



В. П. Багмутов, Н. Ю. Полозенко

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**



СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Учебное пособие

РПК
«Политехник»
Волгоград
2005

УДК 539.3

Багмутов В. П.

Сложное сопротивление: учеб. пособие/ В. П. Багмутов, Н. Ю. Полозенко; / ВолгГТУ. – Волгоград, 2005. – 72 с.

ISBN 5–230–04459–4

Кратко излагаются основные положения расчета на прочность при сложном сопротивлении. Рассмотрен расчет балок при косом изгибе, внецентренном сжатии, совместном действии кручения и изгиба, а также расчет цилиндрических винтовых пружин.

Предназначено для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения, изучающих курс сопротивления материалов. Может быть использовано при выполнении соответствующей расчетно-проектировочной работы.

Ил. 40. Табл. 2. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты:

кафедра «Ремонт машин и технология конструкционных материалов», зав. каф. канд. техн. наук, доц. М. П. Листопад;
генеральный директор ООО «Синтал», канд. техн. наук А. А. Храпов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5–230–04459–4

© Волгоградский
государственный
технический
университет, 2005

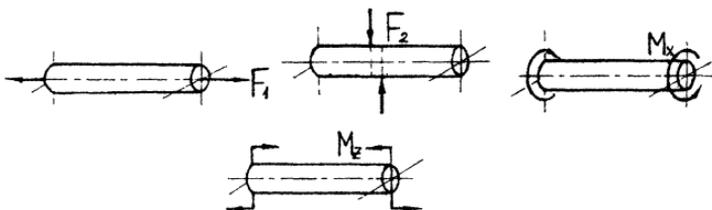
Оглавление

Сложное сопротивление. Косой изгиб.....	4
Внецентренное растяжение (сжатие).....	12
Кручение с изгибом	18
Расчет цилиндрических винтовых пружин.....	27
Примеры решения задач.....	30
Список рекомендуемой литературы.....	56
Приложение. Задание к расчетно-проектировочной работе «Расчет на прочность при сложном сопротивлении».....	57

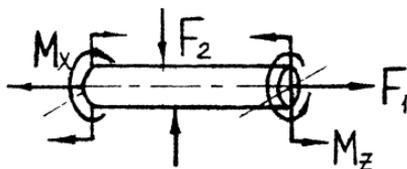
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ

Общие понятия и определения

Нагрузки элементов конструкций (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, плоский изгиб) относятся к простым видам сопротивления.



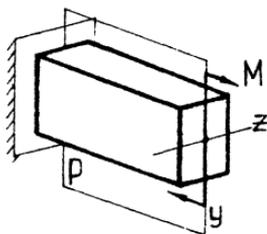
На практике, как правило, чаще встречается **сложное сопротивление**, представляющее собой комбинацию (сочетание) нескольких простых видов сопротивления.



В случае сложного сопротивления в поперечных сечениях элемента возникает два и более внутренних усилия. При этом расчет элементов при сложном сопротивлении ведется в рамках принципа независимости действия сил. Каждый из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, рассматривается независимо от остальных, а затем находится суперпозиция (сумма) полученных решений (для внутренних усилий, напряжений, деформаций и т. д.).

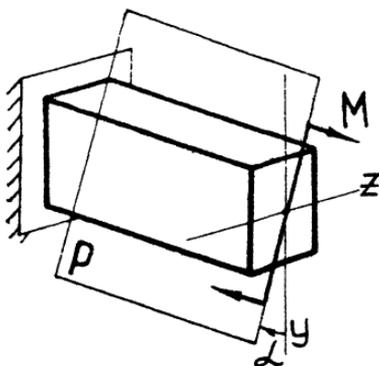
К характерным видам сложного сопротивления относятся кривой изгиб (частный случай – плоский кривой изгиб), внецентренное растяжение (сжатие), кручение с изгибом и др.

Плоский кривой изгиб



До этого мы рассматривали частный случай изгиба, который называли плоским, – когда плоскость действия сил совпадала с одной из главных плоскостей инерции балки. Однако существуют и более общие случаи изгиба, когда силы действуют в плоскости, не совпадающей с плоскостью инерции (плоский кривой изгиб), или более сложный случай, когда силы не лежат в одной плоскости (сложный или неплоский изгиб).

Плоский кривой изгиб – изгиб, при котором плоскость P действия изгибающих нагрузок не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.



Определение внутренних усилий при плоском косом изгибе

Используя метод мысленных сечений, определим внутренние усилия при плоском косом изгибе балки под действием сосредоточенной силы F на свободной стороне балки в сечении на расстоянии x :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0;$$

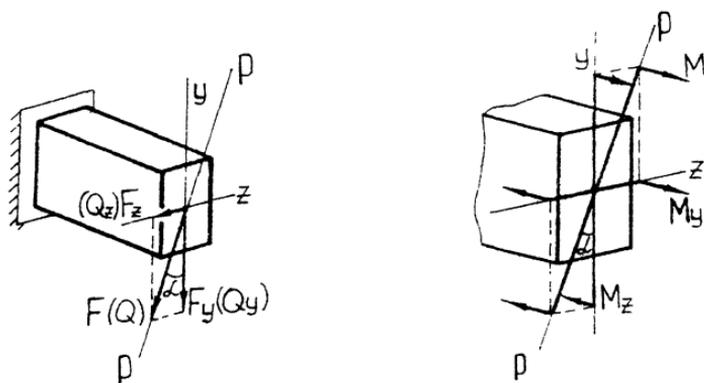
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y = F \cdot \cos \alpha;$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Q_z = F \cdot \sin \alpha;$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x = 0;$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = F \cdot \sin \alpha \cdot x;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = F \cdot \cos \alpha \cdot x.$$



Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента M и полной поперечной силы Q при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть Q_y , M_z и Q_z , M_y), а затем найти их векторную сумму:

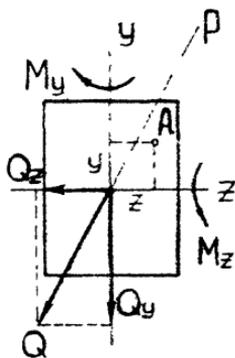
$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}.$$

И, наоборот, если известны полный момент и поперечная сила при косом изгибе, то их составляющие относительно осей Oy и Oz найдем как

$$\begin{aligned} Q_y &= Q \cdot \sin \alpha; & M_y &= M \cdot \sin \alpha; \\ Q_z &= Q \cdot \cos \alpha; & M_z &= M \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Определение напряжений при плоском косом изгибе

Используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) найдем напряжения при косом изгибе. Рассмотрим точку A с координатами (y, z) в сечении изгибаемой балки и определим в ней напряжения от каждого из внутренних усилий, возникающих при косом изгибе:



– нормальные напряжения от изгибающего момента M_z :

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{J_z};$$

– нормальные напряжения от изгибающего момента M_y :

$$\sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{J_y};$$

– касательные напряжения от поперечной силы Q_y :

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot J_z};$$

– касательные напряжения от поперечной силы Q_z :

$$\tau_z = \frac{Q_z \cdot S'_y}{h \cdot J_y}.$$

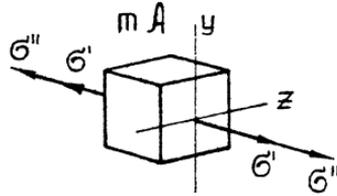
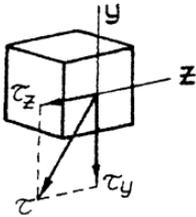
Полные напряжения τ и σ при косом изгибе найдем путем геометрического суммирования напряжений при плоском изгибе в двух плоскостях.

а) касательные

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2};$$

б) нормальные

$$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$



Последнюю формулу удобно использовать в виде

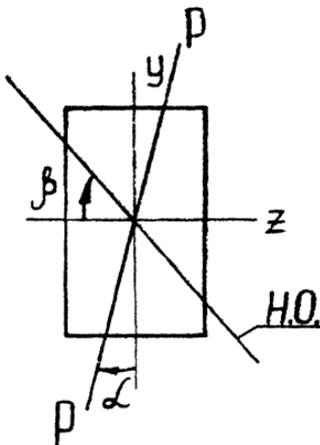
$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \text{ или } \sigma = M \cdot \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{J_y} \right),$$

где α – угол наклона плоскости действия полного изгибающего момента M , в данном сечении (для плоского косоугольного изгиба α – угол наклона силовой плоскости P-P).

Определение положения нейтральной оси и максимальных нормальных напряжений при косом изгибе. Условие прочности

Нейтральная ось – линия, во всех точках которой нормальные напряжения равны нулю. При этом в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси нормальные напряжения принимают свои экстремальные значения – минимум и максимум.

Заметим, что при плоском изгибе нейтральная ось совпадала с одной из главных осей сечения (Oy или Oz), при косом же изгибе это не так. Выведем формулу для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.



Так как $\sigma=0$, то можем записать $y \cdot \cos \alpha / J_z + z \cdot \sin \alpha / J_y = 0$. Отсюда найдем уравнение нейтральной оси:

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot z.$$

Более удобно записать это уравнение через угол β наклона нейтральной линии к оси Oz :

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Знак «минус» в этой формуле показывает, что углы α и β откладываются от разноименных осей, но в одном направлении.

Как видим, в случае, когда $J_z \neq J_y$, углы α и β не равны друг другу, а значит, и плоскость кривизны (плоскость прогибов) бруса не будет совпадать с плоскостью действия сил. Поэтому такой изгиб и назван «косым».

Определим максимальные нормальные напряжения при косом изгибе и запишем условие прочности для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Как известно, нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Следовательно, можем записать:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_z| \cdot y_{\max}}{J_z} + \frac{|M_y| \cdot z_{\max}}{J_y}, \quad \text{или}$$

$$|\sigma_{\max}| = |M| \cdot \left(\frac{y_{\max} \cdot \cos \alpha}{J_z} + \frac{z_{\max} \cdot \sin \alpha}{J_y} \right).$$

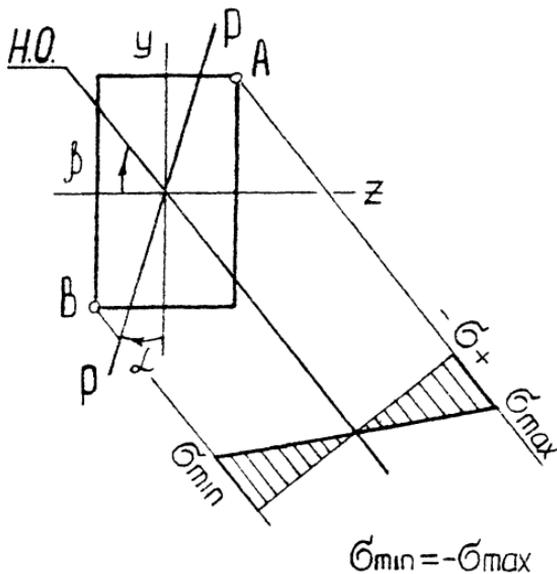
Учитывая, что $W_z = J_z / y_{\max}$ и $W_y = J_y / z_{\max}$, окончательно выразим максимальные напряжения так:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y}, \text{ или}$$

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M|}{W_z} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin \alpha \right).$$

Где $W_z = J_z / y_{\max}$ и $W_y = J_y / z_{\max}$ – моменты сопротивления сечения относительно осей y и z .

Для прямоугольного сечения экстремальные напряжения возникают в точках А, В, наиболее удаленных от нейтральной оси.



В случае косоугольного изгиба проверка прочности, как правило, осуществляется лишь по нормальным напряжениям (действие касательных невелико). Поэтому условие прочности запишем в виде:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M|}{W_z} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin \alpha \right) \leq [\sigma].$$

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность: 1) проверка прочности (проверить неравенство $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ – «выдержит-не выдержит»); 2) подбор сечения

(определить W_z (размеры сечения), при заданном отношении W_z/W_y);

3) проверка по несущей способности (определить M).

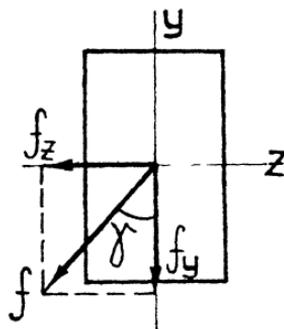
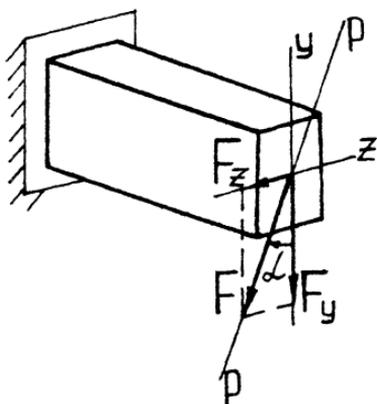
Деформации при плоском косом изгибе

Рассматривая плоский косой изгиб как совокупность двух плоских, полную деформацию балки можем найти, суммируя деформации балки от плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

В качестве примера рассмотрим косой изгиб консольной балки прямоугольного сечения. Разложим силу F , изгибающую балку, на две составляющие $F_y = F \cdot \cos\alpha$ и $F_z = F \cdot \sin\alpha$ и найдем деформации от каждой из них:

$$f_y = -\frac{F_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}; \quad f_z = -\frac{F_z \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_y}.$$



Суммарная деформация

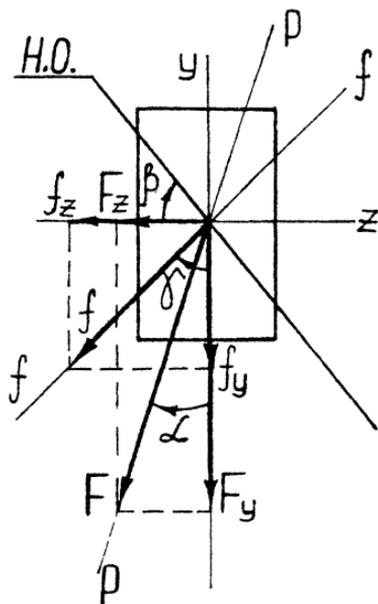
$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$$

Определим положение плоскости, в которой происходит изгиб балки, для чего найдем величину угла γ между этой плоскостью и осью Oy :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F_z}{F_y} \cdot \frac{J_z}{J_y} = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Как видим, плоскость прогибов не совпадает с силовой плоскостью ($\alpha \neq \gamma$ – «косой» изгиб!) и перпендикулярна нейтральной оси ($\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \beta$).

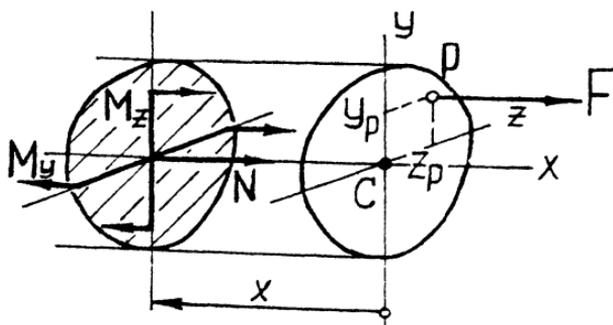


ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Общие понятия и определения

Внецентренное растяжение (сжатие) – нагружение, при котором брус растягивается силами, параллельными его оси и не проходящими через центр тяжести сечения бруса.

Точку P приложения силы при внецентренном растяжении (сжатии) называется *полюсом* силы. При этом расстояние от полюса P до продольной оси стержня (Ox) именуется *эксцентриситетом*.



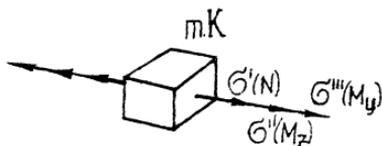
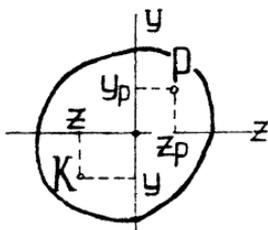
Определение внутренних усилий и напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

Рассмотрим стержень, который растягивается силой \$F\$, приложенной не в центре тяжести сечения стержня, а в некоторой точке \$P\$ с координатами \$y_p\$ и \$z_p\$. Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N = F; \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = F \cdot z_p; \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z = F \cdot y_p.\end{aligned}$$

Как видим, из шести внутренних усилий в сечении стержня при внецентренном растяжении действует три – осевое усилие и два изгибающих момента. Таким образом, внецентренное растяжение может рассматриваться как сочетание простого растяжения и двух чистых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях (а потому и относится к сложному сопротивлению).

Для определения напряжений при внецентренном растяжении (в произвольной точке \$K(y, z)\$ сечения) найдем напряжения для каждого из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, а затем воспользуемся принципом суперпозиции и суммируем их:



а) нормальные напряжения

при простом растяжении

$$\sigma' = \frac{N}{A} = \frac{F}{A};$$

б) нормальные напряжения

при изгибе

$$\sigma'' = \frac{M_z \cdot y}{J_z} = \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z};$$

$$\sigma''' = \frac{M_y \cdot z}{J_y} = \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y}.$$

Просуммировав σ' , σ'' , σ''' найдем напряжения при внецентренном растяжении (сжатии):

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{F \cdot z_p \cdot z}{J_y} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{A \cdot y_p \cdot y}{J_z} + \frac{A \cdot z_p \cdot z}{J_y} \right)$$

Учитывая, что $i = \sqrt{J/A}$ – радиусы инерции, окончательно запишем

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right).$$

При использовании этой формулы необходимо соблюдать традиционно используемые правила знаков: растягивающая сила F берется со знаком «плюс», сжимающая – «минус», координаты точек $P (y_p, z_p)$ и $K (y, z)$ также подставляются со своими знаками «плюс» или «минус».

Определение положения нейтральной оси и величины максимальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

Так как по определению нейтральная ось есть линия, на которой нормальные напряжения равны нулю ($\sigma=0$), то ее уравнение можно получить следующим образом:

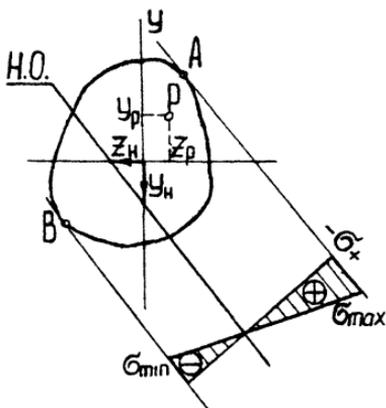
$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_p} \right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_p} \right)} = 1.$$

Обычно при построении нейтральной оси уравнением пользуются не напрямую, а находят с его помощью координаты (y_n, z_n) точек пересечения нейтральной линии с осями Oy и Oz , затем через эти две точки проводят прямую, которая и есть нейтральная ось:

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad z_n = -\frac{i_y^2}{z_p}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение нейтральной оси (уравнение прямой в отрезках).



Анализ полученных соотношений дает возможность заключить следующее: 1) положение нейтральной оси не зависит от величины силы F ; 2) нейтральная ось лежит по другую сторону от полюса (относительно центра тяжести); 3) при повороте нейтральной оси относительно какой-либо точки полюс будет смещаться

вдоль прямой линии (точнее, наоборот, при перемещении полюса вдоль прямой нейтральная ось поворачивается относительно некоторой фиксированной точки).

Максимальные (по абсолютной величине) нормальные напряжения будут возникать в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y_{\max}}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_{\max}}{i_y^2} \right) \right| \text{ или } \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}.$$

При этом нейтральная ось может делить сечение на две части – сжатую и растянутую, тогда величину максимальных сжимающих или растягивающих напряжений найдем по вышепредложенной формуле, учитывая правила знаков.

Так как в точках сечения возникает линейное напряженное состояние (действуют только нормальные напряжения), то условие прочности запишется в самом простом виде для материала стержня одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию:

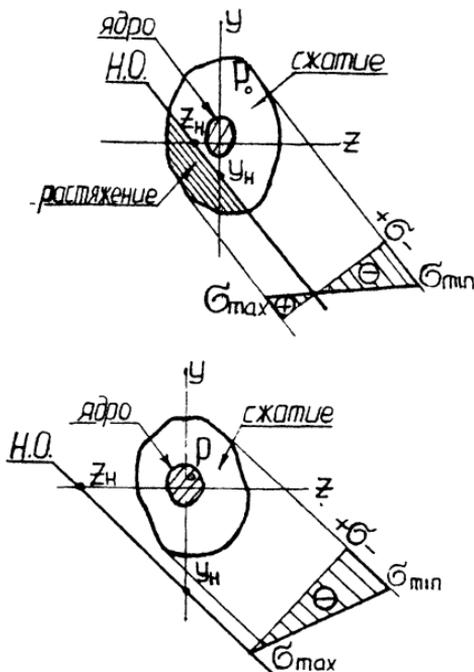
$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma].$$

В случае неодинакового сопротивления материала стержня растяжению и сжатию (например, для хрупких материалов) необходимо сравнивать с допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие максимальное и минимальное напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня.

Ядро сечения

Из соотношений, полученных для определения положения нейтральной оси, следует, что нейтральная ось в зависимости от координат полюса может пересекать рассматриваемое сечение или лежать вне его (например, если сила приложена в центр тяжести – имеем простое растяжение, а нейтральная ось удаляется в бесконечность). Представляет интерес найти та-

кие положения полюса, когда нейтральная ось будет лишь касаться сечения, не пересекая его. В этом случае в сечении будут возникать напряжения одного знака, что особенно важно, если нагруженный материал плохо сопротивляется, например, растягивающим напряжениям (бетон, камень, чугун) и желательно, чтобы вся конструкция работала лишь на сжатие.



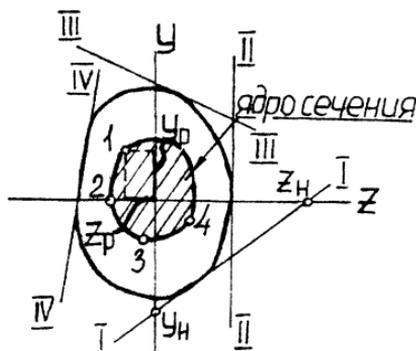
Ядро сечения – область вокруг центра тяжести сечения, при приложении силы, в которой во всем сечении возникают напряжения одного знака.

Чтобы построить очертания (контур) ядра сечения, необходимо:

- 1) задать несколько положений нейтральной оси так, чтобы она лишь касалась контура сечения, но не пересекала его ни в одной точке; 2) определить для каждого из этих положений координаты y_n и z_n точек пересечения ней-

тральной линии с осями Oy и Oz ; 3) вычислить для каждого положения нейтральной оси координаты точки приложения силы (y_p и z_p) по формулам:

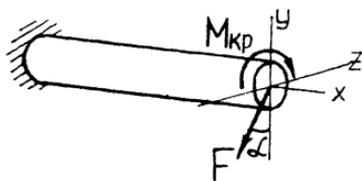
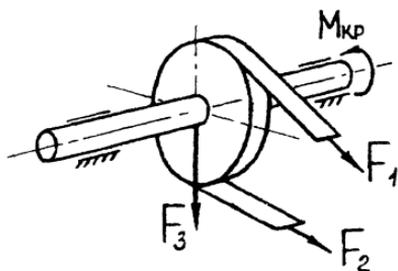
$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n}.$$



КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

Общие понятия и определения

Ранее нами был рассмотрен расчет на прочность валов при чистом кручении. Однако круглые валы редко работают на чистое кручение. Как правило, при работе вал изгибается собственным весом, весом шкивов, давлением на зубья шестерен, натяжением ремней и т. д. В таком случае вал будет находиться в условиях сложного сопротивления и испытывать совместное действие кручения и изгиба.



Кручение с изгибом – частный случай сложного сопротивления, который может рассматриваться как сочетание чистого кручения и поперечного изгиба.

Определение внутренних усилий и напряжений при кручении с изгибом

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N = 0; & \sum F_y \neq 0 &\Rightarrow Q_y \neq 0; & \sum F_z \neq 0 &\Rightarrow Q_z \neq 0; \\ \sum M_x \neq 0 &\Rightarrow M_x \neq 0; & \sum M_y \neq 0 &\Rightarrow Q_y \neq 0; & \sum M_z \neq 0 &\Rightarrow M_z \neq 0. \end{aligned}$$

Обычно две составляющие поперечной силы (Q_y, Q_z) и изгибающего момента (M_y, M_z) приводят к их полным результирующим

$$Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}; \quad M_n = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Заметим, что часто поперечной силой пренебрегают (для достаточно длинных валов) и рассматривают кручение с изгибом как совместное действие крутящего ($M_x, M_{кр}, T$) и изгибающего (M_n) моментов.

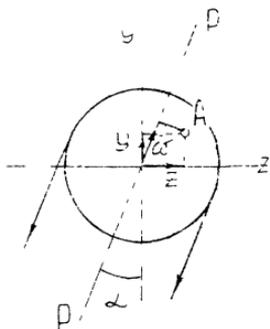
Опасное сечение вала будем искать, как и прежде, по эпюрам внутренних усилий. При построении эпюр внутренних усилий при кручении с изгибом необходимо иметь в виду следующие правила:

1) эпюры крутящего момента M_x , а также эпюры составляющих поперечной силы Q_1, Q_2 и изгибающего момента M_y, M_z строятся по той же процедуре, что и ранее;

2) результирующая поперечная сила Q может не лежать в плоскости действия результирующего изгибающего момента M_n , а потому между ними уже не будет соблюдаться зависимость Журавского ($dM/dx=Q$), а, следовательно, и правила проверки эпюр, введенные для плоского изгиба.

3) эпюра полного изгибающего момента будет прямой только на тех участках, где M_1 и M_2 ограничены прямыми с общей нулевой точкой. на участках, где такая общая точка отсутствует, эпюра M_n будет описываться вогнутой кривой и строиться по точкам (связано с тем, что вектор M_n в разных сечениях имеет различное направление)

Опасное сечение при кручении с изгибом устанавливается из совместного анализа эпюр крутящего M_x и полного изгибающего M_n моментов. Опасным будет считаться то сечение, где оба момента достигают своей максимальной величины. Если моменты достигают максимума в разных сечениях, необходимо проверить все сечения, в которых эти внутренние усилия достаточно велики



Для определения максимальных напряжений используем принцип независимости действия сил и найдем напряжения отдельно от кручения и отдельно от изгиба:

а) напряжения при кручении

$$\tau = \frac{M_x \cdot \rho}{J_\rho}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho};$$

б) напряжения при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{M_n}{J_{oc}} \cdot (y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha),$$

где J_{oc} – осевой момент инерции для круглого сечения ($J_{oc}=J_z=J_y$).

Вводя обозначение $\omega = y \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha$, можем записать

$$\sigma = \frac{M_{и} \cdot \omega}{J_{oc}},$$

при этом

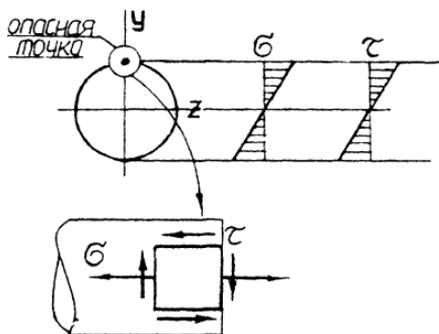
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{и}}{W_{oc}},$$

W_{oc} – осевой момент сопротивления для круглого сечения

($W_{oc}=J_{oc}/\rho_{\max}$, $\rho_{\max}=d/2$).

Опасными точками в сечении будут являться точки, наиболее удаленные от нейтральной оси (для круглого сечения – линии, перпендикулярные плоскости действия результирующего изгибающего момента). При этом в точках

сечения будет возникать плоское напряженное состояние, а потому расчет на прочность необходимо проводить с привлечением известных теорий прочности.



Определение главных напряжений

и расчет на прочность при кручении с изгибом

Подставив величины максимальных нормальных и касательных напряжений в формулу для главных напряжений ($\sigma_2=0$), получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

Расчет брусьев при изгибе с кручением проводится с применением теорий прочности. При этом расчет элементов из пластичных материалов выполняется на основе III или IV теорий прочности, а из хрупких – по теории Мора.

Проанализируем расчет на прочность по III теории прочности:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя в эту формулу выражения для главных напряжений, получим:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

Запишем условие прочности через крутящий и изгибающий моменты, учитывая, что для круглого сечения $W_p = 2 \cdot W_{oc}$:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\left(\frac{M_{из}}{W_{oc}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_x}{2 \cdot W_{oc}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{из}^2 + M_x^2}}{W_{oc}} \leq [\sigma].$$

Выражение под корнем называют приведенным (эквивалентным) моментом по третьей теории:

$$M_{\text{эквIII}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Окончательно условие прочности запишем в виде

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \frac{M_{\text{эквIII}}}{W_{oc}} \leq [\sigma].$$

Проанализируем расчет на прочность по IV теории прочности

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{ос}}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_x}{2 \cdot W_{\text{ос}}}\right)^2} \approx \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75 \cdot M_x^2}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

Приведенный (эквивалентный) момент по четвертой теории:

$$M_{\text{эквIV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2}.$$

Окончательно условие прочности запишем в виде

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{M_{\text{эквIV}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma].$$

Общий случай действия сил на брус круглого сечения

Рассмотрим сначала случай совместного растяжения (или сжатия) и кручения круглого бруса, когда в каждом поперечном сечении действуют только продольная сила N и крутящий момент $M_{\text{к}}$.

Продольная сила вызывает равномерно распределенные по поперечному сечению нормальные напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Крутящий момент – касательные напряжения:

$$\tau = \frac{M_{\text{к}}}{J} \rho.$$

Поскольку нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы, то опасными являются те точки сечения, в которых действуют наибольшие касательные напряжения:

$$\tau = \frac{M_{\text{к}}}{W} \rho,$$

т. е. точки, расположенные в непосредственной близости от внешней боковой поверхности бруса. Напряженное состояние в этих точках не отличает-

ся от случая работы бруса на изгиб с кручением. Поэтому формулы выведенные для совместного действия кручения и изгиба применимы и в рассматриваемом случае; в них следует подставлять значения:

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ и } \tau = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}}.$$

В общем случае нагружения в поперечных сечениях бруса возникают все шесть внутренних силовых факторов. При расчете на прочность, как уже указывалось, влияние поперечных сил в подавляющем большинстве случаев не учитывается и, следовательно, рассматривается одновременная работа бруса на изгиб, кручение и растяжение (или сжатие).

Для бруса круглого сечения нормальные напряжения от изгиба определяются по результирующему изгибающему моменту:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Кроме того, в поперечных сечениях возникают равномерно распределенные нормальные напряжения от растяжения (сжатия). Характер напряженного состояния в опасной точке в этом случае не отличается от характера напряженного состояния при совместном действии кручения и изгиба и остается плоским, но нормальные напряжения вызываются не только изгибом, но и растяжением (сжатием). При изгибе с кручением опасными являются две точки поперечного сечения, расположенные на пересечении плоскости действия изгибающего момента с контуром поперечного сечения. При наличии и продольной силы опасной является только одна из этих точек; при этом, если брус изготовлен из пластичного материала (одинаково воспринимающего растягивающие и сжимающие нагрузки), то опасной является та точка, в которой напряжения от изгиба и осевого нагружения имеют одинаковые знаки.

В зависимости от принятой теории прочности расчет прочности ведется по формулам:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \text{ – для третьей теории прочности;}$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \text{ – для четвертой прочности.}$$

Причем в нее подставляются значения:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W_{\text{ос}}} \text{ и } \tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\rho}}$$

В случае равенства нулю крутящего момента в опасных точках бруса возникает одноосное напряженное состояние (если пренебречь касательными напряжениями, возникающими от поперечных сил). Следовательно, расчет в этом случае ведется без применения теорий прочности. Нормальные напряжения в опасной точке при этом

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W},$$

где M – значение результирующего изгибающего момента в опасном сечении бруса. Этот случай не отличается от случая внецентренного растяжения или сжатия бруса большой жесткости, рассмотренного ранее.

Построение эпюр внутренних усилий для пространственных брусьев с ломаной осью

Определение внутренних усилий и построение эпюр этих усилий для пространственных брусьев с ломаной осью производится методом сечений в том же порядке, как и для обычных балок. Предварительно нужно выбрать для всех поперечных сечений каждого элемента бруса пространственную прямоугольную систему координат x, y, z . Ось x этой системы должна совпадать с продольной осью элемента; оси y и z проходят через центр тяжести поперечного сечения и расположены в его плоскости. Положительные направления осей выбираются произвольно. Положительные на-

правления осей системы координат x и z изображают на чертеже для каждого участка ломаного бруса.

Определяем внутренние усилия: Q_y , Q_z , M_y , M_z , N и M_x .

Поперечные силы Q_y и Q_z считаем положительными, когда в рассматриваемом поперечном сечении они действуют в сторону положительных направлений осей y и z .

Значения Q_y и Q_z можно определить по формулам:

$$Q_y = \sum F_{y_i};$$

$$Q_z = \sum F_{z_i},$$

где $\sum F_{y_i}$ – сумма проекций всех сил, приложенных к ломаному брусу по одну сторону мысленного сечения, на ось y ;

$$\sum F_{z_i} - \text{то же на ось } z$$

Проекции сил на оси y и z положительны, если их направления совпадают с положительными направлениями этих осей.

Продольные силы N считаем положительными при растяжении и отрицательными при сжатии.

Крутящий момент M_x положителен, если при взгляде в торец отсеченной части бруса этот момент представляется направленным по ходу часовой стрелки.

На эпюрах Q_y , Q_z , N и M_x указывают знаки усилий.

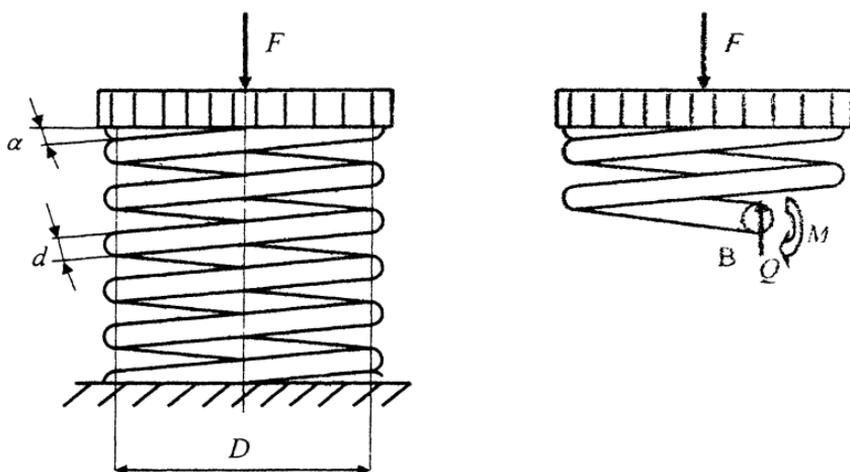
Для изгибающих моментов M_y , M_z правила знаков не устанавливают, а эпюры их изображают со стороны растянутых волокон бруса.

При вычислении внутренних усилий в каком-либо поперечном сечении учитываются все внешние силы и моменты, приложенные к части бруса, расположенной по одну сторону от этого сечения.

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН

В технике наиболее распространены цилиндрические винтовые пружины из стали круглого поперечного сечения, работающие под действием растягивающих или сжимающих сил. Поэтому далее рассмотрим расчет таких пружин, имеющих небольшой угол подъема витков ($\alpha \leq 15^\circ$).

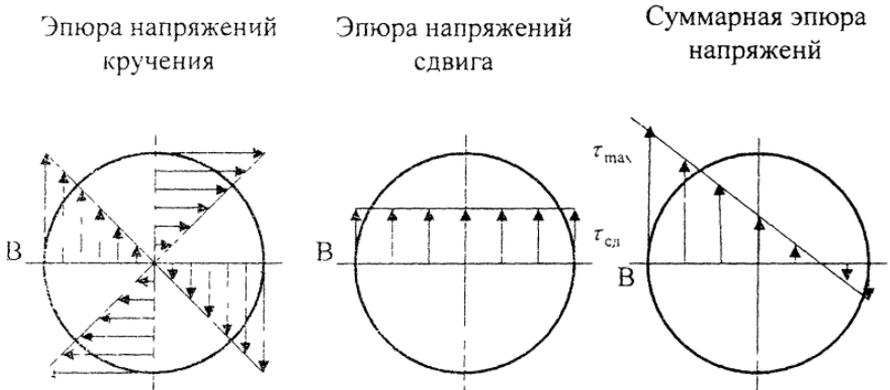
Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину с диаметром D винтовой оси, диаметром d проволоки и количеством витков n , сжимаемую силой F .



Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Рассечем пружину плоскостью, проходящей через ось, и отбросим нижнюю часть пружины. Ввиду того, что угол подъема витков мал, будем считать сечение витка поперечным, т. е. кругом диаметра d .

Рассматривая равновесие верхней части пружины, видим, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $Q=F$ и крутящий момент $M_k=FD/2$, таким образом в поперечном сечении витка действуют только касательные напряжения сдвига и кручения. Следовательно, расчет цилиндрических винтовых пружин относится к сложному сопротивлению.

Считается, что напряжения сдвига $\tau_{сд}$ распределены по сечению равномерно, а напряжения кручения $\tau_{кр}$ определяются, как при кручении прямого кругового цилиндра. Эпюры распределения напряжений сдвига и кручения, а также эпюра суммарных напряжений в точках горизонтального диаметра сечения представлены на рисунке.



Из суммарной эпюры видно, что наибольшие касательные напряжения возникают в точке В, ближайшей к оси пружины:

$$\tau_{\max} = \tau_{сд} + \tau_{кр} = \frac{Q}{A} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{F \cdot D/2}{\pi d^3/16};$$

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right).$$

Если $d/2D \ll 1$, первым слагаемым в скобках (соответствующим напряжению сдвига) можно пренебречь; тогда

$$\tau_{\max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

Поэтому формула для приближенного расчета цилиндрических винтовых пружин имеет вид:

$$\tau_{\max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Так как пружины обычно изготавливают из высококачественной стали, то допускаемое напряжение берут в пределах

$$[\tau] = 200 \dots 1000 \text{ МПа.}$$

Далее рассмотрим вывод формулы для определения уменьшения высоты (осадки) λ пружины. Разбивая пружину на бесконечно малые участки длиной dl , которые ввиду малости длины будем считать прямолинейными, и учитывая только потенциальную энергию деформации кручения, получим:

$$U = \int_0^l M_k^2 dl / (2GJ_\rho) = M_k^2 l / (2GJ_\rho),$$

где $l = \pi Dn$ – длина проволоки пружины.

Работа силы F , приложенной к пружине статически, будет равна $W = F\lambda/2$. Полагая $W=U$, $M_k=FD/2$, $J_\rho = \pi d^4/32$, то

$$\frac{F\lambda}{2} = \frac{(FD/2)^2 \pi Dn}{2G\pi d^4/32},$$

откуда $\lambda = 8FD^3 n / (Gd^4)$.

Эту формулу можно записать в таком виде: $\lambda = F/c$,

где $c = Gd^4 / (8D^3 n)$ – коэффициент жесткости пружины.

При $\lambda = 1$ $c=F$, поэтому **коэффициент жесткости численно равен силе, вызывающей осадку, равную единице длины.**

Отношение среднего диаметра витков к диаметру проволоки обозначают c_n и называют **индексом пружины**:

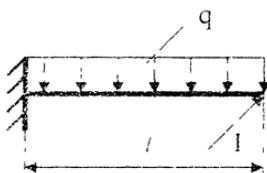
$$c_n = D/d.$$

Обычно индекс пружины бывает в пределах $c_n = 4 \dots 12$.

При более точных расчетах винтовых пружин учитывают кривизну их витков и вводят в числитель формулы для максимальных касательных напряжений $\tau_{\max} \approx \frac{8FD}{\pi d^3}$ поправочный коэффициент $K=1+1,45/c_p$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1



Дано: Распределенная нагрузка $q=40$ кН/м, действующая в вертикальной плоскости; сосредоточенная сила $F=10$ кН – действует в горизонтальной плоскости. $l=1$ м, $[\sigma]=160$ МПа.

Выбрать наиболее экономичную форму поперечного сечения балки (труба с соотношением диаметров $\frac{d}{D} = 0,9$, прямоугольник, двутавр).

РЕШЕНИЕ

Проведем координатные оси x, y, z

1-й участок и единственный $0 \leq x \leq l$

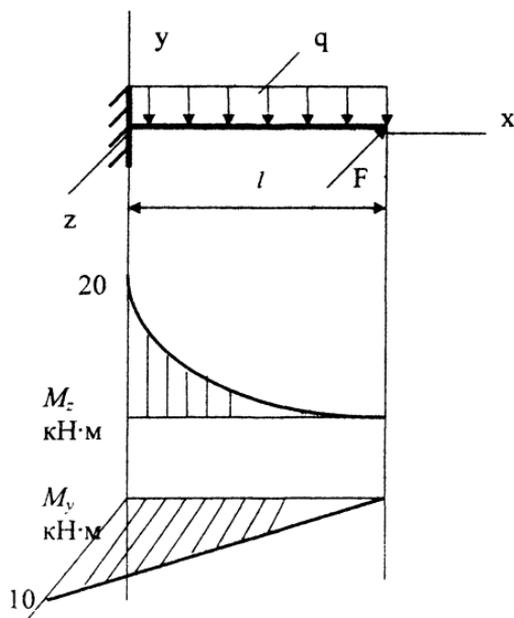
$$M_z = \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \text{при } x=0 \quad M_z = 0$$

$$\text{при } x=l \quad M_z = \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2} = 20 \cdot 10^3 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = F \cdot z \quad \text{при } z=0 \quad M_y = 0;$$

$$\text{при } x=l \quad M_y = F \cdot l = 10 \cdot 10^3 \cdot 1 = 10 \cdot 10^3 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Наиболее опасным будет являться сечение в жесткой заделке, где оба изгибающих момента достигают своего максимального значения.



Для прямоугольного сечения

$$\frac{h}{b} = \frac{M_z}{M_y} = \frac{20}{10} = 2, \text{ т. е. } h=2b;$$

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = [\sigma];$$

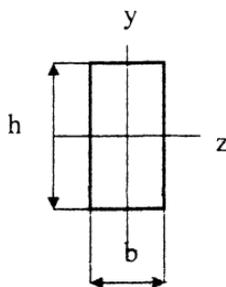
$$W_z = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3};$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = \frac{2b^3}{3};$$

$$\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6}{b^3} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b^3} = 160 \cdot 10^6;$$

$$b=7,2 \text{ см}; \quad h=14,4 \text{ см};$$

$$A = h \cdot b = 104 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$



Для двутавра номер профиля определяется методом подбора. В данном случае наиболее выгодным будет двутавр № 36, для которого

$W_z=743 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $W_y=71,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $A=61,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ и

$$\sigma = \frac{20 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} + \frac{10 \cdot 10^3}{71,1 \cdot 10^{-6}} = 167 \cdot 10^6 = 167 \text{ МПа}$$

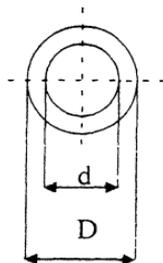
перегрузка составит 4,4 %.

Для трубы $c = \frac{d}{D} = 0,9$; $W_{ос} = \frac{\pi \cdot D^3}{64} (1 - c^4)$;

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

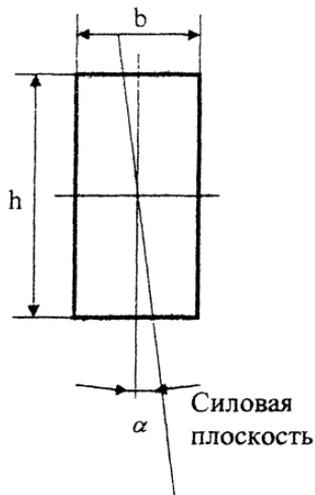
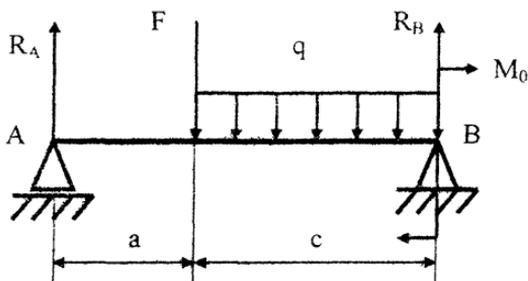
$$\sigma = \frac{M}{W_{ос}} = 160 \text{ МПа}, D=0,016 \text{ м}, d=14,4 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$A=37,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$



Наиболее экономичной будет балка. поперечное сечение которой имеет меньшую площадь, это обеспечит наименьшие затраты материала. В данной задаче самой выгодной формой поперечного сечения является труба.

ЗАДАЧА 2



Дано: Нагрузка действует на балку прямоугольного поперечного сечения (с отношением сторон $h/b=1,5$) в плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 10^\circ$; $F=20$ кН, $q=15$ кН/м, $M_0=5$ кН·м, $a=2$ м, $c=3$ м, $[\sigma] = 160$ МПа.

Определить: 1) Размеры поперечного сечения;

2) Положение нейтральной оси;

3) Максимальное и минимальное нормальные напряжения, возникающие в опасном сечении, и построить эпюру напряжений в опасном сечении.

Р Е Ш Е Н И Е

Определим величину и направление реакций в силовой плоскости:

1. Покажем реакции в опорах и определим их величину:

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot a + q \cdot c \left(a + \frac{c}{2} \right) + M_0 - R_B (a + c) = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot a + qc \left(a + \frac{c}{2} \right) + M_0}{a + c} = \frac{20 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \left(2 + \frac{3}{2} \right) + 5}{2 + 3} = 40,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot (a + c) - F \cdot c - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} + M_0 = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot c + q \cdot c \cdot \frac{c}{2} - M_0}{(a + c)} = \frac{20 \cdot 3 + 15 \cdot \frac{3^2}{2} - 5}{2 + 3} = 24,5 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad -F - qc + R_A + R_B = 0;$$

$$-20 - 15 \cdot 3 + 40,5 + 24,5 = 0 \Rightarrow 0=0, \text{ верно.}$$

2. Разбиваем балку на участки и определяем в силовой плоскости величину изгибающих моментов M .

$$1\text{-й участок } 0 \leq x \leq a, \quad M(x) = R_A \cdot x:$$

$$\text{при } x=0 \quad M=0;$$

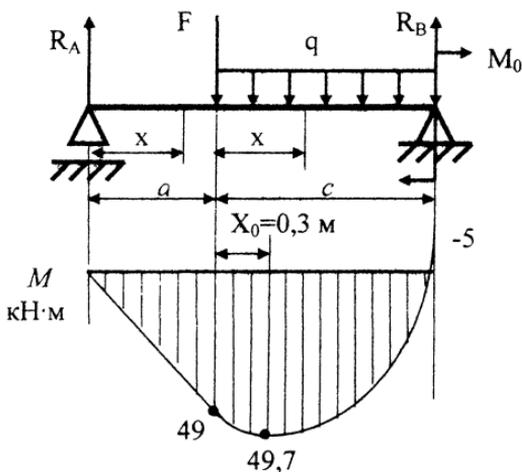
$$\text{при } x=a \quad M = R_A \cdot a = 24,5 \cdot 2 = 49 \text{ кН·м.}$$

$$2\text{-й участок } 0 \leq x \leq c, \quad M(x) = R_A \cdot (a+x) - F \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}:$$

$$\text{при } x=0 \quad M = R_A \cdot a = 24,5 \cdot 2 = 49 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x=c \quad M = R_A \cdot (a+c) - F \cdot c - q \frac{c^2}{2} =$$

$$= 24,5 \cdot (2+3) - 20 \cdot 3 - 15 \cdot \frac{3^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



Исследуем функцию момента на втором участке на экстремум:

$$\frac{dM}{dx} = R_A - F - q \cdot x \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$\text{следовательно, } x_0 = \frac{R_A - F}{q} = \frac{24,5 - 20}{15} = 0,3 \text{ м}$$

$$\text{при } x_0=0,3 \text{ м} \quad M = 24,5 \cdot (2+0,3) - 20 \cdot 0,3 - 15 \cdot \frac{0,3^2}{2} = 49,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

По найденным значениям строим эпюру \$M\$ со стороны растянутых волокон балки и определяем опасное сечение, в котором действует \$M=M_{\max}=49,7\$ кН·м.

3. Из условия прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ подбираем размеры поперечного сечения балки.

Для прямоугольного поперечного сечения:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3 / 12}{h/2} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad \text{так как } h=1,5b, \quad \text{то}$$

$$W_z = \frac{b \cdot (1,5 \cdot b)^2}{6} = 0,375 \cdot b^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{b^3 \cdot h / 12}{b/2} = \frac{b^3 \cdot h \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{b^2 \cdot h}{6};$$

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{b \cdot h^2 / 6}{b^2 \cdot h / 6} = \frac{h}{b} = 1,5, \quad \text{так как соотношение сторон задано в условии}$$

задачи.

$$\text{Из условия прочности } W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right);$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1}{0,375} \cdot \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right)};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{49,7 \cdot 10^3}{0,375 \cdot 160 \cdot 10^6} (\cos 10^\circ + 1,5 \cdot \sin 10^\circ)} = 0,1 \text{ м};$$

из соотношения сторон прямоугольника $h=0,15 \text{ м}$

(значения линейных размеров поперечного сечения должны быть округлены до стандартного ряда).

4. Определим максимальные нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении.

Размеры поперечного сечения не округлялись, поэтому максимальное напряжение, возникающее в поперечном сечении, будет равно допусковому.

Так как при косом изгибе для прямоугольного сечения $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, то эпюра распределения нормальных напряжений в поперечном сечении будет иметь вид, показанный на рисунке.

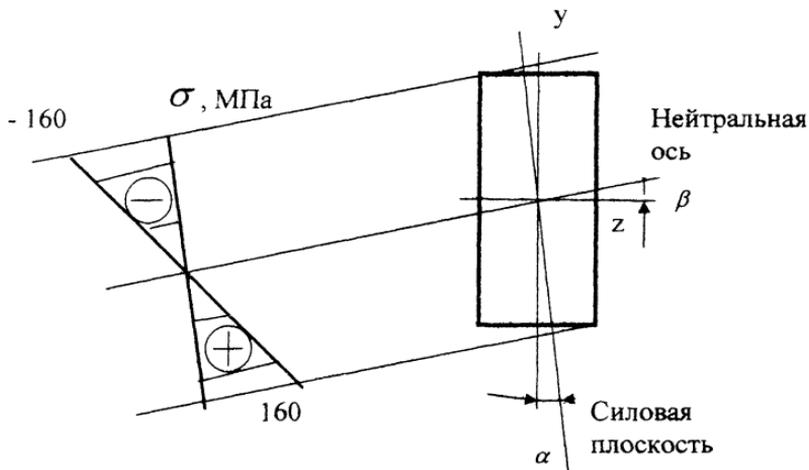
5. Определим положение нейтральной оси и покажем ее на рисунке

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{b \cdot h^3 \cdot 12}{b^3 \cdot h \cdot 12} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{h^2}{b^2} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,15^2}{0,1^2} \operatorname{tg} 10^\circ = -0,396;$$

$$\text{угол } \beta = \operatorname{arctg}(-0,396) = 21,6^\circ.$$

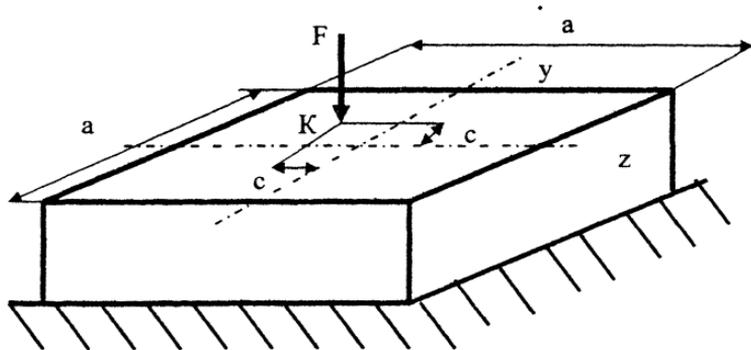
Знак минус в формуле для определения нейтральной оси показывает, что угол β необходимо откладывать от оси z в том же направлении, что и угла α .



ЗАДАЧА 3

Дано: $F=80$ кН, $c=0,1$ м, $[\sigma]=160$ МПа.

Требуется: 1) определить размеры сечения а,
2) положение нейтральной оси.



РЕШЕНИЕ

1. Записываем условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma];$$

$$M_z = F \cdot c; \quad M_y = F \cdot c; \quad W_z = W_y = \frac{a^3}{6}.$$

Полученные выражения подставляем в условие прочности

$$\frac{F}{a^2} + \frac{F \cdot c \cdot 6}{a^3} + \frac{F \cdot c \cdot 6}{a^3} = [\sigma].$$

Вынеся за скобку дробь $\frac{F}{a^3}$, получим:

$$\frac{F}{a^3} \cdot (a + 12c) = [\sigma],$$

откуда
$$a = \sqrt[3]{\frac{F \cdot (a + 12c)}{[\sigma]}}.$$

Для дальнейшего решения воспользуемся методом итерации, произведем ряд проб.

1-я проба: $a_1 = 0$, тогда
$$a = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 0,1}{160 \cdot 10^6}} = 8,41 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

2-я проба: $a_2=8,41 \cdot 10^{-2}$, тогда $a = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 10^3 (8,41 + 12 \cdot 0,1)}{160 \cdot 10^6}} = 8,61 \cdot 10^{-2}$ м;

3-я проба: $a_3=8,61 \cdot 10^{-2}$, тогда $a = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 10^3 (8,61 + 12 \cdot 0,1)}{160 \cdot 10^6}} = 8,62 \cdot 10^{-2}$ м.

Принимаем $a=90$ мм.

2. Определение положения нейтральной оси

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_F};$$

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_F},$$

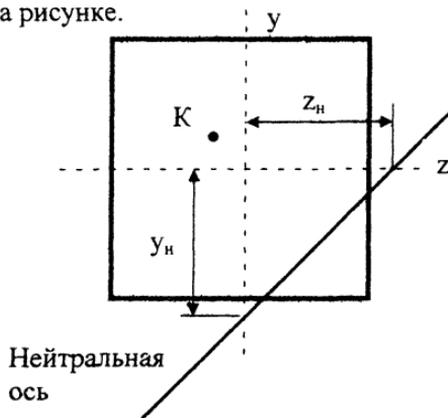
где $z_f = -c$ и $y_f = c$ – координаты точки приложения силы F.

Имеем: $i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^4}{12 \cdot a^2} = \frac{a^2}{12}$, $i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{a^4}{12 \cdot a^2} = \frac{a^2}{12}$.

Тогда: $z_H = -\frac{a^2}{12 \cdot (-c)} = -\frac{(9 \cdot 10^{-2})^2}{12 \cdot (-0,1)} = 6,75 \cdot 10^{-3}$;

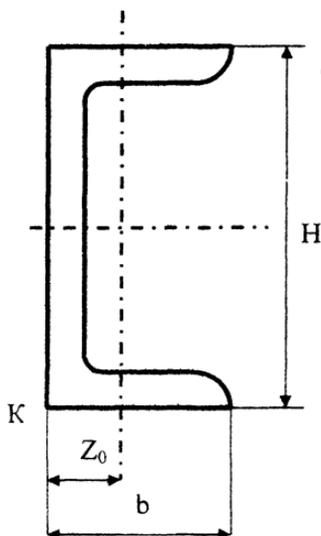
$$y_H = -\frac{a^2}{12 \cdot c} = -6,75 \cdot 10^{-3}.$$

Откладываем полученные координаты на осях z и y соответственно с учетом знака, через полученные точки проводим нейтральную ось. Положение нейтральной оси показано на рисунке.



Наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

ЗАДАЧА 4



Дано: К – точка приложения сжимающей силы;

$$F=200 \text{ кН}, [\sigma]=160 \text{ МПа};$$

швеллер № 18: $H=180 \text{ мм}$, $b=70 \text{ мм}$,

$$A=20,7 \text{ см}^2, I_x=1090 \text{ см}^4, W_x=121 \text{ см}^3,$$

$$i_x=7,24 \text{ см}, I_y=86 \text{ см}^4, W_y=17 \text{ см}^3,$$

$$i_y=2,04 \text{ см}, z_0=1,94 \text{ см}.$$

Требуется:

- 1) определить положение нейтральной оси;
- 2) построить эпюру нормальных напряжений
в поперечном сечении:
- 3) построить ядро сечения.

РЕШЕНИЕ

1. Уравнение нейтральной оси в отрезках, отсекаемых ею на координатных осях:

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_F}; \quad z_H = -\frac{i_y^2}{z_F}.$$

Осевые радиусы инерции: $i_z^2 = i_x^2 = 7,24^2 = 52,42 \text{ см}^2$;

$$i_y^2 = 2,04^2 = 4,16 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы К:

$$y_F = -\frac{h}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \text{ см}; \quad z_F = -z_0 = -1,94 \text{ см};$$

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{52,42}{-9} = 5,82 \text{ см};$$

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{4,16}{-1,94} = 2,14 \text{ см}.$$

2. Определяем максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении (которые возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси).

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right).$$

Координаты точек, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\text{Точка А: } y_A = \frac{h}{2} = 9 \text{ см}, \quad z_A = b - z_0 = 7 - 1,94 = 5,06 \text{ см}.$$

$$\text{Точка К: } y_F = -\frac{h}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \text{ см}, \quad z_F = -z_C = -1,94 \text{ см};$$

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_A}{i_y^2} \right),$$

$$\sigma_A = -\frac{200 \cdot 10^3}{20,7 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-9 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{52,42 \cdot 10^{-4}} + \frac{-1,94 \cdot 10^{-2} \cdot 5,06 \cdot 10^{-2}}{4,16 \cdot 10^{-4}} \right),$$

$$\sigma_A = 281100 \text{ Па} = 0,28 \text{ МПа};$$

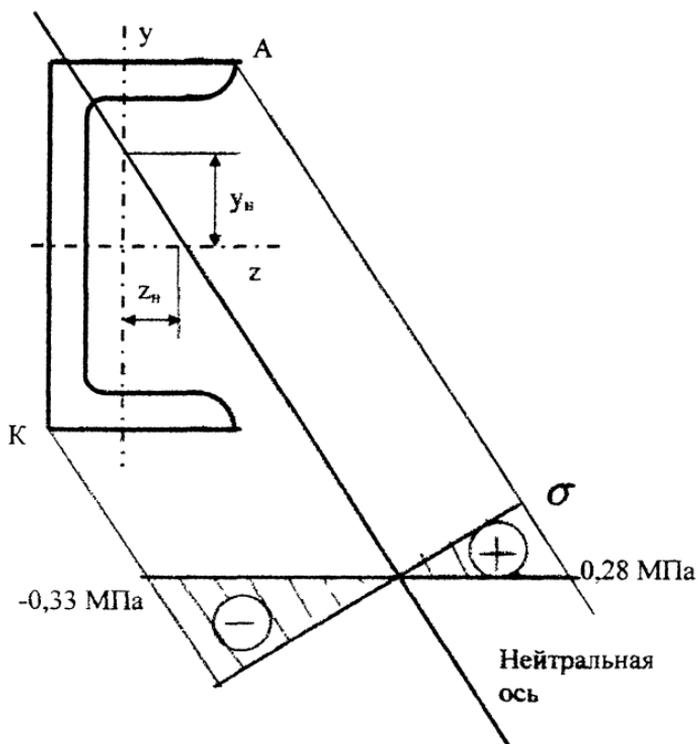
$$\sigma_K = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_K}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_K}{i_y^2} \right),$$

$$\sigma_K = -\frac{200 \cdot 10^3}{20,7 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{-9 \cdot 10^{-2} \cdot (-9 \cdot 10^{-2})}{52,42 \cdot 10^{-4}} + \frac{-1,94 \cdot 10^{-2} \cdot (-1,94 \cdot 10^{-2})}{4,16 \cdot 10^{-4}} \right),$$

$$\sigma_K = -333700 \text{ Па} = -0,33 \text{ МПа}.$$

Построение эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении.

Через наиболее удаленные от нейтральной оси точки поперечного сечения проведем прямые, параллельные нейтральной оси. Затем строим перпендикуляр к нейтральной оси и от него откладываем величины нормальных напряжений в опасных точках.



3. Построение ядра сечения: $y_{я} = -\frac{i_z^2}{y_n}$; $z_{я} = -\frac{i_y^2}{z_n}$.

Проведем 1-ю нейтральную ось, касательную к поперечному сечению и определим ее координаты: $y_n = -\frac{h}{2} = -9$ см, $z_n = \infty$.

Координаты точки 1, соответствующей этой нейтральной оси:

$$y_{я} = -\frac{52,42}{-9} = 5,82 \text{ см}, \quad z_{я} = -\frac{4,16}{\infty} = 0.$$

Откладываем точку с этими координатами на чертеже поперечного сечения.

Проводим 2-ю нейтральную ось и повторяем расчет для нахождения координат второй точки.

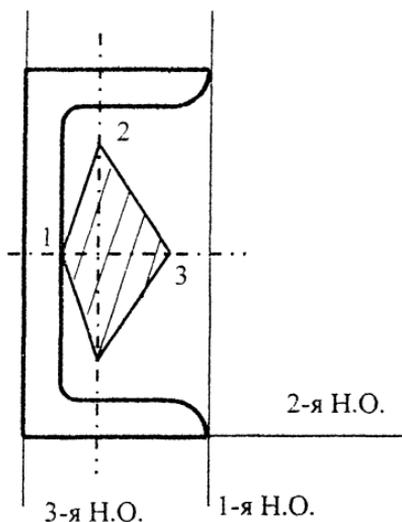
$$z_{\text{н}} = -z_0 = -1,94 \text{ см}, \quad y_{\text{н}} = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{4,16}{-1,94} = 2,14 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{52,42}{\infty} = 0.$$

Проводим третью нейтральную ось и повторяем расчет, а так как поперечное сечение симметрично относительно оси z, то в четвертой нейтральной оси нет необходимости.

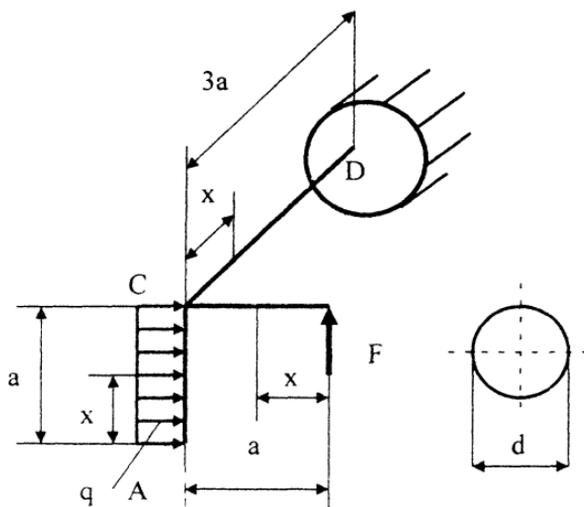
$$z_{\text{н}} = b - z_0 = 7 - 1,94 = 5,06 \text{ см}, \quad y_{\text{н}} = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{4,16}{5,06} = 0,82 \text{ см}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{52,42}{\infty} = 0.$$



Полученные точки соединяем отрезками, которые являются границами ядра сечения. Необходимо помнить, что размеры и форма ядра поперечного сечения не зависят от величины и координаты приложения нагрузки, а только от размеров и формы самого поперечного сечения.

ЗАДАЧА 5



Дано: $F=3000$ Н, $a=0,3$ м, $q=15000$ Н/м, $d=8$ см.

Требуется:

- 1) определить положение плоскости действия результирующего изгибающего момента в опасном сечении бруса;
- 2) определить величину наибольшего эквивалентного напряжения в опасном сечении вала, исходя из 3-й теории прочности (теория максимальных касательных напряжений).

РЕШЕНИЕ

1. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

Рассматриваемая система имеет три участка. Составляем выражения для изгибающих (горизонтальных и вертикальных) и крутящих моментов по участкам.

1-й участок: $0 \leq x \leq a$

$$M_z = Fx; \quad \text{при } x=0 \quad M_z=0,$$

$$\text{при } x=a \quad M_z = Fa = 3000 \cdot 0,3 = 900 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

2-й участок: $0 \leq x \leq a$

$$M_y = q \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{при } x=0 \quad M_y = 0,$$

$$\text{при } x=a \quad M_y = q \cdot \frac{a^2}{2} = 15000 \cdot \frac{0,3^2}{2} = 675 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

3-й участок: $0 \leq x \leq 3a$

$$M_x^6 = F \cdot x: \quad \text{при } x=0 \quad M_x^6 = 0,$$

$$\text{при } x=3a \quad M_x^6 = F \cdot 3a = 3000 \cdot 3 \cdot 0,3 = 2700 \text{ Н}\cdot\text{м,}$$

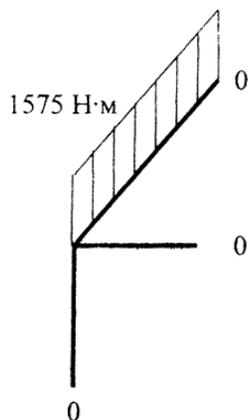
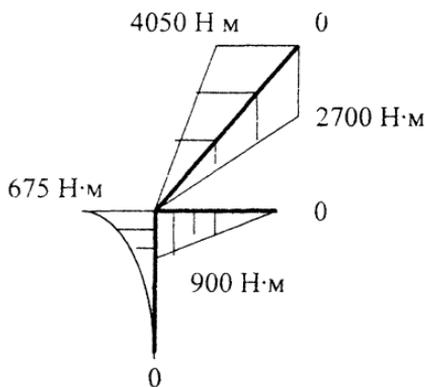
$$M_x^r = q \cdot a \cdot x: \quad \text{при } x=0 \quad M_x^r = 0,$$

$$\text{при } x=3a \quad M_x^r = q \cdot a \cdot 3a = 15000 \cdot 0,3 \cdot 3 \cdot 0,3 = 4050 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$M_k = F \cdot a + q \cdot \frac{a^2}{2} = 3000 \cdot 0,3 + 15000 \cdot \frac{0,3^2}{2} = 900 + 675 = 1575 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

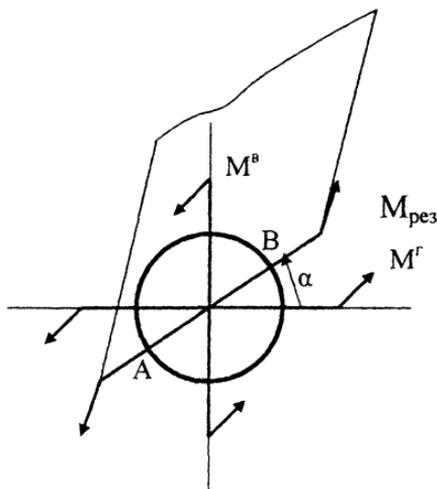
Эпюра изгибающего момента

Эпюра крутящего момента



По найденным значениям изгибающих и крутящих моментов строим эпюры. Эпюру изгибающего момента строим со стороны растянутых волокон. Из эпюр видно, что опасным является сечение D.

2. Определение положения плоскости действия результирующего изгибающего момента $M_{рез}$ в опасном сечении вала



В сечении D действуют два изгибающих момента $M^B=2700$ Н·м и

$$M^Gamma=4050 \text{ Н·м} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|M^B|}{|M^Gamma|} = \frac{2700}{4050} = 0,667,$$

где угол α , составляемый следом плоскости действия результирующего изгибающего момента $M_{рез}$ с осью z, $\alpha = 33^{\circ} 42'$.

3. Определение наибольшего расчетного напряжения в опасном сечении вала, исходя из 3-й теории прочности (теории максимальных касательных напряжений)

Нормальные напряжения в опасном сечении D от действия изгибающего момента определяются по формуле:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{M_{рез}}{W_z} = \pm \frac{32 M_{рез}}{\pi \cdot d^3},$$

$$\text{где } M_{рез} = \sqrt{(M^B)^2 + (M^Gamma)^2} = \sqrt{2700^2 + 4050^2} = 4850 \text{ Н·м};$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{32 \cdot 4850}{\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2})^3} = \pm 96,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_A = +96,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -96,7 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения от действия крутящего момента в точках по контуру поперечного сечения равны:

$$\tau = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 1570}{\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2})^3} = 15,7 \text{ МПа}.$$

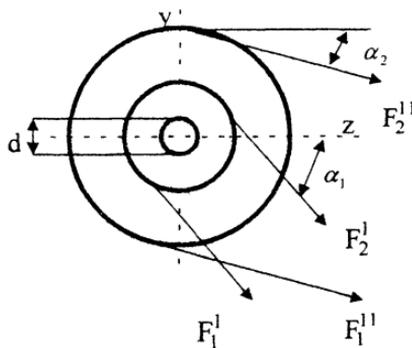
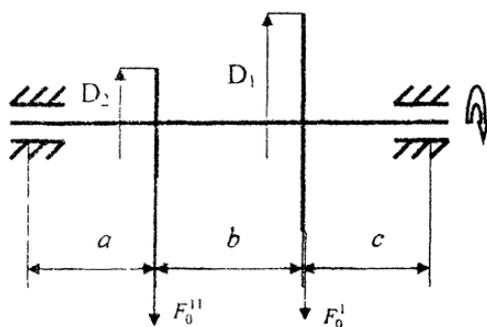
Расчетные напряжения определим по 3-й теории прочности :

$$(\sigma_{\text{ЭКВ}})_{111} = \frac{M_P}{W_{\text{OC}}} = \frac{32 (M_P)_{111}}{\pi \cdot d^3},$$

где $(M_P)_{111} = \sqrt{(M_{\text{из}})^2 + (M_K)^2} = \sqrt{4850^2 + 1570^2} = 5080 \text{ Н}\cdot\text{м};$

$$(\sigma_{\text{расч}})_{111} = \frac{32 \cdot 5080}{\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2})^3} = 101 \text{ МПа}.$$

ЗАДАЧА 6



Определить диаметр вала при следующих данных:

F_1^I	F_2^I	F_0^I	F_1^{II}	F_2^{II}	F_0^{II}	D_1	D_2	a	b	c	α_1	α_2
9,5	3,0	3,6	7,6	2,5	3,0	0,6	0,8	0,8	0,6	0,45	40°	20°

Здесь F_0 – собственный вес шкивов, все силы измеряются в кН, а все линейные размеры – в метрах.

Решение

1. Покажем расчетную схему с крутящими моментами и определим их величину:

$$T_1 = (F_1^I - F_2^I) \cdot \frac{D_1}{2} = (9,5 - 3,0) \cdot \frac{0,6}{2} = 1,95 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_2 = (F_1^{II} - F_2^{II}) \cdot \frac{D_2}{2} = (7,6 - 2,5) \cdot \frac{0,8}{2} = 2,04 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построим эпюры внутренних крутящих моментов T , определяя их методом сечений на каждом из трех участков.

2. Определим нагрузки, действующие на вал при изгибе:

а) вертикальная плоскость YOX :

$$F_y^I = (F_1^I - F_2^I) \cdot \sin \alpha_1 + F_0^I = (9,5 + 3,0) \cdot \sin 40^\circ + 3,6 = 11,6 \text{ кН};$$

$$F_y^{II} = (F_1^{II} - F_2^{II}) \cdot \sin \alpha_2 + F_0^{II} = (7,6 + 2,5) \cdot \sin 20^\circ + 3,0 = 6,45 \text{ кН}.$$

Покажем их на расчетной схеме и определим реакции опор.

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^y \cdot (a + b + c) - F_y^{II} \cdot (a + b) - F_y^I \cdot a = 0;$$

$$R_B^y = \frac{F_y^{II} \cdot (a + b) + F_y^I \cdot a}{a + b + c} = \frac{6,45 \cdot (0,8 + 0,6) + 11,64 \cdot 0,8}{0,8 + 0,6 + 0,45} = 9,95 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A^y \cdot (a + b + c) - F_y^I \cdot (c + b) - F_y^{II} \cdot c = 0;$$

$$R_A^y = \frac{F_y^{II} \cdot c + F_y^I \cdot (b + c)}{a + b + c} = \frac{6,45 \cdot 0,45 + 11,64 \cdot (0,6 + 0,45)}{0,8 + 0,6 + 0,45} = 8,15 \text{ кН}.$$

Сделаем проверку $\sum F_y = 0$:

$$R_A^y - F_y' - F_y'' + R_B^y = 0, \quad 8,15 - 11,65 - 6,45 + 9,95 = 0, \quad 0 = 0.$$

Реакции определены верно.

Построим эпюру изгибающих моментов для вертикальной плоскости YOX. Балка имеет три участка.

1-й участок $0 \leq x \leq a$:

$$M_z = R_A^y \cdot x \quad \text{при } x=0 \quad M_z=0;$$

$$\text{при } x=a \quad M_z = R_A^y \cdot a = 8,15 \cdot 0,8 = 6,52 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2-й участок $0 \leq x \leq b$:

$$M_z = R_A^y \cdot (a+x) - F_y' \cdot x;$$

$$\text{при } x=0 \quad M_z = R_A^y \cdot a = 8,15 \cdot 0,8 = 6,52 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x=b \quad M_z = R_A^y \cdot (a+b) - F_y' \cdot b = 4,45 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3-й участок $0 \leq x \leq c$:

$$M_z = R_B^y \cdot x;$$

$$\text{при } x=0 \quad M_z=0;$$

$$\text{при } x=c \quad M_z = R_B^y \cdot c = 9,95 \cdot 0,45 = 4,45 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

б) горизонтальная плоскость ZOХ:

$$F_z' = (F_1' + F_2') \cdot \cos \alpha_1 = (9,5 + 3,0) \cdot \cos 40^\circ = 9,58 \text{ кН};$$

$$F_z'' = (F_1'' + F_2'') \cdot \cos \alpha_2 = (7,6 + 2,5) \cdot \cos 20^\circ = 9,5 \text{ кН}.$$

Покажем их на расчетной схеме и определим реакции опор.

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^z \cdot (a+b+c) - F_z'' \cdot (a+b) - F_z' \cdot a = 0,$$

$$R_B^z = \frac{F_z'' \cdot (a+b) + F_z' \cdot a}{a+b+c} = \frac{9,5 \cdot (0,8+0,6) + 9,58 \cdot 0,8}{0,8+0,6+0,45} = 11,33 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A^z \cdot (a+b+c) - F_z' \cdot (c+b) - F_z'' \cdot c = 0,$$

$$R_A^z = \frac{F_z'' \cdot c + F_z' \cdot (b+c)}{a+b+c} = \frac{9,5 \cdot 0,45 + 9,58 \cdot (0,6 + 0,45)}{0,8 + 0,6 + 0,45} = 7,75 \text{ кН.}$$

Сделаем проверку $\sum F_y = 0$:

$$R_A^z - F_y' - F_y'' + R_B^z = 0, \quad 7,75 - 9,58 - 9,5 + 11,33 = 0, \quad 0 = 0.$$

Реакции определены верно.

Построим эпюру изгибающих моментов для вертикальной плоскости YOX. Балка имеет три участка.

1-й участок $0 \leq x \leq a$:

$$M_y = R_A^z \cdot x; \quad \text{при } x=0 \quad M_y=0;$$

$$\text{при } x=a \quad M_y = R_A^z \cdot a = 7,75 \cdot 0,8 = 6,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

2-й участок $0 \leq x \leq b$:

$$M_y = R_A^z \cdot (a+x) - F_z' \cdot x;$$

$$\text{при } x=0 \quad M_y = R_A^z \cdot a = 7,75 \cdot 0,8 = 6,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\text{при } x=b \quad M_y = R_A^z \cdot (a+b) - F_z' \cdot b = 7,75 \cdot (0,8 + 0,6) - 9,58 \cdot 0,6 = 5,1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

3-й участок $0 \leq x \leq c$:

$$M_y = R_B^z \cdot x;$$

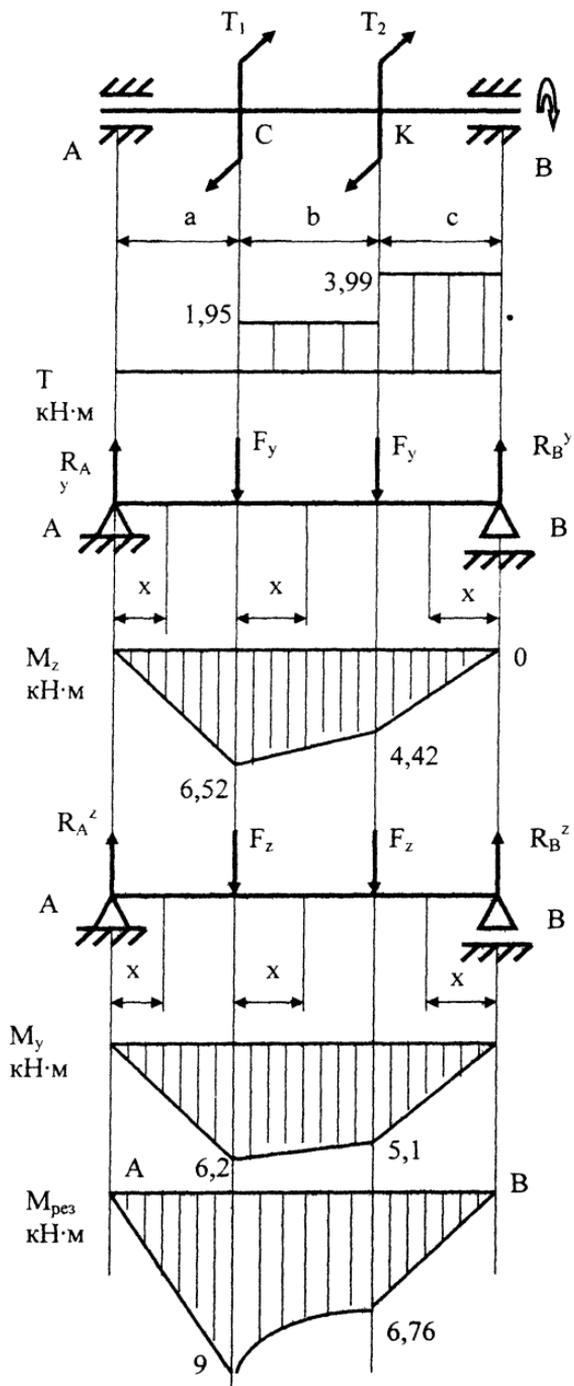
$$\text{при } x=0 \quad M_y=0;$$

$$\text{при } x=c \quad M_y = R_B^z \cdot c = 11,33 \cdot 0,45 = 5,1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

3. Подсчитаем результирующие изгибающие моменты для сечений А, В, С и К как геометрическую сумму $M_{рез} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ и покажем их эпюру на рисунке.

$$M_{рез(С)} = \sqrt{6,52^2 + 6,2^2} = 9 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M_{рез(К)} = \sqrt{4,45^2 + 5,1^2} = 6,76 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$



4. Определим расчетные моменты M_p для сечений С и К, используя третью теорию прочности:

$$M_p = \sqrt{T^2 + M_{\text{рез}}^2}, \text{ тогда } M_{p(\text{С})} = \sqrt{1,95^2 + 9^2} = 9,2 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{p(\text{К})} = \sqrt{3,99^2 + 6,76^2} = 7,04 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На основании расчетов устанавливаем, что опасным сечением будет С с максимальным моментом $M_p^{\text{max}} = 9,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

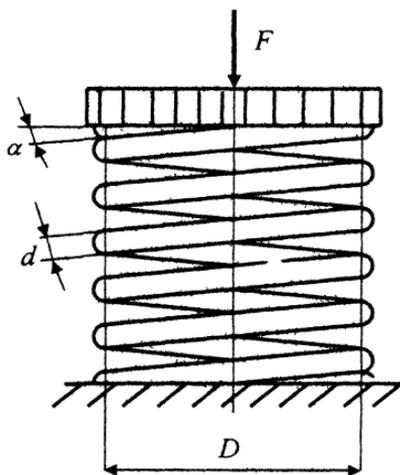
5. Используя условие прочности $\sigma_{\text{max}} = \frac{M_p^{\text{max}}}{W_\rho} \leq [\sigma]$, определим

диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_p^{\text{max}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9,2 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,35 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округляя до стандартного значения диаметров, получаем окончательно: $d=8,5 \text{ см}$.

ЗАДАЧА 7



Определить диаметр проволоки стальной пружины, если под действием силы $F=800 \text{ Н}$, осадка $\lambda=39 \text{ мм}$. Индекс пружины $c_n=6$, число витков $n=14$. Модуль упругости $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, допускаемое напряжение $[\tau] = 450 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ

Индекс пружины $c_n = \frac{D}{d}$, откуда $D = c_n \cdot d$.

Подставим значение D в формулу для осадки пружины:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{8Fc_n^3 d^3 n}{Gd^4} = \frac{8Fc_n^3 n}{Gd}$$

Отсюда находим d и после подстановки числовых значений получаем:

$$d = \frac{8Fc_n^3 n}{\lambda G} = \frac{8 \cdot 800 \cdot 6^3 \cdot 14}{39 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м, т. е. } d = 7 \text{ мм.}$$

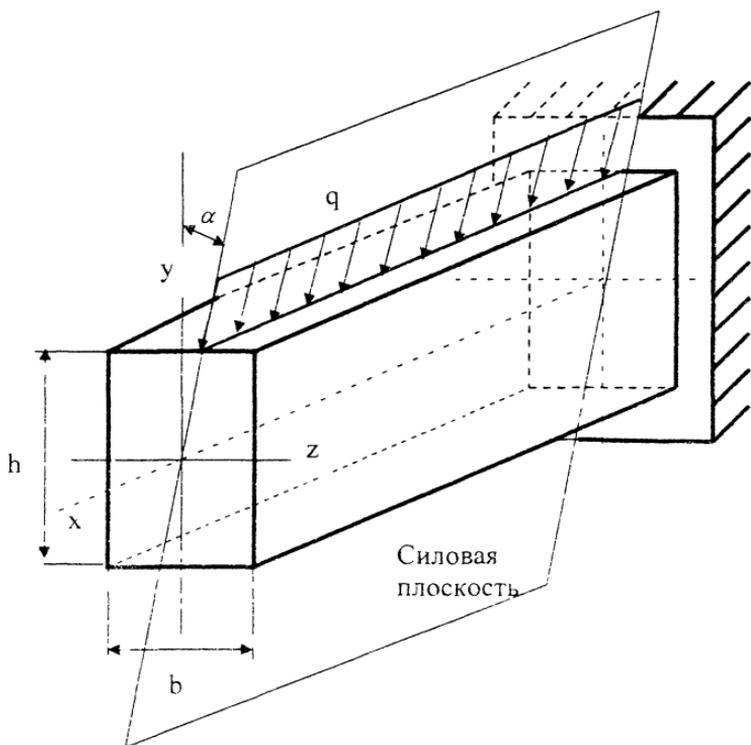
$$D = c_n \cdot d = 6 \cdot 7 = 42 \text{ мм.}$$

ЗАДАЧА 8

Дано: $q=30$ кН/м, размеры поперечного сечения: $b=4$ см, $h=8$ см, длина – $l=80$ см, угол наклона силовой плоскости – $\alpha = 15^\circ$, материал балки – сталь $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется: 1) определить положение нейтральной оси;

2) определить величину и направление перемещения свободной стороны балки.



РЕШЕНИЕ

1. Определение положения нейтральной оси .

Определяем положение нейтральной оси по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha ,$$

где β – угол, составляемый нейтральной осью с осью z .

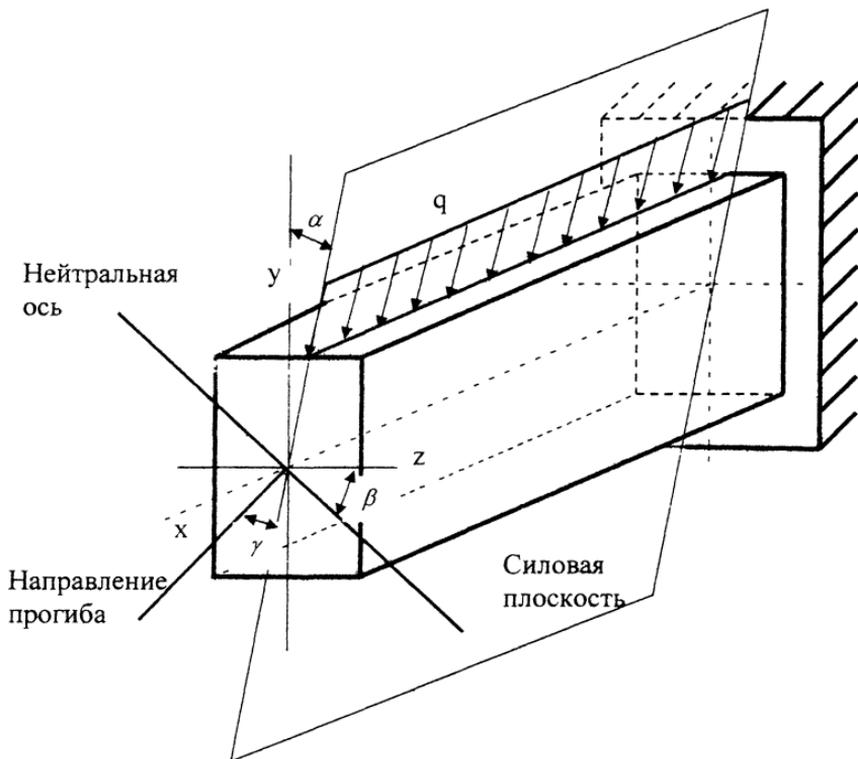
$\operatorname{tg} 15^\circ = 0,268$,

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = 171 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{4^3 \cdot 8}{12} = 42,8 \text{ см}^4,$$

Тогда:
$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{171}{42,8} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = -1,07,$$

то есть угол, составляемый нейтральной осью с осью z, равен 47° .



2. Определение величины и направления перемещения.

Для определения перемещения воспользуемся формулой

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}.$$

Величины составляющих прогиба определяются выражением

$$f = \frac{ql^4}{8EJ}$$

Прогиб в направлении оси y :

$$f_y = \frac{q \cdot \cos \alpha \cdot l^4}{8EJ_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot \cos 15^\circ \cdot 0,8^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 171 \cdot 10^{-8}} = 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Прогиб в направлении оси z:

$$f_z = \frac{q \cdot \sin \alpha \cdot l^4}{8EJ_y} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot \sin 15^\circ \cdot 0,8^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 42,8 \cdot 10^{-8}} = 4,64 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Полный прогиб:

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} = \sqrt{(4,64 \cdot 10^{-4})^2 + (4,33 \cdot 10^{-4})^2} = 6,45 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Направление перемещения определим по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{4,64 \cdot 10^{-4}}{4,33 \cdot 10^{-4}} = 1,07,$$

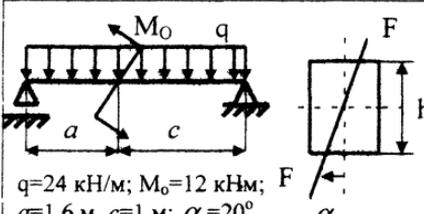
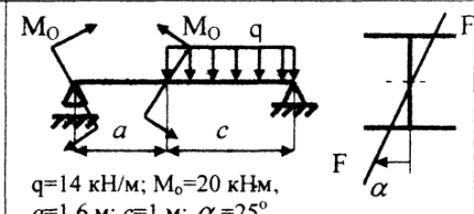
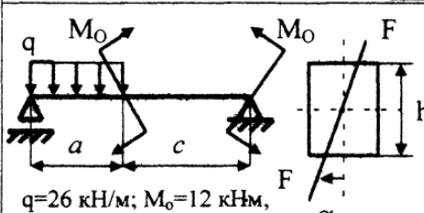
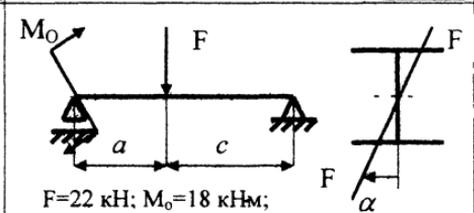
где γ – угол, составляемый следом плоскости изгиба с осью y . Заметим, что направление полного прогиба (след плоскости изгиба) всегда перпендикулярно нейтральной оси.

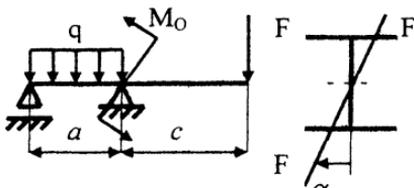
Список рекомендуемой литературы

1. **Багмутов, В. П.** Сопротивление материалов. Конспект лекций, тетрадь вторая: учебное пособие / В. П. Багмутов, И. Н. Захаров; ВолгГТУ. – Волгоград, – 2004. - 74 с.
2. **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов: учебник / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров [и др.] – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
4. **Писаренко, Г. С.** Сопротивление материалов: учебник / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Задание к расчетно-проектировочной работе
 «Расчет на прочность при сложном сопротивлении»

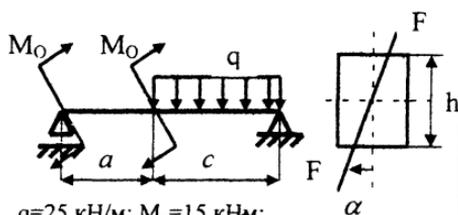
1. Выберите схемы задания, номер которого соответствует вашему порядковому номеру в журнале группы.
2. Для задачи 1: 1) построить эпюру изгибающих моментов; 2) подобрать сечение, если $[\sigma]=160$ МПа; $h/b=1,2$;
- 3) определить положение нейтральной оси и наибольшее нормальное напряжение.

 <p>$q=24$ кН/м; $M_0=12$ кНм; $a=1,6$ м, $c=1$ м; $\alpha=20^\circ$.</p> <p>№ 1</p>	 <p>$q=14$ кН/м; $M_0=20$ кНм, $a=1,6$ м; $c=1$ м; $\alpha=25^\circ$.</p> <p>№ 2</p>
 <p>$q=26$ кН/м; $M_0=12$ кНм, $a=1,6$ м, $c=1,8$ м; $\alpha=12^\circ$.</p> <p>№ 3</p>	 <p>$F=22$ кН; $M_0=18$ кНм; $a=1,2$ м; $c=1,4$ м; $\alpha=22^\circ$.</p> <p>№ 4</p>



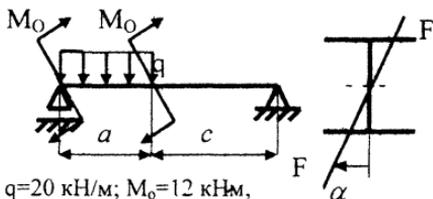
$q=16 \text{ кН/м}; M_0=10 \text{ кНм}; F=12 \text{ кН}$
 $a=1.4 \text{ м}; c=1.2 \text{ м}; \alpha=14^\circ$

№ 5



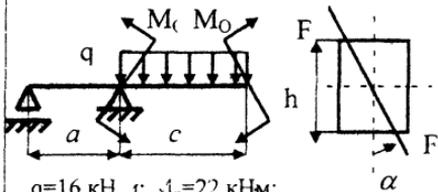
$q=25 \text{ кН/м}; M_0=15 \text{ кНм};$
 $a=1.2 \text{ м}; c=1.5 \text{ м}; \alpha=18^\circ$

№ 6



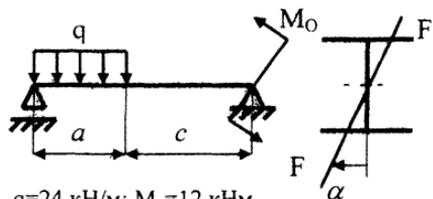
$q=20 \text{ кН/м}; M_0=12 \text{ кНм},$
 $a=1.8 \text{ м}; c=1.4 \text{ м}; \alpha=20^\circ$

№ 7



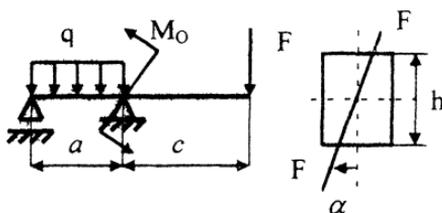
$q=16 \text{ кН/м}; M_0=22 \text{ кНм};$
 $a=1 \text{ м}; c=1.8 \text{ м}; \alpha=30^\circ$

№ 8



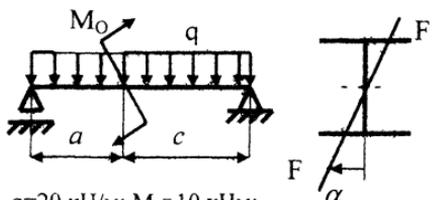
$q=24 \text{ кН/м}; M_0=12 \text{ кНм},$
 $a=1.4 \text{ м}; c=2 \text{ м}; \alpha=18^\circ$

№ 9



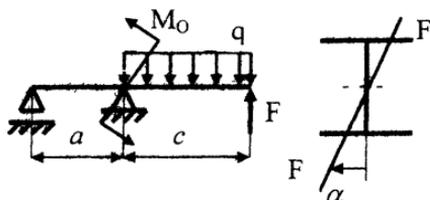
$q=14 \text{ кН/м}; M_0=12 \text{ кНм}; F=10 \text{ кН}$
 $a=1.2 \text{ м}; c=2 \text{ м}; \alpha=10^\circ$

№ 10



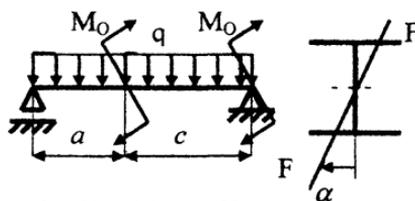
$q=20 \text{ кН/м}; M_0=10 \text{ кНм};$
 $a=1 \text{ м}; c=1.6 \text{ м}; \alpha=25^\circ$

№ 11



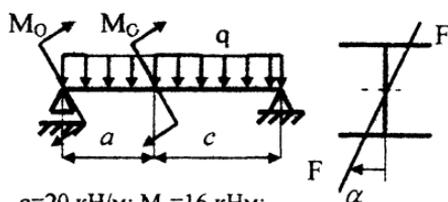
$q=16 \text{ кН/м}; F=24 \text{ кН}; M_0=18 \text{ кНм};$
 $a=1.6 \text{ м}; c=1 \text{ м}; \alpha=20^\circ$

№ 12



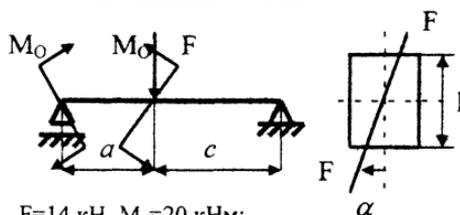
$q=24 \text{ кН/м}$; $M_0=14 \text{ кНм}$;
 $a=1 \text{ м}$; $c=1,5 \text{ м}$; $\alpha=22^\circ$.

№ 13



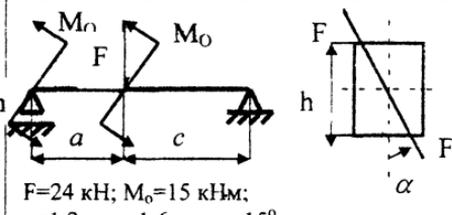
$q=20 \text{ кН/м}$; $M_0=16 \text{ кНм}$;
 $a=1 \text{ м}$; $c=1,4 \text{ м}$; $\alpha=15^\circ$.

№ 14



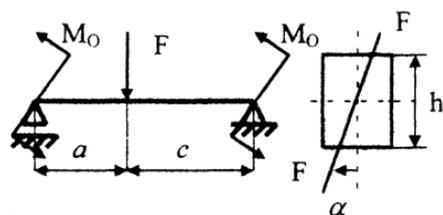
$F=14 \text{ кН}$; $M_0=20 \text{ кНм}$;
 $a=1,4 \text{ м}$; $c=1,6 \text{ м}$; $\alpha=20^\circ$

№ 15



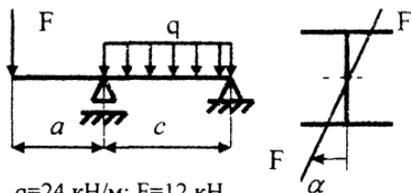
$F=24 \text{ кН}$; $M_0=15 \text{ кНм}$;
 $a=1,2 \text{ м}$; $c=1,6 \text{ м}$; $\alpha=15^\circ$

№ 16



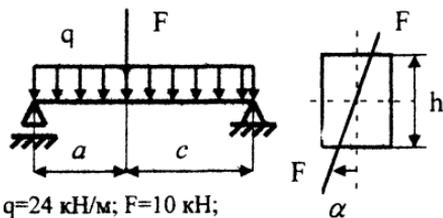
$F=24 \text{ кН}$; $M_0=12 \text{ кНм}$;
 $a=1,6 \text{ м}$; $c=1 \text{ м}$; $\alpha=20^\circ$.

№ 17



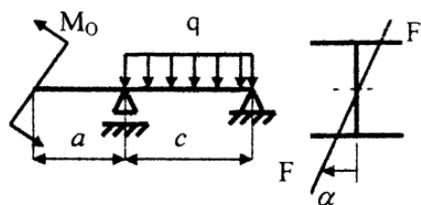
$q=24 \text{ кН/м}$; $F=12 \text{ кН}$;
 $a=1,6 \text{ м}$; $c=1 \text{ м}$; $\alpha=10^\circ$

№ 18



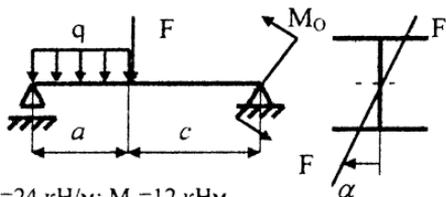
$q=24 \text{ кН/м}$; $F=10 \text{ кН}$;
 $a=1,6 \text{ м}$; $c=1 \text{ м}$; $\alpha=20^\circ$.

№ 19



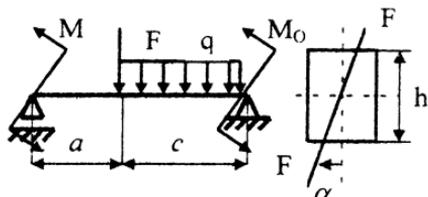
$q=14 \text{ кН/м}$; $M_0=18 \text{ кНм}$;
 $a=1,7 \text{ м}$; $c=2 \text{ м}$; $\alpha=15^\circ$.

№ 20



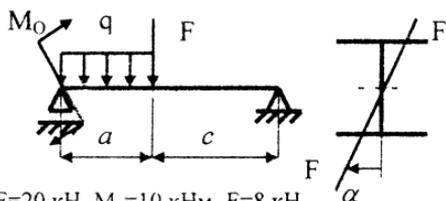
$q=24 \text{ кН/м}$; $M_0=12 \text{ кНм}$,
 $F=10 \text{ кН}$; $a=1,4 \text{ м}$, $c=2 \text{ м}$, $\alpha=18^\circ$.

№ 21



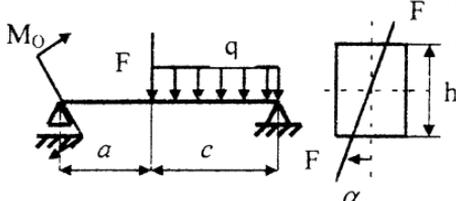
$F=14 \text{ кН}$, $M_0=12 \text{ кНм}$; $q=10 \text{ кН/м}$,
 $a=1,6 \text{ м}$, $c=1 \text{ м}$, $\alpha=20^\circ$

№ 22



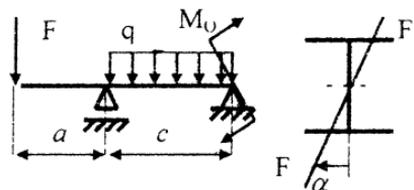
$F=20 \text{ кН}$, $M_0=10 \text{ кНм}$, $F=8 \text{ кН}$,
 $a=1,2 \text{ м}$, $c=1,4 \text{ м}$, $\alpha=22^\circ$.

№ 23



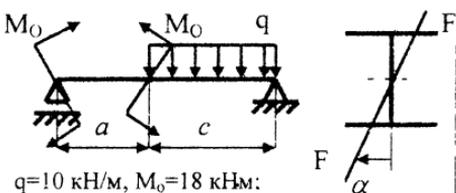
$q=15 \text{ кН/м}$, $M_0=10 \text{ кНм}$, $F=12 \text{ кН}$;
 $a=1,2 \text{ м}$, $c=1,5 \text{ м}$, $\alpha=18^\circ$

№ 24



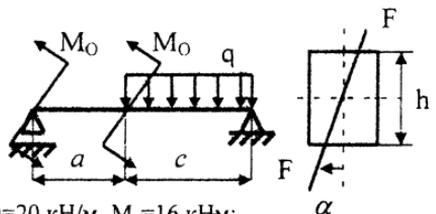
$q=14 \text{ кН/м}$, $F=12 \text{ кН}$, $M_0=12 \text{ кНм}$;
 $a=1,6 \text{ м}$, $c=1 \text{ м}$, $\alpha=10^\circ$

№ 25



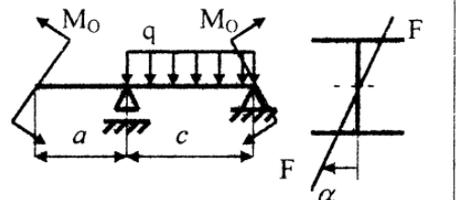
$q=10 \text{ кН/м}$, $M_0=18 \text{ кНм}$;
 $a=1 \text{ м}$, $c=1,6 \text{ м}$; $\alpha=15^\circ$.

№ 26



$q=20 \text{ кН/м}$, $M_0=16 \text{ кНм}$;
 $a=1,2 \text{ м}$; $c=1,5 \text{ м}$; $\alpha=16^\circ$.

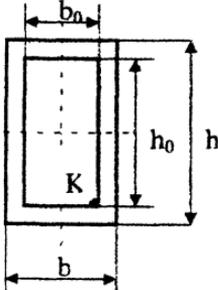
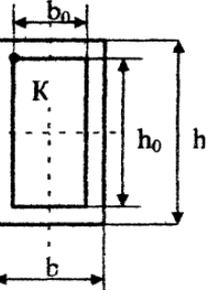
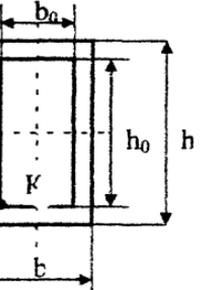
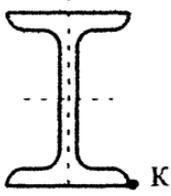
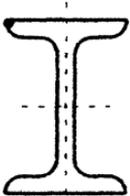
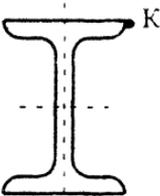
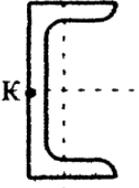
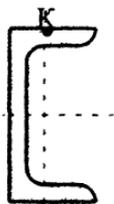
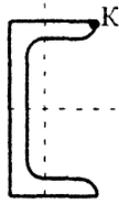
№ 27

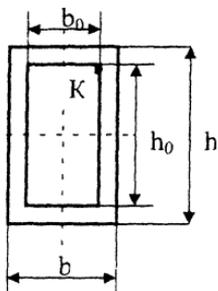


$q=10 \text{ кН/м}$; $M_0=16 \text{ кНм}$;
 $a=1,7 \text{ м}$; $c=2 \text{ м}$; $\alpha=10^\circ$.

№ 28

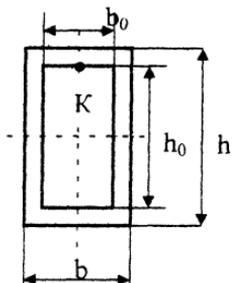
3. Для задачи 2: для стержня, поперечное сечение которого показано на рисунке, определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения; построить ядро сечения (К – точка приложения сжимающей силы).

 <p>$F=630 \text{ кН}; h=0.5 \text{ м};$ $b=0.4 \text{ м}; h_0=0.3 \text{ м};$ $b_0=0.2 \text{ м}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 1</p>	 <p>$F=620 \text{ кН}; h=0.6 \text{ м};$ $b=0.5 \text{ м}; h_0=0.3 \text{ м};$ $b_0=0.2 \text{ м}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 2</p>	 <p>$F=630 \text{ кН}; h=0.4 \text{ м};$ $b=0.3 \text{ м}; h_0=0.2 \text{ м};$ $b_0=0.16 \text{ м}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 3</p>
 <p>Двутавр № 45; $F=480 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 4</p>	 <p>Двутавр № 45; $F=460 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 5</p>	 <p>Двутавр № 30. $F=440 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 6</p>
 <p>Швеллер № 36; $F=460 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 7</p>	 <p>Швеллер № 36; $F=460 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 8</p>	 <p>Швеллер № 36; $F=460 \text{ кН}.$</p> <p style="text-align: center;">№ 9</p>



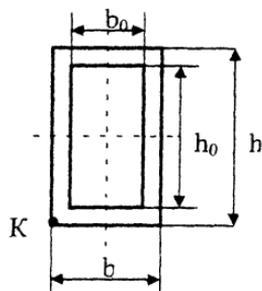
$F=630 \text{ кН}$; $h=0,5 \text{ м}$,
 $b=0,4 \text{ м}$, $h_0=0,3 \text{ м}$;
 $b_0=0,2 \text{ м}$

№ 10



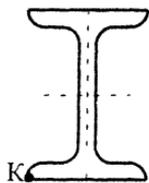
$F=530 \text{ кН}$; $h=0,5 \text{ м}$;
 $b=0,4 \text{ м}$; $h_0=0,4 \text{ м}$;
 $b_0=0,2 \text{ м}$.

№ 11



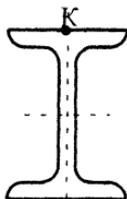
$F=560 \text{ кН}$; $h=0,7 \text{ м}$.
 $b=0,5 \text{ м}$, $h_0=0,4 \text{ м}$;
 $b_0=0,3 \text{ м}$.

№ 12



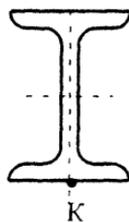
Двутавр № 50.
 $F=550 \text{ кН}$

№ 13



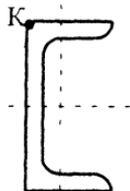
Двутавр № 45,
 $F=480 \text{ кН}$

№ 14



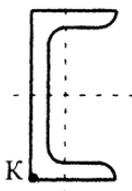
Двутавр № 45;
 $F=420 \text{ кН}$

№ 15



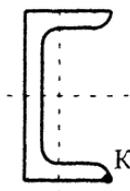
Швеллер № 36,
 $F=460 \text{ кН}$

№ 16



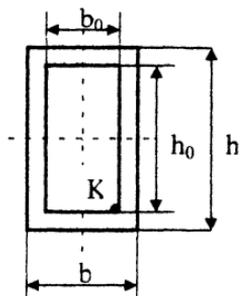
Швеллер № 36,
 $F=460 \text{ кН}$

№ 17



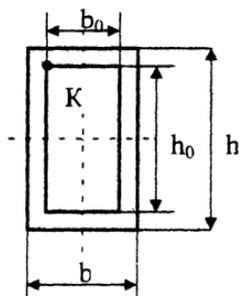
Швеллер № 36;
 $F=460 \text{ кН}$.

№ 18



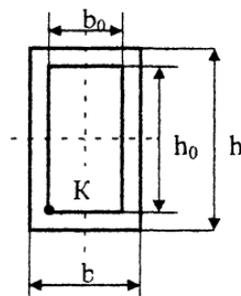
$F=630 \text{ кН}; h=0,5 \text{ м};$
 $b=0,4 \text{ м}; h_0=0,3 \text{ м};$
 $b_0=0,2 \text{ м}.$

№ 19



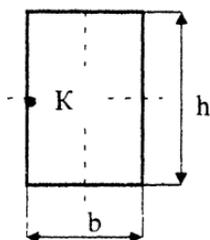
$F=620 \text{ кН}; h=0,6 \text{ м};$
 $b=0,5 \text{ м}; h_0=0,3 \text{ м};$
 $b_0=0,2 \text{ м}$

№ 20



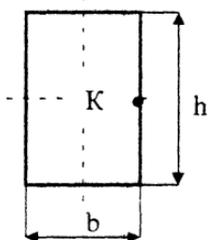
$F=630 \text{ кН}, h=0,4 \text{ м}.$
 $b=0,3 \text{ м}; h_0=0,2 \text{ м},$
 $b_0=0,16 \text{ м}.$

№ 21



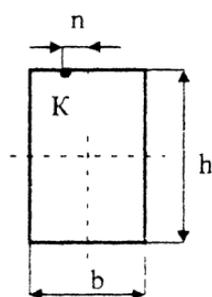
$F=810 \text{ кН}; h=0,8 \text{ м},$
 $b=0,4 \text{ м}$

№ 22



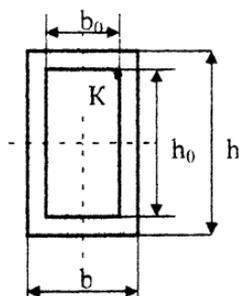
$F=720 \text{ кН}; h=0,8 \text{ м},$
 $b=0,64 \text{ м}$

№ 23



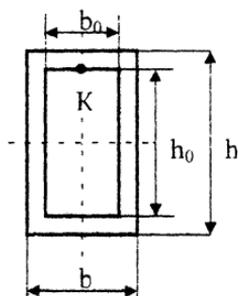
$F=430 \text{ кН}, h=0,64 \text{ м};$
 $b=0,42 \text{ м}, n=0,2 \text{ м}$

№ 24



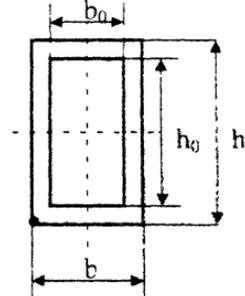
$F=630 \text{ кН}; h=0,5 \text{ м};$
 $b=0,4 \text{ м}, h_0=0,3 \text{ м};$
 $b_0=0,2 \text{ м}.$

№ 25



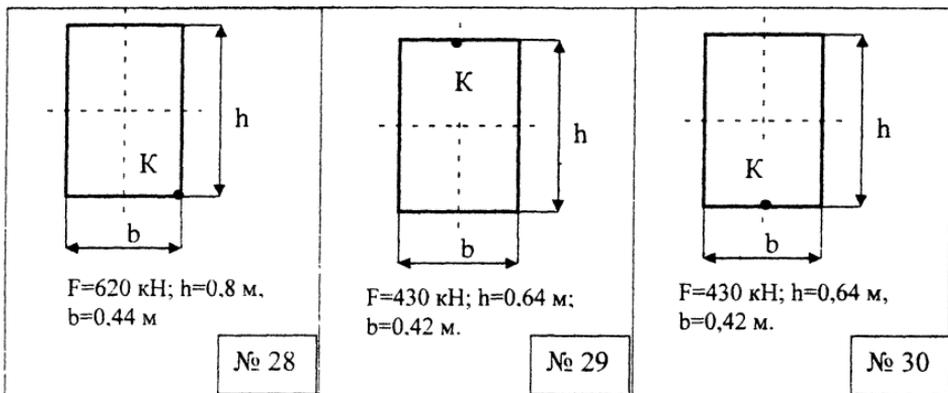
$F=530 \text{ кН}; h=0,5 \text{ м};$
 $b=0,4 \text{ м}; h_0=0,4 \text{ м}.$
 $b_0=0,2 \text{ м}.$

№ 26



$F=560 \text{ кН}; h=0,7 \text{ м};$
 $b=0,5 \text{ м}; h_0=0,4 \text{ м};$
 $b_0=0,3 \text{ м}.$

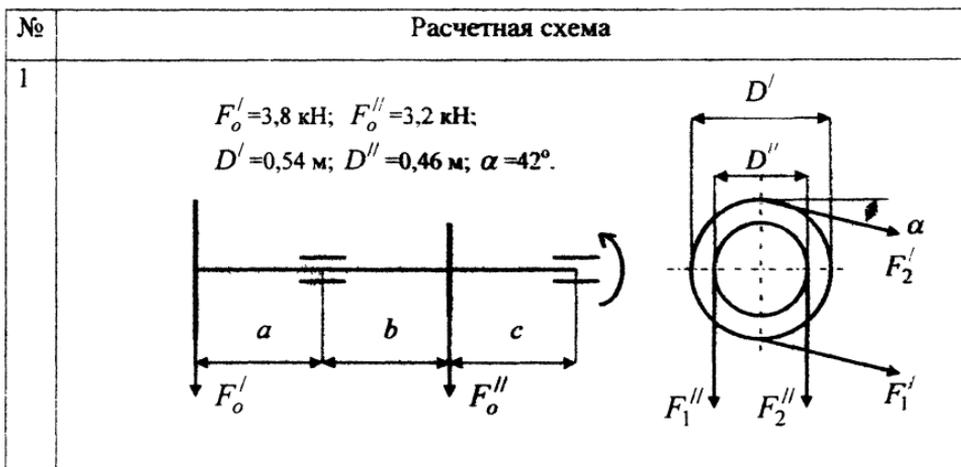
№ 27



4. Для задачи 3: определить диаметр вала, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

№ варианта	F_1^I	F_2^I	F_1^{II}	F_2^{II}	a	b	c
1	9,5	3,0	7,6	2,5	0,8	0,6	0,45
2	9,8	3,5	7,3	2,1	0,86	0,59	0,40
3	9,2	2,8	7,1	2	0,79	0,61	0,48
4	9	3,9	7	2,9	0,81	0,68	0,42
5	9,9	2,9	7,9	2,2	0,83	0,66	0,33
6	9,25	2,25	7,5	2,6	0,87	0,65	0,44
7	9,1	3,1	7,2	2,1	0,81	0,69	0,41
8	9,3	3,2	7,3	2,2	0,82	0,68	0,42
9	9,4	3,3	7,4	2,3	0,83	0,67	0,43
10	9,6	3,4	7,5	2,4	0,84	0,66	0,44
11	9,7	3,5	7,6	2,5	0,85	0,65	0,45
12	9,6	3,6	7,7	2,6	0,86	0,64	0,46
13	9,5	3,7	7,8	2,7	0,87	0,63	0,47
14	9,4	3,8	7,9	2,8	0,86	0,62	0,48

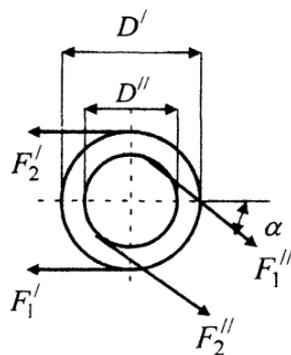
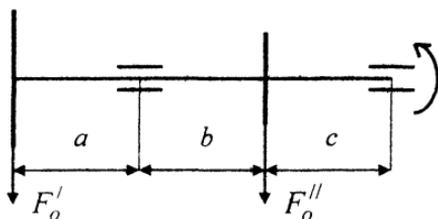
№ варианта	F_1^I	F_2^I	F_1^{II}	F_2^{II}	a	b	c
15	9,3	3,7	8,0	2,0	0,87	0,61	0,35
16	9,2	3,6	7,9	2,1	0,88	0,6	0,36°
17	9,1	3,5	7,8	2,2	0,89	0,61	0,37
18	9	3,4	7,7	2,3	0,87	0,62	0,38
19	9,1	3,3	7,6	2,4	0,86	0,63	0,39
20	9,2	3,2	7,5	2,5	0,85	0,64	0,4
21	9,3	3,1	7,4	2,6	0,84	0,65	0,42
22	9,4	3,0	7,3	2,7	0,83	0,66	0,43
23	9,5	2,9	7,2	2,8	0,82	0,67	0,44
24	9,6	2,8	7,1	2,9	0,81	0,68	0,45
25	9,7	2,7	7	2,8	0,8	0,69	0,46
26	9,8	2,6	7,1	2,7	0,81	0,7	0,47
27	9,7	2,5	7,2	2,6	0,82	0,69	0,46
28	9,6	2,4	7,3	2,5	0,83	0,68	0,45
29	9,5	2,3	7,4	2,4	0,84	0,67	0,44



2

$$F_o' = 4.6 \text{ кН}, F_o'' = 2.8 \text{ кН};$$

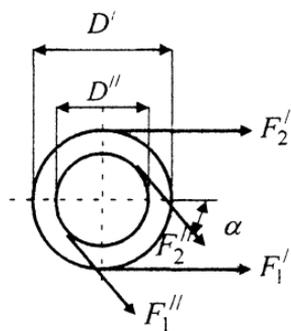
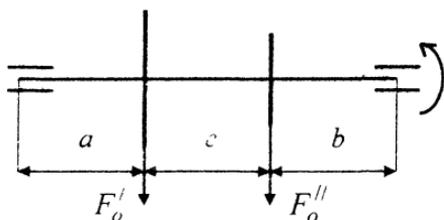
$$D' = 0.8 \text{ м}; D'' = 0.6 \text{ м}; \alpha = 20^\circ.$$



3

$$F_o' = 5.8 \text{ кН}, F_o'' = 3.4 \text{ кН},$$

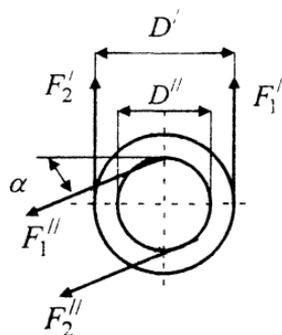
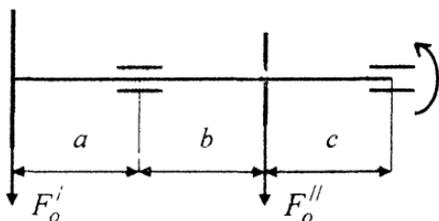
$$D' = 0.82 \text{ м}, D'' = 0.66 \text{ м}, \alpha = 60^\circ.$$



4

$$F_o' = 3.6 \text{ кН}, F_o'' = 3.0 \text{ кН}.$$

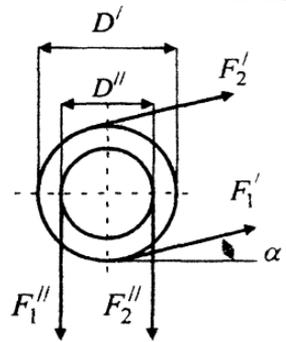
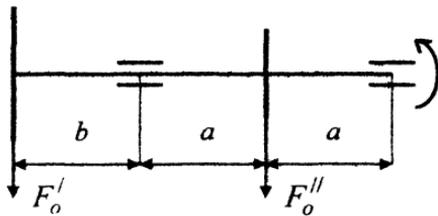
$$D' = 0.8 \text{ м}, D'' = 0.7 \text{ м}, \alpha = 65^\circ.$$



5

$$F_o' = 3,0 \text{ кН}; F_o'' = 2,4 \text{ кН};$$

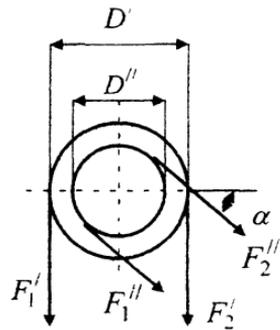
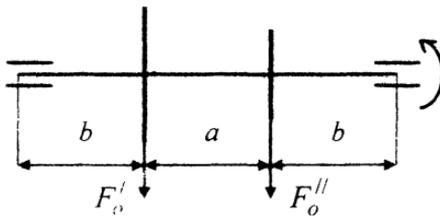
$$D' = 0,5 \text{ м}; D'' = 0,4 \text{ м}; \alpha = 80^\circ.$$



6

$$F_o' = 3,3 \text{ кН}; F_o'' = 2,4 \text{ кН};$$

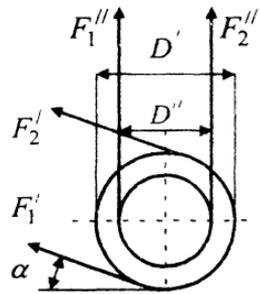
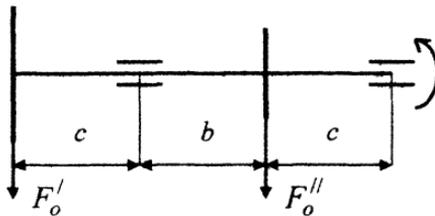
$$D' = 0,6 \text{ м}; D'' = 0,4 \text{ м}; \alpha = 20^\circ.$$



7

$$F_o' = 4,6 \text{ кН}; F_o'' = 2,2 \text{ кН};$$

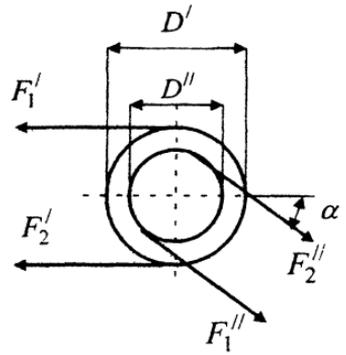
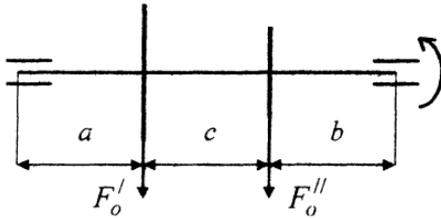
$$D' = 0,7 \text{ м}; D'' = 0,36 \text{ м}; \alpha = 35^\circ.$$



8

$$F_o^I = 5,2 \text{ кН}, F_o^{II} = 2,8 \text{ кН};$$

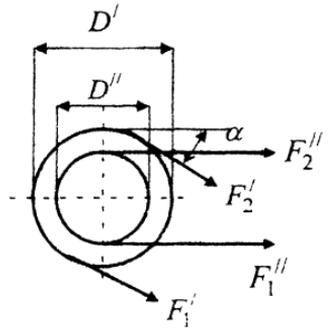
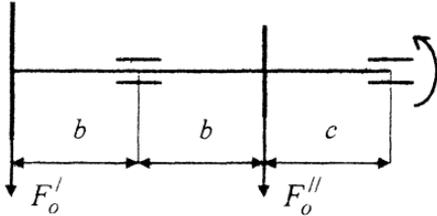
$$D' = 0,6 \text{ м}, D'' = 0,44 \text{ м}; \alpha = 70^\circ.$$



9

$$F_o^I = 5 \text{ кН}, F_o^{II} = 4,4 \text{ кН};$$

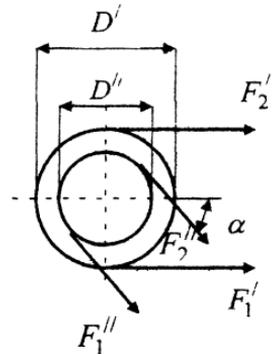
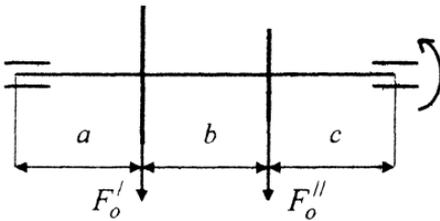
$$D' = 0,7 \text{ м}; D'' = 0,5 \text{ м}; \alpha = 60^\circ$$



10

$$F_o^I = 4,5 \text{ кН}, F_o^{II} = 2,0 \text{ кН};$$

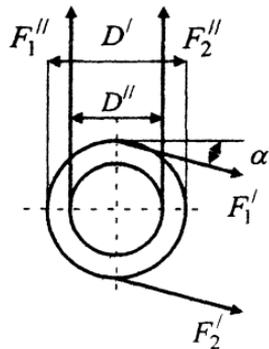
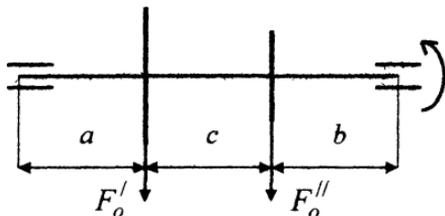
$$D = 0,6 \text{ м}, D'' = 0,4 \text{ м}, \alpha = 24^\circ$$



11

$$F_o' = 4,2 \text{ кН}; F_o'' = 3,4 \text{ кН};$$

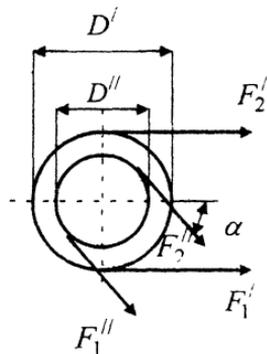
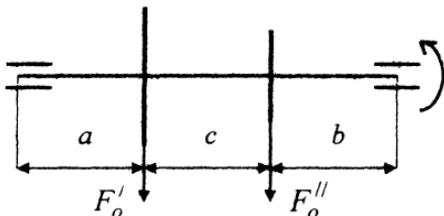
$$D' = 0,58 \text{ м}; D'' = 0,42 \text{ м}; \alpha = 45^\circ.$$



12

$$F_o' = 5,8 \text{ кН}; F_o'' = 3,4 \text{ кН};$$

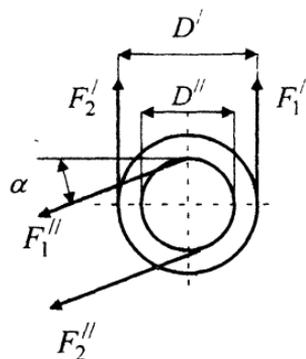
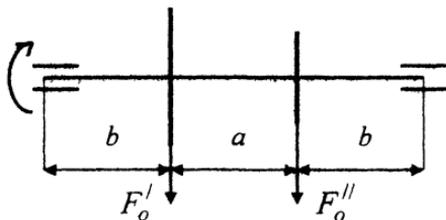
$$D' = 0,82 \text{ м}; D'' = 0,66 \text{ м}; \alpha = 60^\circ.$$



13

$$F_o' = 4,2 \text{ кН}; F_o'' = 3,4 \text{ кН};$$

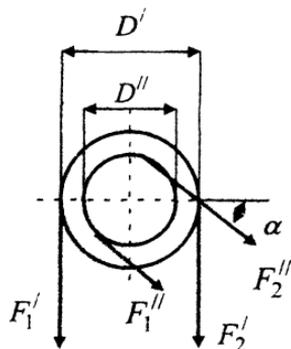
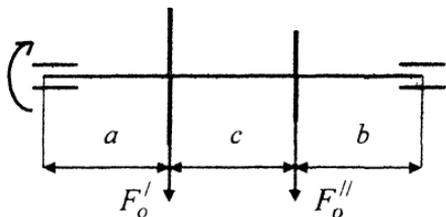
$$D' = 0,6 \text{ м}; D'' = 0,5 \text{ м}; \alpha = 50^\circ.$$



14

$$F_o' = 4,8 \text{ кН}; F_o'' = 3,2 \text{ кН};$$

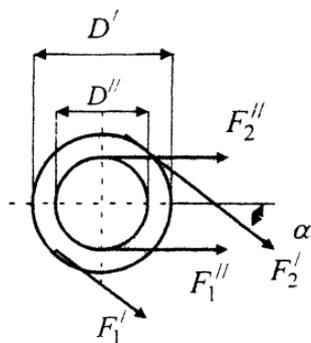
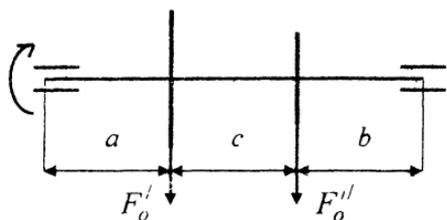
$$D' = 0,65 \text{ м}; D'' = 0,44 \text{ м}; \alpha = 30^\circ.$$



15

$$F_o' = 4,2 \text{ кН}; F_o'' = 3 \text{ кН};$$

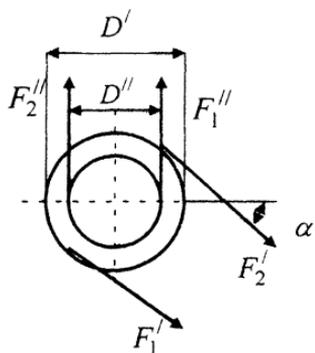
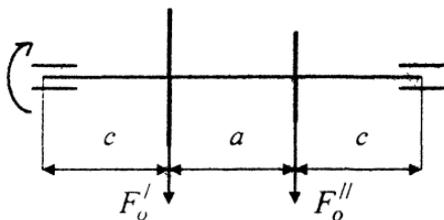
$$D' = 0,6 \text{ м}; D'' = 0,5 \text{ м}; \alpha = 55^\circ.$$



16

$$F_o' = 4,4 \text{ кН}; F_o'' = 2 \text{ кН},$$

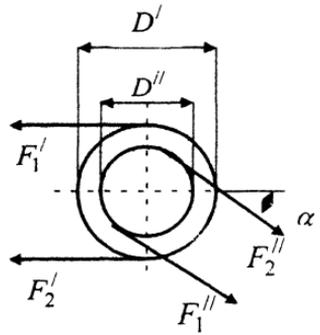
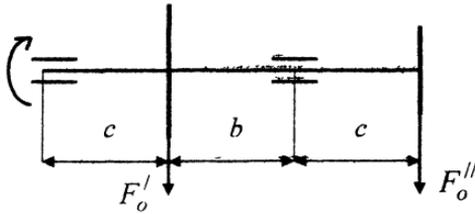
$$D' = 0,6 \text{ м}; D'' = 0,4 \text{ м}; \alpha = 40^\circ.$$



17

$$F_o' = 5 \text{ кН}; F_o'' = 2,5 \text{ кН};$$

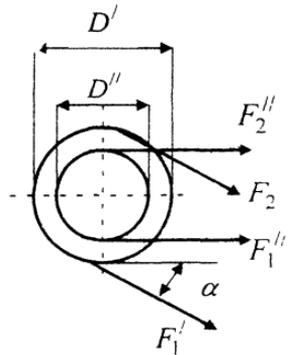
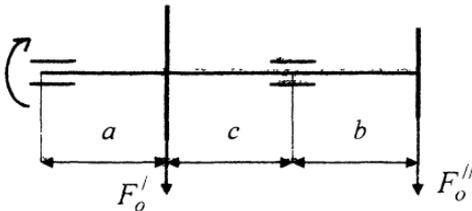
$$D' = 0,9 \text{ м}; D'' = 0,5 \text{ м}; \alpha = 60^\circ.$$



18

$$F_o' = 3,4 \text{ кН}; F_o'' = 3 \text{ кН};$$

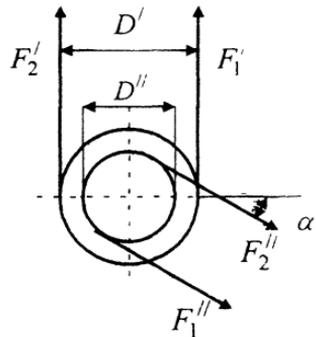
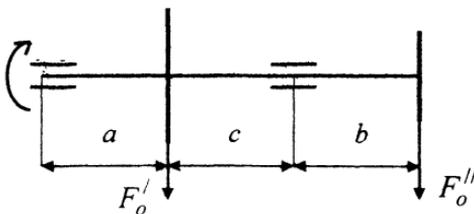
$$D' = 0,5 \text{ м}; D'' = 0,4 \text{ м}; \alpha = 25^\circ$$



19

$$F_o' = 4,6 \text{ кН}; F_o'' = 3,5 \text{ кН},$$

$$D' = 0,5 \text{ м}; D'' = 0,3 \text{ м}; \alpha = 38^\circ.$$



Учебное издание

Вячеслав Петрович Багмутов
Наталья Юрьевна Полозенко

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Учебное пособие

Редактор А. К. Саютина

Темплан 2005 г. Поз. № 55

Лицензия ИД № 04790 от 18.05.2001.

Подписано в печать 16.02.2005. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,42.

Тираж 200 экз. Заказ 88

Волгоградский государственный технический университет.
400131 Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28.

РПК «Политехник»
Волгоградского государственного технического университета.
400131 Волгоград, ул. Советская, 35.