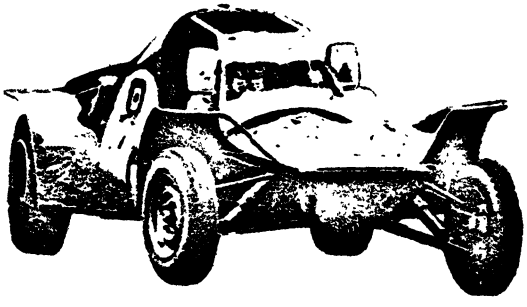
В.П. Багмутов, С.Н. Паршев

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ



Волгоград 1997

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.П.Багмутов, С.Н.Паршев

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Волгоград 1997

УДК 539.3

Багмутов В.П., Паршев С.Н. Энергетические методы расчета упругих систем: Учеб. пособие /ВолгГТУ, Волгоград, 1997. - 41 с.

ISBN 5-230-03704-0

Содержит основополагающие элементы теории по теме "Энергетические методы расчета упругих систем", планы решения статически определимых и неопределимых систем, примеры решения типовых задач, а также справки по истории науки о сопротивлении материалов.

Предназначено для студентов дневной и вечерней форм обучения, изучающих курс сопротивления материалов. Может быть использовано при решении соответствующей расчетно - проектировочной работы по курсу "Сопротивление материалов"

Ил. 22. Библиогр.: 5 назв.

Рецензенты: д-р техн.наук, проф. Шапочкин В.И., канд.техн.наук Храпов А.А.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5-230-03704-0

© Волгоградский государственный технический университет, 1997

ЦЕЛЬ И ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Цель работы: выполнение расчетов на прочность и жесткость статически определимых и неопределимых плоских балочно-рамных систем на основе энергетического метода (метода сил).

Работа предусматривает: определение линейных и угловых перемещений выделенных сечений конструкции и оценку влияния "лишних" связей на жесткость статически неопределимой системы;

проведение проверочного расчета на прочность статически неопределимой системы.

Замечание: выполнение учебно-исследовательской работы (УИРС) по оптимизации конструкции в свете выбранного критерия оптимальности осуществляется в рамках индивидуального задания на базе данных расчетно-проектировочных задач.

При любой постановке задачи отчет должен содержать решение по определению перемещений и внутренних усилий в общем (буквенном) виде и в форме, удобной для реализации на ЭВМ.

Ниже рассмотрены стратегия выполнения расчетно-проектировочного задания с дальнейшей более подробной расшифровкой планов решения в тексте пособия на базе соответствующего теоретического материала.

План решения статически определимой задачи

1. Освободить конструкцию от внешней нагрузки и загрузить ее "единичной силой" в заданном сечении в соответствии с искомым перемещением **(система в единичном состоянии "1")**.

> Каждому виду такой нагрузки соответствует свое перемещение, на котором она производит работу. Сосредоточенной единичной силе соответствует линейное перемещение по направлению ее действия; сосредоточенному единичному моменту - угловое перемещение или угол поворота сечения, в котором приложен момент.

2. Для заданной расчетной схемы (**системы в грузовом или действительном состоянии "Р"**) и для системы в единичном состоянии "1") выделить по единой методике участки, провести мысленные сечения в пределах каждого из них и закоординировать их наиболее целесообразным образом (например, используя локальные системы координат).

3. На каждом участке расчетных схем "Р" и"1" записать выражения для определения необходимых внутренних усилий, отмечаемых соответственно индексами "р" и "1" (для плоских балочно-рамных систем преимущественно изгибающих моментов M_p и M_1, при их отсутствии - продольных сил N_p и N_1.

> Целесообразность использования реакций в состояниях "Р" и "1" определяется в каждой конкретной задаче.

4. Составить **интегралы Максвелла-Мора**, произвести интегрирование в пределах длины каждого участка и результаты интегрирования суммировать по всем участкам заданной систем .

5. По знаку результата интегрирования и направлению действия единичной силы определить направление искомого перемещения действительной системы.

План решения статически неопределимой задачи

1. Определить степень статической неопределимости и количество **"лишних" (избыточных)** связей.

2. Освободить конструкцию от лишних связей и образовать **основую систему**, которая должна быть статически определимой и кинематически неизменяемой.

3. Нарисовать расчетные схемы для основной системы в грузовом состоянии "Р" (при загрузке основной системы, заданной внешней нагрузкой) и в m единичных состояниях "1", "2",.."m" (при загрузке основной системы единичными силовыми факторами - единичными силами и единичными моментами, соответствующими по характеру и направлению действия "лишним неизвестным", выявленным при отбрасывании "лишних" связей).

> Основных систем может быть несколько. Выбирается наиболее удобная для расчета.

4. Для всех расчетных схем единым и наиболее целесообразным способом выделить участки, провести и закоординировать мысленные сечения.

5. На каждом участке расчетных схем для состояний "Р", "1"...."m" записать выражения для нужных внутренних усилий.

6. Составить и взять интегралы Максвелла-Мора для определения коэффициентов при лишних неизвестных X_1, X_2,... X_m и свободных членов канонических уравнений метода сил с учетом интегрирования по всем участкам основной системы.

Замечания: с точки зрения составления интегралов Максвелла-Мора пункты 3-6 рассматриваемого плана аналогичны пунктам 1-4 плана решения статически определимой задачи. Новое здесь то, что при этом "перемножаются" не только грузовые и вспомогательные эпюры внутренних силовых факторов, но и вспомогательные эпюры между собой.

7. Решить систему из "m" канонических уравнений метода сил и найти искомые силовые факторы X_1, X_2,... X_m как по величине, так и по направлению.

8. Нарисовать эквивалентную систему, для чего загрузить основную систему не только заданными внешним силами, но и найденными силовыми факторами X_1, X_2,... X_m, приложенными в местах отбрасывания "избыточных" связей.

9. Поскольку эквивалентная система - статически определимая система, то дальнейший ход решения по определению перемещений заданных сечений статически неопределимой системы проводится в соответствии с пунктами 1-5 плана решения статически определимой задачи.

Эквивалентность системы означает, что перемещения сечений, в которых располагались "лишние" связи, по направлению этих связей будут равны соответствующим перемещениям в заданной системе.

10. Для эквивалентной системы построить эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил и произвести проверку прочности заданной статически неопределимой рамно-балочной конструкции.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА СИЛ

Принцип возможных перемещений

При деформации упругое тело накапливает энергию деформации U за счет работы внешних сил A. Пусть упругие смещения точек тела получили **вариации (возможные бесконечно малые перемещения)**, совместимые с геометрическими связями. В результате вариации произойдет работа внешних сил и изменится потенциальная энергия деформации.

Принцип возможных перемещений применительно к деформируемому телу трактуется следующим образом: возможная работа внешних сил

dA равна приращению потенциальной энергии деформации dU:

$$dU = dA \qquad (1.1)$$

Этот принцип можно записать в форме **вариационного уравнения Лагранжа***):

$$d\Pi = d(U - A) = 0, \qquad (1.2)$$

где $\Pi = U - A$ называется потенциальной энергией системы.
На основе принципа возможных перемещений формируется ряд важных энергетических теорем в механике деформируемого твердого тела.

Пусть на систему действует некоторое множество n внешних сосредоточенных сил и моментов, обозначенных как Q_1, Q_2 ... Q_n. В дальнейшем для удобства Q_i будем называть i-ой **обобщенной силой**. Тогда δ_i - **обобщенное перемещение**, соответствующее обобщенной силе Q_i.

---

*) Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Jos Louis) (1736-1813) родился в Турине. В 19 лет стал профессором математики в Королевской артиллерийской школе в Турине. В 1759 г. написал несколько первых мемуаров, вошедших в его труд по вариационному исчислению. В 1765 г. подготовил знаменитую "Аналитическую механику" (напечатана в Париже в 1788 г., сто лет спустя после того, как вышли в свет "Начала" Ньютона). В ней, пользуясь принципом Даламбера и началом возможных перемещений, он ввел понятия "обобщенных координат" и "обобщенных сил" и свел теорию механики к некоторым общим уравнениям. В науке о сопротивлении материалов он написал мемуар "О форме колонны", где продолжил исследования Эйлера продольного изгиба стержней.

Для сосредоточенной силы δ_i - перемещение точки ее приложения по направлению силы Q_i; для момента Q_j - δ_j - поворот сечения по направлению его действия (рис 1.1):

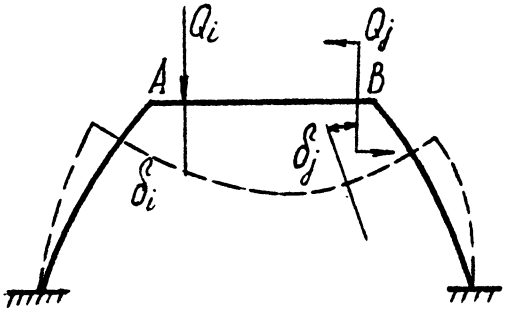


Рис. 1.1

Закон Гука, записанный через внешние силы и перемещения (т.е. во внешних формах) выглядит так:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} Q_j \ , j = 1,2,\ldots,n \ . \qquad (1.3)$$

Коэффициенты δ_{ij} при Q_i называются единичными перемещениями или податливостями.

δ_{ij} - перемещение сечения по направлению i от обобщенной единичной силы, приложенной по направлению j (рис. 1.2).

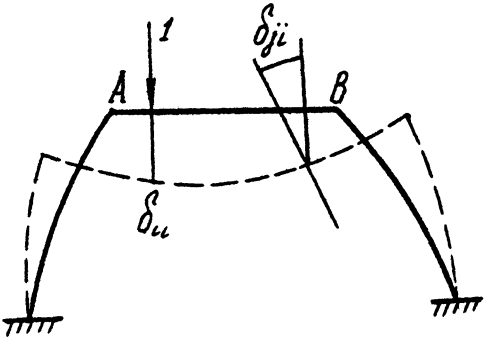


Рис. 1.2

Решив систему (1.3) относительно Q_j, получаем обратную по отношению к прямой (1.3) форму записи закона Гука

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ji}\delta_i \ , \ j = 1,2,\ldots,n \ , \qquad (1.4)$$

где C_{ji} - жесткость системы по направлению j от единичного перемещения по направлению i; $C_{ji} = A_{ji}/\Delta$, Δ - определитель системы линейных уравнений (1.3), A_{ji} - алгебраическое дополнение элемента δ_{ji} этого определителя.

Используя понятия обобщенных сил Q_i и обобщенных перемещений δ_i, возможную работу dA системы $\{Q_i\}$ на соответсвующих возможных бесконечно малых перемещениях $\{d\delta_i\}$ можно записать как

$$dA = \sum_{i=1}^{n} Q_i d\delta_i \quad . \qquad (1.5)$$

При определении возможной работы значения и направления внешних нагрузок считаются неизменными (множитель 1/2 отсутствует). Учитывается вариация $d\delta_i$ только обобщенных перемещений.

Тогда на основании принципа возможных перемещений (1.1) дифференциал потенциальной энергии деформации dU с учетом (1.5) равен

$$dU = \sum_{i=1}^{n} Q_i d\delta_i \ . \qquad (1.6)$$

Теорема Лагранжа

Исходя из закона Гука (1.4) и выражения (1.6), потенциальная энергия деформации U есть функция обобщенных координат δ_i:

$$U = U(\delta_1, \ \delta_2, \ldots \delta_n) \qquad (1.7)$$

и обладает полным дифференциалом, который можно представить так:

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i . \qquad (1.8)$$

Из сопоставления (1.6), (1.8) следует

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = Q_i} \ , \ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) выражает **теорему Лагранжа:** частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенному перемещению равна соответствующей обобщенной силе.

Докажем на основе теоремы Лагранжа симметрию жесткостей ($c_{ji} = c_{ij}$), для чего в (1.9) заменим правую часть выражением (1.4)

$\frac{U}{\delta_i} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot \delta_j$, а затем дополнительно продифференцируем по δ_j:

$\frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = c_{ij}$. Известно, что $\frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_j \partial \delta_i}$, откуда следует

$$\boxed{c_{ij} = c_{ji}} \qquad (1.10)$$

Теорема Кастильяно *)

Преобразуем выражение (1.6), используя закон Гука в форме (1.4) и симметрию жесткостей (1.10). Тогда

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\delta_j\right) d\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji} d\delta_i\right) \delta_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j dQ_j \quad \text{или}$$

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \delta_i dQ_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_j dQ_j \qquad (1.11)$$

Так как из выражений (1.3), (1.11) следует, что потенциальная энергия деформации U есть функция независимых обобщенных сил Q_i:

$$U = U(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \qquad (1.12)$$

и обладает дифференциалом, который можно записать как

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i, \qquad (1.13)$$

то из сопоставления (1.11) и (1.13) получаем

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \delta_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (1.14)$$

Формула (1.14) выражает **теорему Кастильяно**: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна соответствующему этой силе обобщенному перемещению.

---

*) Кастильяно Альберто (Castigliano Alberto) (1847-1884) родился в Асти (Италия). Будучи студентом Туринского политехнического института выполнил там выдающиеся исследования по теории сооружений. Представленная им в 1873 г. научная работа на соискание звания инженера этого политехникума содержит формулировку его знаменитой теоремы вместе с некоторыми приложениями ее в теории сооружений (этот труд опубликован в 1875 г.).

Докажем на основе теоремы Кастильяно взаимность единичных перемещений или симметрию податливостей ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$), для чего заменим правую часть (1.14) выражением (1.3), т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dQ_j ,$$

а затем дополнительно продифференцируем по Q_j:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j} = \delta_{ij} . \quad \text{Так как} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_j \partial Q_i} \quad \text{, то}$$

$$\boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}} \qquad (1.15)$$

Выражение потенциальной энергии деформации системы через внутренние силовые факторы

В общем случае деформации бруса в его поперечном сечении возникает шесть внутренних силовых факторов: продольная сила N, два изгибающих момента M_z, M_y, крутящий момент M_k и две поперечные силы Q_y, Q_z. Так как каждый внутренний силовой фактор будет совершать работу только на собственном или соответствующем перемещении, то потенциальная энергия деформации элемента бруса объемом dV и длиной dS будет определяться суммой потенциальных энергий деформации, определяемых при действии на элемент каждого внутреннего силового фактора **отдельно**:

$$dU = dU(M_z) + dU(M_y) + dU(M_k) + dU(N) + dU(Q_y) + dU(Q_z). \quad (1.16)$$

С учетом известных выражений для определения потенциальной энергии деформации от каждого внутреннего силового фактора имеем:

$$dU = \frac{1}{2}\left(\frac{M_z^2}{EJ_z} + \frac{M_y^2}{EJ_x} + \frac{M_k^2}{GJ_k} + \frac{N}{EA} + k_y\frac{Q_y^2}{GA} + k_z\frac{Q_z^2}{GA} \right) dS \quad , \qquad (1.17)$$

где dS - длина дуги, проходящей через центры тяжести сечения элемента бруса;

E, G - модули нормальной и сдвиговой упругости материала бруса;

J_z, J_y - осевые моменты инерции относительно осей z и y;

J_k - полярный момент инерции сечения бруса;

A - площадь поперечного сечения бруса;

k_y, k_z - безразмерные коэффициенты, зависящие только от формы бруса:

$$k_y = \frac{A}{J_z^2}\int_A \left(\frac{S_z^{отс}}{b_y}\right)^2 dA , \qquad k_z = \frac{A}{J_y^2}\int_A \left(\frac{S_y^{отс}}{b_z}\right)^2 dA ;$$

h - высота сечения бруса; b_y - ширина сечения на расстоянии y от центра его тяжести, аналогично b_z

$S_z^{отс}$, $S_y^{отс}$ - статические моменты части сечения относительно осей z и y.

Если k - число участков системы брусьев, составляющих расчетную схему, S_i - длина i-го участка, то энергия деформации всей системы U определяется путем интегрирования выражения (1.17) по всей длине участков системы:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int\left(\frac{M_z^2}{EJ_z} + \frac{M_y^2}{EJ_x} + \frac{M_k^2}{GJ_k} + \frac{N}{EA} + k_y\frac{Q_y^2}{GA} + k_z\frac{Q_z^2}{GA}\right) dS. \quad (1.18)$$

Метод "нулевой силы" и формула Мора для определения перемещений по заданному направлению

Пусть требуется определить перемещение сечения C системы по направлению v (рис. 1.3). Недостаток теоремы Кастильяно состоит в том, что она пригодна для определения перемещений только тех сечений, в которых приложены обобщенные силы по направлению этих сил. Чтобы избежать этого недостатка Кастильяно предложил помимо внешних обобщенных сил, действующих на систему, приложить в том сечении, в котором ищется перемещение, обобщенную фиктивную силу Φ по направлению искомого перемещения . Тогда более широкая формульная трактовка теоремы Кастильяно (1.14) выглядит следующим образом:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \delta_v . \qquad (1.19)$$

В (1.19) после проведения дифференцирования добавочную силу Ф нужно приравнять нулю. При таком подходе, составляющем метод так называемой **"нулевой или фиктивной силы"**, потенциальная энергия системы должна определяться с учетом внутренних силовых факторов, возникающих под действием фиктивной силы Ф в сечениях на всех участках системы. В современной трактовке эти дополнительные внутренние силовые факторы можно выразить как функции от единичной силы, приложенной в том ее сечении и в том направлении, что и сила Ф. Это позволяет сразу перейти от метода "нулевой силы" Кастельяно к другому методу, а именно, методу Максвелла-Мора*), иначе **методу "единичной силы"**.

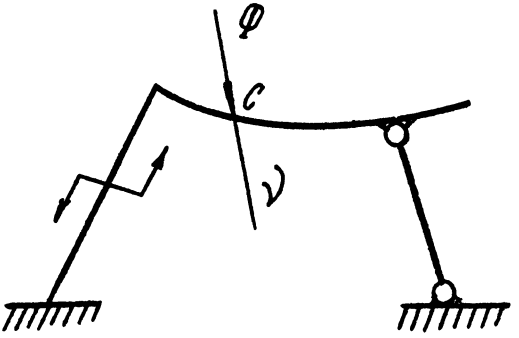


Рис. 1.3

---

*) Мор Отто (Mohr Otto) (1835-1918) родился в Весельбурге (Гольштейн). Шестнадцати лет поступил в Ганноверский политехнический институт. В 32 года он пользовался уже широкой известностью как инженер-строитель и ученый и получил приглашение на пост профессора инженерной механики Штутгардского политехникума, а через 5 лет и Дрезденского политехникума. Его вклад в сопротивление материалов весьма значителен, в частности, в вопросах теории прочности; особенно в теории сооружений. Наряду с Максвеллом он разработал и внедрил метод "единичной" силы, показав его практическую ценность.

Максвелл Джеймс Клэрк (Maxwell J.C.) (1831-1879) родился в Эдинбурге. Шестнадцати лет он поступает в Эдинбургский университет и через три года читает доклад в Эдинбургском королевском обществе "О равновесии упругих тел", где выводит уравнения равновесия упругих тел, используя две упругие константы и излагает технику оптического метода анализа напряжений. С 1850 года он продолжает образование в Кембридже. Область его научных интересов весьма широка, в частности, с его именем связана разработка ряда методов и решение задач в теории упругости, сопротивлении материалов. Максвелл дал другой метод определения перемещений узлов формы (раньше чем Кастильяно). В иной интерпретации его метод был вторично открыт и внедрен в практику расчетов Мором.

Ита , при совместном действии внешних сил и фиктивной силы Ф, обобщая выражение (1.18), получаем:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{S_i}\left(\frac{(M_{zp} + M_{z1}\Phi)^2}{EJ_z} + \frac{(M_{yp} + M_{y1}\Phi)^2}{EJ_y} + \frac{(M_{kp} + M_{k1}\Phi)^2}{EJ_z} + \right.$$

$$\left. + \frac{(N_p + N_1\Phi)^2}{EA} + k_y\frac{(Q_{yp} + Q_{y1}\Phi)^2}{GA} + k_z\frac{(Q_{zp} + Q_{z1}\Phi)^2}{GA}\right)ds. \quad (1.20)$$

Здесь и далее индекс "р" связан с действием внешних обобщенных сил, индекс "1" - с действием единичной силы, ориентированной по месту и направлению действия фиктивной силы Ф, т.е. $M_{z1}...Q_{z1}$ - внутренние силовые факторы в текущем сечении i-го участка системы от действия на нее **единичной обобщенной силы** . После применения формулы (1.19), получаем **формулу Максвелла-Мора** для определения обобщенного перемещения сечения системы по заданному направлению v:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k}\int_{S_i}\left(\frac{M_{zp}\,M_{z1}}{EJ_z} + ... + k_z\frac{Q_{zp}\,Q_{z1}}{GA}\right)ds\ . \quad (1.21)$$

Необходимо помнить, что при определении внутренних усилий как N, M, M_k, Q, так и N_1, M_1, M_{k1}, Q_1 в общем требуется первоначально определить реакции, возникающие, соответственно, от действия внешних сил и "единичной" обобщенной силы, используя отдельно системы, нагруженные внешними силами и "единичной" силой. При этом вся система разбивается на участки и записываются выражения внутренних усилий для произвольных (текущих) сечений каждого участка, которые отмечаются соответствующей координатой (например, x или α). Заметим, что целесообразность использования реакций в состояниях "Р" и "1" определяется в каждой конкретной задаче.

Определение однотипных внутренних силовых факторов в грузовом и единичных состояниях, например, M_{zp}, M_{z1} или M_{kp}, M_{k1} и других, должно производиться по одному и тому же правилу знаков, принятому для соответствующих внутренних факторов на **данном участке**.

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ МАКСВЕЛЛА - МОРА

2.1. Частные случаи применения формулы Максвелла - Мора к различным типам систем

Шарнирно - стержневые системы. Внутренние усилия в элементах этих систем приводятся только к продольным (осевым) усилиям. Если расчет производится без учета собственного веса ($N = const$), то формула (1.21) примет более простой вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_p N_1 l}{EF}, \qquad (2.1)$$

где δ - линейное перемещение; l - длина отдельных участков системы.

Кручение призматических стержней. Для случая чистого кручения ($M_k = const$, остальные внутренние факторы равны нулю) угол закручивания φ_k определяется по формуле

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{M_{kp} M_{k1}\, dx}{GJ_k}. \qquad (2.2)$$

Балочно - рамные системы. Для плоских систем $M_k = 0$, а влияние N и Q на деформацию таких систем обычно мало. Поэтому, пренебрегая в формуле (1.21) влиянием продольных и поперечных сил, получим формулу для обобщенного перемещения от изгибающего момента M:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \int_0^l \frac{M_p M_1\, dx}{EJ}. \qquad (2.3)$$

Здесь δ может быть линейным (прогиб) или угловым (угол поворота сечения) перемещениями. Здесь и далее индексы изгибающего момента M (M_z или M_y) и осевого момента инерции J (J_z или J_y) согласованы (см. формулу (1.20) и поэтому опущены).

Для пространственных систем может иметь место $M_k \neq 0$, тогда (при $M_k = const$) получим:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \frac{M_{kp} M_{k1}\, dx}{GJ_k} \sum_{i=1}^{k} \int_0^l \frac{M_{zp} M_{z1}\, dx}{EJ_z} + \sum_{i=1}^{k} \int_0^l \frac{M_{yp} M_{y1}\, dx}{EJ_y}. \qquad (2.4)$$

Здесь δ может определять в зависимости от вида приложенной обобщенной единичной силы: прогиб, угол поворота сечения или угол закручивания.

Кривые брусья. Для плоских стержневых систем, состоящих из брусьев малой кривизны (для которых отношение радиуса кривизны геометрической оси к высоте поперечного ечения не менее десяти), возникающие в поперечных сечениях кривого бруса продольное усилие и перерезывающая сила оказывают незначительное влияние на его деформацию. Поэтому этими усилиями обычно пренебрегают при определении деформации кривого бруса и обобщенное перемещение (линейное или угловое) определяется с учетом только изгибающего момента M:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \int_0^s \frac{M_p M_1 ds}{EJ}, \qquad (2.5)$$

где $ds = \rho d\alpha$ (ρ и α - полярные координаты).

Если геометрическая ось кривого бруса очерчена по дуге окружности, то, очевидно, $\rho = const$. Интегрирование ведется в пределах изменения полярного угла для каждого из участков.

Формулу (2.5) можно переписать в виде

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \int_0^\alpha \frac{M_p M_1 \rho \, d\alpha}{EJ} \qquad (2.6)$$

и при $\rho = const$

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \rho \int_0^\alpha \frac{M_p M_1 d\alpha}{EJ}. \qquad (2.7)$$

2.2. Способ "перемножения" эпюр (способ Верещагина)

При определении перемещений в упругих системах с прямолинейны-

ми геометрическими осями (балки, рамы) интегралы Максвелла-Мора можно вычислять не только аналитически, но и графоаналитически, применяя способ "перемножения эпюр" (способ Верещагина А.К.*), что в ряде случаев может оказаться более простым.

Вычисление перемещений производится по формуле

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_M \cdot M_{1c}}{EJ}, \qquad (2.8)$$

где ω_M - площадь эпюры M_p, которая может иметь произвольное очертание (рис. 2.1);

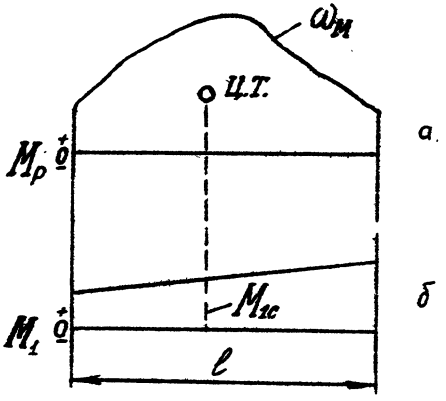


Рис. 2.1. Схема эпюр изгибающих моментов от заданных сил (а) и от единичной силы (б)

---

*) Андрей Константинович Верещагин (1896-1959) - талантливый советский ученый и изобретатель. Его имя широко известно, главным образом, в связи с наглядным способом вычисления интеграла Мора, который он предложил в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта. Он внес также большой вклад в развитие военной техники.

M_{1c} - ордината эпюры M_1, расположенная под центром тяжести эпюры M_p. Эпюра M_1 обязательно должна иметь прямолинейное очертание, что и выполняется во всех случаях при определении перемещений (как линейных, так и угловых) в системах с прямолинейными геометрическими осями; EI - жесткость поперечного сечения при изгибе.

Вычисление ω_M и M_{1c}, а затем перемножение их, производится по всем участкам упругой системы. Очевидно, если очертание эпюры M также является прямолинейным, то формула (2.8) может быть записана в другом виде, а именно:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_{M1} \cdot M_c}{EJ}, \qquad (2.9)$$

т.е. оказывается безразлично по какой эпюре вычисляется площадь ω.

В общем случае расчета упругой системы с прямолинейными участками формула (1.21) примет вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_N \cdot N_{1c}}{EA} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_M \cdot M_{1c}}{EJ} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_{Mk} \cdot M_{k1c}}{GJ_k} + \sum_{i=1}^{k} K \frac{\omega_Q \cdot Q_{1c}}{GA}. \qquad (2.10)$$

Здесь k имеет смысл коэффициентов k_z или k_y, как в формуле (1.17).

При определении перемещений способом Верещагина система разбивается на участки длиной l, в пределах которых:

а) жесткость элементов остается постоянной;

б) очертание эпюры M_1 не терпит изломов и скачков;

в) знак эпюры M (для которой определяется площадь ω), не изменяется. Так для примера, приведенного на рис. 2.2, оказывается необходимым рассмотреть четыре участка, несмотря на то, что сама балка содержит только два участка (рис. 2.2).

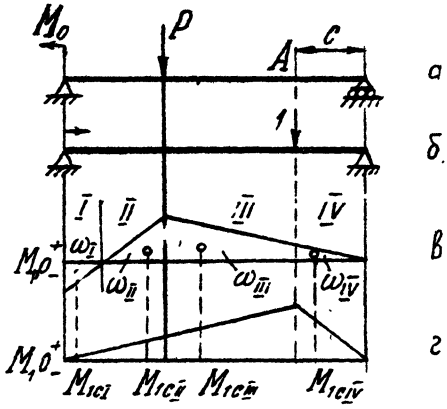


Рис. 2.2. Схема разбивки балки на участки при вычислении интегралов Максвелла-Мора способом Верещагина:
а - схема нагружения балки внешними силами;
б - схема нагружения балки диничной силой;
в - эпюра M_p от заданных сил;
г - эпюра M_1 от единичной силы

Если эпюра, для которой определяется площадь ω, имеет сложное очертание, то в пределах данного участка ее целесообразно расчленить на части (метод расчленения эпюр), для которых можно определить площади и положение центров тяжести.

Ниже приводится пример, иллюстрирующий применение метода расчленения эпюр (рис. 2.3). Площадь трапеции разбивается на две площади: площадь прямоугольника (ω_{M1}) и площадь треугольника (ω_{M2}). Имеем перемножаемые величины:

$$\omega_{MI} \cdot M_{1cII} \quad \text{и} \quad \omega_{MII} \cdot M_{1cI} .$$

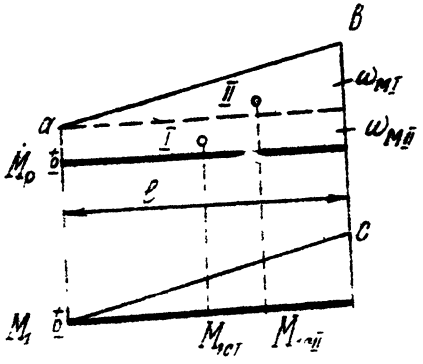
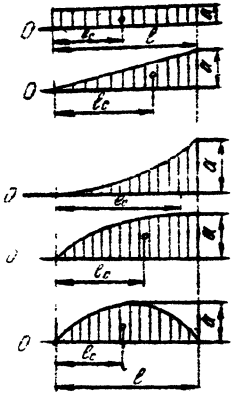


Рис. 2.3. Пример расчленения сложной эпюры на элементарные

С целью удобства последующей проверки, выражения, определяющие площадь эпюры ω, целесообразно ставить в квадратные скобки.

Ниже приводятся данные, необходимые для определения площадей ω и положения центров тяжести l_c часто встречающихся элементарных фигур (рис. 2.4).



$\omega = al$; $l_c = \frac{1}{2}$

$\omega = \frac{al}{2}$; $l_c = \frac{2}{3}\,l$

$\omega = \frac{1}{3}\,al$; $l_c = \frac{3}{4}\,l$

$\omega = \frac{2}{3}\,al$; $l_c = \frac{5}{8}\,l$

$\omega = \frac{2}{3}\,al$; $l_c = \frac{1}{2}\,l$

Рис. 2.4. К определению площадей и центров тяжести некоторых фигур (ω и l_c для случаев (г) и (д) могут быть получены на основании данных случая (в), пользуясь способом расчленения).

Способ перемножения эпюр особенно удобен при решении задач, для которых эпюры M_p и M_1 строятся просто без предварительного трудоемкого определения реакций.

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ СИЛ

3.1. Статически неопределимые системы (понятие и свойства)

Статически неопределимыми называются системы, в которых не все реакции и внутренние силы, определяемые по недеформированному состоянию, могут быть найдены по уравнениям равновесия.

Статически неопределимые системы содержат **лишние (избыточные) связи**, что является их **кинематическим признаком**. Число этих связей, устранение которых превращает систему в статически определимую, называется **степенью статической неопределимости** системы m.

Реакции и внутренние силы в статически неопределимых системах могут быть определены только при использовании наряду с уравнениями равновесия **дополнительных уравнений**, вытекающих из деформированного состояния.

Статически неопределимые системы обладают следующими свойствами.

1. Внутренние силы в статически неопределимой системе зависят от количества и качества (жесткости) лишних связей.

2. Перемещения статически неопределимых систем, как правило, меньше перемещений тех неизменяемых статически определимых систем, из которых они могут быть получены.

3. В статически неопределимых системах возникают дополнительные внутренние силы от изменения температуры.

4. В статически неопределимых системах возникают внутренние силы от смещения опор и от натяжений неточно изготовленных элементов системы.

5. Внутренние силы в статически неопределимых системах от нагрузки зависят от соотношения жесткости сечений стержней, т.е. от соотношения произведений геометрических характеристик сечений стержней на соответствующие модули упругости, а от температуры и осадки опор - от самих величин жесткостей.

6. При удалении лишней связи статически неопределимая система не обязательно теряет равновесие в отличие от статически определимой.

Понятие о методе сил расчета статически неопределимой системы

Основными методами расчета статически неопределимых систем принято считать **метод сил**, когда за неизвестные принимаются силы, и **метод перемещений**, когда за неизвестные принимаются угловые и линейные перемещения узлов системы.

Оба метода объединяются одной общей идеей, состоящей в том, что расчет проводится на **основной системе**, получаемой из данной. В методе сил основная система получается путем исключения всех или части избыточных связей с таким расчетом, чтобы получаемая система была проста и доступна для определения в ней усилий и перемещений изученными ранее методами. Прежде всего такой системой будет статически определимая, но кинематически неизменяемая система. Система называется кинематически (геометрически) неизменяемой, если взаимные перемещения ее точек могут происходить только за счет деформаций.

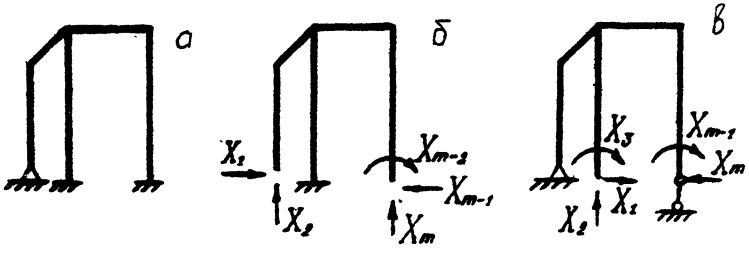


Рис. 3.1

Поскольку в данных условиях различные связи можно считать лишними, то основная система в методе сил не одна, а их может быть несколько, принципиально различных между собой

Исключение из системы только лишних связей должно всегда приводить к системе неизменяемой, а это значит, что основная система в методе сил неизменяема.

Взамен устраняемых связей к основной системе, кроме заданной нагрузки, приводятся **неизвестные реакции** этих связей $x_1, \ldots, x_n$, подлежащие определению, которые называются **основными** неизвестными метода сил. Такая система называется **эквивалентной** (два варианта эквивалентных систем показаны на рис. 3.1, б, в).

Значения реакций $x_1,\ldots,x_m$ должны быть такими, чтобы перемещения по их направлениям в основной системе равнялись бы соответствующим перемещениям системы заданной, где они при **жестких** связях **невозможны**, а при **податливых** связях ограничены. При этих условиях (условиях эквивалентности), эквивалентная система не будет отличаться от системы заданной. Если устраняемые связи **жесткие**, то перемещения по их направлениям в заданной системе равны нулю, что можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} \delta_1(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,\ P) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_m(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,\ P) = 0, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где P - условное изображение внешних нагрузок.

Если устраняемые связи податливые (деформируемые), то перемещения по направлениям в заданной системе не равны нулю и определяются деформациями Δ связей. Тогда

$$\begin{aligned} &\delta_1(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m) = \Delta_1\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta_n(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m) = \Delta_n\ . \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Однако, и в этом случае уравнения (3.1) могут быть использованы, если податливую связь не выбрасывать, а разрезать и неизвестные ее реакции прикладывать в разрезе в виде двух сил. В этом случае перемещением по направлению неизвестного будет взаимное перемещение разрезанных частей связи, а оно всегда равно нулю.

Уравнения (3.1) и (3.2) являются основными уравнениями метода сил, справедливыми для любых стадий работы сооружения и одинаково применимыми для систем, подчиняющихся принципу независимости действия сил и не подчиняющихся ему.

Системам (3.1) или (3.2) можно придать **каноническую** форму, например для (3.2):

$$\delta_i = \delta_{iP} + \delta_{iT} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j = \Delta_i\ ;\ i = 1,\ 2,\ldots,m. \qquad (3.3)$$

Здесь: δ_{iP} - перемещение сечения, в котором приложено лишнее неизвестное x_i по его направлению (т.е. по i-му направлению), в основной системе при ее нагружении заданными (внешними) силами (рассматривается основная система в состоянии "P");

δ_{iT} - перемещение по i-му направлению в основной системе от

изменения температуры:

δ_{ij} - перемещение по i-му направлению в основной системе от единичной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению x_i (на этом этапе решения задачи рассматриваются m единичных состояний основной системы "1", "2",..., "m"). Итак, δ_{ij} - единичные перемещения или податливости; m - степень статической неопределимости заданной системы.

Все перемещения $\delta_{iр}$, $\delta_{iт}$, δ_{ij} определяются через соответствующие интегралы Максвелла - Мора по методике, описанной выше в данном пособии.

Наиболее простой вид приобретают канонические уравнения в форме (3.1) при (Δ_i = 0) без учета изменений температуры ($\delta_{iт}$ = 0).

Определение числа лишних связей основной системы

Положение абсолютно твердого тела определяется в плоскости тремя координатами, т.е. имеет три степени свободы. Следовательно, для его неподвижности относительно системы координат должно как минимум существовать три связи, направления которых не пересекаются в одной точке.

Шарнир, соединяющий два стержня, называется **простым** или одинарным. Он снижает степень статической неопределимости на единицу. Шарнир, соединяющий n стержней, снижает степень статической неопределимости на n-1 единиц, следовательно, такой шарнир можно рассматривать как n-1 простых (одинарных) шарниров. Таким образом, степень m статической неопределимости плоской системы можно определить так.

$$m = 3k - Ш.$$

Здесь k - количество контуров, Ш - число простых шарниров.

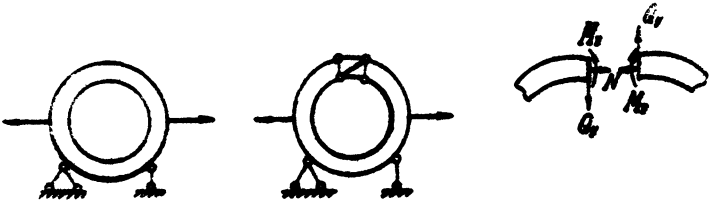


Рис. 3.2

Контуром называется линия, образованная осями элементов и ограничивающая область, в пределах которой отсутствуют осевые линии, соединяющие точки контура.

Бесшарнирный контур на плоскости содержит три **лишние внутренние** связи, т.к. разрез по любому сечению не изменяет его геометрической неизменяемости. Следовательно, в любом его сечении возникает три лишних внутренних усилия (рис. 3.2)

Примеры определения степени статически неопределимой плоской системы.

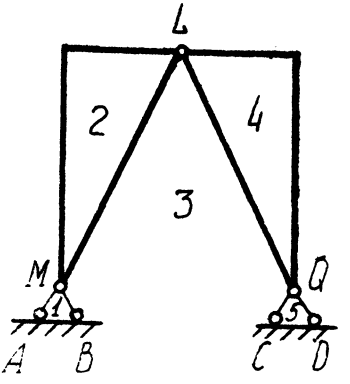


Рис. 3.3

Количество замкнутых контуров k = 5 (номера контуров приведены на рис. 3.3). A, B, C, Д - простые шарниры, M, L, Q - тройные шарниры. Следовательно, всех простых шарниров Ш = 4·1 + 3·3 = 13 и m = 3·5 - 13 = 2.

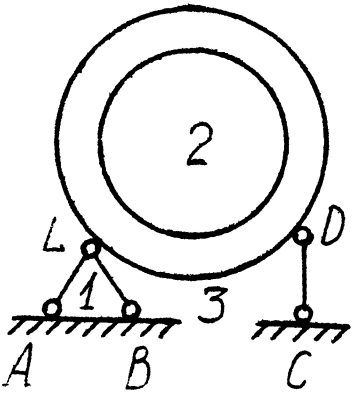


Рис. 3.4

Количество замкнутых контуров k = 3. А, В, С, Д - простые шарниры, L - двойной шарнир. Следовательно, простых шарниров m = 4·1 - 1·2 = 6. m = 3·3 - 6 = 3 (трижды внутренне статически неопределимая система) (рис 3.4).

Замечание. Здесь не рассматриваются мгновенно изменяемые системы, у которых степень статической неопределимости будет больше числа лишних связей, положенных на нее.

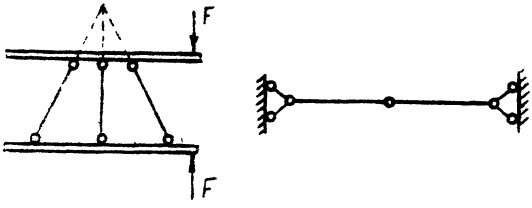


Рис. 2.5

В приведенных примерах мгновенно изменяемых систем нет лишних связей, однако, для определения внутренних усилий приходится рассматривать их деформируемые состояния (рис. 3.5)

3.2. Особенности раскрытия статической неопределимости с помощью канонических уравнений метода сил

Структурный вид канонических уравнений (3.3) не зависит от конкретных особенностей данной статически неопределимой системы, а зависит только от степени статической неопределимости системы. При расчете любой статически неопределимой системы всегда можно составить столько канонических уравнений, сколько раз статически неопределима данная система.

"Раскрепленная" стержневая система получается из заданной статически неопределимой системы путем удаления "лишних" связей. Для одной и той же статически неопределимой системы могут быть выбраны несколько вариантов "раскрепленной" системы. Однако не все возможные варианты раскреплений являются одинаково удачными. От выбора "раскрепленной" системы зависит трудоемкость решения конкретной статически неопределимой задачи.

Для той или иной статически неопределимой системы лучшим является тот вариант "раскрепленной" системы, для которого возможно большее число единичных и грузовых перемещений равно нулю. В этом случае сильно упрощается конечный вид канонических уравнений и сокращается время, необходимое для их решения. Известен ряд приемов, пользуясь которым можно часть единичных перемещений обратить в нуль. Из возможных вариантов "раскрепленной" системы лучшим является тот, для которого протяженность единичных и грузовых эпюр наименьшая, а очертания грузовой эпюры более простое. Для окончательного выбора основной системы нужно рассмотреть несколько ее вариантов и построить для них эпюры от единичных лишних неизвестных и от заданных сил. Для расчета следует принять тот вариант "раскрепленной" системы, для которого проще осуществить перемножение эпюр и большее количество членов δ_{ij} будет равно нулю.

Естественно, что при построении эпюр внутренних усилий, если это необходимо, учитываются реакции на опорах "раскрепленной" системы, вызываемые соответствующими силовыми факторами (заданными

силами или отдельными единичными лишними неизвестными).

Если система m раз статически неопределимая, то для отыскания δ_{ij} и δ_{ip} "раскрепленная" система рассматривается в m+1 вспомогательных состояниях. В одном из этих состояний основная система загружается всеми заданными силами. В остальных состояниях "раскрепленная" система загружается каждой в отдельности единичной лишней неизвестной.

3.3. Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений

Грузовые δ_{ip} и единичные δ_{ij} перемещения в линейно деформируемых системах с прямолинейными и криволинейными геометрическими осями можно определять по формулам

$$\delta_{ip} = \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{M_{zp}M_{zi}ds}{EJ} + \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{M_{kp}M_{ki}ds}{GJ_k} + \ldots + \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{N_{zp}N_{zi}ds}{EA}\ ; \qquad (3.4)$$

$$\delta_{ij} = \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{M_jM_ids}{EJ} + \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{M_{kj}M_{ki}ds}{GJ_k} + \ldots + \sum_{1}^{k}\int_{0}^{s}\frac{N_jpN_ids}{EA}\ . \qquad (3.5)$$

В этих выражениях: M_{zi}, M_{ki}... N_i, (или N_j) - внутренние усилия в произвольных сечениях каждого участка "раскрепленной"системы, возникающие от действия i-ой (или j-ой) единичной лишней неизвестной;

M_{zp}, M_{kp},...N_p, - внутренние усилия в произвольных сечениях каждого участка "раскрепленной" системы, возникающие от действия заданных нагрузок.

Для плоских балочно-рамных конструкций с достаточной точностью перемещения δ_{ip} и δ_{ij} можно определять по формулам:

$$\delta_{ip} = \sum_{i=1}^{n}\int\frac{M_pM_ids}{EJ}\ ; \qquad (3.6)$$

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\int\frac{M_jM_ids}{EJ}\ . \qquad (3.7)$$

Для балочно-рамных систем, для элементов с прямолинейной геометрической осью, вычисление интегралов, входящих в выражения (3.3) и (3.4), можно выполнить и способом Верещагина. Тогда

$$\delta_{ip} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{mp} M_{ic}}{EJ}, \qquad (3.8)$$

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{mj} M_{ic}}{EJ}. \qquad (3.9)$$

При вычислении перемещений δ_{ip} и δ_{ij} суммирование распространяется, как и прежде, на все участки "раскрепленной" системы, а интегрирование ведется в пределах каждого участка. При этом для удобства (чтобы нижний предел интегрирования был равен нулю) положение произвольных сечений в пределах каждого участка определяется от его начала.

Следует заметить, что главные единичные перемещения (δ_{ii} или δ_{jj}) всегда являются положительными величинами, что непосредственно следует из выражений:

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^s \frac{M_i M_i ds}{EJ} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^s \frac{M_i^2 ds}{EJ}.$$

При вычислении единичных перемещений нужно помнить, что в соответствии с (1.16)

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Таким образом, в уравнениях (3.3) часть единичных перемещений оказываются попарно равными, например,

$\delta_{12} = \delta_{21}$; $\delta_{13} = \delta_{31}$; $\delta_{23} = \delta_{32}$ и т.д.

В связи с этим, из общего числа единичных перемещений, входящих в канонические уравнения, непосредственно по формулам (3.4), определяются только часть из них (перемещения δ_{ij}, расположенные по одну сторону от главной диагонали).

Перемещение δ_{ip} имеет размерность длины (L), если i-ой является сосредоточенная сила. Если i-ой лишней неизвестной является изгибающий или крутящий момент, то это перемещение δ_{ip} будет безразмерной величиной (измеряемой в радианах).

Перемещения δ_{ip} имеют размерность грузового перемещения соответствующей строки, деленной на размерность i-ой лишней неизвестной.

3.4 Использование симметрии при расчете статически неопределимых систем

Система называется **прямосимметричной** (симметричной), если она геометрически и физически симметрична и внешние факторы приложенные к ней, симметричны относительно оси геометрической симметрии

Симметричная рама (рис. 3.6, а) имеет три лишние связи. Произвольно выбранный вариант эквивалентной системы, полученный, например, отбрасыванием одной из заделок (рис. 3.6, б), трижды статически неопределим. Для раскрытия статической неопределимости рамы в этом варианте придется составить и решить систему трех канонических уравнений.

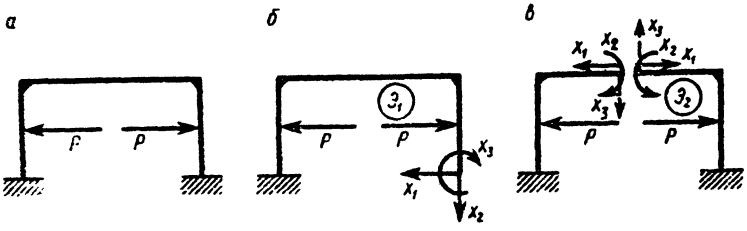


Рис. 3.6

Выберем другой вариант эквивалентной системы, приняв за лишние связи в сечении на оси симметрии (рис. 3.6, в). Уравнения (3.3) для этого варианта требуют, чтобы относительный поворот, относительное перемещение по горизонтали и относительное перемещение по вертикали левой и правой сторон разрезанного сечения равнялись нулю.

Обратносимметричными назовем силы и эпюры, которые, для того,

чтобы они стали симметричны, на одной из половин геометрически симметричной системы надо повернуть вокруг ее оси на 180°.

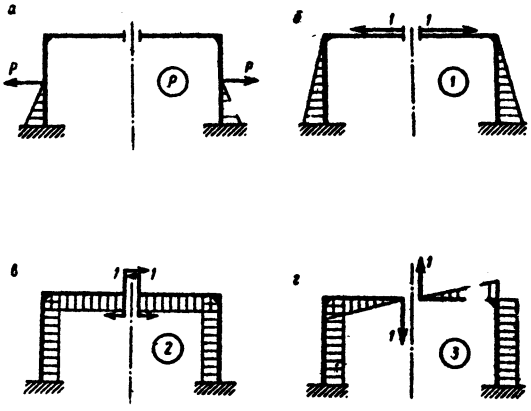


Рис. 3.7

Эпюры P, 1 и 2 (рис. 3.7), построенные на симметричном варианте основной системы от симметричных сил, симметричны, а эпюра 3 (рис. 3.7, г), построенная на этом варианте от обратно смещенных сил, - обратносимметрична. Любое произведение этих эпюр на левой половине системы будет перемещением левой стороны разрезанного сечения, а их произведение на правой половине - перемещением его правой стороны основной системы. Следовательно, сумма этих произведений дает относительное перемещение сторон разрезанного сечения в этой схеме нагружения, т.е. определяет один из коэффициентов или свободных членов уравнений системы (3.3).

Произведение симметричной эпюры на обратносимметричную равно нулю, так как на одной из половин системы оно будет положительным, а на другой таким же абсолютным по величине, но отрицательным. Поэтому

$$\delta_{3P} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0.$$

Система (3.3) распадается на два уравнения с неизвестными x_1

и x_2 и на уравнение с неизвестным x_3:

$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 = 0, \\ \delta_{2p} + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 = 0; \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$\delta_{33}x_3 = 0. \qquad (3.11)$$

В уравнении (3.11) перемещение δ_{33} - главное и нулю никогда не равно, следовательно, $x_3 = 0$.

Рациональный выбор эквивалентной системы позволил упростить решение задачи при раскрытии статической неопределимости рамы методом сил, так как в таком варианте рама дважды статически неопределима и вместо системы уравнений с тремя неизвестными решается система уравнений (3.10) с двумя неизвестными.

Система называется обратносимметричной, если она геометрически симметрична, и внешние факторы, приложенные к ней, обратно симметричны относительно оси геометрической симметрии.

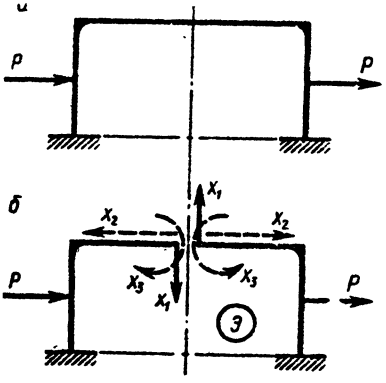


Рис. 3.8

Обратносимметричная рама (рис. 3.8, а) имеет три лишние связи. Выбирая эквивалентную систему, примем за лишние связи в сечении, лежащем на оси геометрической симметрии (рис. 3.8, б).

Эпюры P и 1 будут обратносимметричны, а 2 и 3 симметричны и поэтому

$$\delta_{2p} = \delta_{3p} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = 0.$$

Система уравнений (3.3) распадается на уравнение с неизвестным x_1 и на систему однородных уравнений с неизвестными x_2 и x_3:

$$\delta_{1p} + \delta_{11}x_1 = 0; \qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 &= 0, \\ \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Определитель системы (3.13) нулю никогда не равен, так как $\delta_{22}\delta_{33} \neq (\delta_{23})^2$, поэтому она может иметь для неизвестных только единственное решение

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Следовательно, в варианте эквивалентной системы (рис. 3.8, б) рама один раз статически неопределима и при раскрытии ее статической неопределимости придется решать уравнение (3.12) с одним неизвестным.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 4.1. Для заданной схемы балки (рис. 4.1, Р) при заданных значениях M_o, F, q, a, b, E, I_z определить вертикальное перемещение т. А (Y_A) и угол поворота сечения В (φ_B).

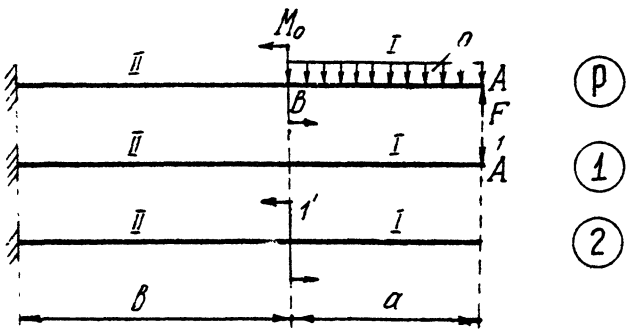


Рис. 4.1

4.1.1. Балка статически определима. Покажем расчетные схемы балки в грузовом "Р" и единичных "1","2" состояниях, т.е. загруженные единичными силовыми факторами в точках, где определяются перемещения (рис. 4.1). Грузовую и единичные схемы разбиваем на два участка.

4.1.2. Запишем выражения для изгибающих моментов от внешних сил и единичных силовых факторов по участкам балки:

I участок $0 \leqslant x \leqslant a$; $M_p = Fx - q\dfrac{x^2}{2}$;

$M_1 = -1 \cdot x$;
$M_2 = 0$;

II участок $0 \leqslant x \leqslant b$;

$M_p = F(a + x) - qa(\dfrac{q}{2} + x) + M_o$;

$M_1 = -1(a + x)$;
$M_2 = 1$;

4.1.3. Определим искомые перемещения с помощью интеграла Мора:

$$Y_A = \sum_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{M_p M_1}{EI_z}\,dx = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^a \left(Fx - q\frac{x^2}{2}\right)(-x)\,dx + \int_0^b [F(a+x) - \right.$$

$$\left. - qa\left(\frac{q}{2} + x\right) + M_0]\,[-(a+x)]\,dx\right];$$

$$\varphi_A = \sum_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{M_p M_2}{EI_z}\,dx = \frac{1}{EI_z}\int_0^b \left[F(a+x) - qa\left(\frac{q}{2} + x\right) + M_0\right]dx.$$

Задача 4.2. Для заданной схемы балки (рис. 4.2, Р), при заданных значениях M_0, F, q, E, I_z, a, b определить Y_C и φ_b.

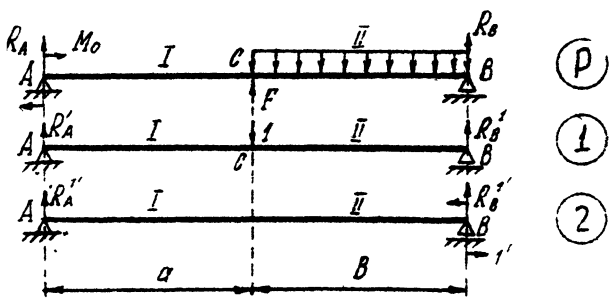


Рис. 4.2

4.2.1. Балка статически определима. Покажем единичные схемы балки (рис. 4.2) и определим опорные реакции от внешних сил R_A и R_B и от единичных силовых факторов R_A^1, R_B^1, $R_A^{1'}$, $R_B^{1'}$, составив необходимые уравнения статики. Для проверки правильности определения реакций необходимо составить проверочные уравнения статики.

4.2.2. Разобьем грузовую и единичные схемы балки на участки и запишем выражения для грузовых и единичных моментов по участкам:

I участок: $0 < x < a$ (начало координат слева):

$M_p = M_o + R_A \cdot x$; $M_1 = R_A^1 \cdot x$; $M_2 = R_A^{1'} \cdot x$;

II участок: $0 < x < b$ (начало координат справа):

$M_p = R_B x - q\frac{x^2}{2}$; $M_1 = R_B^1 \cdot x$; $M_2 = 1 + R_B^{1'} \cdot x$.

4.2.3. Определим искомые перемещения, подставив полученные выражения в интеграл Мора:

$$Y_C = \sum_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{M_p M_1}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^a (M_o + R_A \cdot x)(R_A^1 \cdot x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^b (R_B \cdot x - q\frac{x^2}{2})(R_B^1 \cdot x)] \, dx\right];$$

$$\varphi_B = \sum_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{M_p M_2}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^a (M_o + R_A x)(R_A^{1'} \cdot x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^b (R_B \cdot x - q\frac{x^2}{2})(R_B^1 \cdot x)] \, dx\right].$$

<u>Задача 4.3</u>. Для заданной схемы рамы (рис. 4.3) при заданных значениях M_o, F, q, a, b, E, I_z определить горизонтальное перемещение т. A (x_A) и угловое перемещение т. B (φ_B).

4.3.1. Покажем единичные схемы рамы (рис. 4.3), разбиваем на участки и записываем выражение для грузовых и единичных изгибающих моментов по участкам рамы:

I участок: $0 \leq x < a$:

$M_p = F \cdot x - q\frac{x^2}{2}$; $M_1 = 0$; $M_2 = 1' \cdot x$;

II участок: $0 < x < b$:

$M_p = F \cdot a - q\frac{a^2}{2} - M_o$; $M_1 = 1$; $M_2 = 1' \cdot a$.

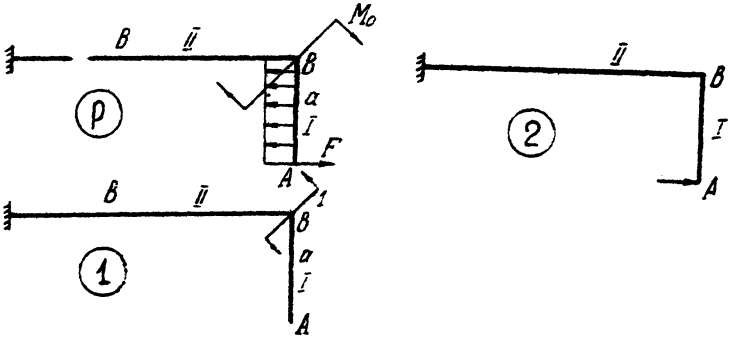


Рис. 4.3

4.3.2. Определим искомые перемещения, подставив полученные выражения для грузовых и единичных изгибающих моментов в интеграл Мора.

$$\varphi_B = \sum_{i=1}^{K} \int_0^x \frac{M_p M_1}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^b (F \cdot a - q\frac{a^2}{2} - M_o) dx \right];$$

$$x_A = \sum_{i=1}^{K} \int_0^x \frac{M_p M_2}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^a (F \cdot x - q\frac{x^2}{2}) (x) dx + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^b (F \cdot a - q\frac{a^2}{2} - M_o) a \, dx \right] \right].$$

Задача 4.4. Для заданной схемы рамы (рис. 4.4, а) при заданных значениях M_o, q, l, h раскрыть статическую неопределимость системы.

4.4.1 Задача дважды статически неопределима.

За лишние неизвестные принимаем

$R_A^y = X_1$,

$R_A^x = X_2$.

Эквивалентная схема в этом случае имеет вид, показанный на рис. 4, б, а единичные схемы - на рис. 4, в и 4, г (единичные силовые факторы приложены в точках определения лишних неизвестных в их направлениях).

Определим выражения для грузового изгибающего момента (M_p) и единичных изгибающих моментов (M_1 и M_2) по участкам эквивалентной и единичных схем:

I участок: $0 < x < l$:

$$M_p = -q\frac{x^2}{2}; \quad M_1 = 1\cdot x; \quad M_2 = 0;$$

II участок: $0 < x < h$:

$$M_p = -q\frac{l^2}{2} - M_o; \quad M_1 = 1\cdot l; \quad M_2 = 1\cdot x .$$

Для дважды статически неопределимой системы канонические уравнения имеют вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0,$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0.$$

Определим коэффициенты уравнений:

$$EI_z\delta_{11} = \sum_{i=1}^{n}\int_l M_1^2dx = \int_0^l x^2dx + \int_0^h l^2dx = \frac{l^3}{3} + l^2h ;$$

$$EI_z\delta_{12} = \delta_{21} = \int_l M_1M_2dx = \int_0^h l(-x)dx = -\frac{h^2l}{2} ;$$

$$EI_z\delta_{22} = \sum_{i=1}^{n}\int_l M_2^2dx = \int_0^h x^2dx = \frac{h^3}{3} ;$$

$$EI_z\delta_{1p} = \int_l M_FM_1dx = \int_0^l(-q\frac{x^2}{2})xdx + \int_0^h(-q\frac{l^2}{2} - M_o)ldx = -q\frac{l^4}{8} -$$

$$- q\frac{l^2}{2} + M_o)lh$$

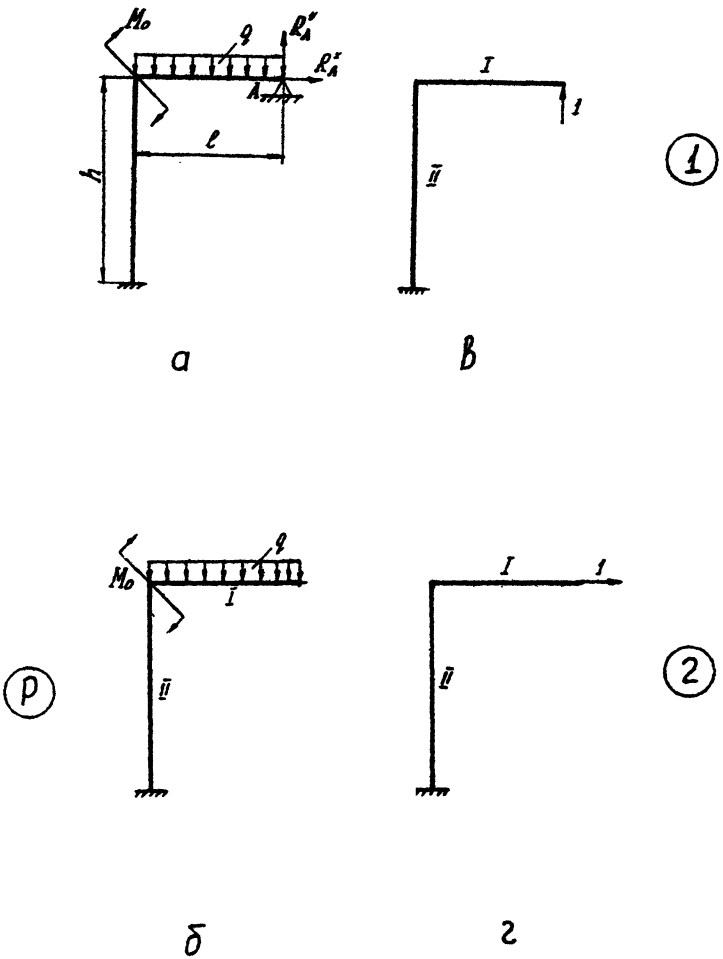


Рис. 4.4

$$EI_z\delta_{2p} = \int_l M_F M_2 dx = \int_0 (-q\frac{l^2}{2} - M_0)(-x)dx = (q\frac{l^2}{2} + M_0)\frac{h^2}{2}.$$

Найденные значения коэффициентов подставим в канонические уравнения.

Из двух систем уравнений с двумя неизвестными находим X_1 и X_2, т.е. R_A^y и R_A^x.

Дальнейшее решение задачи (расчет на прочность, определение перемещений в отдельных точках) осуществляется так же, как и для статически определимой системы с учетом найденных опорных реакций.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов.-М.: Наука, 1986.-512 с.

2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов.-М.: Наука,1976.-608с.

3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов.-М.: Высшая школа.-1975.-754 с.

4. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов.-М.: Высшая школа.-1988.-432 с.

5. Гурьев А.В., Коновалов П.Я. Расчет упругих систем энергетическим методом.-Методические указания для выполнения 5-го семестрового задания (для студентов механических специальностей): - ВолгПИ, Волгоград, 1971.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА СИЛ 5
2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ МАКСВЕЛЛА - МОРА 15
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ СИЛ . . 21
4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ 34
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 40

Вячеслав Петрович Багмутов
Сергей Николаевич Паршев

Темплан 1997 г., поз. 48

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УПРУГИХ СИСТЕМ
Учебное пособие

Редактор А.К.Саютина
Лицензия N 020251 от 16.04.1996 г.

Подписано в печать 03.07.97 . Формат 60x84 1/16 .
Бумага газетная. Печать плоская. Усл. печ. л. 2,35.
Уч.-изд. л. 2,41. Тираж 200 экз. Заказ 388 .

Волгоградский государственный технический университет.
400066 Волгоград, просп. Ленина, 28.

Типография ВолгГТУ.
400066 Волгоград, ул. Советская, 35