе?
14. Что называется прогибом и углом поворота сечения балки?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. -М.:Наука, 1986. -512 с.
2. Веляев Н.М. Сопротивление материалов. -М.:Наука, 1976. -608с.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. -М.:Высшая школа. -1975. -754 с.
4. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. -М.:Высшая школа. -1988. -432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Цель работы и план решения задачи.....	3
2. Внутренние усилия.....	6
3. Нормальные и касательные напряжения при плоском поперечном изгибе.....	13
4. Расчет балок на прочность.....	20
5. Определение деформации балок.....	25
6. Вопросы для самопроверки.....	30
Список рекомендуемой литературы	

Вячеслав Петрович Вагмутов
Ольга Михайловна Игнатьева

Темплан 1996 г., поз. 42
ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИВ БАЛОК
Учебное пособие

Редактор А.К. Саютина
Лицензия ЛР N 020251 от 31.10.1992 г.

Подписано в печать 14.02.1996 . Формат 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать плоская. Усл. печ. л. 1,86.
Печ.л. 2,0. Уч.-изд.л. 1,87. Тираж 500 экз. Заказ 136

Волгоградский государственный технический университет.
400066 Волгоград, пр. Ленина, 28.

Типография ВолгГТУ.
400066 Волгоград, ул. Советская, 35.