

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому американскому изданию	6
Из предисловия ко второму американскому изданию	8
Из предисловия к третьему американскому изданию	8
Обозначения	9
Глава I. Растяжение и сжатие в пределах упругости	11
1. Упругость	11
2. Закон Гука	12
3. Диаграмма растяжения	15
4. Допускаемое напряжение	17
5. Напряжения и деформации при действии собственного веса	22
6. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии	26
7. Начальце и температурные напряжения	32
8. Растяжение кругового кольца	35
Глава II. Анализ напряжений и деформаций	40
9. Напряжения по наклонным сечениям при простом растяжении и сжатии	40
10. Круг Мора	43
11. Растяжение или сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям	46
12. Круг Мора при сложном напряженном состоянии	48
13. Главные напряжения	50
14. Поперечное сужение	53
15. Деформации в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям	54
16. Чистый сдвиг	57
17. Допускаемые напряжения при сдвиге	61
18. Растяжение или сжатие по трем взаимно перпендикулярным направлениям	63
Глава III. Изгибающий момент и поперечная сила	67
19. Типы балок	67
20. Изгибающий момент и поперечная сила	68
21. Зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой	72
22. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил	74
Глава IV. Напряжения в поперечно нагруженных симметричных балках	85
23. Чистый изгиб	85
24. Различные формы поперечных сечений балок	91
25. Общий случай изгиба поперечно нагруженных симметричных балок	96
26. Касательные напряжения при изгибе	102
27. Распределение касательных напряжений в случае кругового поперечного сечения	108
28. Распределение касательных напряжений в двутавровых балках	110

29. Главные напряжения при изгибе	113
30. Напряжения в составных балках	117
Глава V. Изогнутая ось балки	123
31. Дифференциальное уравнение изогнутой оси	123
32. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой	125
33. Прогиб свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенным грузом	128
34. Определение прогибов при помощи элюры изгибающих моментов	131
35. Определение прогиба консоли графоаналитическим методом	133
36. Определение прогиба свободно опертой балки графоаналитическим методом	137
37. Метод сложения действия сил	143
38. Прогиб балок с консолями	148
39. Влияние поперечных сил на прогиб балок	150
Глава VI. Статически неопределимые задачи при изгибе	155
40. Лишние закрепления	155
41. Балка заделанная одним концом в опертая другим	158
42. Балка с двумя заделанными концами	162
43. Равны	165
44. Балки на трех опорах	172
45. Неразрезные балки	175
Глава VII. Симметричные балки переменного поперечного сечения. Балки из двух материалов	181
46. Балки переменного поперечного сечения	181
47. Симметричные балки из двух различных материалов	187
48. Железобетонные балки	190
49. Касательные напряжения в железобетонных балках	193
Глава VIII. Изгиб балок в плоскости, которая не является плоскостью симметрии	194
50. Чистый изгиб в плоскости, которая не является плоскостью симметрии	194
51. Изгиб балок, имеющих две плоскости симметрии	198
52. Изгиб балок в главной плоскости, которая не является плоскостью симметрии	200
Глава IX. Одновременное действие изгиба и растяжения или сжатия. Теория продольного изгиба	208
53. Изгиб, сопровождаемый растяжением или сжатием	208
54. Внецентренная нагрузка короткой стойки	212
55. Ядро сечения	215
56. Внецентренное сжатие гибкой симметричной колонны	219
57. Критическая нагрузка	223
58. Критическое напряжение. Расчет колонны	227
59. Расчет колонны на основании предполагаемых неточностей	232
60. Эмпирические формулы для расчета колонн	234
Глава X. Кручение и одновременное действие изгиба и кручения	238
61. Кручение круглого стержня	238
62. Кручение вала	243
63. Вал прямоугольного поперечного сечения	245
64. Винтовая пружина с малым шагом витков	246
65. Одновременное действие изгиба и кручения. Изгиб и кручение вала круглого поперечного сечения	250

Глава XI. Энергия деформации и удар	255
66. Энергия упругой деформации при растяжении	255
67. Растяжение, вызываемое ударом	258
68. Энергия упругой деформации при сдвиге и кручении	264
69. Энергия упругой деформации при изгибе	267
70. Изгиб, вызываемый ударом	271
71. Общие выражение энергии деформации	275
72. Теорема Кастigliано	277
73. Деформация ферм	283
74. Приложение теоремы Кастigliано к решению статически неопределимых задач	287
75. Теорема о взаимности работ и перемещений	296
76. Исключительные случаи	303
Глава XII. Кривые брусья	305
77. Чистый изгиб кривых брусьев	305
78. Изгиб кривых брусьев силами, действующими в плоскости симметрии	309
79. Частные случаи изгиба кривых брусьев	310
80. Деформация кривых брусьев	317
81. Двухшарнирная арка	331
82. Напряжения в ободке махового колеса	334
83. Уравнение изогнутой оси для бруса с круговой осью	337
84. Изгиб кривых труб	340
85. Изгиб кривого бруса не в плоскости его начальной кривизны	345
Приложение А. Моменты инерции плоских фигур	350
I. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в ее плоскости	350
II. Полярный момент инерции плоской фигуры	352
III. Теорема о параллельном переносе осей	354
IV. Центробежный момент инерции. Главные оси	355
V. Изменение направления осей. Определение главных осей	367
Предметный указатель	360

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время происходит решительный перелом во взглядах конструкторов на применение аналитических методов при решении технических задач. Проектирование уже не основывается преимущественно на эмпирических формулах. Значение аналитических методов, увязанных с лабораторными исследованиями, при решении технических задач ныне является общепризнанным.

Типы машин и сооружений изменяются очень быстро, особенно в новых областях промышленности, вследствие чего мы не располагаем достаточным количеством времени для накопления необходимых данных практики. Размеры и стоимость сооружений постоянно увеличиваются, что заставляет предъявлять более строгие требования к надежности конструкции. В условиях конкуренции все более возрастает значение экономического фактора при проектировании. Конструкция должна быть достаточно прочна и долговечна и, вместе с тем, должна быть спроектирована с наибольшей экономией в материале. При таких условиях задача конструктора становится чрезвычайно трудной. Уменьшение веса влечет увеличение допускаемых напряжений, которые могут быть приняты как безопасные только на основании тщательного анализа распределения напряжений в конструкции и опытных исследований механических свойств применяемых материалов.

Цель этой книги — изложить вопросы данного курса таким образом, чтобы внимание студента было сосредоточено на практических приложениях теории сопротивления материалов. Если это удастся и в результате появится более тесное взаимоотношение между наукой о сопротивлении материалов и техническим проектированием, то будет сделан значительный шаг вперед.

Книга разделена на два тома. Первый том содержит главным образом материал, обычно помещаемый в обязательных курсах сопротивления материалов в американских технических школах. Отдельно, выходящие за рамки обычных курсов и представляющие интерес преимущественно для аспирантов и инженеров-исследователей, собраны во втором томе. Последний содержит также новые исследования практической важности в области сопротивления материалов.

При составлении первого тома сопротивление материалов было обращено внимание на возможное упрощение всех выводов, чтобы студент с обычной математической подготовкой был в состоянии читать их без затруднения. Например, при выводе теории изогнутой оси балки был широко использован *графоаналитический метод*. Таким образом было достигнуто значительное упрощение при выводе прогибов балок для различных условий нагружения и закрепления опор. При разборе статически неопределимых систем был применен *метод сложения действия сил*, который оказывается весьма удобным при изложении таких задач, как неразрезные балки и рамы. Для объяснения сложных напряжений и вывода главных напряжений был использован *круг Мора*, значительно упрощающий изложение этой части теории.

Применяя эти методы, упрощающие изложение, автор смог сжать материал и разобрать некоторые вопросы, выходящие за пределы обычных курсов. Например, при исследовании кручения рассмотрено скручивание прямоугольных стержней и прокатных сечений, как-то: уголков, швеллеров и двутавровых балок. Подробно разобраны деформации и напряжения в винтовых ресурсах. В теории изгиба разобран случай несимметричных сечений; определен и объяснен *центр скручивания* и рассмотрено влияние поперечной силы на прогиб балок. Дана общая теория изгиба балок, материал которых не следует закону Гука; она применена к изгибу балок за пределом упругости. Рассмотрен изгиб железобетонных балок. При исследовании одновременного действия изгиба и растяжения или сжатия рассмотрено влияние прогибов на изгибающий момент и выяснен предел применимости метода сложения действия сил. При изложении одновременного действия изгиба и кручения разобраны прямоугольные и эллиптические поперечные сечения, а также в качестве приложения дан расчет колечатых валов. Значительное место в книге отведено методам решения задач упругости, основанным на рассмотрении энергии деформации упругих тел. Эти методы применены при исследовании статически неопределимых систем. Рассмотрены также напряжения, вызываемые ударом. Все эти вопросы более сложного характера напечатаны мелким шрифтом и могут быть опущены при первом чтении книги.

Книга иллюстрирована большим числом задач, к которым приложены решения. Во многих случаях задачи выбраны так, чтобы расширить область, охватываемую текстом, и иллюстрировать приложения теории к решению задач проектирования. Можно надеяться, что эти задачи будут интересны для учебных целей, а также полезны для конструкторов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания этой книги усилие было направлено к тому, чтобы приспособить книгу к учебным требованиям технических школ США.

С этой целью часть материала более сложного характера, который содержался в предыдущем издании этого тома, была удалена и будет включена во второй том нового издания. В то же время некоторые сведения, которые были лишь кратко рассмотрены в первом издании, были расширены с намерением сделать книгу более доступной для начинающего. По этой причине глава II, излагающая сложные напряжения, была полностью переработана. Часть книги, излагающая эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, была расширена и было добавлено значительное количество материала по определению изогнутой оси балки методом интегрирования. Рассмотрение теории продольного изгиба и ее применение было включено в главу VIII, так как этот вопрос обычно излагается в обязательных курсах сопротивления материалов. Было сделано несколько добавлений к главе X, излагающей приложение метода энергии деформации к решению статически неопределенных задач. Добавлено много новых задач, которые могут быть полезны для аудиторной и домашней работы.

Можно надеяться, что при сделанных изменениях книга окажется более удовлетворительной для усвоения курса сопротивления материалов и что она даст лучшее основание для изучения более сложного материала, рассматриваемого во втором томе.

С. Тимошенко

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

В третье издание этой книги добавлено значительное число новых задач и включены ответы ко многим старым задачам. Книга расширена путем добавления двух новых глав, а именно главы VIII, излагающей изгиб балок в плоскости, не являющейся плоскостью симметрии, и главы XII об изгибе кривых брусьев. В главе VIII введено понятие о центре сдвига, которое имеет большое практическое значение для тонкостенных конструкций. В главе XII изложен материал о кривых брусьях, который прежде помещался во второй части этой книги. Этот материал был полностью переработан, причем были добавлены новые сведения.

Стандфордский университет
25 марта 1955 г.

С. Тимошенко

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- α — угол, коэффициент линейного температурного расширения, числовой коэффициент
 β — угол, числовой коэффициент
 γ — относительный сдвиг, вес единицы объема
 Δ — относительное объемное расширение, приращение
 Δl — полное удлинение, полный прогиб, расстояние
 ϵ — относительное удлинение или укорочение
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — относительные удлинения по направлениям осей x, y, z
 ψ — угол, угол закручивания на единицу длины вала
 μ — коэффициент Пуассона
 σ — нормальное напряжение
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения
 σ_n — нормальное напряжение по плоскости, перпендикулярной направлению n
 τ_x, τ_y, τ_z — нормальные напряжения по плоскостям, перпендикулярным осям x, y и z
 $\sigma_{пч}$ — предел прочности
 $[\sigma]$ — допускаемое напряжение
 σ_T — предел текучести
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — касательные напряжения по плоскостям, перпендикулярным к осям y, z и x и параллельным осям x, y и z
 $[\tau]$ — допускаемое напряжение на сдвиг
 τ_T — предел текучести при сдвиге
 φ — угол
 ω — угловая скорость
 a, b, c, l — расстояния
 C — жесткость при кручении, постоянная интегрирования
 D, d — диаметры
 E — модуль упругости при растяжении (сжатии)
 F — площадь поперечного сечения
 G — модуль упругости при сдвиге
 H — горизонтальная сила
 h — высота, толщина
 J_p — полярный момент инерции площади

- J_y, J_z — моменты инерции площади относительно осей y и z
 J_{yz} — центробежный момент инерции площади относительно осей y и z
 i_y, i_z — радиусы инерции площади относительно осей y и z
 K — объемный модуль упругости
 k — коэффициент безопасности, постоянная пружины, числовой коэффициент
 l — длина, пролет
 M — изгибающий момент
 M_x — крутящий момент
 N — продольная сила, мощность в лошадиных силах
 n — число оборотов в минуту, нормаль к плоскости
 P — сосредоточенная сила
 p — распределенная нагрузка на единицу площади (давление)
 Q — поперечная сила, груз, собственный вес
 q — распределенная нагрузка на единицу длины (интенсивность распределенной нагрузки)
 R — реакция, сила, радиус
 r — радиус, радиус кривизны
 S — продольное усилие в стержне
 t — температура, толщина
 U — энергия деформации
 u — прогиб, расстояние, перемещение
 V — объем
 v — скорость, прогиб, расстояние, перемещение
 W — момент сопротивления при изгибе
 W_p — момент сопротивления при кручении
 X, Y, Z — продольные усилия в стержнях, неизвестные реакции
 x, y, z — прямоугольные координаты

ГЛАВА I

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

1. Упругость

Материал тела состоит из малых частиц или молекул, между которыми действуют силы. Эти молекулярные силы оказывают сопротивление внешним силам, которые стремятся произвести изменение формы тела. Под действием внешних сил частицы тела перемещаются, и перемещения продолжаются до тех пор, пока не установится равновесие между внешними и внутренними силами. В таком случае тело находится в *деформированном состоянии*. Во время деформации внешние силы, действующие на тело, производят работу, и эта работа превращается полностью или частично в *потенциальную энергию деформации*. Часовая пружина является примером такого накопления потенциальной энергии в деформированном теле. Если силы, которые произвели деформацию, затем постепенно уменьшаются, то тело вполне или отчасти возвращается к своей первоначальной форме, и во время этой обратной деформации потенциальная энергия деформации, которая была накоплена в теле, может быть возвращена в форме внешней работы.

Рассмотрим, например, призматический стержень, нагруженный на конце, как показано на рис. 1⁴). Под действием этого груза будет иметь место некоторое удлинение. Точка приложения груза будет перемещаться вниз, и во время этого движения грузом будет совершена положительная работа. Если груз уменьшается, то удлинение стержня также уменьшается, нагруженный конец стержня перемещается вверх, и потенциальная энергия деформации превращается в работу, необходимую для перемещения груза вверх.

Свойство тел возвращаться к своей первоначальной форме после удаления нагрузки называется *упругостью*. Тело *совершенно упруго*, если оно после разгрузки восстанавливает свою первоначальную форму; оно *частично упруго*, если деформация, произведенная внешними силами, не исчезает полностью после разгрузки. В случае совершенно упругого тела работа, произведенная внешними силами,

⁴ Предполагается, что груз действует по оси стержня, т. е. по линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

во время деформации должна превратиться в потенциальную энергию деформации¹⁾. В случае частично упругого тела часть работы, совершенной внешними силами во время деформации, рассеется в форме теплоты, которая развивается в теле при неупругой деформации. Опыт показывает, что такие строительные материалы, как сталь, дерево и камень, могут рассматриваться как совершенно упругие в некоторых пределах, которые зависят от свойств материала. При условии, что внешние силы, действующие на сооружение, известна, основной задачей для конструктора является установление таких размеров в частях сооружения, чтобы последнее при всех условиях службы приближалось к совершенно упругому телу. Только при таких условиях мы будем иметь продолжительную службу сооружения без какой-либо остаточной деформации его частей.

2. Закон Гука

Непосредственными опытами над растяжением призматических стержней (рис. 1) было установлено для многих строительных материалов, что в некоторых пределах удлинение стержня пропорционально растягивающей силе. Это простое линейное соотношение между силой и удлинением, которое она вызывает, впервые было сформулировано английским ученым Робертом Гуком²⁾ в 1678 г. и носит его имя. При помощи обозначений:

P — сила, вызывающая растяжение стержня,
 l — длина стержня,
 F — площадь поперечного сечения стержня,
 Δl — полное удлинение стержня,
 E — упругая постоянная материала, называемая *модулем упругости* при растяжении, экспериментальный закон Гука можно выразить

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (1)$$

следующим уравнением:

Удлинение стержня пропорционально растягивающей силе и длине стержня и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости. При производстве испытаний на растяжение обыкновенно принимаются все меры предосторожности к тому, чтобы обеспечить центральное приложение растягивающей

силы. На рис. 2 показан способ закрепления концов круглого образца в испытательной машине на разрыв. Таким образом будет предупрежден какой бы то ни было изгиб стержня. Исключая из рассмотрения части стержня, находящиеся вблизи точек приложения сил¹⁾, можем заключить, что при растяжении все продольные волокна призматического стержня имеют одно и то же удлинение, и поперечные сечения стержня, первоначально плоские и перпендикулярные к оси стержня, остаются такими же и после растяжения.

При определении величины внутренних сил вообразим стержень, разрезанный на две части поперечным сечением mn , и рассмотрим равновесие нижней части стержня (рис. 1, б). К нижнему концу этой части приложена растягивающая сила P . Силы, действующие на верхнем конце, представляют действие части верхней части деформированного стержня на части нижней части. Эти силы непрерывно распределены по поперечному сечению. Близкий пример такого непрерывного распределения сил по поверхности представляет гидростатическое давление или давление пара. В случае таких непрерывно распределенных сил имеет большое значение *интенсивность силы*, т. е. сила, приходящаяся на единицу площади. В данном случае осевого растяжения, в котором все волокна имеют одно и то же удлинение, распределение сил по поперечному сечению mn будет *равномерным*. Равнодействующая этих сил будет проходить через центр тяжести поперечного сечения и будет действовать по оси стержня. Принимая во внимание, что сумма этих сил из условия равновесия (рис. 1, б) должна быть равна P , и обозначая силу, приходящуюся на единицу площади, через σ , мы получаем:

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (2)$$

Эта сила, приходящаяся на единицу площади, называется *растягивающим напряжением* или просто *напряжением*. В дальнейшем мы будем измерять силу в килограммах и площадь — в квадратных сантиметрах, так что напряжение будет измеряться в килограммах на 1 кв. см. Удлинение стержня, приходящееся на единицу длины, определяется уравнением

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3)$$

¹⁾ При этом рассмотрении пренебрегается малыми температурными изменениями, которые обычно сопровождают упругую деформацию, и соответствующим тепловым обменом со средой (см. часть II).

²⁾ Robert Hooke. De Potentia restituta, London, 1678.

¹⁾ Более сложное распределение напряжений вблизи точек приложения сил рассматривается в части II.

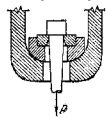


Рис. 2.

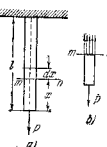


Рис. 1.

и называется *относительным удлинением* или относительной деформацией растяжения. Пользуясь уравнениями (1), (2) и (3), можем написать закон Гука в следующей форме:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (4)$$

Мы видим, что *модуль упругости равен напряжению, деленному на относительное удлинение*, и его легко можно вычислить, если напряжение и соответствующее относительное удлинение найдены из испытания на растяжение. Относительное удлинение найдены из испытания на растяжение. Относительное удлинение ϵ есть отвлеченная величина, представляющая отношение двух длин (см. уравнение (3)); поэтому из уравнения (4) можно заключить, что модуль упругости измеряется в тех же единицах, что и напряжение E , т. е. в килограммах на 1 кв. см. Средние значения модуля E для некоторых материалов даны во втором столбце таблицы 1).

Таблица 1
Механические свойства материалов

Таблица 1

Материал	E кг/см ²	Предел текучести кг/см ²	Предел прочности кг/см ²
Строительная углеродистая сталь от 0,15 до 0,25% углерода	2,1 · 10 ⁶	2,1 · 10 ⁴ —2,8 · 10 ⁴	3,9 · 10 ⁴ —4,6 · 10 ⁴
Никелевая сталь от 3 до 3,5% никеля	2,0 · 10 ⁶	2,8 · 10 ⁴ —3,5 · 10 ⁴	5,4 · 10 ⁴ —7,0 · 10 ⁴
Дюралюминий	0,70 · 10 ⁶	2,4 · 10 ⁴ —3,1 · 10 ⁴	3,8 · 10 ⁴ —4,6 · 10 ⁴
Медь катаная в холодном состоянии	1,1 · 10 ⁶	—	2,0 · 10 ⁴ —2,8 · 10 ⁴
Стекло	0,70 · 10 ⁶	—	2,5 · 10 ⁴
Сосна вдоль волокон	0,1 · 10 ⁶	—	5,6 · 10 ³ —1,4 · 10 ⁴
Бетон при сжатии	0,28 · 10 ⁶	—	2 · 10 ⁴

Уравнения (1) — (4) можно применить также в случае сжатия призматических стержней. Тогда Δl будет обозначать полное продольное укорочение, ϵ — относительное укорочение и σ — сжимающее напряжение. Для большинства строительных материалов модуль упругости при сжатии тот же, что и при растяжении. В вычислениях растягивающее напряжение и деформация растяжения рассматриваются положительными, а сжимающие напряжения и деформация — отрицательными.

¹⁾ Более подробно о механических свойствах материалов изложено в части II.

ЗАДАЧИ

1. Определить полное удлинение стального стержня длиной 60 см, если растягивающее напряжение равно 1000 кг/см².

Ответ. $\Delta l = 0,03$ см.

2. Определить силу, растягивающую цилиндрический стальной стержень диаметром в один см, если относительное удлинение равно $0,7 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Растягивающее напряжение в стержне из уравнения (4) равняется

$$\sigma = E\epsilon = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Растягивающая сила из уравнения (2) равняется

$$P = \sigma F = 1400 \cdot \frac{\pi}{4} = 1100 \text{ кг.}$$

3. Каково отношение модулей упругости материалов двух стержней одинаковых размеров, если под действием равных растягивающих сил относительное удлинения стержней имеют отношение 1: $\frac{20}{11}$. Определить эти удлинения, если один из стержней стальной, а другой — медный и растягивающее напряжение равно 600 кг/см².

Решение. Модули упругости обратно пропорциональны относительным удлинениям. Для стали

$$\epsilon = \frac{600}{2 \cdot 10^6} = 0,00030,$$

для меди

$$\epsilon = 0,00054.$$

4. Призматический стальной брусок длиной 60 см под действием растягивающей силы P удлиняется на 0,06 см. Найти величину силы, если объем стержня равняется 360 см³.

Ответ. $P = 12$ 000 кг.

5. Кусок проволоки длиной 30 м, подверженный действию растягивающей силы $P = 400$ кг, удлиняется на 2,5 см. Найти модуль упругости материала, если площадь поперечного сечения проволоки равняется $0,3$ см².

Ответ. $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

6. Определить полное удлинение стального стержня AB , имеющего площадь поперечного сечения $F = 10$ см² и подверженного действию сил $Q = 4$ т и $P = 2$ т (рис. 3).

Решение. Растягивающая сила в верхней и нижней частях стержня равна Q , а в средней части равна $Q - P$. Тогда полное удлинение будет

$$\Delta l = 2 \frac{Q l_1}{E F} + \frac{(Q - P) l_2}{E F} = 2 \frac{4000 \cdot 10}{10 \cdot 2 \cdot 10^6} + \frac{2000 \cdot 10}{10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,004 + 0,001 = 0,005 \text{ см.}$$

7. Решить задачу 6, предполагая, что материалом является дюралюминий и что $P = Q = 4$ т.

3. Диаграмма растяжения

Пропорциональность между растягивающей силой и соответствующим удлинением сохраняется до некоторого предельного значения растягивающего напряжения, называемого *пределом пропорциональности*, который зависит от свойств материала. За этим

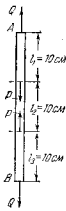


Рис. 3.

пределом зависимость между удлинением и растягивающим напряжением становится более сложной.

Для таких материалов, как строительная сталь, пропорциональность между нагрузкой и удлинением сохраняется до значительного напряжения, и предел пропорциональности может быть принят $1,6 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Для таких материалов, как чугун или мягкая медь, пределы пропорциональности очень низки, так что отклонения от закона Гука можно заметить при низких растягивающих напряжениях.

При исследовании механических свойств материалов за пределами пропорциональности зависимость между деформацией и соответствующим напряжением обычно изображают графически *диаграммой растяжения*. Рис. 4. изображает типичную диаграмму для строительной стали. Здесь удлинения отложены по горизонтальной оси, а соответствующие напряжения представлены ординатами кривой $OABCD$. От O до A напряжения и деформации пропорциональны; за A отклонение от закона Гука становится заметным; следовательно, напряжение в A есть *предел пропорциональности*.

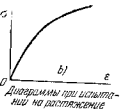


Рис. 4.

По нагружении за этим пределом удлинения увеличиваются гораздо быстрее, и диаграмма становится кривой. У точки B имеет место внезапное удлинение стержня без заметного увеличения растягивающей силы. Это явление, называемое текучестью металла, показано на диаграмме почти горизонтальным участком кривой. Напряжение, соответствующее точке B , называется *пределом текучести*.

При дальнейшем растяжении стержня материал восстанавливает способность сопротивляться, и, как видно из диаграммы, растягивающая сила увеличивается с увеличением удлинения до точки C , где сила достигает своего наибольшего значения.

Соответствующее напряжение называется *пределом прочности материала*.

За точкой C стержень продолжает удлиняться с уменьшением нагрузки, и окончательное разрушение происходит при нагрузке, соответствующей точке D диаграммы.

Необходимо заметить, что удлинение стержня сопровождается уменьшением поперечных размеров, но практически при вычислении предела текучести и предела прочности за расчетное поперечное сечение F принимают первоначальную площадь. Этот вопрос будет разобран более подробно ниже (см. часть II).

Рис. 4, б представляет диаграмму растяжения для чугуна. Этот материал имеет очень низкий предел пропорциональности¹⁾ и не имеет определенного предела текучести.

При сжатии различных материалов можно также получить диаграммы, аналогичные таковым при растяжении, и удастся установить такие характеристики, как предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности. Механические свойства материалов при растяжении и сжатии будут разобраны более подробно ниже (см. часть II).

4. Допускаемое напряжение

Диаграмма растяжения дает очень ценные сведения о механических свойствах материалов. Зная предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности, можем установить для каждой частной технической задачи величину напряжения, которое можно рассматривать как *безопасное напряжение*. Это напряжение обычно называется *допускаемым напряжением*.

При выборе величины допускаемого напряжения для стали нужно принять во внимание, что при напряжениях ниже предела пропорциональности этот материал можно рассматривать как совершенно упругий, между тем как за этим пределом после разгрузки стержня обычно остается часть деформации, т. е. имеет место *остаточная деформация*. Для того чтобы иметь сооружение в упругом состоянии и исключить возможность появления остаточной деформации, практика обычно принимает допускаемое напряжение несколько ниже предела пропорциональности. При экспериментальном определении этого предела необходимы чувствительные измерительные инструменты (экстенсометры), так как величина этого предела зависит от степени точности, с которой сделаны измерения. Для того чтобы исключить это затруднение, обычно принимают *предел текучести* или *предел прочности* материала за основание для определения величины допускаемого напряжения. Обозначая через $[\sigma]$, σ_T и σ_{pu} соответственно допускаемое напряжение, предел текучести и предел прочности материала, определим величину допускаемого напряжения из следующих уравнений:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{pu}}{k_1}. \quad (5)$$

Здесь k и k_1 — постоянные величины, называемые *коэффициентом безопасности* и определяющие величину допускаемого напряжения. В случае строительной стали логично принимать за основание для вычисления допускаемого напряжения предела текучести, так

¹⁾ Этот предел может быть установлен при измерении удлинений при помощи очень чувствительных экстенсометров. См. Grüneisen, Ver., deut. physik. Ges., 1906.

как при этом пределе имеет место значительная остаточная деформация, которая недопустима в инженерных сооружениях. В таком случае коэффициент безопасности $k=2$ будет давать достаточную величину для допускаемого напряжения при условии, что на сооружение действуют только постоянные или статические нагрузки. В случаях внезапно приложенных нагрузок или переменных нагрузок, что бывает часто в частях машины, необходимо принимать больший коэффициент безопасности. Для хрупких материалов, как чугунов, бетон или различного рода камней, и для таких материалов, как дерево, за основание для определения допускаемых напряжений обыкновенно принимается предел прочности.

Величина коэффициента безопасности зависит от точности, с которой определены действующие на сооружение внешние силы, от точности, с которой можно вычислить напряжения в частях сооружения, а также от однородности употребляемых материалов. Этот важный вопрос о допускаемых напряжениях будет обсужден более подробно ниже (см. часть II). Здесь мы дадим несколько простых примеров определения прочных размеров поперечного сечения стержней, полагая, что допускаемые напряжения даны.

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр d стальных колонн N прессы для наибольшей сжимающей силы $P=40$ т (рис. 5), если допускаемое напряжение для стали в этом случае $[\sigma]=600$ кг/см². Определить полное удлинение колонн при наибольшей нагрузке, если длина между их головками $l=1$ м.

Решение. Необходимая площадь поперечного сечения, из уравнения (2), равняется

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{2[\sigma]} = \frac{20\,000}{600} = 33,33 \text{ см}^2.$$

следовательно,

$$d = \sqrt{\frac{133,32}{\pi}} = 6,51 \text{ см.}$$

Полное удлинение из уравнений (3) и (4), равно

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{600 \cdot 100}{2 \cdot 10^8} = 0,03 \text{ см.}$$

2. Конструкция, состоящая из двух одинаковых стальных стержней (рис. 6) длиной 4,5 м с шарнирными концами, подвержена действию вертикальной нагрузки. Определить необходимую площадь поперечного сечения стержней и опускание точки B , если $P=2$ т, $[\sigma]=500$ кг/см² и первоначальный угол наклона стержней $\theta=30^\circ$.

Решение. Из рис. 6, б, растягивающее усилие в стержнях получается

$$S = \frac{P}{2 \sin \theta}, \text{ для } \theta = 30^\circ \quad S = P = 2000 \text{ кг.}$$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{S}{[\sigma]} = \frac{2000}{500} = 4 \text{ см}^2.$$

Опускание BB_1 найдется из малого прямоугольного треугольника DBB_1 , в котором дуга BD радиуса, равного первоначальной длине стержней, рассматривается как перпендикуляр, опущенный на AB_1 , изображающую положение стержня AB после деформации. Тогда удлинение стержня будет

$$B_1D = \epsilon l = \frac{[\sigma] l}{E} = \frac{500 \cdot 450}{2 \cdot 10^8} = 0,11 \text{ см}$$

и опускание

$$BB_1 = \frac{B_1D}{\sin \theta} = 0,22 \text{ см.}$$

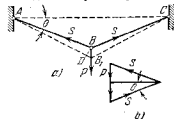


Рис. 6.

Видно, что изменение угла от опускания BB_1 очень мало, и прежнее вычисление S , основанное на предположении, что $\theta=30^\circ$, достаточно точно.

3. Определить размеры поперечного сечения деревянной балки BC и стального стержня AB конструкции ABC , нагруженной в B , если допускаемое напряжение для сосны принято $[\sigma]_d = 10$ кг/см² и для стали $[\sigma]_c = 600$ кг/см². Груз

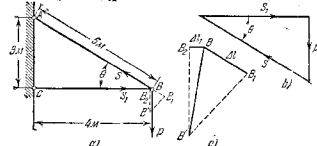


Рис. 7.

$P=2,4$ т. Размеры конструкции показаны на рис. 7. Определить вертикальную и горизонтальную составляющие перемещения точки B вследствие деформации стержней.

Решение. Из треугольника на рис. 7, б, представляющего условие равновесия шарнира B и подобного треугольнику ABC рис. 7, а, имеем

$$S = \frac{P \cdot 5}{3} = 4000 \text{ кг.}$$

$$S_1 = \frac{P \cdot 4}{3} = 3200 \text{ кг.}$$

Площади поперечного сечения стального стержня и деревянной балки равняются

$$F = \frac{S}{[\sigma]_c} = \frac{4000}{600} = 6,67 \text{ см}^2, \quad F_1 = \frac{S_1}{[\sigma]_d} = \frac{3200}{10} = 320 \text{ см}^2.$$

Полное удлинение стального стержня и полное укорочение деревянной балки будут

$$\Delta l = \frac{Sl}{E_c F} = \frac{4000 \cdot 500}{2 \cdot 10^8 \cdot 6,67} = 0,15 \text{ см.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_d F_1} = \frac{3200 \cdot 400}{10^8 \cdot 320} = 0,04 \text{ см.}$$

Чтобы определить перемещение шарнира B вследствие деформации, опишем дуги из центров A и C (рис. 7, a) радиусами, соответственно равными длинам растянутого стержня и сжатой балки. Они пересекаются в новом положении B' шарнира B . Это показано в большом масштабе на рис. 7, c , где BB' есть удлинение стального стержня и BB'' — укорочение деревянной балки. Пунктирные перпендикуляры заменяют упомянутые выше дуги. Следовательно, BB' является перемещением шарнира B . Составляющие этого перемещения легко можно получить из чертежа.

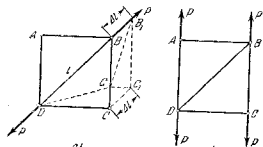


Рис. 8.

4. Определить в предыдущей задаче угол наклона стержня AB , чтобы вес его был наименьшим.

Решение. Угол θ обозначает угол между стержнем и горизонтальной балкой и l_1 — длину балки, то длина стержня равняется $l = l_1 / \cos \theta$, растягивающее усилие в стержне равно $S = P / \sin \theta$ и необходимая площадь поперечного сечения $F = P / [\sigma]_c \sin \theta$. Объем стержня будет

$$V = \frac{l_1 P}{[\sigma]_c \sin \theta \cos \theta} = \frac{2 l_1 P}{[\sigma]_c \sin 2\theta}$$

Видно, что объем и вес стержня получаются наименьшими при $\sin 2\theta = 1$ и $\theta = 45^\circ$.

5. Квадратная рама $ABCD$ (рис. 8, a), состоящая из пяти стальных стержней, площади поперечного сечения которых по 5 см^2 , подвержена действию двух сил $P = 4 \text{ т}$ в направлении диагонали. Определить величину изменения углов A и C вследствие деформации рамы. Насколько изменятся те же углы, если силы приложены, как указано на рис. 8, b .

Решение. В случае, указанном на рис. 8, a , диагональ будет воспринимать полную нагрузку P . Предполагая, что шарнир D не перемещается и направление диагонали не изменяется, найдем, что перемещение шарнира B по направлению диагонали будет равно удлинению диагонали $\Delta l = P l / E F$. Определение нового положения C' шарнира C указано на рисунке пунктиром. Из малого прямоугольника $CC'C'$ видно, что $CC' = \Delta l / \sqrt{2}$. Тогда угол поворота стержня DC вследствие

деформации рамы будет

$$\frac{CC'}{DC} = \frac{\Delta l \sqrt{2}}{\sqrt{2} l} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{E F} = 0,0004 \text{ радиана.}$$

Следовательно, увеличение угла C будет

$$2 \cdot 0,0004 = 0,0008 \text{ радиана.}$$

Решение задачи, указанной на рис. 8, b предоставляется учащемуся.

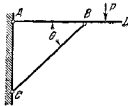


Рис. 9.

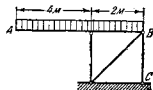


Рис. 10.

6. Определить положение груза P на балке ABD , при котором усилие в стержне BC будет наибольшим. Определить угол θ , при котором объем стержня BC будет наименьшим (рис. 9).

Ответ. Усилие в стержне BC получается наибольшим, когда груз занимает свое крайнее правое положение в точке D . Объем стержня будет наименьшим, когда $\theta = 45^\circ$.

7. Определить необходимую площадь поперечного сечения стального стержня BC (рис. 10), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$ и равномерно распределенная вертикальная нагрузка равняется $q = 1200 \text{ кг}$ на 1 пог. м балки AB .

Ответ. $F = 3,6 \text{ см}^2$.

8. Определить необходимые площади F и F_1 поперечных сечений стержней AB и BC системы, показанной на рис. 11, если $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $F = 16,0 \text{ см}^2$, $F_1 = 12,5 \text{ см}^2$.

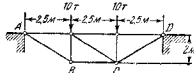


Рис. 11.

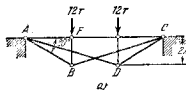


Рис. 12.



9. Определить необходимые площади F и F_1 поперечных сечений стержней AB и BC системы, показанной на рис. 12, a , если $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пусть треугольник mPO на рис. 12, b представляет треугольник сил, действующих на шарнир B . Тогда, проведя горизонтальную линию Om , мы можем заключить, что треугольники mPO и pBO геометрически подобны треугольникам BFA и FBC на рис. 12, a . Из этого подобия, как показано на рис. 12, b , по-

лучают усилия в стержнях AB и BC и величин их горизонтальных и вертикальных проекций. Тогда требуемые площади будут



Рис. 13.

$$F = \frac{16000}{1000} = 16 \text{ см}^2, \quad F_1 = \frac{4000\sqrt{13}}{1000} = 14,4 \text{ см}^2.$$

10. Найти площадь поперечного сечения стержня CD на рис. 11 и полное удлинение стержня, если его материалом является строительная сталь и $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $F = 16 \text{ см}^2, \Delta l = 0,16 \text{ см}$.

11. Решить задачу 8, предполагая, что груз приложен только в одном узле верхнего пояса в расстоянии 2,5 м от опоры A .

Ответ. $F = 10,67 \text{ см}^2, F_1 = 8,33 \text{ см}^2$.

12. Квадратная стальная рама нагружена, как показано на рис. 13. Найти полное удлинение каждого стержня, если площади поперечных сечений всех стержней одинаковы и равны 5 см^2 .

Ответ. Удлинения всех стержней, за исключением AB , равняются нулю. Для стержня $AB \Delta l = 0,3 \text{ см}$.

5. Напряжения и деформации при действии собственного веса

При рассмотрении растяжения стержня по рис. 1 принималась во внимание только нагрузка, приложенная на конце стержня. Если длина стержня велика, то собственный вес его может вызвать значительные дополнительные напряжения, которые необходимо принять в расчет. В этом случае наибольшие напряжения будут по поперечному сечению у заданного конца. Обозначая через γ вес единицы объема бруса, найдем, что полный вес его будет γFl и наибольшее напряжение определится из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{P + \gamma Fl}{F} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (6)$$

Второй член правой части уравнения (6) представляет напряжение, вызываемое весом бруса.

Вес части бруса, находящейся ниже поперечного сечения mn в расстоянии x от нижнего конца (рис. 1), равен γFx и напряжение по этому сечению определяется из уравнения

$$\sigma = \frac{P + \gamma Fx}{F}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (6) вместо σ_{\max} допустимое напряжение $[\sigma]$, получим уравнение для вычисления необходимой площади поперечного сечения

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (8)$$

Интересно заметить, что с увеличением длины l вес бруса становится все более значительным, знаменатель правой части уравне-

ния (8) уменьшается и необходимая площадь F поперечного сечения увеличивается. Когда $\gamma l = [\sigma]$, т. е. напряжение только от собственного веса бруса получается равным допустимому напряжению, то правая часть уравнения (8) становится бесконечностью. При таких обстоятельствах невозможно спроектировать призматический брус и необходимо прибегнуть к брусу переменного поперечного сечения.

Для вычисления полного удлинения призматического бруса, растянутого действующей на конце силой P и собственным его весом, рассмотрим сначала удлинение элемента длиной dx , вырезанного из бруса двумя смежными поперечными сечениями (см. рис. 1). Можно предположить, что по весьма малой длине dx растягивающее напряжение постоянно и определяется из уравнения (7). Тогда удлинение Δdx элемента будет

$$\Delta dx = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{P + \gamma Fx}{EF} dx.$$

Полное удлинение бруса получится путем суммирования удлинений всех элементов. Тогда

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P + \gamma Fx}{EF} dx = \frac{l}{EF} \left(P + \frac{1}{2} \gamma Fl \right). \quad (9)$$

Сравнивая это с уравнением (1), видим, что полное удлинение, вызванное собственным весом бруса, равно удлинению, вызванному нагрузкой, равной половине его веса и приложенной на конце.

ЗАДАЧИ

1. Определить площадь поперечного сечения вертикального призматического стального бруса (рис. 1), имеющего на нижнем конце груз $P = 30 \text{ т}$, если длина бруса равна 200 м, допустимое напряжение $[\sigma] = 700 \text{ кг/см}^2$, вес 1 куб. см стали равен 7,8 г. Определить полное удлинение бруса.

Решение. Площадь поперечного сечения из уравнения (8) равна

$$F = \frac{30000}{700 - 0,0078 \cdot 200000} = 55,15 \text{ см}^2.$$

Полное удлинение из уравнения (9) равно

$$\Delta l = \frac{20000}{2 \cdot 10^8} \left(544 + \frac{1}{2} \cdot 156 \right) = 6,22 \text{ см}$$

2. Определить удлинение конического бруса под действием собственного веса (рис. 14), если длина бруса равна l , диаметр основания — d и вес единицы объема материала — γ .

Решение. Вес бруса равняется

$$Q = \gamma \frac{\pi d^2 l}{4} \cdot \frac{l}{3}.$$

Для какого-либо поперечного сечения в расстоянии x от нижнего конца бруса растягивающее усилие, равное весу нижней части бруса, равняется

$$\frac{Qx^2}{l^3} = \gamma \frac{\pi d^2 x^2}{4 \cdot 3l}.$$

Полагая, что растягивающие напряжения равномерно распределены по поперечному сечению ¹⁾ и рассматривая элемент длиной dx как призматический брусок, находим удлинение этого элемента

$$\Delta dx = \frac{\gamma x dx}{3E}$$

и полное удлинение бруса равняется

$$\Delta l = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma l^2}{6E}.$$

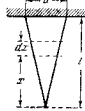


Рис. 14.

Это удлинение составляет одну треть от удлинения призматического бруса той же длины (см. уравнение (9)).

3. Вертикальная призматическая штанга шахтного насоса движется вверх и вниз с помощью колесчатого вала (рис. 15). Полагая, что материал является сталь и допустимое напряжение равняется $[\sigma] = 500 \text{ кг/см}^2$, определить площадь поперечного сечения штанги, если сопротивление движению поршня вниз равно 100 кг, а движению вверх 1000 кг. Длина штанги равна 100 м. Определить необходимую длину радиуса r колена, если ход поршня равен 20 см.

Решение. Необходимая площадь поперечного сечения штанги определится из уравнения (8) подстановкой $P = 1000 \text{ кг}$. Тогда

$$F = \frac{1000}{500 - 0,0078 \cdot 10 \cdot 1000} = 2,37 \text{ см}^2.$$

Разница между полным удлинением штанги при движении ее вверх и при движении вниз благодаря сопротивлению поршня будет равна

$$\Delta l_{\uparrow} - \Delta l_{\downarrow} = \frac{(1000 + 100) \cdot 10 \cdot 1000}{2 \cdot 10^6 \cdot 2,37} = 2,32 \text{ см}.$$

Радиус колена должен быть

$$r = \frac{20 + 2,32}{2} = 11,16 \text{ см}.$$



Рис. 15.

4. Стальная и алюминиевая проволоки подвешены вертикально. Определить для каждой проволоки длину, при которой напряжение от собственного веса равняется пределу прочности, если для стальной проволоки $\sigma_{\text{пр}} = 20 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma = 7,8 \text{ г/см}^3$, а для алюминиевой проволоки $\sigma_{\text{пр}} = 3300 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma = 2,5 \text{ г/см}^3$.

Ответ. Для стали $l = 25 \cdot 640 \text{ м}$, а для алюминия $l = 13 \cdot 200 \text{ м}$.

5. В каком отношении увеличивается наибольшее напряжения, возникающие в призматическом бруске от собственного веса, если все размеры бруса увеличатся в отношении $n:1$ (рис. 1)?

Ответ. Напряжения увеличатся в отношении $n^3:1$.

6. Колонна, состоящая из двух призматических участков равной длины (рис. 16), центрально нагружена на верхнем конце сжимающей силой $P = 240 \text{ м}$.

¹⁾ Такое допущение справедливо, когда угол конуса мал,

Определить объем каменной кладки, если высота колонны равняется 36 м, объемный вес равен $1,5 \text{ т/м}^3$ и наибольшее сжимающее напряжение в каждом участке равняется 10 кг/см^2 . Сравнить объем этой колонны с объемом простой призматической колонны, спроектированной при тех же условиях.

Решение. Площадь поперечного сечения верхнего участка колонны из уравнения (8) равняется

$$F = \frac{240 \cdot 000}{10 - 0,0015 \cdot 1800} = 32 \cdot 880 \text{ см}^2 = 3,288 \text{ м}^2.$$

Для нижнего участка

$$F_1 = \frac{10 \cdot 32 \cdot 880}{10 - 0,0015 \cdot 1800} = 45 \cdot 050 \text{ см}^2 = 4,505 \text{ м}^2.$$

Полный объем каменной кладки равняется

$$V = (3,288 + 4,505) 18 = 140,274 \text{ м}^3.$$

Для призматической колонны

$$F = \frac{240 \cdot 000}{10 - 0,0015 \cdot 3600} = 52 \cdot 170 \text{ см}^2 = 5,217 \text{ м}^2,$$

$$V = 5,217 \cdot 36 = 187,812 \text{ м}^3.$$

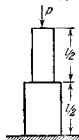


Рис. 16.

7. Решить предыдущую задачу, полагая, что колонна состоит из трех призматических участков равной длины.

Ответ. $F = 2,927 \text{ м}^2$, $F_1 = 3,570 \text{ м}^2$, $F_2 = 4,354 \text{ м}^2$, $V = 130,20 \text{ м}^3$.

8. Определить форму бруса на рис. 17 так, чтобы напряжение в каждом поперечном сечении равнялось $[\sigma]$. Форма бруса, удовлетворяющая этому условию, называется *формой равного сопротивления*.

Решение. Рассматривая элемент бруса, заштрихованный на рисунке, видим, что сжимающая сила в поперечном сечении $m_1 n_1$ больше таковой в сечении $m n$ на величину веса элемента. Но так как напряжение в обоих сечениях одно и то же и равно $[\sigma]$, то разница dF в площади поперечного сечения должна быть такой, чтобы компенсировать разницу в сжимающей силе. Следовательно,

$$dF [\sigma] = \gamma F dx, \quad (a)$$

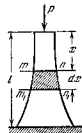


Рис. 17.

где правая часть уравнения представляет вес элемента. Разделив это уравнение на $F[\sigma]$ и проинтегрировав, мы найдем

$$\int \frac{dF}{F} = \int \frac{\gamma dx}{[\sigma]},$$

откуда

$$\ln F = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C,$$

и

$$F = C e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}. \quad (b)$$

где e есть основание натуральных логарифмов и $C = e^C$. При $x = 0$ это уравнение дает площадь поперечного сечения на верху бруса

$$(F)_{x=0} = C.$$

Но площадь поперечного сечения на верху равна $\frac{P}{[\sigma]}$; следовательно $C = \frac{P}{[\sigma]}$ и уравнение (b) получается в таком виде

$$F = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{ix}{[\sigma]}}. \quad (c)$$

Площадь поперечного сечения внизу бруса получается путем подстановки в уравнение (c) $x = l$, что дает

$$F_{\max} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{il}{[\sigma]}}. \quad (d)$$

9. Найти объем каменной кладки для бруса равного сопротивления при условиях, принятых в задаче 6.

Решение. Пользуясь уравнением (d), найдем разность площадей поперечных сечений вверху и внизу колонны

$$\frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{il}{[\sigma]}} - \frac{P}{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma]} (e^{\frac{il}{[\sigma]}} - 1).$$

Эта разность, умноженная на допускаемое напряжение $[\sigma]$, очевидно, дает вес колонны; следовательно, ее объем равняется

$$V = \frac{P}{\gamma} (e^{\frac{il}{[\sigma]}} - 1) = 114,56 \text{ м}^3.$$

6. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии

Имеются случаи, когда продольные усилия, действующие в стержнях системы, не могут быть определены только из уравнений статики, но должна быть принята во внимание деформация системы.

Такие системы называются статически неопределимыми системами.

Простой пример такой системы показан на рис. 18. Груз P вызывает растяжение в стержнях OB , OC и OD , которые находятся в одной плоскости. Для определения трех неизвестных растягивающих усилий в стержнях статика дает два уравнения равновесия, для составления третьего уравнения необходимо рассмотреть деформацию системы. Положим для простоты, что система симметрична относительно вертикальной оси OC , что вертикальный стержень

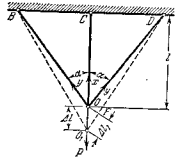


Рис. 18.

стальной с площадью поперечного сечения F_c и модулем упругости материала E_c и что наклонные стержни — медные с площадью F_m и модулем E_m . Длина вертикального стержня равна l ,

а наклонных стержней — $\frac{l}{\cos \alpha}$. Обозначая через X растягивающее усилие в вертикальном стержне и через Y усилия в наклонных стержнях, найдем, что в этом случае, вследствие симметрии, неизвестных будет два, а статика дает лишь одно уравнение равновесия

$$X + 2Y \cos \alpha = P. \quad (a)$$

Для того чтобы вывести второе уравнение, необходимое для определения неизвестных величин X и Y , нужно рассмотреть очертание деформированной системы, указанное на рисунке пунктиром. Пусть Δl будет полное удлинение вертикального стержня под действием груза P ; тогда удлинение Δl_1 наклонных стержней найдется из треугольника OFO_1 . Полагая, что эти удлинения весьма малы, можем заменить дугу окружности OF с центром D перпендикуляром и принять угол O_1 равным первоначальному углу α . Тогда

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \alpha.$$

Относительные удлинения и напряжения вертикального и наклонных стержней соответственно будут

$$\epsilon_c = \frac{\Delta l}{l}; \quad \sigma_c = \frac{E_c \Delta l}{l} \quad \text{и} \quad \epsilon_m = \frac{\Delta l \cos^2 \alpha}{l}; \quad \sigma_m = \frac{E_m \Delta l \cos^2 \alpha}{l}.$$

Тогда усилия в стержнях получится путем умножения напряжений на площади поперечных сечений, а именно:

$$X = \sigma_c F_c = \frac{F_c E_c \Delta l}{l}, \quad Y = \sigma_m F_m = \frac{l_m E_m \Delta l \cos^2 \alpha}{l}, \quad (b)$$

откуда

$$Y = X \cos^2 \alpha \frac{F_m E_m}{F_c E_c}.$$

Вставляя в уравнение (a), получаем

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha \frac{F_m E_m}{F_c E_c}}. \quad (10)$$

Видно, что усилие X зависит не только от угла наклона α , но также от площади поперечного сечения и от механических свойств материала стержней. В частном случае, когда все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и один и тот же модуль упругости, из уравнения (10) получим

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Когда α приближается к нулю, $\cos \alpha$ приближается к единице и усилие в вертикальном стержне к $\frac{1}{3}P$. Когда α приближается к 90° ,

наклонные стержни становятся очень длинными и весь груз будет воспринят средним стержнем.

В качестве другого примера статически неопределимой системы рассмотрим призматический брус с заделанными концами под действием силы P , приложенной в промежуточном поперечном сечении m (рис. 19) и действующей по оси бруса. Груз P будет уравновешиваться реакциями R и R_1 концов, поэтому

$$P = R + R_1, \quad (c)$$

Для того чтобы составить второе уравнение для определения сил R и R_1 , необходимо рассмотреть деформацию бруса. Груз P совместно с силой R вызывает укорочение нижнего участка бруса, а с силой R_1 удлинение верхнего участка. Полное укорочение одного участка должно равняться полному удлинению другого. Тогда, пользуясь уравнением (1), получим

$$\frac{R_1 a}{EF} = \frac{Rb}{EF},$$

следовательно,

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b}, \quad (d)$$

т. е. реакции R и R_1 обратно пропорциональны расстояниям их точек приложения от нагруженного поперечного сечения m . Пользуясь уравнениями (c) и (d), легко можно вычислить величины этих реакций и напряжения в брус.

ЗАДАЧИ

1. Стальной цилиндр с диаметром d и медная трубка с внешним диаметром D сжимаются между плитами пресса (рис. 20). Определить напряжения в стали и меди, а также относительное укорочение, если $P = 40$ т, $d = 10$ см и $D = 20$ см.

Решение. Здесь, опять уравнений статики недостаточно, а поэтому необходимо рассмотреть деформацию цилиндра и трубки, чтобы получить груз, воспринимаемый каждым из материалов. Относительные укорочения стали и меди должны быть равны; поэтому напряжения в материалах будут в таком же отношении, как их модули упругости (см. уравнение (4)), т. е. сжимающее напряжение в стали

будет составлять $\frac{20}{11}$ сжимающего напряжения в меди. Тогда величина напряжения меди σ_m найдется из уравнения статики

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \frac{20}{11} \sigma_m + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \sigma_m$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\sigma_m = 106 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_c = \frac{20}{11} \sigma_m = 193 \text{ кг/см}^2$$

и относительное укорочение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_m}{E_m} = 96,5 \cdot 10^{-4}.$$

2. Железобетонная колонна квадратного поперечного сечения сжимается продольной силой, $P = 24$ т. Какая часть этой нагрузки будет воспринята бетоном

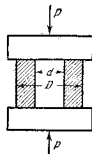


Рис. 20.

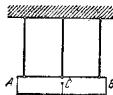


Рис. 21.

и какая часть железом, если площадь поперечного сечения железа составляет $\frac{1}{10}$ площади поперечного сечения бетона. Предположить, что железные стержни симметрично расположены относительно оси колонны.

Ответ. Нагрузка, воспринимаемая железом, составляет 0,77 нагрузки, воспринимаемой бетоном.

3. Твердое тело AB весом Q висит на трех вертикальных проволоках, симметрично расположенных относительно центра тяжести тела (рис. 21). Определить растягивающие усилия в проволоках, если средняя проволока стальная, а две другие медные. Площади поперечных сечений всех проволок равны.

Указание. Применить способ решения 1-й задачи.

4. Определить усилия в четырех ножках стола (рис. 22) от нагрузки P , приложенной в точке A . Крышка стола и пол предполагаются абсолютно твердыми, а ножки прикрепленными к полу, так что они могут сопротивляться как растяжению, так и сжатию.

Решение. Предполагая, что крышка стола займет новое положение, которое указано пунктирной линией m , найдем, что укорочение ножки 2, а также 4 будет равно полусумме укорочений ножек 1 и 3. Следовательно,

$$2Y = X + Z$$

и так как

$$2Y + X + Z = P,$$

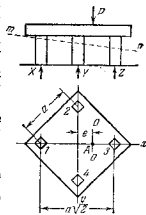


Рис. 22.

то

$$2Y = X + Z = \frac{1}{2} P. \quad (e)$$

Дополнительное уравнение для определения X и Z получится, если взять момент всех сил относительно горизонтальной оси $O-O$, параллельной y и проходящей через точку A . Тогда

$$X \left(\frac{1}{2} a \sqrt{2} + e \right) + \frac{1}{2} P e = Z \left(\frac{1}{2} a \sqrt{2} - e \right). \quad (f)$$

Из (e) и (f) получим

$$X = P \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{a \sqrt{2}} \right), \quad Y = \frac{P}{4}, \quad Z = P \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{a \sqrt{2}} \right).$$

При $e > a \frac{\sqrt{2}}{4}$ X получается отрицательным. Это указывает на то, что в ножке I возникает растяжение.

5. Определить усилия в ножках выше указанного стола, если нагрузка приложена в точке с координатами

$$x = \frac{a}{4}, \quad y = \frac{a}{5}.$$

Указание. При решении этой задачи необходимо заметить, что если точка приложения груза P не находится на диагонали стола, то этот груз можно заменить двумя грузами, статически эквивалентными грузу P и приложенными в точках, лежащих на двух диагоналях. Усилия, возникающие в ножках от каждого из этих грузов, найдутся, как указано выше. Суммируя действия двух составляющих грузов, можем найти усилия в ножках для любого положения груза P .

6. Прямоугольная рама с диагоналями подвергается действию сжимающих сил P (рис. 23). Определить усилия в стержнях, если все они изготовлены из одного и того же материала, площадь поперечного сечения вертикальных стержней равна F , а площадь остальных стержней — F_1 .

Решение. Пусть X будет сжимающее усилие в каждой вертикали, Y — сжимающее усилие в каждой диагонали и Z — растягивающее усилие в каждом горизонтальном стержне. Тогда из условия равновесия одного из шарниров имеем:

$$Y = \frac{P - X}{\sin \alpha}, \quad Z = Y \cos \alpha = (P - X) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (g)$$

Третье уравнение получится из того условия, что рама после деформации остается прямоугольной в силу симметрии; поэтому

$$(a^2 + h^2) \left(1 - \frac{Y}{EF_1} \right)^2 = h^2 \left(1 - \frac{X}{EF} \right)^2 + a^2 \left(1 + \frac{Z}{EF_1} \right)^2.$$

Из этого уравнения, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, мы получаем

$$\frac{(a^2 + h^2) Y}{EF_1} = \frac{h^2 X}{EF} - \frac{a^2 Z}{EF_1}. \quad (h)$$

Решая уравнения (g) и (h), получим следующее значение усилия в диагонали:

$$Y = \frac{P}{\frac{a^2 + h^2}{h^2} \frac{F}{F_1} + \frac{a^2}{h^2} \frac{F}{F_1} \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Усилия в других стержнях теперь можно легко определить из уравнений (g).

7. Решить предыдущую задачу, полагая $a = h$, $F = 5F_1$ и $P = 20t$.

8. Какие напряжения возникнут в стальном болте и медной трубке (рис. 24) при повороте гайки на $\frac{1}{4}$ оборота, если длина болта $l = 75$ см, шаг нареки болта $h = 0,3$ см, площадь поперечного сечения болта $F_b = 6$ см², а трубки $F_m = 12$ см²?

Решение. Пусть X означает неизвестное растягивающее усилие в болте и сжимающее усилие в трубке. Величина X определится из условия, что удлинение болта, сложенное с укорочением трубки, равняется перемещению гайки вдоль болта. В нашем случае, полагая длину трубки равной длине болта, получим

$$\frac{Xl}{E_b F_b} + \frac{Xl}{E_m F_m} = \frac{1}{4} h,$$

откуда

$$X = \frac{h E_c F_c}{\left(1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m} \right)} = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 6}{4 \cdot 7,75 \left(1 + \frac{10}{11} \right)} = 6286 \text{ кг.}$$

Растягивающее напряжение в болте равно $\sigma_b = \frac{X}{F_b} = 1048 \text{ кг/см}^2$. Сжимающее напряжение в трубке равно $\sigma_m = \frac{X}{F_m} = 524 \text{ кг/см}^2$.

9. Как изменятся напряжения, вычисленные в предыдущей задаче, если к концам болта приложить растягивающие силы $P = 2$ т?

Решение. Пусть X означает увеличение растягивающей силы в болте, а Y — уменьшение сжимающей силы в трубке. Тогда из условия равновесия получим

$$X + Y = P. \quad (i)$$

Второе уравнение можно написать на основании того, что относительные удлинения болта и трубки под действием сил P должны быть равны, т. е.

$$\frac{X}{E_b F_b} = \frac{Y}{E_m F_m}. \quad (j)$$

Из уравнения (i) и (j) легко можно вычислить силы X и Y и соответствующие напряжения.

10. Призматический брус с заделанными концами нагружен по направлению оси в двух промежуточных поперечных сечениях (рис. 25) силами P_1 и P_2 . Определить реакции R и R_1 .

Указание. Пользуясь уравнением (d) на стр. 28, можно вычислить реакции, вызываемые каждой силой в отдельности, и затем просуммировать эти реакции. Определить реакции, если $a = 0,3l$, $b = 0,3l$ и $P_1 = 2P_2 = 400$ кг.

Отст. $R = 240$ кг, $R_1 = 360$ кг.

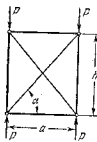


Рис. 23.



Рис. 25.



Рис. 26.



Рис. 24.

11. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 26, где OA есть ось симметрии.

Ответ. Растягивающее усилие в стержне OB равняется сжимающему усилию в стержне OC и равно $\frac{P}{2} \sin \alpha$. Усилие в горизонтальном стержне OA равно нулю.

12. Решить задачу 10, полагая, что площадь поперечного сечения нижнего участка бруса длиной c в два раза больше площади поперечного сечения двух верхних участков длиной a и b .

Ответ.

$$R_1 = \frac{2P_1 a + 2P_2 (l - c)}{2l - c}, \quad R_2 = \frac{P_1 (2b + c) + P_2 c}{2l - c}.$$

7. Начальные и температурные напряжения

В статически неопределимой системе возможно существование некоторых начальных напряжений, возникающих в стержнях при сборке. Эти напряжения могут возникнуть благодаря неизбежной неточности в длинах стержней или благодаря намеренному отклонению от правильного значения этих длин и называются *начальными напряжениями сборки*. Такие напряжения будут существовать даже при отсутствии внешних сил и зависят только от геометрических соотношений системы, от механических свойств материалов и от величины неточности. Допустим, например, что система, представленная на рис. 18, имеет по ошибке длину вертикального стержня $l+a$ вместо l . Тогда, после сборки стержней BO и DO , вертикальный стержень можно вставить на место лишь после предварительного сжатия и вследствие этого в наклонных стержнях возникнет некоторое растягивающее усилие. Пусть X означает сжимающее усилие, которое возникнет в вертикальном стержне после сборки. Тогда соответствующее растягивающее усилие в каждом из наклонных стержней будет $\frac{X}{2 \cos \alpha}$ и перемещение шарнира O от удлинения этих стержней будет (см. уравнение (b), стр. 27)

$$\Delta l = \frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha}. \quad (a)$$

Укорочение вертикального стержня будет

$$\Delta l_1 = \frac{Xl}{E_c F_c}. \quad (b)$$

Из элементарных геометрических соображений следует, что перемещение шарнира O вместе с укорочением вертикального стержня должно быть равно величине a . Это дает следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha} + \frac{Xl}{E_c F_c} = a,$$

откуда

$$X = \frac{a E_c F_c}{l \left(1 + \frac{E_c F_c}{2E_m F_m \cos^2 \alpha} \right)}. \quad (11)$$

Теперь можно вычислить начальные напряжения во всех стержнях.

Расширение стержней системы вследствие изменения температуры может иметь то же самое влияние, как и неточность в длине. Рассмотрим стержень с заделанными концами. Если температура стержня повышается от t_0 до t , а температурному расширению препятствуют реакции на концах, то в стержне возникнут сжимающие напряжения, величина которых может быть вычислена из условия, что длина остается неизменной. Пусть α обозначает коэффициент линейного расширения и σ — сжимающее напряжение, возникающее от изменения температуры. Тогда уравнение для определения σ будет

$$\alpha (t - t_0) = \frac{\sigma}{E},$$

откуда

$$\sigma = E \alpha (t - t_0). \quad (12)$$

В качестве второго примера рассмотрим систему, представленную на рис. 18, и положим, что вертикальный стержень нагреет от температуры t_0 при сборке до новой температуры t . Соответствующее температурное расширение будет частично задержано двумя другими стержнями системы, и в вертикальном стержне будут развиваться некоторые сжимающие напряжения, а в наклонных стержнях растягивающие напряжения. Величина сжимающего усилия в вертикальном стержне определится из уравнения (11), в котором вместо величины a нужно подставить температурное расширение $\alpha l (t - t_0)$ вертикального стержня.

ЗАДАЧИ

1. Трамвайные рельсы сварены между собой в стыках при 15°C . Каковы будут напряжения в этих рельсах при нагревании их солнцем до 55°C , если коэффициент линейного расширения стали равен $125 \cdot 10^{-7}$?

Ответ. $\sigma = 1000 \text{ кг/см}^2$.

2. Как изменятся напряжения в случае, представленном на рис. 24, при увеличении температуры от t_0 до t , если коэффициент линейного расширения стали равен α_s , а меди $\alpha_m > \alpha_s$?

Решение. Так как $\alpha_m > \alpha_s$, то увеличение температуры вызовет сжатие в меди и растяжение в стали. Относительные удлинения меди и стали должны быть равны. Обозначая через X увеличение растягивающей силы в болте благодаря изменению температуры, получим

$$\alpha_s (t - t_0) + \frac{X}{E_c F_c} = \alpha_m (t - t_0) - \frac{X}{E_m F_m}$$

откуда

$$X = \frac{(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) E_c F_c}{1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m}}$$

Изменение напряжений в болте и в трубке можно вычислить теперь обычным путем.
3. Медная пластинка спаяна с двумя стальными пластинками (рис. 27). Каковы будут напряжения в стали и меди при повышении температуры пластинок от t_0 до t ?

Решение. Нужно применить тот же способ, что и в предыдущей задаче.

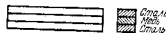


Рис. 27.

4. Каковы будут напряжения в стержнях системы, представленной на рис. 18, если температура всех стержней повысится от t_0 до t ?

Решение. Пусть X означает растягивающее усилие, вызванное в стальном стержне увеличением температуры. Тогда из условий равновесия шарнира O можно найти, что в медных стержнях действуют сжимающие усилия, равные;

$\frac{X}{2 \cos \alpha}$; следовательно, удлинение стального стержня получится

$$\Delta l = \alpha_c (t - t_0) l + \frac{Xl}{E_c F_c},$$

и удлинение медных стержней равно

$$\Delta l_1 = \alpha_m (t - t_0) \frac{l}{\cos \alpha} - \frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha}.$$

Кроме того, из предыдущих рассуждений (см. стр. 27) имеем

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \alpha.$$

Поэтому

$$\alpha_c (t - t_0) l + \frac{Xl}{E_c F_c} = \alpha_m (t - t_0) \frac{l}{\cos^2 \alpha} - \frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha},$$

откуда

$$X = \frac{(t - t_0) \left(\frac{\alpha_m}{\cos^2 \alpha} - \alpha_c \right) E_c F_c}{1 + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \frac{E_c F_c}{E_m F_m}}.$$

Напряжения в стали и меди получатся теперь из следующих уравнений:

$$\sigma_c = \frac{X}{F_c}, \quad \sigma_m = \frac{X}{2 F_m \cos \alpha}.$$

5. Полагая, что в случае, показанном на рис. 20, приложена постоянная нагрузка $P = 40$ л при начальной температуре t_0 , определить, при каком увеличении температуры будет передаваться полностью нагрузка на медную трубку, если $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$.

Решение.

$$(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) = \frac{4P}{\pi(D^3 - d^3)E_m}.$$

откуда $t - t_0 = 40^\circ \text{C}$,

6. Стальной стержень, состоящий из двух участков длиной l_1 и l_2 и площадью поперечного сечения F_1 и F_2 , заделан на концах. Найти температурные напряжения, если температура повышается на 60°C . Положить $l_1 = l_2$, $F_1 = 2F_2$ и $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$.

Ответ. $\sigma_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 2000 \text{ кг/см}^2$.

7. Найти температурные напряжения в системе, показанной на рис. 27, если температура всех трех пластинок повысится на 100°C . Толщина каждой из трех пластинок одна и та же и коэффициенты линейного расширения равны $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$. Положить $E_m F_c = 1:2$.

Ответ. Напряжения в медной пластинке сжимающие и равны $\sigma_m = 320 \text{ кг/см}^2$, а в стальных пластинках — растягивающие и равны $\sigma_c = 160 \text{ кг/см}^2$.
8. Температура системы, показанной на рис. 18, повысилась на 50°C . Найти температурные напряжения, если все три стержня — стальные и площади их поперечных сечений равны. Положить $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. Вертикальный стержень растянут и напряжение в нем равно

$$\sigma = \frac{2500 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 1} \text{ кг/см}^2;$$

наклонные стержни сжаты и напряжение в каждом из них равно

$$\sigma = \frac{1250 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ кг/см}^2.$$

9. Найти напряжения в проволоках системы, показанной на рис. 21, если площадь поперечного сечения каждой проволоки равна 1 см^2 , груз $Q = 2000 \text{ кг}$ и температура системы повысится после сборки на 10°C . Положить $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$, $E_m = 1 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $\sigma_c = 1040 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_m = 480 \text{ кг/см}^2$.

10. Найти напряжения, которые возникнут в системе, представленной на рис. 23, если температура верхней распорки повысится от t_0 до t градусов.

Ответ. Сжимающее усилие X в верхней распорке определится из уравнения

$$\alpha(t - t_0)a = X \left(\frac{2h}{EF} \frac{a^2}{a} + \frac{2h}{EF_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{2a}{EF_1} \right).$$

8. Растяжение кругового кольца

Если по окружности тонкого кругового кольца действуют равномерно распределенные радиальные силы (рис. 28), то они вызовут равномерное удлинение кольца. Для того чтобы определить растягивающее усилие P в кольце, вообразим, что кольцо разрезано горизонтальным диаметральной сечением (рис. 28, б) и рассмотрим верхнюю часть как свободное тело. Если q означает равномерную нагрузку, приходящуюся на единицу длины оси кольца, и r — радиус оси, то действующая сила на элемент кольца, вырезанный двумя смежными сечениями, будет $qr d\varphi$, где $d\varphi$ — центральный угол, соответствующий элементу. Взяв сумму вертикальных составляющих всех сил, действующих на половину кольца, получим следующее уравнение равновесия

$$2P - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr \sin \varphi d\varphi - 2qr,$$

откуда

$$P = qr, \quad (13)$$

Растягивающее напряжение в кольце получится путем деления усилия P на площадь поперечного сечения кольца¹⁾.

В практических приложениях часто бывает необходимо определить растягивающие напряжения во вращающемся кольце. В этом

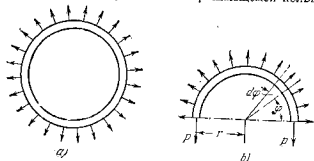


Рис. 28.

случае q представляет центробежную силу на единицу длины кольца и определяется из уравнения

$$q = \frac{Qv^2}{gr}, \quad (14)$$

в котором Q — вес единицы длины кольца, r — радиус оси, v — скорость точек кольца при радиусе r и g — ускорение силы тяжести. Подставляя это выражение вместо q в уравнение (13), получим

$$P = \frac{Qv^2}{g},$$

и соответствующее растягивающее напряжение будет

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{Qv^2}{Fg} = \frac{\gamma v^2}{g}. \quad (15)$$

Видно, что напряжения пропорциональны плотности $\frac{\gamma}{g}$ материала и квадрату окружной скорости²⁾. Для стального кольца и для скорости $v = 30$ м/сек это напряжение будет равно 72 кг/см². Следовательно, для того же материала, но для другой скорости v_1 напряжение будет $0,08 v_1^2$ кг/см², если v_1 выражено в метрах в секунду.

¹⁾ Ниже будет показано (см. часть II), что в случае тонкого кольца справедливо предположить, что напряжения равномерно распределяются по поперечному сечению кольца.

²⁾ Для тонкого кольца скорость на оси можно принять равной окружной скорости.

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее растягивающее напряжение в стенке цилиндра пресса, показанного на рис. 5, если внутренний диаметр равен 25 см, а толщина стенки равна $2,5$ см.

Решение. Наибольшее гидростатическое давление p в цилиндре найдется из уравнения

$$p \frac{\pi 25^2}{4} = 40\,000 \text{ кг},$$

откуда $p = 81,5$ кг/см². Вырезав из цилиндра элементарное кольцо шириной 1 см по оси цилиндра и применяя уравнение (13), в котором для этого случая $q = p = 81,5$ кг/см и $r = 12,5$ см, получим

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{81,5 \cdot 12,5}{2,5 \cdot 1} = 407,5 \text{ кг/см}^2.$$

2. Медная трубка плотно надета на стальную трубку при высокой температуре t (рис. 29) таким образом, что при этой температуре никакого давления между трубками не существует. Определить напряжения, которые возникнут в меди и стали при охлаждении трубок до комнатной температуры t_0 , если внешний диаметр стальной трубки равен d , толщина стальной трубки h_c , а медной трубки — h_m .

Решение. Вследствие разницы в коэффициентах линейного расширения α_c и α_m при охлаждении возникнет давление между внешней и внутренней трубками. Пусть x означает давление на 1 см²; тогда растягивающее напряжение в медной трубке будет

$$\sigma_m = \frac{xd}{2h_m},$$

и сжимающее напряжение в стальной трубке будет

$$\sigma_c = \frac{xd}{2h_c}.$$

Давление x найдется из условия, что при охлаждении обе трубки имеют одно и то же относительное укорочение, следовательно,

$$\alpha_m(t - t_0) - \frac{xd}{2E_m h_m} = \alpha_c(t - t_0) + \frac{xd}{2E_c h_c},$$

откуда

$$\sigma = \frac{xd}{2h_m} - \frac{(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) E_m}{1 + \frac{h_m E_m}{h_c E_c}}.$$

Таким же способом можно вычислить напряжение в стальной трубке.

3. Каково будет дополнительное напряжение в трубке, если подвергнуть ее внутреннему гидростатическому давлению $p = 6,6$ кг/см²? При этом внутренний диаметр $d_1 = 10$ см, $h_c = 0,3$ см и $h_m = \frac{20}{\pi} \cdot 0,3$ см (см. рис. 29).

Решение. Вырезая из трубки элементарное кольцо шириною 1 см, найдем, что полное растягивающее усилие в кольце будет

$$P = \frac{\rho d_1}{2} = 33 \text{ кг.}$$

Вследствие того, что относительные удлинения по окружности в меди и стали одинаковы, напряжения будут пропорциональны модулям упругости, т. е. напряжение в меди будет составлять $\frac{11}{20}$ напряжения в стали. В то же самое время площадь поперечного сечения меди равна $\frac{20}{11}$ площади стали; следовательно, усилие P будет поровну распределено между двумя металлами, и растягивающее напряжение в меди, вызываемое гидростатическим давлением, будет

$$\sigma_m = \frac{P}{2h_m} = \frac{33}{2 \cdot \frac{20}{11} \cdot 0,3} = 30,3 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в стали будет

$$\sigma_c = \frac{20}{11} \sigma_m = 55 \text{ кг/см}^2.$$

4. Составное кольцо состоит из внутреннего медного кольца и наружного стального кольца. Внутренний диаметр стального кольца меньше внешнего диаметра медного кольца на величину δ ; поэтому система собирается после предварительного нагревания стального кольца. При охлаждении стальное кольцо производит давление на медное кольцо (давление от усадки). Определить напряжения в стали и меди после сборки, если оба кольца имеют прямоугольные поперечные сечения с размерами h_c и h_m в радиальном направлении и размерами, равными единице в направлении, перпендикулярном плоскости кольца. Размеры h_c и h_m можно считать малыми по сравнению с диаметром d поверхности соприкосновения двух колец.

Решение. Пусть x будет равномерно распределенное давление на 1 см² поверхности соприкосновения колец; тогда сжимающее напряжение в меди и растягивающее напряжение в стали найдем из уравнений

$$\sigma_m = \frac{xd}{2h_m}, \quad \sigma_c = \frac{xd}{2h_c}. \quad (a)$$

Уменьшение внешнего диаметра медного кольца будет

$$\Delta d_m = \frac{\sigma_m d}{E_m} = \frac{xd^2}{2h_m E_m}.$$

Увеличение внутреннего диаметра стального кольца будет

$$\Delta d_c = \frac{\sigma_c d}{E_c} = \frac{xd^2}{2h_c E_c}.$$

Неизвестное давление x найдется из уравнения

$$\Delta d_m + \Delta d_c = \frac{xd^2}{2} \left(\frac{1}{h_m E_m} + \frac{1}{h_c E_c} \right) = \delta.$$

откуда

$$x = \frac{2\delta h_c E_c}{d^2 \left(1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m} \right)}.$$

Теперь найдем из уравнений (a) напряжения

$$\sigma_m = \frac{\delta h_c}{d} \frac{h_c}{h_m} \frac{E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m}}, \quad \sigma_c = \frac{\delta}{d} \frac{E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m}}.$$

5. Определить напряжения, которые возникнут в составном кольце предыдущей задачи от вращения кольца с постоянной скоростью n оборотов в минуту.

Решение. Так как медь имеет большую плотность и меньший модуль упругости, чем сталь, то медное кольцо при вращении будет давить на стальное кольцо. Пусть x означает давление на 1 см² поверхности соприкосновения между двумя кольцами. Тогда соответствующие напряжения определяются из уравнений (a) предыдущей задачи. В дополнение к этим напряжениям необходимо принять во внимание напряжения, возникающие от центробежных сил. Обозначая через γ_c и γ_m веса единицы объема стали и меди и пользуясь уравнением (15), получим

$$\sigma_c = \frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_c}{2} \right)^2, \quad \sigma_m = \frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2.$$

Складывая эти напряжения с напряжениями от давления x и замечая, что относительные удлинения объема колец должны быть одинаковы, получим следующее уравнение для определения x :

$$\frac{1}{E_c} \left[\frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_c}{2} \right)^2 + \frac{xd}{2h_c} \right] = \frac{1}{E_m} \left[\frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2 - \frac{xd}{2h_m} \right],$$

откуда можно вычислить x для каждого частного случая. Зная x , можно найти без затруднения полное напряжение в меди и стали.

6. Определить предельную окружную скорость медного кольца, если допустимое напряжение $[\sigma] = 200 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma_m = 8,8 \text{ г/см}^3$.

Ответ. $v = 48,3 \text{ м/сек.}$

7. Определить напряжение в меди при комнатной температуре (см. задачу 2 и рис. 29), если $t - t_0 = 55^\circ \text{С}$, $\alpha_m - \alpha_c = 40 \cdot 10^{-7}$, $h_c = h_m$.

Ответ. $\sigma_m = 136,2 \text{ кг/см}^2$.

8. Определить в задаче 5 число оборотов n в минуту, при котором напряжения в медном кольце становятся равными нулю, если начальные напряжения при сборке в том же кольце были сжимающие и равные $\sigma_m = h_c$ и $E_c = 2E_m$.

Решение. Число оборотов n определится из уравнения

$$3\sigma_0 = \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left[\frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{d+h_c}{2} \right)^2 \right].$$

9. Найти напряжения в составном кольце задачи 4, полагая $\delta = 0,003 \text{ см}$, $d = 10 \text{ см}$, $h_c = h_m$ и $\frac{E_c}{E_m} = 2$. Найти изменение этих напряжений, если температура колец увеличится после сборки на 10°С . Принять $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$.

Ответ. $\sigma_m = \sigma_c = 200 \text{ кг/см}^2$. Величина изменения напряжений равна 27 кг/см^2 .

10. Найти в задаче 5 напряжения в стали и меди, если $n = 3000$ оборотов в минуту, $d = 60 \text{ см}$, $h_c = h_m = 1,2 \text{ см}$, $\gamma_c = 7,8 \text{ г/см}^3$ и $\gamma_m = 8,8 \text{ г/см}^3$.

ГЛАВА II

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

9. Напряжения по наклонным сечениям при простом растяжении и сжатии

При изучении напряжений в призматическом брусе, подверженном осевому растяжению силой P , мы ранее рассматривали (§ 2) только напряжения по поперечным сечениям, перпендикулярным к оси бруса. Остановимся теперь на случае, когда сечение pq (рис. 30, а), перпендикулярное плоскости фигуры, наклонено к оси. Вследствие того, что все продольные волокна имеют одно и то же удлинение (см. стр. 12), усилия, представляющие действие правой части бруса на левую, равномерно распределены по сечению pq . Левая часть бруса, изображенная отдельно на рис. 30, б, находится в равновесии под действием этих усилий и внешней силы, приложенной к левому концу. Следовательно, равнодействующая усилий, распределенных по сечению pq , равна P . Обозначая через F площадь сечения, перпендикулярного к оси бруса, и через φ угол между осью x и нормалью n к сечению pq , найдем, что площадь сечения pq будет равна $\frac{F}{\cos \varphi}$ и напряжение σ_φ по этому сечению будет

$$\sigma_\varphi = \frac{P \cos \varphi}{F} = \sigma_x \cos \varphi, \quad (16)$$

где $\sigma_x = \frac{P}{F}$ означает напряжение по сечению, перпендикулярному к оси бруса. Из формулы видно, что напряжение σ_φ по какому-либо наклонному сечению бруса меньше напряжения σ_x по сечению, нормальному к оси бруса, и что оно уменьшается с увеличением угла φ . Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ сечение pq параллельно оси бруса и на-

пряжение σ_φ делается равным нулю, что указывает на то, что между продольными волокнами бруса не имеется никакого давления.

Напряжение σ_φ , определяемое уравнением (16), имеет направление силы P и не перпендикулярно к сечению pq . В таких случаях полное напряжение обычно разлагают на два составляющих напряжения, как показано на рис. 31. Составляющая напряжения σ_n , перпендикулярная к сечению, называется *нормальным напряжением*. Его величина равна

$$\sigma_n = \sigma_\varphi \cos \varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi. \quad (17)$$

Тангенциальная составляющая τ называется *касательным напряжением* и его величина равна

$$\tau = \sigma_\varphi \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi \sin \varphi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \quad (18)$$

Чтобы отчетливо представить себе деформации, которые вызывает каждое составляющее напряжение, мы рассмотрим элемент, вырезанный из бруса двумя смежными параллельными сечениями pq и p_1q_1 (рис. 32, а). Напряжения, действующие на этот элемент, показаны на рис. 32, а. Рисунки 32, б и 32, в получены путем разложения этих напряжений на нормальные и касательные составляющие, как указано выше, и изображают отдельно действие каждой из этих составляющих. Видно, что *нормальные напряжения* σ_n производят растяжение элемента в направлении нормали n к сечению pq и *касательные напряжения* производят сдвиг сечения pq относительно p_1q_1 .

Из уравнения (17) видно, что *наибольшее нормальное напряжение* действует по сечениям, перпендикулярным к оси бруса, и равно $(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x$. *Наибольшее касательное напряжение*, как видно из уравнения (18), действует по сечениям, наклоненным под углом 45° к оси бруса, где $\sin 2\varphi = 1$, и равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x. \quad (19)$$

Хотя наибольшее касательное напряжение равно половине наибольшего нормального напряжения, но иногда это напряжение является решающим фактором при рассмотрении предела прочно-

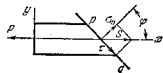


Рис. 31.

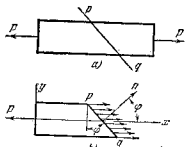


Рис. 30.

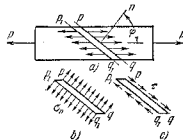


Рис. 32.

сти тех материалов, которые гораздо слабее при сдвиге, чем при растяжении.

Например, при испытании на растяжение образца из мягкой стали с отполированной поверхностью видимое течение металла происходит по наклонным линиям, так называемым линиям Людерса (рис. 33). Течение происходит по наклонным плоскостям, по которым касательные напряжения являются наибольшими, и при величине силы P , которая соответствует точке B на рис. 4, a . Это указывает на то, что в случае мягкой стали разрушение происходит от наибольших касательных напряжений, хотя эти напряжения равны половине наибольшего нормального напряжения.

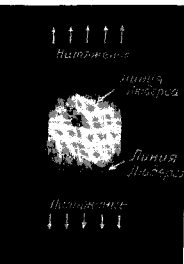


Рис. 33.

нее действие на элемент между смежными сечениями pq и p_1q_1 . Отрицательный знак у τ в формуле (18) указывает на то, что при сжатии бруса действие касательных напряжений на элемент имеет направление, противоположное тому, что показано на рис. 32, c .

Рисунок 34 иллюстрирует правила знаков для нормального и касательного напряжений, которым будем пользоваться. А именно, положительный знак для касательного напряжения принимаем в том случае, когда касательные напряжения образуют пару, вращающую по часовой стрелке, и отрицательный знак — в случае противоположного направления.

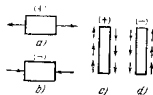


Рис. 34.

Формулы (17) и (18), выведенные для бруса, испытывающего растяжение, можно использовать также и в случае сжатия. Растягивающее напряжение принимается положительным, а сжимающее — отрицательным. Следовательно, для бруса, подвергнутого осевому сжатию, мы должны только взять σ_x с отрицательным знаком в формулах (17) и (18). Отрицательный знак у σ_x указывает на то, что на рис. 32, b мы получаем вместо растяжения сжимающее действие на элемент между смежными сечениями pq и p_1q_1 .

1. Показать, что пары, представленные на рис. 32, b и 32, c уравновешивают друг друга.

2. Пряматягаческий брус с площадью поперечного сечения F подвергается действию осевой сжимающей силы $P = 4 \text{ т}$. Найти σ_x и τ для площадки, наклоненной под углом 45° к оси бруса.

$$\text{Ответ. } \sigma_x = -\frac{P}{F}; \tau = -\frac{2000}{F} \text{ кг/см}^2.$$

3. Найти наименьшее расстояние между плоскостями pq и p_1q_1 на рис. 32, a , вызываемое силой $P = 12 \text{ т}$, если первоначальное расстояние между этими плоскостями равно 1 см , площадь поперечного сечения $F = 6 \text{ см}^2$ и $\varphi = 45^\circ$.

$$\text{Ответ. } \Delta l = 0,0095 \text{ см.}$$

4. Найти угол φ (рис. 32, a), определяющий положение плоскости pq , при котором 1) нормальное напряжение σ_x равно половине наибольшего напряжения σ_x , 2) касательное напряжение равно одной трети σ_x .

$$\text{Ответ. } 1) \varphi = \pm 45^\circ; 2) \varphi = \arctg \frac{1}{3}.$$

10. Круг Мора

Формулы (17) и (18) можно представить графически¹⁾. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке O и с положительным направлением осей, как показано на рис. 35. Начнем с сечения pq , перпендикулярного к оси бруса. В этом случае мы имеем $\varphi = 0$ (см. рис. 31) и из формулы (17) и (18) находим $\sigma_x = \sigma_x$, $\tau = 0$. Выбирая определенный масштаб для напряжений и откладывая нормальные составляющие по горизонтальной оси и касательные составляющие по вертикальной оси, находим, что напряжения, действующие на площадке с углом $\varphi = 0$, будут представлено на рис. 35 точкой A , имеющей абсциссу, равную σ_x , и ординату, равную нулю. Взяв теперь площадку, параллельную оси бруса, мы имеем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и

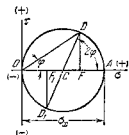


Рис. 35.

замечая, что обе составляющие напряжения равны нулю на такой площадке, мы заключаем, что начало координат O на рис. 35 соответствует этой площадке. Построив теперь круг на OA , как на диаметре, можем легко доказать, что составляющие напряжения для какого-либо сечения pq с произвольно выбранным углом φ на рис. 31 будут представлены координатами точки этого круга. Для того чтобы получить точку на круге, соответствующую определенному углу φ , необходимо измерить от точки A в направ-

¹⁾ Это графическое представление принадлежит О. Мору, Civilingenieur, стр. 113, 1882, см. также Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin, стр. 219, 1906. В этой книге даны ссылки на другие опубликованные работы по этому же вопросу.

ления против движения часовой стрелки дугу, стягивающую угол, равный 2φ . Пусть D будет точка, полученная таким способом; тогда из фигуры имеем:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi,$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi.$$

Сравнивая эти выражения для координат точки D с выражениями (17) и (18), видим, что эта точка представляет напряжения, действующие на площадке pq на рис. 31. В то время как сечение pq

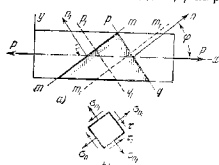


Рис. 36.

поворачивается против часовой стрелки около оси, перпендикулярной к плоскости рис. 31, и φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка D движется от A к O , так что верхняя половина круга определяет напряжения для всех значений φ в этих пределах.

Если угол φ больше $\frac{\pi}{2}$, мы получим сечение, как показано на рис. 36, а, в результате разреза бруса плоскостью mn , внешняя

нормаль n_1 к которой образует с осью x угол, больший $\frac{\pi}{2}$. Измеряя угол, равный 2φ , против часовой стрелки от точки A на рис. 35, мы получим теперь точку на нижней половине окружности.

Возьмем, например, случай, когда mn перпендикулярно к сечению pq , которое было рассмотрено ранее. В этом случае соответствующая точка на круге рис. 35 есть точка D_1 , так что угол DOD_1 равен π и DD_1 есть диаметр круга. Пользуясь координатами точки D_1 , находим составляющие напряжения σ_{n_1} и τ_1 для сечения mn :

$$\sigma_{n_1} = OF_1 = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi, \quad (20)$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{CD_1} \sin 2\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \quad (21)$$

Сравнивая эти результаты с выражениями (17) и (18), мы находим

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin^2 \varphi = \sigma_x, \quad (22)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (23)$$

¹⁾ Часть бруса, на которую действуют напряжения, показана штриховкой. Внешняя нормаль n_1 направлена наружу от этой части.

²⁾ Знак минус взят потому, что точка D_1 находится на стороне отрицательных координат.

Это указывает, что сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимным перпендикулярным площадкам, остается постоянной и равной σ_x . Касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, численно равны, но противоположны по знаку.

Если провести (рис. 36, а) сечения m_1m_1 и p_1q_1 , параллельные mn и pq , то будет вырезан из бруса элемент, показанный на рис. 36, б; на этом же рисунке указаны и направления напряжений, действующих на этот элемент. Видно, что касательные напряжения, действующие по граням элемента, параллельным плоскости pq , создают пару, вращающую по часовой стрелке; следовательно, согласно принятому правилу (см. рис. 34, с), эти напряжения нужно считать положительными. Касательные напряжения, действующие по двум другим граням элемента, создают пару, вращающую против часовой стрелки; поэтому, согласно принятому правилу (см. рис. 34, д), эти напряжения являются отрицательными.

Круг, изображенный на рис. 35 и называемый *кругом напряжений* или *кругом Мора*, применяется для определения составляющих напряжений σ_n и τ по сечению pq , нормаль к которому образует угол φ с осью x (рис. 31). Подобное построение можно применить к решению обратной задачи, т. е. когда даны составляющие σ_n и τ и требуется найти растягивающее напряжение σ_x , действующее по оси, и угол φ . На рис. 35 мы видим, что угол между хордой OD и осью x равен φ . Следовательно, после построения точки D с координатами σ_n и τ мы получим угол φ путем проведения линии OD . Зная угол φ , можно провести радиус DC , образующий угол 2φ с осью OC , и получить центр C круга напряжений. Диаметр этого круга дает требуемое напряжение σ_x .

ЗАДАЧИ

1. Определять σ_n и τ аналитически и графически, если $\sigma_x = 1000$ кг/см² и $\tau = 36^\circ$ или 120° . Пользуясь углами 30° и 120° , вырезать элемент, как изображено на рис. 36, б, и показать стрелками направления напряжений, действующих на элемент.
2. Решить предыдущую задачу, полагая, что вместо растягивающего напряжения σ_x действует сжимающее напряжение той же величины. Следует заметить, что в этом случае диаметр круга (рис. 35) должен лежать на отрицательной стороне абсцисс.
3. По площадке pq (рис. 31) действуют нормальное напряжение $\sigma_n = 900$ кг/см² и касательное напряжение $\tau = 300$ кг/см². Найти угол φ и напряжение σ_x .

$$\text{Ответ. } \text{tg } \varphi = \frac{1}{3} \quad \sigma_x = \frac{\sigma_n}{\cos^2 \varphi} = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

4. На две перпендикулярные грани элемента, изображенного на рис. 36, б, действуют нормальные напряжения $\sigma_n = 800$ кг/см² и $\sigma_{n_1} = 400$ кг/см². Найти σ_x и τ .

$$\text{Ответ. } \sigma_x = 1200 \text{ кг/см}^2, \quad \tau = \pm 564 \text{ кг/см}^2.$$

5. Найти наибольшее касательное напряжение для случая задачи 1.

Ответ. $\tau_{\max} = 500 \text{ кг/см}^2$.

6. Определить угол наклона сечений, при котором нормальное и касательное напряжения численно равны.

Ответ. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

11. Растяжение или сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям

Имеются случаи, когда материал конструкции подвергается действию растяжения или сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В качестве примера такого напряженного состояния рассмотрим напряжения в цилиндрической стенке котла, подвергнутого внутреннему давлению $p \text{ кг/см}^2$ ¹⁾. Вырежем эле-

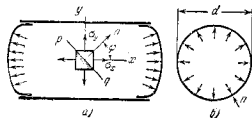


Рис. 37.

мент из цилиндрической стенки котла двумя смежными продольными сечениями и двумя поперечными сечениями (рис. 37, а). Вследствие внутреннего давления цилиндр будет растягиваться и в поперечном и в продольном направлениях. Растягивающие напряжения σ_x в поперечном (по окружности) направлении определяются таким же способом, как и в случае кругового кольца (параграф 8). Обозначая внутренний диаметр котла через d и толщину его стенки через h , найдем величину этого напряжения

$$\sigma_x = \frac{pd}{2h}. \quad (24)$$

При вычислении растягивающих напряжений σ_x в осевом направлении вообразим котел, разрезанный плоскостью, перпендикулярной к оси x . Рассматривая равновесие одной части котла, видим, что растягивающее усилие, вызывающее продольное растяжение котла, равно давлению на днище котла, т. е. равно

$$P = p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Площадь поперечного сечения стенки котла равняется²⁾

$$F = \pi dh.$$

Следовательно,

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{pd}{4h}. \quad (25)$$

Видно, что элемент стенки подвергается действию растягивающих напряжений σ_x и σ_y в двух взаимно перпендикулярных направлениях³⁾. В этом случае растягивающие напряжения σ_x в направлении по окружности в два раза больше напряжений σ_x в осевом направлении.

Для общего случая мы рассмотрим теперь напряжения по сечению pq (рис. 37, а), перпендикулярному к плоскости xy , и нормаль n к которому образует угол φ с осью x . Пользуясь формулами (17) и (18) предыдущего параграфа, мы заключаем, что растягивающее напряжение σ_x , действующее в осевом направлении, вызывает по площадке pq нормальное и касательное напряжения, соответственно равные

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2 \varphi, \quad \tau' = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi. \quad (а)$$

Для того чтобы вычислить составляющие напряжения, вызванные по этой же площадке pq растягивающим напряжением σ_y , заметим, что угол между σ_y и нормалью n (рис. 37, а) равняется $\frac{\pi}{2} - \varphi$ — φ и измеряется по часовой стрелке от оси y , в то время как φ измеряется против часовой стрелки от оси x . Из этого мы заключаем, что, пользуясь уравнениями (17) и (18), мы должны подставить в этом случае σ_y вместо σ_x и $-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ вместо φ . Это дает

$$\sigma''_n = \sigma_y \sin^2 \varphi, \quad \tau'' = -\frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\varphi. \quad (б)$$

Складывая эти составляющие напряжения (а) и (б), вызванные соответственно напряжениями σ_x и σ_y , получим полное нормальное и полное касательное напряжения по наклонной площадке для случая растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi, \quad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi \quad (27)$$

¹⁾ Предполагается, что толщина стенок мала по сравнению с диаметром, поэтому для площади поперечного сечения применяется приближенная формула.

²⁾ Имеется также давление на внутреннюю цилиндрическую поверхность элемента, но это давление мало по сравнению с σ_x и σ_y , поэтому при дальнейшем рассмотрении им пренебрегают.

³⁾ Точнее, p означает разность внутреннего и внешнего атмосферного давлений.

12. Круг Мора при сложном напряженном состоянии

Поступая так же, как в параграфе 10, при помощи круга Мора или круга напряжений легко можно получить графическое представление формул (26) и (27). Полагая опять, что абсциссы и ординаты представляют в некотором масштабе соответственно нормальные и касательные составляющие напряжения, мы заключаем, что точки A и B на рис. 38 с абсциссами, равными σ_x и σ_y , представляют напряжения, действующие по граням элемента на рис. 37, a , соответственно перпендикулярным оси x и оси y . Для того чтобы получить составляющие напряжения по наклонной площадке, определяемой углом φ на рис. 37, a , мы должны лишь построить круг на AB , как на диаметре, и провести радиус CD , образующий угол ACD , измеряемый против часовой стрелки от точки A и равный 2φ . Из рисунка мы заключаем, что

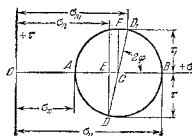


Рис. 38.

Если φ на рис. 37, a , мы должны лишь построить круг на AB , как на диаметре, и провести радиус CD , образующий угол ACD , измеряемый против часовой стрелки от точки A и равный 2φ . Из рисунка мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OC} - \overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) - \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) \cos 2\varphi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Это указывает на то, что абсцисса \overline{OE} точки D круга, измеренная в принятом масштабе, даст нормальную составляющую напряжения согласно уравнению (26).

Ордината точки D равняется

$$\overline{DE} = \overline{CD} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi.$$

Замечая, что эта ордината должна быть взята с отрицательным знаком, мы заключаем, что ордината точки D , взятая с надлежащим знаком, даст касательную составляющую напряжения τ согласно уравнению (27).

Если площадку pq вращать против часовой стрелки относительно оси, перпендикулярной плоскости xy (см. рис. 37, a), соответствующая точка D будет смещаться против часовой стрелки по контуру круга напряжений на рис. 38, так что для каждого значения угла φ соответствующие значения составляющих σ_n и τ получаются как координаты точки D .

Из этого графического представления формул (26) и (27) сразу видно, что наибольшее нормальное напряжение в данном случае¹⁾ равняется σ_y , а наибольшее касательное напряжение, представленное радиусом \overline{CF} круга на рис. 38, равняется

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \quad (28)$$

и имеет место при $\sin 2\varphi = -1$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Такой же величины касательное напряжение, но с отрицательным знаком действует по площадке, для которой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Взяв две перпендикулярные площадки, определяемые углами φ и $\frac{\pi}{2} + \varphi$, которые составляют с осью x нормали n и n_1 , найдем, что соответствующие напряжения дают координаты точек D и D_1 на рис. 38, и мы заключаем, что

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (29)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (30)$$

Это указывает на то, что сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, остается по-

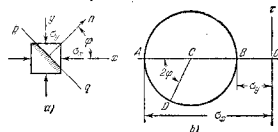


Рис. 39.

стоянной, в то время как угол φ изменяется. Касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, численно равны, но противоположны по знаку.

Круг напряжений, подобный кругу на рис. 38, можно построить также и в том случае, если одно или оба напряжения σ_x и σ_y являются сжимающими. Необходимо лишь откладывать сжимающие напряжения на отрицательной стороне оси абсцисс. Полагая, например, что напряжения, действующие на элемент, показаны на рис. 39, a , найдем, что соответствующим кругом будет изображенный на рис. 39, b . Составляющие напряжения, действующие по площадке pq с нормалью n , даны на диаграмме координатами точки D .

¹⁾ Мы рассматриваем только площадки, перпендикулярные к плоскости xy . Более общий случай см. параграф 18.

ЗАДАЧИ

1. Котел, показанный на рис. 37, имеет $d = 2,0$ м, $h = 1$ см. Определить σ_x и σ_y , если $p = 5$ кг/см². Вырезать элемент плоскостями, для которых $\varphi = 30^\circ$ и 120° , и показать величину и направление составляющих напряжений, действующих по боковым граням элемента.
2. Определить напряжения σ_n , σ_{n_1} , τ и τ_1 , если (см. рис. 39, а) $\sigma_x = 1000$ кг/см², $\sigma_y = -500$ кг/см² и $\varphi = 30^\circ$, $\varphi_1 = 120^\circ$.
3. Определить σ_n , σ_{n_1} , τ и τ_1 в предыдущей задаче, если угол выбран так, что τ является наибольшим.

Отв. $\sigma_n = \sigma_{n_1} = 250$ кг/см², $\tau = -\tau_1 = 750$ кг/см².

13. Главные напряжения

В предыдущем параграфе было показано, что при растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и y одно из двух напряжений σ_x или σ_y является наибольшим, а другое наименьшим нормальным напряжением. Для всех наклонных площадок, подобных площадкам pq на рис. 37, а и 39, а, значение нормального напряжения находится между этими предельными значениями. В то же самое время по всем наклонным площадкам действуют не только нормальные напряжения σ_n , но также и касательные напряжения τ . Такие напряжения, как σ_x и σ_y , одно из которых является наибольшим, а другое наименьшим нормальным напряжением, называются *главными напряжениями*, а две перпендикулярные площадки, по которым они действуют, называются *главными площадками*. По главным площадкам касательные напряжения не действуют.

В примере предыдущего параграфа (рис. 37) главные напряжения σ_x и σ_y были найдены из очень простых соображений, и требовалось найти выражения для нормального и касательного напряжений, действующих по какой-либо наклонной площадке, подобной площадке pq на рис. 37, а. В нашем дальнейшем изложении будут случаи обратной задачи (см. стр. 114), в которой по заданным касательным и нормальным напряжениям, действующим по двум перпендикулярным площадкам, требуется найти величину и направление главных напряжений. Наиболее просто решается эта задача при помощи круга напряжений, как сделано на рис. 38. Положим, что напряжения, действующие на элементарный прямоугольный параллелепипед $abcd$, показаны на рис. 40, а. Напряжения σ_x и σ_y не являются главными напряжениями, так как по площадкам, перпендикулярным к осям x и y , действуют не только нормальные, но и касательные напряжения. Для того чтобы построить круг напряжений в этом случае, мы сначала используем составляющие напряжения σ_x , σ_y и τ и построим точки D и D_1 , как показано на рис. 40, б. Так как эти точки представляют напряжения, действующие по двум перпендикулярным площадкам, то линия

DD_1 представляет диаметр круга напряжений. Точка пересечения этого диаметра с осью x дает центр C круга, так что круг можно легко построить. Точки A и B , где круг пересекает ось x , определяют величину наибольшего и наименьшего нормальных напряже-

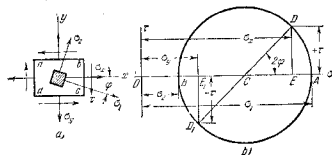


Рис. 40.

ний, которые являются главными напряжениями и обозначаются через σ_1 и σ_2 . Пользуясь кругом, можно легко получить формулы для вычисления σ_1 и σ_2 .

Из рисунка мы имеем:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad (31)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (32)$$

Направления главных напряжений также можно получить из рисунка. Мы знаем, что угол DCA есть удвоенный угол между напряжением σ_1 и осью x , и так как 2φ измерен от D к A по часовой стрелке, то направление σ_1 должно быть такое, как указано на рис. 40, а. Если мы выделим элемент, заштрихованный на рисунке, с гранями, перпендикулярными и параллельными σ_1 , то по его граням будут действовать только нормальные напряжения σ_1 и σ_2 . Для определения числового значения угла φ из рисунка мы имеем

$$|\operatorname{tg} 2\varphi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}.$$

Что же касается знака угла φ , то он должен быть взят отрицательным, так как угол измерен от оси x по часовой стрелке (рис. 40, а). Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (33)$$

Наибольшее касательное напряжение определяется величиной

радиуса круга напряжений, и мы имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (34)$$

При помощи уравнений (31) — (34) полностью решается задача об определении наибольшего нормального и наибольшего касательного напряжений, когда даны нормальные и касательные напряжения, действующие по двум перпендикулярным площадкам.

ЗАДАЧИ

1. Элемент подвергается действию напряжений $\sigma_x = 500 \text{ кг/см}^2, \sigma_y = 300 \text{ кг/см}^2, \tau = 100 \text{ кг/см}^2$. Определить величину и направление главных напряжений σ_1 и σ_2 . (рис. 40, а).

Решение. При помощи формул (31) и (32) получим

$$\sigma_1 = \frac{500+300}{2} + \sqrt{\left(\frac{500-300}{2}\right)^2 + 100^2} = 400 + 141,4 = 541,4 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = 400 - 141,4 = 258,6 \text{ кг/см}^2.$$

Из формулы (33) имеем

$$\lg 2\varphi = -1, \quad 2\varphi = -45^\circ, \quad \varphi = -22,5^\circ.$$

Знак минус указывает на то, что φ измеряется от оси x по часовой стрелке, как показано на рис. 40, а.

2. Определить направление главных напряжений в предыдущей задаче, если

$$\sigma_x = -500 \text{ кг/см}^2.$$

Решение. Соответствующий круг напряжений показан на рис. 41, $\lg 2\varphi = \frac{1}{4}$, $2\varphi = 14,2^\circ$. Следовательно, угол, который составляет наибольшее сжимающее напряжение с осью x , равен $7,1^\circ$ и измеряется против часовой стрелки от оси x .

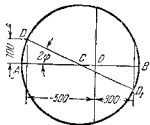


Рис. 41.

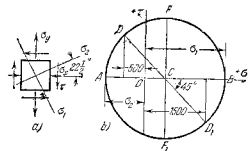


Рис. 42.

3. Найти круг напряжений для случая двух равных растягивающих напряжений $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и для двух равных сжимающих напряжений $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma$. В обоих случаях $\tau = 0$.

Ответ. Круги становятся точками, лежащими на горизонтальной оси, с абсциссами, соответственно равными σ и $-\sigma$.

4. На гранях элемента, показанного на рис. 42, а, действуют напряжения $\sigma_x = -500 \text{ кг/см}^2, \sigma_y = 1500 \text{ кг/см}^2, \tau = 1000 \text{ кг/см}^2$. Найти, пользуясь кругом

напряжений, величину нормального и касательного напряжений: 1) на главных площадках, 2) на площадках, где действуют наибольшие касательные напряжения.

Решение. Соответствующий круг напряжений показан на рис. 42, б. Точки D и D₁ представляют напряжения, действующие по граням элемента рис. 42, а, перпендикулярным к осям x и y . \overline{CD} и \overline{OD} представляют главные напряжения. Их величины соответственно равны $\sigma_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = -2000 \text{ кг/см}^2$. Направление наибольшего сжимающего напряжения σ_2 составляет с осью x угол $22,5^\circ$, этот угол измеряется от оси x против часовой стрелки, как показано на рис. 42, а. Точки F и F₁ представляют напряжения, действующие по площадкам, подверженным наибольшему сдвигу. Величина этих касательных напряжений равна 1414 кг/см^2 . OC представляет нормальное напряжение, равное 500 кг/см^2 , действующее по той же площадке.

5. Решить предыдущую задачу, если $\sigma_x = -1000 \text{ кг/см}^2, \sigma_y = 600 \text{ кг/см}^2, \tau = 200 \text{ кг/см}^2$.

14. Поперечное сужение

В параграфе 2 было рассмотрено удлинение стержня по оси при растяжении. Опыты показывают, что такое продольное удлинение всегда сопровождается поперечным сужением стержня и что в пределах упругости отношение относительного поперечного сужения к относительному продольному удлинению постоянно для данного материала. Эта постоянная обозначается буквой μ и называется коэффициентом Пуассона по имени французского математика, который определил этот коэффициент аналитически при помощи молекулярной теории строения вещества. Для материалов, которые имеют одни и те же упругие свойства по всем направлениям, так называемых *изотропных материалов*, Пуассон нашел $\mu = \frac{1}{4}$. Экспериментальные исследования поперечного укорочения в строительных металлах¹⁾ показывают, что μ обычно близко к значению, вычисленному Пуассоном. Например, в случае строительной стали можно принять значение $\mu = 0,30$. Зная коэффициент Пуассона материала, можно вычислить изменение объема стержня при растяжении. Длина стержня будет увеличиваться в отношении $(1 + \epsilon) : 1$. Поперечные размеры уменьшаются в отношении $(1 - \mu\epsilon) : 1$. Следовательно, площадь поперечного сечения уменьшается в отношении $(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$. Тогда объем стержня изменится в отношении $(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$, которое становится равным $(1 + \epsilon - 2\mu\epsilon) : 1$, если мы припомним, что ϵ — малая величина, и степенями ее пренебрежем. Тогда *относительное увеличение объема равняется* $\epsilon(1 - 2\mu)$. Навероятно, чтобы у каких-либо материалов при растяжении объем их уменьшался, поэтому μ должно быть меньше 0,50. Для таких материалов, как каучук и парафин, μ приближается к указанному пределу, и объем этих материалов при растяжении приблизительно

¹⁾ Эти материалы можно считать изотропными (см. часть II).

остается постоянным. С другой стороны, бетон имеет малую величину μ ($\mu = \frac{1}{8} \div \frac{1}{12}$), а для пробки μ можно принять равным нулю.

Приведенные выше рассуждения о поперечном сужении при растяжении можно применить с соответствующими изменениями к случаю сжатия. Продольное укорочение сопровождается поперечным расширением, и для вычисления этого расширения применяется то же значение для μ , как и в случае растяжения.

ЗАДАЧИ

1. Определить относительное увеличение объема бруса при растяжении, если $[\sigma] = 400 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Относительное увеличение объема равняется

$$\epsilon(1 - 2\mu) = \frac{[\sigma]}{E}(1 - 2\mu) = \frac{400}{2 \cdot 10^6}(1 - 0,6) = 80 \cdot 10^{-6}.$$

2. Определить увеличение объема бруса под действием силы P , приложенной на конце, и веса бруса (см. параграф 5).

Ответ. Увеличение объема равняется $\frac{Fl(1-2\mu)}{E} \left(\frac{P}{F} + \frac{\gamma l}{2} \right)$.

3. Круглый стальной стержень подвергается действию осевой растягивающей силы P такой величины, что начальный диаметр 10 см уменьшается на 0,002 см. Найти P .

Ответ. 104,7 т.

4. Стальной брус предыдущей задачи растягивается силой $P = 40 \text{ т}$. Найти уменьшение площади поперечного сечения.

Ответ. 0,012 см².

15. Деформации в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям

Если брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, растягивается усилиями, действующими по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и y (рис. 37), то удлинение в одном из этих направлений будет зависеть не только от растягивающих напряжений в этом направлении, но также от напряжений в перпендикулярном направлении. Относительное удлинение в направлении оси x от растягивающих напряжений σ_x будет $\frac{\sigma_x}{E}$. Растягивающие напряжения σ_y будут вызывать поперечное укорочение в направлении x , равное $\frac{\mu\sigma_y}{E}$. Следовательно, если действуют одновременно оба напряжения σ_x и σ_y , то относительное удлинение в направлении x будет

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (35)$$

Подобно этому для направления y получим

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (36)$$

Укорочение параллелепипеда в направлении z будет

$$\epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

В частном случае, когда два растяжения одинаковы, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, получим

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sigma}{E}(1 - \mu). \quad (37)$$

Из уравнений (35) и (36) напряжения σ_x и σ_y можно получить как функции относительных деформаций ϵ_x и ϵ_y , а именно:

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \mu\epsilon_y)E}{1 - \mu^2}, \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \mu\epsilon_x)E}{1 - \mu^2}. \quad (38)$$

В случае, показанном на рис. 37, а, удлинение ϵ_x в направлении оси и удлинение ϵ_y в направлении по окружности измеряются при помощи экстензометра, после чего из уравнений (38) можно найти соответствующие напряжения σ_x и σ_y .

ЗАДАЧИ

1. Определить увеличение объема цилиндрического стального котла под действием внутреннего давления (см. рис. 37), пренебрегая деформациями дна и принимая $\sigma_y = 400 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пользуясь уравнениями (35) и (36), находим

$$\epsilon_x = \frac{200}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{400}{2 \cdot 10^6} = \frac{80}{2 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-5},$$

$$\epsilon_y = \frac{400}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{200}{2 \cdot 10^6} = \frac{340}{2 \cdot 10^6} = 17 \cdot 10^{-5}.$$

Объем котла увеличится в отношении

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)^2 = 1 + (1 + \epsilon_x) + 2\epsilon_y = 1 + 0,00038 = 1.$$

2. Бетонный кубик сжимается по двум взаимно перпендикулярным направлениям при помощи приспособления, показанного на рис. 43. Определить уменьшение объема кубика, если сторона его равна 10 см, сжимающие усилия равномерно распределены по граням, $\mu = 0,1$, $P = 8000 \text{ кг}$, $E = 2,6 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пренебрегая трением в шарнирах и рассматривая равновесие каждого шарнира (рис. 43, а), можно показать, что кубик подвергается одинаковому сжатию в двух перпендикулярных направлениях и что сжимающее усилие равно $P\sqrt{2} = 11\,280 \text{ кг}$. Соответствующая деформация из уравнения (37) равна

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{11280}{100 \cdot 2,6 \cdot 10^6}(1 - 0,1) = -0,000391, \quad \downarrow$$

В направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, имеет место расширение кубика, которое равно

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = 0,2 \frac{11280}{100 \cdot 2,6 \cdot 10^8} = 0,000868.$$

Относительное уменьшение объема кубика будет

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -2 \cdot 0,000391 + 0,000868 = -0,000855.$$

3. Определить увеличение цилиндрической боковой поверхности котла, рассмотренного выше в задаче 1.

Ответ. Относительное увеличение боковой поверхности $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y = 21 \cdot 10^{-4}$.

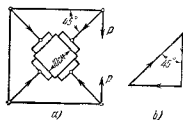


Рис. 43.

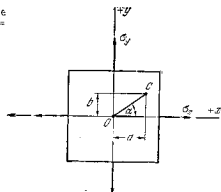


Рис. 44

4. Определить относительное удлинение в направлении σ_x стального стержня, если его напряженное состояние такое, как указано в задаче 1 на стр. 52.

Решение. $\epsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^8} (541,4 - 0,3 \cdot 258,6) = 231,9 \cdot 10^{-6}$.

5. Под действием осевых растягивающих напряжений $\sigma_x = 2000 \text{ кг/см}^2$ стержень имеет относительное удлинение $\epsilon_x = 0,001$, а отношение относительного изменения объема к относительному изменению площади поперечного сечения равно $\frac{3}{4}$. Найти E и ν .

Ответ. $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$; $\nu = \frac{2}{7}$.

6. Прямоугольный параллелепипед подвергается растяжению в двух перпендикулярных направлениях, как показано на рис. 44. Найти относительное удлинение ϵ в направлении OC .

Решение. Координаты точки C после деформации будут $a(1+\epsilon_x)$ и $b(1+\epsilon_y)$, а длина OC после деформации будет

$$\sqrt{a^2(1+2\epsilon_x)+b^2(1+2\epsilon_y)} \approx \sqrt{a^2+b^2} \left(1 + \frac{a^2\epsilon_x}{a^2+b^2} + \frac{b^2\epsilon_y}{a^2+b^2} \right).$$

Вычитая из этого первоначальную длину $\sqrt{a^2+b^2}$ и разделив на первоначальную длину, получим $\epsilon = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha$.

Этот уравнение подобно уравнению (26). Следовательно, для графического представления деформаций можно воспользоваться кругом деформаций подобно кругу Мора для напряжений.

16. Чистый сдвиг

Модуль упругости при сдвиге. Рассмотрим частный случай, когда нормальные напряжения действуют по двум взаимно перпендикулярным направлениям, причем растягивающее напряжение σ_x в горизонтальном направлении численно равняется сжимающему напряжению в вертикальном направлении (рис. 45, а). Соответствующий круг напряжений показан на рис. 45, б. Точка D этого круга представляет напряжения, действующие по площадкам

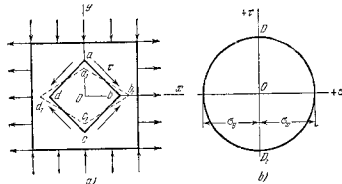


Рис. 45.

ab и cd , перпендикулярным к плоскости xu и наклоненным под углом 45° к оси x . Точка D_1 представляет напряжения, действующие по площадкам ad и bc , перпендикулярным к ab и cd . Из круга напряжений видно, что нормальные напряжения по каждой из этих площадок равны нулю, а касательные напряжения по этим площадкам, изображаемые радиусом круга, численно равны нормальным напряжениям σ_x , так что

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y. \quad (a)$$

Если мы выделим из бруса элемент $abcd$, то он будет находиться в равновесии под действием только касательных напряжений, как показано на рис. 45, а. Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Можно заключить, что чистый сдвиг эквивалентен напряженному состоянию, вызываемому растяжением в одном направлении и равным сжатием в перпендикулярном направлении. Если квадратный элемент, подобный элементу $abcd$ на рис. 45, а, выделить плоскостями, которые уже не находятся под углом 45° к оси x , то по границам такого элемента будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. Величину этих напряжений можно получить обычным путем из круга напряжений (рис. 45, б).

Рассмотрим теперь деформацию элемента $abcd$. Так как по гралям этого элемента нормальные напряжения не действуют, то длины ab , ad , bc и cd не изменяются при деформации, но горизонтальная диагональ bd удлинится, а вертикальная диагональ ac укоротится, вследствие чего квадрат $abcd$ превратится в ромб, как указано на рисунке пунктиром. Угол при b , который до деформации был равен $\frac{\pi}{2}$, теперь становится меньше $\frac{\pi}{2}$, скажем $\frac{\pi}{2} - \gamma$, и в то же время угол при a увеличивается и делается равным $\frac{\pi}{2} + \gamma$. Малый угол γ определяет искажение элемента $abcd$ и называется *относительным сдвигом*.

Относительный сдвиг можно отчетливо представить следующим образом: повернем на 45° против часовой стрелки элемент $abcd$

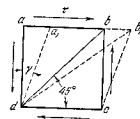


Рис. 45.

рис. 45, a , и поместим его в положение, показанное на рис. 46. После искажения, вызванного касательными напряжениями τ , тот же элемент займет положение, указанное пунктиром. Относительный сдвиг, представляемый величиной малого угла γ , можно принять равным отношению $\frac{aa_1}{ad}$, т. е. горизонтальному сдвигу aa_1 грани ab относительно грани dc , деленному на расстояние между этими двумя гранями. Если материал подчиняется закону Гука, то этот сдвиг пропорционален напряжению τ , и мы можем выразить зависимость между касательным напряжением и относительным сдвигом уравнением

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (39)$$

в котором G есть величина постоянная и зависящая от механических свойств материала. Уравнение (39) аналогично уравнению (4), которое было установлено для простого растяжения, а постоянная G называется *модулем упругости при сдвиге* или *модулем поперечной упругости*.

Так как искажение элемента $abcd$ (рис. 46) вполне определяется удлинением диагонали bd и укорочением диагонали ac и так как эти деформации можно вычислить при помощи уравнений предыдущего параграфа, то можно заключить, что модуль G может быть выражен в зависимости от модуля упругости E при растяжении и коэффициента Пуассона μ . Для того чтобы установить эту зависимость, рассмотрим треугольник Oab (рис. 45, a). Удлинение стороны Ob и укорочение стороны Oa этого треугольника при деформации

найдутся при помощи уравнений (35) и (36). В зависимости от ϵ_x и ϵ_y мы имеем

$$Ob_1 = Ob(1 + \epsilon_x), \quad Oa_1 = Oa(1 + \epsilon_y)$$

и из треугольника Oa_1b_1 находим

$$\operatorname{tg}(Ob, a_1) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{Oa_1}{Ob_1} = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_x}, \quad (b)$$

Для малого угла γ мы имеем также

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}. \quad (c)$$

Замечая, что в случае чистого сдвига

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau,$$

$$\epsilon_x = -\epsilon_y = \frac{\sigma_x(1 - \mu)}{E} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E},$$

и приравняв выражения (b) и (c), получаем

$$\frac{1 - \frac{\tau(1 - \mu)}{E}}{1 + \frac{\tau(1 + \mu)}{E}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

откуда

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E}$$

или

$$\gamma = \frac{2\tau(1 + \mu)}{E}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (39), мы заключаем, что

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (40)$$

Мы видим, что модуль упругости при сдвиге можно легко вычислить, если известны модуль упругости при растяжении E и коэффициент Пуассона μ . Например, в случае стали

$$G = \frac{2 \cdot 10^9}{2(1 + 0,30)} = 7,7 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2.$$

Необходимо заметить, что приложение равномерно распределенных касательных напряжений к граням бруска, как предпола-

гается на рис. 46, очень трудно осуществить, поэтому состояние чистого сдвига обычно получают путем кручения цилиндрической трубы (рис. 47). Вследствие малого поворота одного конца трубы относительно другого, образующие, начерченные на цилиндрической поверхности, становятся наклонными к оси цилиндра, и элемент $abcd$, образованный двумя образующими и двумя смежными круговыми поперечными сечениями, подвергается чистому сдвигу подобно тому, как показано на рис. 46.

Вопрос о кручении будет разобран ниже (см. главу X), где будет показано, как можно вычислить касательные напряжения τ и относительный сдвиг γ элемента $abcd$, если известны крутящий момент и соответствующий угол закручивания вала. Если τ и γ найдены из такого испытания на кручение, то значение модуля G можно вычислить из уравнения (39). Имея это значение G и зная E из испытания на растяжение, мы можем вычислить коэффициент Пуассона μ из уравнения (40). Посредственное определение μ путем измерения поперечного укорочения при испытании на растяжение более сложно вследствие того, что это укорочение весьма мало, и необходи-

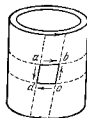


Рис. 47.

дим чрезвычайно чувствительный инструмент, чтобы измерить его с достаточной точностью.

ЗАДАЧИ

1. Брусок $abcd$ (рис. 46) сделан из материала, для которого $E = 0,7 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и $\mu = 0,25$. Найти γ и относительное удлинение диагонали bd , если $\tau = 700 \text{ кг/см}^2$.
 Ответ. $\gamma = 0,0025$, $\epsilon = 0,00125$.
2. Найти для предыдущей задачи сдвиг aa' , грани ab относительно грани cd , если диагональ $bd = 5 \text{ см}$.
 Ответ. $aa_1 = 2,5\sqrt{2} \gamma$.
3. Доказать, что изменение объема бруска $abcd$ на рис. 46 равно нулю, если рассматривать только первые степени составляющих деформации ϵ_x и ϵ_y .
4. Доказать, что в случае чистого сдвига (рис. 46) относительное удлинение диагонали bd равно половине относительного сдвига γ .
5. Найти относительное удлинение сторон элемента $abcd$ на рис. 46, если принять во внимание малые величины второй степени.

Решение. Обозначая через l первоначальную длину сторон элемента $abcd$, найдем, что после деформации $Ob_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1 - \epsilon_x)$ и $Ob_2 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1 + \epsilon_x)$. Тогда

$$a_1b_1 = \frac{l}{2} \sqrt{(1 - \epsilon_x)^2 + (1 + \epsilon_x)^2} = l \sqrt{1 + \epsilon_x^2} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon_x^2\right).$$

Относительное удлинение сторон элемента $abcd$ равняется $\frac{1}{2} \epsilon_x^2$.

17. Допускаемые напряжения при сдвиге

Подвергая материал чистому сдвигу (см. рис. 47), мы можем установить опытным путем зависимость между касательным напряжением и относительным сдвигом. Такая зависимость обыкновенно изображается диаграммой (рис. 48), на которой абсцисса представляет относительный сдвиг, а ордината — касательное напряжение. Эта диаграмма подобна диаграмме растяжения, и мы можем отметить на ней предел пропорциональности A и предел текучести B . Опыты показывают, что для таких материалов, как строительная сталь, предел текучести при сдвиге τ_s составляет лишь приблизительно $(0,55 \text{--} 0,60) \sigma_s$. Так как при пределе текучести имеет место значительная деформация без заметного изменения напряжения, логично принимать за допускаемое напряжение при сдвиге лишь часть напряжения, соответствующего пределу текучести, так что

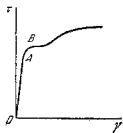


Рис. 48.

$$[\tau] = \frac{\tau_s}{k}, \quad (41)$$

где k — коэффициент безопасности. Взяв этот коэффициент такой же величины, что и при растяжении или сжатии, мы получим

$$[\tau] = (0,55 \text{--} 0,60) [\sigma],$$

что указывает на то, что допускаемое напряжение при сдвиге нужно принимать гораздо меньше допускаемого напряжения при растяжении.

Уже было указано, что в практических приложениях мы обычно не встречаем равномерного распределения касательных напряжений по граням бруска, как было предположено на рис. 46, и что чистый сдвиг осуществляется в случае кручения. Ниже мы увидим, что чистый сдвиг имеет место также при изгибе балок. Имеется много практических задач, в которых решение получается при допущении, что мы имеем дело с чистым сдвигом, хотя это допущение является грубым приближением. Возьмем, например, соединение на рис. 49. Очевидно, что, если диаметр болта ab недостаточно большой, соединение может разрушиться вследствие сдвига по поперечным сечениям m_1n_1 и m_2n_2 . Хотя более строгое изучение вопроса

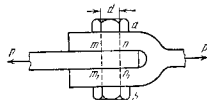


Рис. 49.

пущении, что мы имеем дело с чистым сдвигом, хотя это допущение является грубым приближением. Возьмем, например, соединение на рис. 49. Очевидно, что, если диаметр болта ab недостаточно большой, соединение может разрушиться вследствие сдвига по поперечным сечениям m_1n_1 и m_2n_2 . Хотя более строгое изучение вопроса

показывает, что касательные напряжения неравномерно распределяются по этим поперечным сечениям и что болт подвергается не только сдвигу, но также и изгибу, тем не менее для определения грубо приближенного значения необходимого диаметра болта принимается допущение, что касательные напряжения равномерно распределяются по плоскостям mn и m_1n_1 . Следовательно, касательные напряжения τ получаются путем деления силы P на сумму площадей поперечных сечений mn и m_1n_1 , т. е.

$$\tau = \frac{2P}{\pi d^2},$$

и требуемый диаметр болта получается из уравнения

$$[\tau] = \frac{2P}{\pi d^2}. \quad (42)$$

Другой пример такого упрощенного решения задач на сдвиг мы имеем в случае заклепочных соединений (рис. 50). Так как

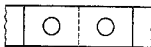


Рис. 50.

головки заклепок образуются при высокой температуре, то заклепки после охлаждения вызывают значительное сжатие листов¹⁾. Если приложены растягивающие силы P , то относительно движению листов будет препятствовать трение, вызванное сжатием листов. Только после того, как трение будет преодолено, заклепки начнут работать на сдвиг, и, если диаметр заклепок недостаточен, может произойти разрушение, вследствие сдвига по плоскостям mn и m_1n_1 . Видно, что вопрос определения напряжений в заклепочных соединениях является весьма сложным. Обычно получают грубо приближенное решение задачи, пренебрегая трением и полагая, что касательные напряжения равномерно распределяются по поперечным сечениям mn и m_1n_1 . Тогда надлежащий диаметр заклепок получится при помощи уравнения (42), как в предыдущем примере.

¹⁾ Опыт показывает, что растягивающие напряжения в заклепках обычно приближаются к пределу текучести материала, из которого сделаны заклепки. См. С. В а с h, Z. Ver. deut. Ing., 1912.

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр болта в соединении, показанном на рис. 49, если $P = 8 \text{ т}$ и $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $d = 2,33 \text{ см}$.

2. Найти необходимую длину $2l$ соединения двух прямоугольных деревянных брусьев (рис. 51), подверженных растяжению, если $P = 4 \text{ т}$, $[\tau] = 10 \text{ кг/см}^2$

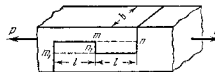


Рис. 51.

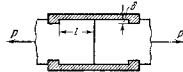


Рис. 52.

на скалывание вдоль волокон и $b = 20 \text{ см}$. Определить необходимую глубину врубки mn_1 , если допустимое напряжение на сжатие дерева вдоль волокон равно 80 кг/см^2 .

Ответ. $2l = 40 \text{ см}$, $mn_1 = 2,5 \text{ см}$.

3. Найти диаметр заклепок на рис. 50, если $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$ и $P = 5 \text{ т}$.

Ответ. $d = 2 \text{ см}$.

4. Определить размеры l и δ в соединении двух брусьев помощью двух стальных накладок (рис. 52), если силы, размеры и допустимые напряжения те же, что и в задаче 2.

Ответ. $l = 10 \text{ см}$, $\delta = 1,25 \text{ см}$.

5. Определить размер a , который необходимо назначить в конструкции, показанной на рис. 53, если допустимое касательное напряжение то же, что и в задаче 2, и размеры поперечных сечений всех брусьев равны $10 \times 20 \text{ см}$. Влиянием трения пренебречь.

Ответ. $a = 20 \text{ см}$.

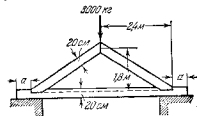


Рис. 53.

18. Растяжение или сжатие по трем взаимно перпендикулярным направлениям

Если брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, подвергается действию равномерно распределенных сил P_x , P_y и P_z (рис. 54), то нормальные напряжения по сечениям, перпендикулярным к осям x , y , и z , соответственно будут

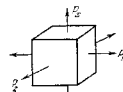


Рис. 54.

$$\sigma_x = \frac{P_x}{F_x}, \quad \sigma_y = \frac{P_y}{F_y}, \quad \sigma_z = \frac{P_z}{F_z}.$$

Ниже предполагается, что $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$.

Анализируя действие сил P_x , P_y и P_z , можно заключить, что по сечению, проходящему через ось z , напряжения вызывают только силы P_x и P_y , а поэтому эти напряжения можно вычислить из уравнений (26) и (27) и представить графически при помощи

круга Мора. На рис. 55 круг напряжений с диаметром AB изображает эти напряжения. Таким же способом напряжения по какому-либо сечению, проходящему через ось x , можно представить кругом, имеющим диаметр BC . Круг с диаметром AC изображает напряжения по какому-либо сечению, проходящему через ось y . Три круга Мора представляют напряжения по трем сериям сечений, проходящих через оси x , y и z . Для какого-либо сечения, наклоненного к осям x , y и z , составляющие напряжений суть координаты точки, находящейся в заштрихованной площади рис. 55¹⁾. На основании этого можно заключить, что наибольшее касательное напряжение изображается радиусом наибольшего из трех кругов и определяется из уравнения $\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$. Оно действует по сечению, проходящему через ось y и делящему пополам угол между осями x и z .

Уравнение для вычисления относительных удлинений по направлениям осей x , y и z можно получить путем сложения действия P_x , P_y и P_z точно так же, как при растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям (см. параграф 15). Таким образом получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_z), \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \right\} (43)$$

Объем бруса увеличивается в отношении

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z):1,$$

или, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, получим

$$(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z):1.$$

Видно, что относительное объемное расширение равно

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (44)$$

Зависимость между относительным объемным расширением и напряжениями, действующими по граням бруса, получится путем

¹⁾ Доказательство этого положения можно найти в книге А. Фёрри, Technische Mechaniik, т. 5, стр. 18, 1913 г.; см. также Н. М. Westergaard, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 520, 1924.

сложения уравнений (43). Таким образом получим

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (45)$$

В частном случае равномерного гидростатического давления имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Тогда из уравнений (43)

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E} (1 - 2\mu), \quad (46)$$

и из уравнений (45)

$$\Delta = -\frac{3(1 - 2\mu)}{E} p, \quad (47)$$

или, пользуясь обозначением

$$\frac{E}{3(1 - 2\mu)} = K, \quad (48)$$

получим

$$\Delta = -\frac{p}{K}. \quad (49)$$

Относительное объемное сжатие пропорционально сжимающему напряжению и обратно пропорционально величине K , которая называется *объемным модулем упругости*.

ЗАДАЧА

1. Определить уменьшение объема сплошного стального шара диаметром 10 см, подвергнутого равномерному гидростатическому давлению $p = 1000 \text{ кг/см}^2$. Решить. Из уравнения (49) имеем

$$\Delta = -\frac{p}{K} = -\frac{1000 \cdot 3(1 - 2 \cdot 0,3)}{2 \cdot 10^8} = -\frac{6}{10^4}.$$

Поэтому уменьшение объема будет $\frac{6 \pi d^3}{194 \cdot 6} = 0,314 \text{ см}^3$.

2. Каучуковый цилиндр A сжимается в стальном цилиндре B силой P (см. рис. 56). Определить давление между каучуком и сталью, если $P = 400 \text{ кг}$, $d = 5 \text{ см}$, коэффициент Пуассона для каучука $\mu = 0,45$. Трением между каучуком и сталью пренебречь.

Решение. Пусть p означает сжимающие напряжения по какому-либо сечению, перпендикулярному оси цилиндра и q — давление между каучуком и внутренней поверхностью стального цилиндра. Сжимающие напряжения той же величины будут действовать по боковой поверхности продольных волокон каучукового цилиндра, из которого мы выделим элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными оси цилиндра (см. рис. 56). Этот элемент находится в равновесии под действием сжимающих напряжений q по боковым граням и сжимающих напряжений p , направленных по оси цилиндра. Полагая, что сталь-

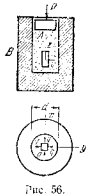


Рис. 56.

ной цилиндр абсолютно твердый и, следовательно, поперечное расширение каучука в направлении x и y должно быть равно нулю, получим из уравнений (43)

$$0 = \frac{q}{E} - \frac{\mu}{E} (p+q)$$

откуда

$$q = \frac{\mu p}{1-\mu} = \frac{0,45}{1-0,45} \frac{400 \cdot 4}{\pi \cdot 5^2} = 16,7 \text{ кг/см}^2.$$

3. Бетонная колонна заключена в стальную трубу (рис. 57). Определить давление между сталью и бетоном и растягивающее напряжение в трубе по окружности, полагая, что трения между бетоном и сталью нет и что все размеры, а также и продольное сжимающее давление известны.

Решение. Пусть p означает продольное, а q — поперечное сжимающее давление, d — внутренний диаметр и h — толщина трубы, E_c — модуль упругости стали, E_b, μ_b — модуль упругости и коэффициент Пуассона для бетона. Расширение бетона в поперечном направлении на основании уравнений (43) будет

$$\epsilon_x = -\frac{q}{E_b} + \frac{\mu_b}{E_b} (p+q). \quad (a)$$

Это расширение равняется расширению по окружности трубы (см. уравнение 13)

$$e = \frac{qd}{2hE_c}. \quad (b)$$

Из уравнений (a) и (b) получаем

$$\frac{qd}{2hE_c} = -\frac{q}{E_b} + \frac{\mu_b}{E_b} (p+q),$$

откуда

$$q = p \frac{\mu_b}{\frac{d}{2h} \frac{E_b}{E_c} + 1 - \mu_b}.$$

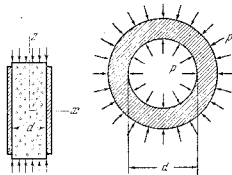


Рис. 57.

Рис. 58.

Растягивающее напряжение по окружности в трубе теперь может быть вычислено из уравнения

$$\sigma = \frac{qd}{2h}.$$

4. Определить наибольшее касательное напряжение в бетонной колонне предыдущей задачи, полагая, что $p = 60 \text{ кг/см}^2$, $\mu_b = 0,10$, $\frac{d}{2h} = 7,5$, $E_b = 2,8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $E_c = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$.

$$\text{Решение } \tau_{\max} = \frac{p-q}{2} = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{0,1}{1,9}\right) = 28,4 \text{ кг/см}^2.$$

5. Стальная сферическая оболочка (рис. 58) подвергается равномерному внутреннему и наружному давлению p . Найти уменьшение δ внутреннего диаметра. Построить круги Мора, как на рис. 55.

Ответ. $\delta = \frac{pd(1-2\mu)}{E}$, в этом случае все три круга обращаются в точку с абсциссой $\sigma = -p$.

ГЛАВА III

ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ И ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА

19. Типы балок

В этой главе мы рассмотрим простейшие типы балок, имеющих вертикальную плоскость симметрии, проходящую через продольную ось, и опертых, как показано на рис. 59. Предположим, что все приложенные силы вертикальны и действуют в плоскости симметрии, так что изгиб происходит в этой же плоскости. Рис. 59, а изображает балку со свободно опертыми концами. Точки опор A и B представляют шарниры, так что концы балки при изгибе могут свободно поворачиваться. Предположим также, что одна из опор находится на катках и может свободно двигаться в горизонтальном направлении. Рис. 59, б изображает консоль. Конец A этой балки заделан в стену и не может поворачиваться при изгибе, в то время как конец B является совершенно свободным. Рис. 59, в изображает консольную балку со свешивающимся концом. Эта балка имеет шарнирно-неподвижную опору на конце A и покоится на подвижной опоре в точке C .

Все три предыдущих случая представляют статически определенные балки, так как реакции опор, вызываемые данной нагрузкой, могут быть определены из уравнений статики. Например, рассмотрим свободно опертую балку, несущую вертикальный груз P (рис. 59, а), мы видим, что реакция R_2 конца B должна быть вертикальна, так как этот конец может свободно двигаться в горизонтальном направлении. Тогда из уравнения статики $\sum X = 0$ следует, что реакция R_1 также вертикальна. Величины R_1 и R_2 определяются из уравнений моментов. Приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно точки B , мы получим

$$R_1 l - Pb = 0,$$

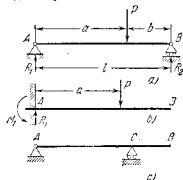


Рис. 59.

откуда

$$R_1 = \frac{Pb}{l}.$$

Подобным образом, рассматривая моменты относительно точки А, мы получим

$$R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Реакции для консольной балки (рис. 59, с) можно вычислять таким же способом.

В случае консоли (рис. 59, б) груз P уравнивается реактивными силами, действующими в заделанном конце. Из уравнений статики $\sum X=0$ и $\sum Y=0$ мы заключаем, что реактивная сила R_1 должна быть вертикальная и равна P . Из уравнения моментов $\sum M=0$ следует, что момент M_1 реактивных сил относительно точки А равен Pa и действует против часовой стрелки, как показано на рисунке.

Реакции, вызываемые какого-либо другого рода нагрузкой, лежащей на балках выше указанных типов, могут быть вычислены подобным же способом.

Необходимо заметить, что специальные устройства, обеспечивающие свободный поворот концов и свободное перемещение опоры, применяются лишь в балках больших пролетов, каковые имеются в мостах. В балках малого пролета опоры обычно устраиваются так, как изображено на рис. 60. При изгибе такой балки силы трения между опорными поверхностями и балкой будут таковы, что они будут препятствовать горизонтальному движению концов балки. Эти силы могут иметь некоторое значение в случае близких стержней и тонких металлических волос (см. стр. 159), но в случае жесткой балки, для которой прогиб очень мал по сравнению с длиной пролета l , этими силами можно пренебречь, и реакции можно вычислить как для балки, свободно опертой (рис. 59, а).

20. Изгибающий момент и поперечная сила

Рассмотрим теперь балку со свободно опертыми концами, а которую действуют вертикальные силы P_1 , P_2 и P_3 (рис. 61, а). Предположим, что балка имеет продольную плоскость симметрии и что грузы действуют в этой плоскости. Тогда на основании симметрии мы заключаем, что изгиб должен происходить в этой же плоскости. В большинстве практических случаев это условие симметрии выполняется, так как обычные формы поперечных сечений

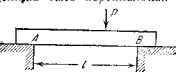


Рис. 60.

балок: круг, прямоугольник, двутавровые и тавровые сечения симметричны. Более общий случай несимметричного поперечного сечения будет разобран ниже (см. главу 8).

Для того чтобы последовать усилию, возникающему в балке при изгибе, мы воспользуемся методом, который уже применяли при отыскании усилий, возникающих в стержне при простом растяжении (рис. 1). Вообразим, что балка AB разрезана на две части сечением mn , взятым на каком-либо расстоянии x от левой опоры А (рис. 61, а), и что правая часть балки отброшена. При рассмотрении равновесия оставшейся левой части балки (рис. 61, б), мы должны учитывать не только внешние силы, такие, как грузы P_1 и P_2 и реакции R_1 , но также и внутренние силы, которые распределяются по сечению mn и которые представляют действие правой части балки на левую. Эти внутренние силы должны быть такой величины, чтобы уравновесить упомянутые выше внешние силы P_1 , P_2 и R_1 .

Для последующих рассуждений будет удобно привести действительную систему внешних сил к упрощенной эквивалентной системе. Из статики мы знаем, что система параллельных сил может быть заменена одной силой, равной алгебраической сумме данных сил, и одной парой сил. В нашем частном случае мы можем заменить силы P_1 , P_2 и R_1 вертикальной силой Q , действующей в плоскости поперечного сечения mn , и парой сил M . Величина силы равна

$$Q = R_1 - P_1 - P_2 \quad (а)$$

и величина момента пары сил равна

$$M = R_1 x - P_1(x-c_1) - P_2(x-c_2). \quad (б)$$

Сила Q , которая равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения mn , называется поперечной силой в сечении mn . Момент пары сил M , который равен алгебраической сумме моментов внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения mn , относительно центра тяжести этого сечения, называется изгибающим моментом в сечении mn . Таким образом, система внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения mn , может быть заменена статически эквивалентной системой, состоящей из поперечной силы Q , действующей в плоскости

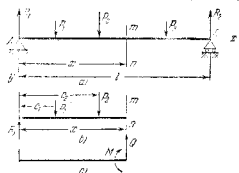


Рис. 61.

поперечного сечения, и парой сил M (рис. 61, *с*). Усилия, которые распределяются по поперечному сечению m_1 и которые представляют собой действие правой части балки на ее левую часть, должны быть таковы, чтобы уравновесить изгибающий момент M и поперечную силу Q .

Если на балку вместо сосредоточенных сил действует распределенная нагрузка, то можно применить те же рассуждения, что и в предыдущем случае. Возьмем, например, равномерно нагруженную балку, показанную на рис. 62, *а*. Обозначая нагрузку на единицу длины через q , найдем, что реакции в этом случае равны

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2}.$$

Чтобы исследовать усилия, распределенные по поперечному сечению m_1 , мы опять рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 62, *б*). Внешними силами, действующими на эту часть балки, являются реакция R_1 и нагрузка, равномерно распределенная по длине x . Эта последняя нагрузка имеет, конечно, равнодействующую, равную qx . Следовательно, алгебраическая сумма всех сил, расположенных слева от сечения m_1 , равняется $R_1 - qx$. Алгебраическая сумма моментов всех сил, расположенных слева от сечения

относительно центра тяжести этого сечения получится путем вычитания момента равнодействующей распределенной нагрузки из момента $R_1 x$ реакции. Момент распределенной нагрузки, очевидно, равняется

$$qx \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Таким образом мы получаем для алгебраической суммы моментов выражение

$$R_1 x - \frac{qx^2}{2}.$$

Все силы, действующие на левую часть балки, можно теперь заметить одной силой, действующей в плоскости поперечного сечения m_1 и равной

$$Q = R_1 - qx = q \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad (с)$$

и парой сил, равной

$$M = R_1 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} (l - x). \quad (д)$$

Выражения (с) и (д) представляют соответственно поперечную силу и изгибающий момент в сечении m_1 .

В приведенных выше примерах рассматривалось равновесие левой части балки. Если рассмотреть правую часть балки, то алгебраическая сумма сил, расположенных справа от сечения, и алгебраическая сумма моментов тех же сил будут иметь те же

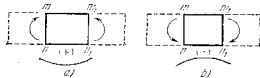


Рис. 63.

величины, которые были найдены ранее, но противоположны по направлению. Это следует из того, что грузы, действующие на балку, вместе с реакциями R_1 и R_2 представляют систему сил, находящихся в равновесии, и момент всех этих сил относительно любой точки плоскости, так же, как и их алгебраическая сумма, должны равняться нулю. Следовательно, момент сил, действующих на левую часть балки, относительно центра тяжести сечения m_1 должен быть равен, но противоположен моменту относительно той же точки сил, действующих на правую часть балки. Также алгебраическая сумма сил, действующих на левую часть балки, должна быть равна, но противоположна алгебраической сумме сил, действующих на правую часть.

При последующем изложении изгибающий момент и поперечная сила в сечении m_1 принимаются положительными, если при рассмотрении левой части балки получаются такие направления, как указано на рис. 61, *с*. Чтобы отчетливо представить условие относительно знака для изгибающих моментов, вырежем двумя смежными поперечными сечениями m_1 и m_2 элемент балки (рис. 63). Если изгибающие моменты в этих сечениях положительны, то силы слева от сечения m_1 дают момент по часовой стрелке, а силы справа от сечения m_2 дают момент против часовой стрелки, как показано на рис. 63, *а*. Таким образом, видно, что направления моментов таковы, что происходит изгиб балки выпуклостью вниз.

Если изгибающие моменты в поперечных сечениях m_1 и m_2 отрицательны, то происходит изгиб балки выпуклостью вверх, как показано на рис. 63, *б*. Следовательно, на участках балки, где

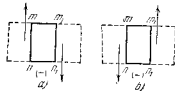


Рис. 64.

изгибающий момент положителен, изогнутая ось балки обращена выпуклостью вниз, в то время как на участках, где изгибающий момент отрицателен, изогнутая ось балки обращена выпуклостью вверх.

Правило знаков для поперечной силы представлено на рис. 64.

ЗАДАЧИ

1. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении, отстоящем на расстоянии 4 м от левого конца балки, изображенной на рис. 59, а, если $u = 6$ м, $l = 10$ м и $P = 10$ т.

Ответ. $Q = 4$ т, $M = 16$ тм.

2. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении, отстоящем на расстоянии 2 м от левого конца балки, изображенной на рис. 59, в, если $a = 8$ м, $P = 12$ т.

Ответ. $Q = 12$ т, $M = -72$ тм.

3. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении m балки, изображенной на рис. 61, а, если $P_1 = P_2 = 12$ т, $P_3 = 0$, $c_1 = 2$ м, $c_2 = 4$ м, $x = 6$ м, $l = 12$ м.

Ответ. $Q = -6$ т, $M = 36$ тм.

4. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент в середине балки, изображенной на рис. 62, а, если $q = 1 \frac{т}{м}$ и $l = 8$ м.

Ответ. $Q = 0$, $M = 8$ тм.

21. Зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой

Рассмотрим элемент балки, вырезанный двумя смежными поперечными сечениями m и m_1 , отстоящими на расстоянии dx друг от друга (рис. 65). Предполагаем, что в поперечном сечении m

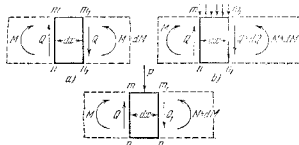


Рис. 65.

имеется положительный изгибающий момент и положительная поперечная сила, можем действие левой части балки на элемент представить силой Q и парой сил M , как указано на рис. 65, а. Таким же образом, предполагая, что в сечении m_1 , изгибающий

момент и поперечная сила положительны, можем действие правой части балки на элемент представить указанными парой сил и силой. Если между сечениями m и m_1 , на балку никакие силы не действуют (рис. 65, а), то поперечные силы в этих двух сечениях будут равны¹⁾. Что же касается изгибающих моментов, то из условий равновесия элемента вытекает, что они не равны в двух смежных сечениях и что приращение dM изгибающего момента равняется моменту пары сил, представленной двумя равными и противоположно направленными силами Q , т. е.

$$dM = Q dx \quad \text{и} \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (50)$$

Итак, во всех частях балки между грузами поперечная сила равна производной от изгибающего момента по x .

Рассмотрим теперь случай, когда между поперечными сечениями m и m_1 действует распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 65, б). Тогда полная нагрузка, действующая на элемент, равняется $q dx$. Принимая q положительной, если нагрузка действует вниз, можем заключить из условий равновесия элемента, что поперечная сила в сечении m_1 , отличается от поперечной силы в сечении m на величину

$$dQ = -q dx,$$

откуда следует, что

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (51)$$

Итак, производная от поперечной силы по x равняется интенсивности нагрузки, взятой с отрицательным знаком.

Взяв момент всех сил, действующих на элемент, получим

$$dM = Q dx - q dx \frac{dx}{2}.$$

Пренебрегая вторым членом правой части, как малой величиной второго порядка, приходим снова к уравнению (50) и заключаем, что в случае распределенной нагрузки производная от изгибающего момента равняется поперечной силе.

Если между смежными поперечными сечениями m и m_1 действует сосредоточенная нагрузка P (рис. 65, в), то происходит внезапное изменение величины поперечной силы. Пусть Q означает поперечную силу в сечении m и Q_1 в сечении m_1 . Тогда из условий равновесия элемента m, m_1 находим

$$Q_1 = Q - P.$$

Следовательно, величина поперечной силы изменяется на величину

¹⁾ Весом элемента балки здесь пренебрегаем.

P при переходе через точку приложения нагрузки. Тогда из уравнения (50) можно заключить, что в точке приложения сосредоточенной силы происходит внезапное изменение величины производной $\frac{dM}{dx}$.

22. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Из предыдущих рассуждений следует, что усилия, действующие по поперечному сечению m балки, таковы, что они уравновешивают изгибающий момент M и поперечную силу Q в том же сечении.

Таким образом, величины M и Q в каком-либо поперечном сечении определяют величину усилий, действующих по этому поперечному сечению. Для того чтобы упростить исследование вопроса о распределении напряжений в балке, удобно графически изображать изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки. В таком изображении абсцисса указывает положение поперечного сечения, а ордината представляет значение изгибающего момента или поперечной силы, которые действуют в этом сечении, причем положительные значения откладываются выше горизонтальной оси, а отрицательные — ниже оси. Такие графические изображения называются соответственно *эпорами изгибающих моментов и поперечных сил*.

Рассмотрим, например, свободно лежащую балку с сосредоточенной нагрузкой P (рис. 66¹). Реакции в этом случае будут

$$R_1 = \frac{Pb}{l} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Взяв сечение m слева от P , можем заключить, что в этом сечении

$$Q = \frac{Pb}{l} \quad \text{и} \quad M = \frac{Pb}{l}x. \quad (\text{а})$$

Поперечная сила и изгибающий момент имеют те же направления, что и на рис. 63, а и 64, а, и поэтому положительны. Из уравнения (а) видно, что поперечная сила остается постоянной на участке балки слева от груза и что изгибающий момент изменяется пропорционально x . При $x = 0$ момент равен нулю и при $x = a$, т. е. в поперечном сечении, где приложена нагрузка, момент равен $P \frac{ab}{l}$.

Соответствующие участки эпюр поперечной силы и изгибающего момента показаны соответственно на рис. 66, б и 66, в прямыми линиями ac и a_1c_1 . Для поперечного сечения, расположенного справа от

груза P , мы получаем

$$Q = \frac{Pb}{l} - P \quad \text{и} \quad M = \frac{Pb}{l}x - P(x-a), \quad (\text{б})$$

где x всегда будет расстояние от левого конца балки. Поперечная сила для этого участка балки остается постоянной и отрицательной. На рис. 66, б эта сила представлена линией $c'b$, параллельной оси x . Изгибающий момент есть линейная функция от x , который при $x = a$ равняется $\frac{Pab}{l}$ и при $x = l$ равняется нулю. Он на всем протяжении балки положителен и его изменение на правом участке балки представлено на рис. 66, в прямой линией c_1b_1 . Ломаные ли-

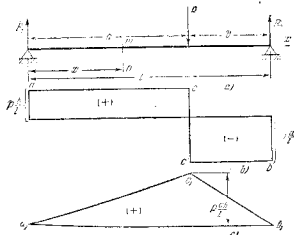


Рис. 66.

нии $acc'b$ и $a_1c_1b_1$ на рис. 66, б и 66, в представляют соответственно эпюры поперечных сил и изгибающих моментов по всей длине балки. Под грузом P происходит резкое изменение величины поперечной силы от положительного значения $\frac{Pb}{l}$ к отрицательному значению $-\frac{Pb}{l}$ и резкое изменение угла наклона линии на эпюре изгибающих моментов.

При выводе выражений (б) для поперечной силы и изгибающего момента мы рассматривали левый участок балки, т. е. участок, на котором действуют две силы R_1 и P . В этом случае было бы проще рассматривать правый участок балки, где действует только реакция $\frac{Pa}{l}$. Поступая таким образом и пользуясь правилом зна-

¹ В последующих рисунках для простоты катки под подвижными опорами свободно будут опускаться.

ков, указанным на рис. 63 и 64, мы получаем

$$Q = -\frac{Pa}{l} \quad \text{и} \quad M = \frac{Pa}{l}(l-x). \quad (c)$$

Далее полученные выражения (b) могут быть приведены к этому более простому виду, если заметить, что $a = l - b$.

Интересно отметить, что эпюра поперечных сил состоит из двух прямоугольников с равными площадями. Принимая во внимание противоположные знаки этих площадей, мы заключаем, что полная площадь эпюры поперечных сил равняется нулю. Этот результат не является случайным. Интегрируя уравнение (50), мы имеем

$$\int_A^B dM = \int_A^B Q dx, \quad (d)$$

где пределы A и B указывают, что интегрирование производится по всей длине балки от конца A до конца B . Следовательно, правая часть уравнения (d) представляет полную площадь эпюры поперечных сил. Левая часть того же уравнения после интегрирования дает разность $M_B - M_A$ изгибающих моментов на концах B и A . В случае свободно лежащей балки моменты на концах обращаются в нуль. Поэтому полная площадь эпюры поперечных сил равна нулю.

Если на балку действует несколько сил (рис. 67), то балка разбивается на несколько участков, и для каждого участка должны быть составлены выражения для Q и M . Измеряя x от левого конца балки и принимая $x < a_1$, мы получаем для первого участка балки

$$Q = R_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x. \quad (e)$$

Для второго участка балки, т. е. для $a_1 < x < a_2$, мы получаем

$$Q = R_1 - P_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x - P_1(x - a_1). \quad (f)$$

Для третьего участка балки, т. е. для $a_2 < x < a_3$, удобнее рассматривать правую часть балки, чем левую. В таком случае мы получаем

$$Q = -(R_2 - P_2)$$

и

$$M = R_2(l-x) - P_2(l-x-b_2). \quad (g)$$

Наконец, для последнего участка балки мы получаем

$$Q = -R_2, \quad M = R_2(l-x). \quad (h)$$

Из выражений (e) — (h) мы видим, что на каждом участке балки поперечная сила остается постоянной. Поэтому эпюра поперечных сил получается такой, как показано на рис. 67, *b*. Изгибающий момент на каждом участке балки является линейной функцией от x . Поэтому на соответствующем участке эпюры он представлен наклонной прямой линией. Чтобы начертить эти линии, мы замечаем из выражений (e) и (h), что на концах балки $x = 0$ и $x = l$ моменты равны нулю. Моменты под грузами получаются подстановкой в выражения (e), (f) и (h) соответственно $x = a_1$, $x = a_2$ и $x = a_3$. Таким образом мы получаем для вышеупомянутых моментов следующие значения:

$$M = R_1 a_1, \quad M = R_1 a_2 - P_1(a_2 - a_1), \quad M = R_2 b_2.$$

Пользуясь этими значениями, мы легко можем построить эпюру изгибающих моментов, как показано на рис. 67, *c*.

В практических приложениях важно найти поперечные сечения, в которых изгибающий момент имеет наибольшее или наименьшее значение. В случае сосредоточенных грузов, только что рассмотренных на рис. 67, наибольший изгибающий момент имеет место под грузом P_2 . Этот груз соответствует на эпюре изгибающих моментов точке d_1 , в которой тангенс угла наклона эпюры меняет знак. Далее, из уравнения (50) мы знаем, что тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов в какой-либо точке равен поперечной силе. Поэтому изгибающий момент имеет свое наибольшее или наименьшее значение в том сечении, где поперечная сила меняет свой знак. Если по длине балки поперечная сила изменяется от положительного значения к отрицательному, как, например, под грузом P_2 на рис. 67, то тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов также изменяется от положительного значения к отрицательному. Следовательно, в этом сечении мы имеем максимум изгибающего момента. Изменение Q от отрицательного значения к положительному указывает на минимум изгибающего момента. В общем случае эпюра поперечных сил может пересекать горизонтальную ось в нескольких местах. Тогда каждой такой точке пересечения будет соответствовать максимум или минимум на эпюре изгибающих моментов. Необходимо исследовать числовые значения всех этих максимум и минимум, чтобы найти численно наибольший изгибающий момент.

Рассмотрим теперь случай равномерно распределенной нагрузки (рис. 68). Из наших предыдущих рассуждений (стр. 70)

мы имеем для поперечного сечения, находящегося на расстоянии x от левой опоры,

$$Q = q \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad \text{и} \quad M = \frac{qx^2}{2} (l - x). \quad (i)$$

Мы видим, что в этом случае эпюра поперечных сил представляет наклонную прямую линию, для которой ординаты при $x = 0$ и $x = l$ соответственно равны $\frac{ql}{2}$ и $-\frac{ql}{2}$, как показано на рис. 68, *b*. Из выражения (i) можно видеть, что в этом случае изгибающий момент представляет параболу с вертикальной осью в середине пролета балки (рис. 68, *c*). Моменты на концах, т. е. при $x = 0$ и $x = l$, равны нулю, а наибольшее значение момент имеет в середине пролета, где поперечная сила меняет знак. Этот максимум получается подстановкой $x = \frac{l}{2}$ в выражение (i), которое дает

$$M_{\text{max}} = \frac{ql^3}{8}.$$

Рис. 68

Если равномерная нагрузка q покрывает только часть пролета (рис. 69), то мы должны рассмотреть отдельно три участка длиной a , b и c . Для определения реакций R_1 и R_2 мы заменяем равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей qb . Из уравнений статики для моментов относительно B и A мы получаем

$$R_1 = \frac{qb}{l} \left(c + \frac{b}{2} \right) \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{qb}{l} \left(a + \frac{b}{2} \right).$$

Поперечная сила и изгибающий момент для ненагруженного левого участка балки ($0 < x < a$) будут

$$Q = R_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x. \quad (j)$$

Для поперечного сечения m , взятого на нагруженном участке балки, поперечная сила получается путем вычитания из реакции R_1 нагрузки $q(x-a)$, расположенной слева от этого сечения. Изгибающий момент в том же поперечном сечении получается путем вычитания из момента реакции момента нагрузки, расположенной слева от этого сечения. Таким образом, мы находим

$$Q = R_1 - q(x-a) \quad \text{и} \quad M = R_1 x - q(x-a) \frac{x-a}{2}. \quad (k)$$

Для ненагруженного правого участка балки, рассматривая силы справа от какого-либо сечения, мы находим

$$Q = -R_2 \quad \text{и} \quad M = R_2 (l - x). \quad (l)$$

Пользуясь выражениями (j), (k) и (l), мы можем легко построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюра поперечных сил (рис. 69, *b*) состоит из горизонтальных отрезков $a_1 c_1$ и $d_1 b_1$, соответствующих ненагруженным участкам балки, и наклонной линии $c_1 d_1$, соответствующей равномерно нагруженному участку.

Эпюра изгибающих моментов (рис. 69, *c*) состоит из двух наклонных линий $a_2 c_2$ и $b_2 d_2$, соответствующих ненагруженным участкам, и параболической кривой $c_2 e_2 d_2$ с вертикальной осью, соответствующей нагруженному участку балки. Наибольший изгибающий момент будет в точке e_2 , которая соответствует точке e_1 , где поперечная сила меняет знак. В точках c_2 и d_2 парабола касается соответственно наклонных линий $a_2 c_2$ и $d_2 b_2$. Это следует из того, что в точках c_1 и d_1 эпюры поперечных сил не происходит резкого изменения величины поперечной силы. Следовательно, на основании уравнения (50), не может быть резкого изменения наклона эпюры изгибающих моментов в соответствующих точках c_2 и d_2 .

В случае консоли (рис. 70) для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов применяется тот же метод, как и для свободно лежащей балки. Измеряя x от левого конца балки и рассматривая участок, расположенный слева от груза P_2 ($0 < x < a$), получаем

$$Q = -P_1 \quad \text{и} \quad M = -P_1 x.$$

Знак минус в этих выражениях следует из правила знаков, указанного на рис. 63, *b* и 64, *b*. Для правого участка балки ($a < x < l$) мы получаем

$$Q = -P_1 - P_2 \quad \text{и} \quad M = -P_1 x - P_2 (x-a).$$

Соответствующие эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 70, *b* и 70, *c*. Полная площадь эпюры поперечных

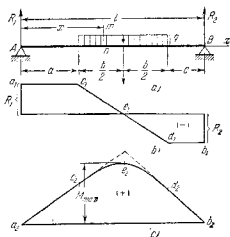


Рис. 69.

сил в этом случае не равна нулю, а равна $-P_1l - P_2b$, что выражает изгибающий момент M_B в конце B балки. Эпюра изгибающих моментов состоит из двух наклонных линий a_1c_2 и c_2b_2 , тангенсы углов наклона которых равны значениям поперечной силы на соответствующих участках консоли. Численно наибольший изгибающий момент имеет место в заделанном конце B балки.

Если консоль несет равномерно распределенную нагрузку (рис. 71), то поперечная сила и изгибающий момент на расстоянии x равняются:

$$Q = -qx \quad \text{и} \quad M = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Эпюра поперечной силы представлена на рис. 71, b наклонной линией ab и изгибающий момент на рис. 71, c параболой a_1b_1 , которая

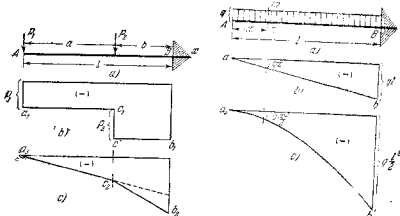


Рис. 70.

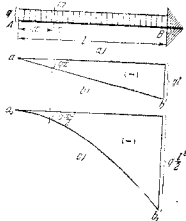


Рис. 71.

имеет вертикальную ось и касается горизонтальной оси в точке a_1 , где поперечная сила равна нулю. Численно наибольшие значения изгибающего момента и поперечной силы имеют место в конце B балки.

Если на балку одновременно действуют сосредоточенные и распределенные нагрузки, то удобно строить эпюры отдельно для каждого рода нагрузки, и путем сложения соответствующих ординат двух отдельных эпюр получить полные значения Q и M в любом поперечном сечении. Если, например, мы имеем сосредоточенные грузы P_1 , P_2 и P_3 (рис. 67), действующие одновременно с равномерной нагрузкой (рис. 68), то изгибающий момент в каком-либо сечении получается путем сложения соответствующих ординат Q и M , изображенных на рис. 67, c и 68, c .

ЗАДАЧИ

1. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для балок, показанных на рис. 72.

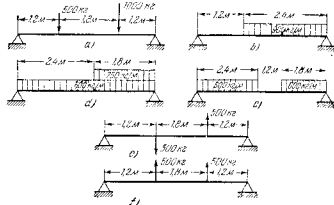


Рис. 72.

2. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для консолей, показанных на рис. 73.

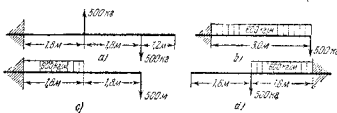


Рис. 73.

3. Консоль, заделанная на правом конце, несет полную нагрузку P , интенсивность которой равномерно возрастает от нуля на левом конце, как показано наклонной линией AC на рис. 74, a . Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение. Поперечная сила в сечении m , отстоящем на расстоянии x от левого конца консоли, численно равна заштрихованной части нагрузки. Так как полная нагрузка P представлена площадью треугольника ACB , то заштрихованная часть равняется $P \frac{x^2}{l^2}$. Пользуясь ранее принятым правилом знаков (рис. 64), мы получаем

$$Q = -P \frac{x^2}{l^2}.$$

Таким образом, эпюра поперечных сил изображается на рис. 74, b параболой ab с вертикальной осью в точке a . Изгибающий момент в сечении m получится,

если взять момент заштрихованной части нагрузки относительно центра тяжести поперечного сечения m . Следовательно,

$$M = -P \frac{x^2}{l} \frac{x}{3}.$$

Этот момент представлен кривой $a_1 b_1$ на рис. 74. с.

4. Балка длиной l несет в концах два равных груза P (рис. 75), уравновешенные равномерно распределенной реакцией. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. Эпюры получаются из рис. 68, б и в 68, с путем подстановки $-2P$ вместо q .

5. Балка длиной $l=12$ м несет в середине длины сосредоточенный груз $P=1000$ кг (рис. 76) и имеет равномерную по всей длине реакцию. Найти численно наибольший изгибающий момент. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $M_{\max}=1500$ кгм. Требуемые эпюры для каждой половины балки подобны эпюрам, изображенным на рис. 71, б и 71. с.

6. Свободно лежащая балка длиной l несет полную распределенную нагрузку P , интенсивность которой равномерно возрастает от нуля на левом конце, как показано на рис. 77, а. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, если $P=12$ т и $l=12$ м.

Решение. Реакции опор в этом случае будут

$$R_1 = \frac{1}{3} P = 4 \text{ т} \text{ и } R_2 = 8 \text{ т.}$$

Поперечная сила в сечении m получается путем вычитания заштрихованной части нагрузки из реакции R_1 . Следовательно,

$$Q = R_1 - P \frac{x^2}{l} = P \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l} \right).$$

Эпюра поперечных сил изображена параболической кривой acb на рис. 77, б. Изгибающий момент в сечении m равенся

$$M = R_1 x - P \frac{x^2}{l} \frac{x}{3} = \frac{1}{3} P x \left(1 - \frac{x^2}{l} \right).$$

Этот момент представлен кривой $a_1 c_1 b_1$ на рис. 77, с. Наибольший момент имеет место в точке c , где поперечная сила меняет свой знак, т. е. при $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

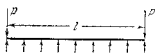


Рис. 75.

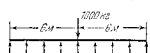


Рис. 76.

7. Свободно лежащая балка AB несет распределенную нагрузку, интенсивность которой представлена линией ACB (рис. 78). Найти выражения для поперечной силы и изгибающего момента в сечении m .

Решение. Предполагая, что полная нагрузка P приложена в центре тяжести площади треугольника ACB , найдем, что реакции опор будут

$$R_1 = P \frac{l+b}{3l} \text{ и } R_2 = P \frac{l+a}{3l}.$$

Полная нагрузка делится на две части, которые представлены треугольниками ACD и CBD и величина которых соответственно равна Pa/l и Pb/l . Заштрихованная часть нагрузки равняется $P \frac{a}{l} \frac{x^2}{a^2} = P \frac{x^2}{al}$. Тогда для поперечной силы и изгибающего момента в сечении m мы получим

$$Q = R_1 - P \frac{x^2}{al} \text{ и } M = R_1 x - P \frac{x^2}{al} \frac{x}{3}.$$

Подобным образом можно получить поперечную силу и изгибающий момент для какого-либо сечения на участке DB балки.

8. Найти M_{\max} в предыдущей задаче, если $l=12$ м, $b=3$ м, $P=12$ т.

Ответ. $M_{\max}=22,4$ тм.

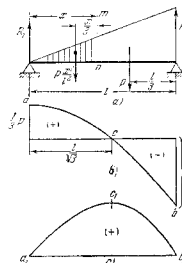


Рис. 77.

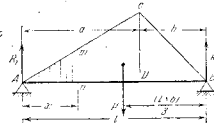


Рис. 78.

9. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для балок с консолями (рис. 79).

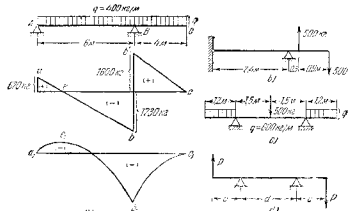


Рис. 79.

Решение. В случае, показанном на рис. 79, а, реакции равны 670 кг и 3300 кг. Поперечная сила для левого участка балки равняется $Q = 670 - 400 x$. Она

изображена на рисунке наклонной линией ab . Поперечная сила для правого участка балки найдется как для консоли и показана наклонной линией $b'c$. Изгибающий момент для левого участка балки равен $M = 670x - 400 \frac{x^2}{2}$. Он изображен параболой $a_1c_1b_1$. Наибольший момент имеет место в точке c_1 и соответствует точке c , где поперечная сила меняет свой знак.



Рис. 80.

Эпюра изгибающих моментов для правого участка такая же, как и для консоли, и изображена параболой b_1c_1 , касающейся горизонтальной оси в точке c_1 .

10. Балка с двумя равными консолями (рис. 80), нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, имеет длину l . Найдите расстояние d между опорами

так, чтобы изгибающий момент в середине балки численно равнялся изгибающим моментам на опорах. Постройте для этого случая эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $d = 0,586 l$.

ГЛАВА IV

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННЫХ СИММЕТРИЧНЫХ БАЛКАХ

23. Чистый изгиб

В предыдущей главе было упомянуто, что величина напряжений в каком-либо поперечном сечении балки определяется величиной поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении. Определение напряжений мы начнем со случая, когда поперечная сила равняется нулю и имеется только изгибающий момент. Этот случай называется *чистым изгибом*. Пример такого изгиба показан на рис. 81.

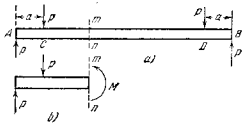


Рис. 81.

Из условий симметрии мы заключаем, что реакции в этом случае равны P . Рассматривая равновесие части балки, находящейся слева от поперечного сечения mn , мы можем заключить, что внутренние усилия, распределенные по поперечному сечению mn и представляющие действие отброшенной правой части балки на левую, должны быть статически эквивалентны паре сил, равной и направленной противоположно изгибающему моменту Pa . Чтобы найти закон распределения этих внутренних усилий по поперечному сечению, необходимо рассмотреть деформацию балки. В простом случае балки, имеющей продольную плоскость симметрии с внешними парами изгиба, действующими в этой плоскости, изгиб будет происходить в этой же плоскости. Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение и на ее гранях нанесены две смежные вертикальные линии mn и pp , то непосредственный опыт показывает, что эти линии при изгибе остаются прямыми и поворачиваются так, что остаются нормальными к продольным волокнам балки (рис. 82). Излагаемая ниже теория изгиба основана на предположении, что не только проведенные на гранях линии, как mn , остаются прямыми, но что все поперечное сечение балки, перво-

начально плоское, остается и после изгиба плоским и нормальным к продольным волокнам балки. Опыт показывает, что теория, основанная на этом предположении, дает очень точные результаты для прогиба балок и деформации продольных волокон. Из вышеуказанного предположения следует, что при изгибе поперечные сечения mm и pp поворачиваются относительно друг друга около оси, перпендикулярной к плоскости изгиба, так что продольные волокна на выпуклой стороне испытывают растяжение, а на вогнутой стороне — сжатие. Линия nn , есть след пересечения боковой

поперечного сечения, вертикальные стороны прямоугольного сечения становятся наклонными друг к другу, как показано на рис. 82, б. Относительная деформация в поперечном направлении равна

$$\epsilon_x = -\mu \epsilon_y = -\mu \frac{y}{r}, \quad (53)$$

где μ — коэффициент Пуассона. Благодаря этому искажению все прямые линии в поперечном сечении, параллельные оси z , искривляются так, что остаются нормальными к боковым сторонам сечения. Их радиус кривизны R будет больше r во столько раз, во сколько ϵ_x численно больше ϵ_y (см. уравнение 53), и мы получаем

$$R = \frac{1}{\mu} r. \quad (54)$$

Из деформаций продольных волокон на основании закона Гука определяются соответствующие напряжения (уравнение 4):

$$\sigma_x = \frac{E y}{r}. \quad (55)$$

Закон распределения этих напряжений показан на рис. 83. Напряжение в каком-либо волокне пропорционально расстоянию его от нейтральной оси и радиус кривизны r — две неизвестные в уравнении (55) — можно теперь определить из того условия, что силы, распределенные по какому-либо поперечному сечению балки, должны дать *сопротивляющуюся пару*, которая уравновесит внешнюю пару M (рис. 81).

Пусть dF означает элементарную площадку поперечного сечения, расположенную на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 83). Усилие, действующее на эту элементарную площадку, равно произведению напряжения (уравнение 55) на площадь dF , т. е. $\frac{E y}{r} dF$. Вследствие того, что все такие усилия, распределенные по поперечному сечению, представляют систему сил, эквивалентную паре сил, равнодействующая этих усилий должна быть равна нулю, и мы получаем

$$\int \frac{E y}{r} dF = \frac{E}{r} \int dF \cdot y = 0,$$

т. е. статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси равен нулю. Следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения*.

Момент усилия, приходящегося на элементарную площадку dF , относительно нейтральной оси равен $\frac{E y}{r} dF \cdot y$. Суммируя все

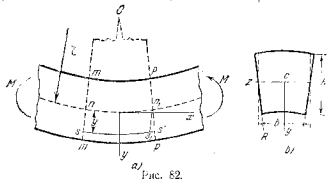


Рис. 82.

границы с поверхностью, по которой волокна не претерпевают изменения длины при изгибе. Эта поверхность называется *нейтральным слоем*, а линия ее пересечения с каким-либо поперечным сечением называется *нейтральной осью*. Удлинение $s's_1$, какого-либо волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, получится, если провести линию n_1s_1 параллельно mm (рис. 82, а). Обозначая через r радиус кривизны изогнутой оси¹⁾ балки и пользуясь подобием треугольников nOn_1 и s_1n_1s' , находим относительное удлинение волокна $s's'$

$$\epsilon_x = \frac{s's_1}{nn_1} = \frac{y}{r}. \quad (52)$$

Из этого уравнения видно, что деформации продольных волокон пропорциональны расстоянию y от нейтрального слоя и обратно пропорциональны радиусу кривизны.

Опыт показывает, что продольное растяжение волокон на выпуклой стороне балки сопровождается *поперечным сжатием* и продольное сжатие на вогнутой стороне — *поперечным расширением* такой же величины, как в случае простого растяжения или сжатия (см. параграф 14). В результате этого изменяется форма

¹⁾ Осью балки называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений балки. O означает центр кривизны оси балки.

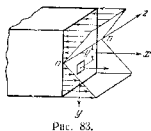


Рис. 83.

такие моменты по поперечному сечению и полагая равнодействующую равной моменту M внешних сил, получаем следующее уравнение для определения радиуса кривизны r :

$$\int \frac{E}{r} dF \cdot y^2 = \frac{EJ_z}{r} = M \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (56)$$

в котором

$$J_z = \int dF \cdot y^2$$

есть *момент инерции* поперечного сечения относительно нейтральной оси z (см. приложение, стр. 350). Из уравнения (56) видно, что кривизна изменяется прямо пропорционально изгибающему моменту и обратно пропорционально величине EJ_z , которая называется *жесткостью балки при изгибе*. Исключая r из уравнений (55) и (56), мы получаем следующее уравнение для определения напряжений:

$$\sigma_x = \frac{My}{J_z}. \quad (57)$$

В этом уравнении момент M положителен, если вызывает деформацию изгиба выпуклостью вниз, как на рис. 82; ордината y положительна при направлении вниз.

Предыдущее рассуждение было приведено для случая прямоугольного поперечного сечения. Оно остается справедливым также и для бруса какой-либо иной формы поперечного сечения, который имеет продольную плоскость симметрии и изгибается парами сил, действующими в этой плоскости и приложенными на концах бруса. В таких случаях изгиб происходит в плоскости действия пар, и поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к продольным волокнам и после изгиба.

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения имеют место в крайних волокнах, и в прямоугольном или в каком-либо другом поперечном сечении, которое имеет центр тяжести по середине высоты h , они будут при $y = \pm \frac{h}{2}$. Тогда при положительном M мы получаем

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mh}{2J_z} \quad \text{и} \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mh}{2J_z}. \quad (58)$$

Для упрощения мы воспользуемся следующим обозначением:

$$W_z = \frac{2J_z}{h}. \quad (59)$$

Тогда

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{M}{W_z}. \quad (60)$$

Величина W_z называется *моментом сопротивления* площади сече-

ния. В случае прямоугольного поперечного сечения (рис. 82, б) мы имеем

$$J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Для кругового поперечного сечения диаметра d

$$J_z = \frac{\pi d^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для сечений различных профилей, применяемых на практике, например, для двутавровых балок, швеллеров и т. д., величины J_z и W_z заводских размеров даются в таблицах справочников. В приложении даны таблицы для таких сечений.

Если центр тяжести поперечного сечения находится не по середине высоты, как, например, в случае тавровой балки, и если h_1 и h_2 соответственно означают расстояния от нейтральной оси до нижнего и верхнего крайних волокон, то при положительном изгибающем моменте мы получим

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mh_1}{J_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mh_2}{J_z}. \quad (61)$$

При отрицательном изгибающем моменте мы получим

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{Mh_2}{J_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = \frac{Mh_1}{J_z}. \quad (62)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее напряжение в паровой оси (рис. 84), если $c = 33,75$ см, диаметр оси $d = 25$ см, и нагрузка P , передаваемая рессорой на шейку оси, равна 10 400 кг.

Решение. Изгибающий момент, действующий в средней части оси, равен $M = Pc = 10\,400 \cdot 33,75$ кгсм. Наибольшее напряжение, по формуле (60), равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 10\,400 \cdot 33,75}{\pi \cdot 25^3} = 230 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить радиус кривизны r и прогиб оси в предыдущей задаче, если материалом является сталь и расстояние между центрами шеек равняется 147,5 см.

Решение. Радиус кривизны r определяется из уравнения (53) подстановкой

$$y = \frac{d}{2} = 12,5 \text{ см}, \quad (\sigma_x)_{\max} = 230 \text{ кг/см}^2. \quad \text{Тогда}$$

$$r = \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{d}{2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 12,5}{230} = 108\,700 \text{ см}.$$

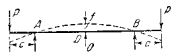


Рис. 84.

При вычислении f (рис. 64) заметим, что изогнутая ось представляет дугу окружности радиуса r и DB есть катет прямоугольного треугольника DOB , где O — центр окружности. Поэтому

$$|DB|^2 = r^2 - (r - f)^2 = 2rf - f^2,$$

f весьма мало по сравнению с радиусом r , и в этом уравнении величиной f^2 можно

преобретет. Тогда

$$f = \frac{DB^3}{2r} = \frac{147,5^3}{8 \cdot 1,08 \cdot 700} = 0,025 \text{ см}$$

3. Деревянная балка квадратного поперечного сечения 25×25 см опирается в A и B (рис. 84) и нагружена силами P , приложенными на концах. Определить величину P и прогиб f в середине, если $AB = 180$ см, $s = 30$ см, $\sigma_{ср\max} = 67$ кг/см² и $E = 10^6$ кг/см². Весом балки пренебрегаем. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $P = 3816$ кг, $f = 0,217$ см.

4. Двутавровая балка высотой 75 см опирается, как указано на рис. 85, и нагружена на консолях равномерно распределенной нагрузкой $13\,300$ кг/м. Определить наибольшее напряжение в средней части балки и прогиб в середине балки, если $J_x = 357\,400$ см⁴.



Рис. 85.

Решение. Изгибающий момент для средней части балки будет $M = 13\,300 \cdot 3 \times 150 = 5\,985\,000$ ксм.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{5\,985\,000 \cdot 37,5}{357\,400} = 628 \text{ кг/см}^2, \quad f = 0,377 \text{ см}.$$

5. Определить наибольшее напряжение, возникающее в стальной проволоке диаметра $d = 0,08$ см, при навивании ее на круглый барабан диаметра $D = 50$ см.

Решение. Наибольшее удлинение от изгиба по формуле (52) равняется

$$\epsilon = \frac{d}{D+d} = \frac{0,08}{50}$$

соответствующее растягивающее напряжение равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = E\epsilon = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,08}{50} = 3200 \text{ кг/см}^2.$$

6. Стальная линейка, имеющая поперечное сечение $0,08 \times 5$ см и длину 25 см, изгибается парами сил, приложенными по концам по дуге круга 60° . Определить наибольшее напряжение и прогиб.

Решение. Радиус кривизны r определяется из уравнения $l = \frac{2lr}{6}$, откуда $r = 23,9$ см, и наибольшее напряжение по формуле (55) будет

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \cdot 0,08}{2r} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,08}{2 \cdot 23,9} = 3350 \text{ кг/см}^2.$$

Прогиб, вычисленный как для дуги круга, получится

$$f = r(1 - \cos 30^\circ) = 3,2 \text{ см}.$$

7. Определить наибольшее напряжение и величину пар сил, приложенных к концам линейки в предыдущей задаче, если наибольший прогиб в середине равен $2,5$ см.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = 2560$ кг/см², $M = 6,83$ ксм.

8. Определить кривизну, вызываемую в свободно лежащей стальной балке премоудельно поперечного сечения неравномерным нагреванием на высоте h поперечного сечения. Температура в какой-либо точке на расстоянии y от срединной плоскости из балки (рис. 82) определяется из уравнения

$$t = \frac{t_1 + t_0}{2} + \frac{(t_1 - t_0)y}{h},$$

где t_1 есть температура внизу балки, t_0 — температура сверху, $t_1 - t_0 = 70^\circ$ C и коэффициент линейного расширения $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-6}$. Каковы будут напряжения, если концы балки заделаны.

Решение. Температура срединной плоскости из постоянна, $\frac{t_1 + t_0}{2}$, и изменение температуры других волокон пропорционально y . Соответствующие относительные удлинения и укорочения от температуры будут также пропорциональны y , т. е. она будет следовать тому же закону, как и деформации, определяемые уравнением (52). Результатом этого неравномерного расширения волокон является изгиб балки, и радиус кривизны r найдется из уравнения (52), где вместо ϵ_x будет $\frac{\alpha_c(t_1 - t_0)}{2}$ и вместо y будет $\frac{h}{2}$. Тогда

$$r = \frac{h}{\alpha_c(t_1 - t_0)} = 1143 \text{ см}.$$

Если концы балки заделаны, то на концах будут вызваны реактивные пары сил такой величины, что они уничтожат в месте заделки кривизну от неравномерного нагревания. Отсюда

$$M = \frac{EJ_x}{r} = \frac{EJ_x}{1143 \text{ см}}.$$

Подставляя это в уравнение (57), мы получаем

$$\sigma_x = \frac{Ey}{1143 \text{ см}}$$

и наибольшее напряжение равно

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E}{2 \cdot 1143} = 875 \text{ кг/см}^2.$$

9. Решить задачи 6 и 7, если дуга соответствует 10° и материалом является медь.

10. Решить задачу 4, предполагая, что балка — деревянная, имеет квадратное поперечное сечение 30×30 см и интенсивность распределенной нагрузки равна 1300 кг/м. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

24. Различные формы поперечных сечений балок¹⁾

Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что наибольшие растягивающие или сжимающие напряжения в балке при чистом изгибе пропорциональны расстояниям наиболее удаленных волокон от нейтральной оси поперечного сечения.

¹⁾ Весьма полное рассмотрение различных форм поперечных сечений балок дано Barré de Saint-Venant в его замечаниях к книге «Navier, Résistance des corps solides», 3-е издание, стр. 122—62, 1854.

Поэтому, если материал одинаково сопротивляется и растяжению и сжатию, будет логичным выбирать такие формы поперечного сечения, в которых центр тяжести находится по середине высоты балки. Таким образом, получится один и тот же коэффициент безопасности для растянутых и сжатых волокон. Эта мысль является основанием для выбора сечений, симметричных относительно нейтральной оси, для таких материалов, как строительная сталь, которая имеет один и тот же предел текучести как при растяжении, так и при сжатии. Если сечение не симметрично относительно нейтральной оси, например, сечение рельса, то материал распределяется по сечению так, чтобы иметь центр тяжести по середине его высоты.

Для материалов с низким сопротивлением растяжению и высоким сопротивлением сжатию, как в случае чугуна или бетона, благоприятным поперечным сечением балки будет несимметричное относительно нейтральной оси, и при этом такое, в котором расстояния h_1 и h_2 от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон будут пропорциональны допустимым напряжениям материала на растяжение и сжатие. Таким образом получится сечение одинакового сопротивления на растяжение и сжатие. Например, в тавровом сечении центр тяжести может быть помещен в нужном месте по высоте сечения путем надлежащего подбора размеров ребра и полки.

Для данного изгибающего момента наибольшее напряжение зависит от момента сопротивления, и интересно отметить, что имеются случаи, когда увеличение площади не дает уменьшения этого напряжения. Например, брус квадратного поперечного сечения, изгибаемый парами сил, действующими в вертикальной плоскости, проходящей через диагональ поперечного сечения (рис. 86), будет иметь меньшее напряжение, если срезать заштрихованные на рисунке углы. Пусть a означает длину стороны квадрата, тогда момент инерции квадрата относительно оси z (см. приложение) равен $J_z = a^4/12$ и соответствующий момент сопротивления равен

$$W_z = \frac{J_z \sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Срезаем теперь углы так, чтобы $mp = m$, где a есть дробь, определяемая ниже. Новое поперечное сечение состоит из квадрата $m_1 m_1$ со сторонами $a(1-a)$ и двух параллелограммов $m m_1 m_1 m_1$. Момент инерции этого нового поперечного сечения относительно оси z

равняется

$$J'_z = \frac{a^4(1-a)^4}{12} - 2 \frac{aa^4 \frac{\sqrt{2}}{3}}{\left(\frac{a(1-a)}{2}\right)^2} \left[\frac{a(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{a^4(1-a)^4}{12} (1+3a)$$

и соответствующий момент сопротивления будет

$$W'_z = \frac{J'_z \sqrt{2}}{a(1-a)} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1-a)^2 (1+3a).$$

Если теперь мы определим значение a так, чтобы сделать этот момент сопротивления наибольшим, то найдем $a = 1/9$. Вставив это значение a в выражение для W'_z , найдем, что срезыванием углов наибольшее напряжение при изгибе уменьшится приблизительно на 5%.

Этот результат легко сразу понять, если принять во внимание, что момент сопротивления есть частное от деления момента инерции на половину высоты поперечного сечения. Срезыванием углов момент инерции поперечного сечения уменьшается в меньшей степени, чем высота, следовательно, момент сопротивления увеличивается и $(\sigma_x)_{\max}$ уменьшается. Подобный результат можно получить в других случаях. Для прямоугольника с узкими выступающими частями (рис. 87, а) момент сопротивления, при некоторых условиях, увеличивается срезыванием этих частей. Для кругового поперечного сечения (рис. 87, б) момент сопротивления увеличивается на 0,7% срезыванием двух заштрихованных сегментов высотой $\delta = 0,011d$. В случае треугольного сечения (рис. 87, в) момент сопротивления можно увеличить срезыванием заштрихованного угла.

При проектировании балки, испытывающей чистый изгиб, необходимо удовлетворить не только условиям прочности, но также и условиям экономии в весе самой балки. Из двух поперечных сечений, имеющих один и тот же момент сопротивления, т. е. удовлетворяющих условиям прочности с одинаковым коэффициентом безопасности, сечение с меньшей площадью будет более экономичным. Для сравнения различных форм поперечных сечений мы рассмотрим сначала прямоугольник высотой h и шириной b . Момент сопротивления равняется

$$W_z = \frac{bh^3}{6} = \frac{1}{6} Fh, \quad (a)$$

где F означает площадь поперечного сечения. Видно, что прямоугольное поперечное сечение становится более экономичным

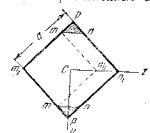


Рис. 86.

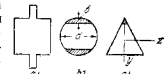


Рис. 87.

с увеличением его высоты h . Однако имеется предел такого увеличения. Когда сечение становится очень узким, то возникает вопрос об устойчивости балки. Разрушение балки очень узкого прямоугольного сечения может произойти не от преодоления сопротивления материала, а от бокового выкручивания (см. том II).

В случае кругового поперечного сечения имеем

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} Fd. \quad (b)$$

Сравнивая круговое и квадратное поперечные сечения одинаковой площади, находим, что сторона h квадрата будет $h = d\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и тогда уравнение (a) дает

$$W_z = 0,147 Fd.$$

Сравнение этого значения W_z с (b) показывает, что квадратное поперечное сечение является более экономичным, чем круговое.

Исследование закона распределения напряжений по высоте поперечного сечения (рис. 83) приводит к заключению, что при экономичном проектировании необходимо большую часть материала балки располагать по возможности дальше от нейтральной оси. Наиболее благоприятный случай для данного поперечного сечения площадью F и высотой h будет тот, когда каждая половина площади будет сосредоточена на расстоянии $h/2$ от нейтральной оси. Тогда

$$J_z = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Fh^2}{4}; \quad W_z = \frac{1}{2} Fh. \quad (c)$$

Это есть предел, к которому можно приближаться на практике, пользуясь двутавровым сечением с наибольшей частью материала в полках. Вследствие необходимости исключения части материала в стенку балки указанное условие (c) никогда не может быть осуществлено, и для стандартных двутавровых прокатных профилей мы имеем приближенно

$$W_z \approx 0,30 h. \quad (d)$$

Сравнение (d) с (a) показывает, что двутавровое сечение значительно экономичнее прямоугольного сечения той же высоты. Кроме того, благодаря своим широким полкам двутавровая балка будет всегда более устойчивой по отношению к боковому выкручиванию, чем балка прямоугольного сечения той же высоты и того же момента сопротивления. Этим объясняется причина того, что двутавровые балки находят широкое применение в стальных конструкциях.

ЗАДАЧИ

1. Определить ширину x полки чугунной балки, имеющей сечение, показанное на рис. 88, так, чтобы наибольшее растягивающее напряжение составляло одну треть наибольшего сжимающего напряжения. Высота балки $h = 10$ см, толщина стенки и полки $t = 2,5$ см.

Решение. Для того чтобы удовлетворить условиям задачи, необходимо для балки иметь такие размеры, чтобы расстояние e от центра тяжести до крайней



Рис. 88.

нижней грани равнялась $\frac{1}{4}h$. Теперь, пользуясь рис. 88, получаем уравнение

$$e = \frac{ht \frac{h}{2} + (x-t) \frac{t^2}{2}}{ht + (x-t)t} = \frac{h}{4},$$

откуда

$$x = t + \frac{h^2}{h-2t} = 2,5 + \frac{100}{10-5} = 22,5 \text{ см.}$$

2. Определить отношение $(\sigma_x)_{\max} : (\sigma_x)_{\min}$ для швеллера, показанного на рис. 89, если $t = 5$ см, $h = 25$ см, $b = 60$ см.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} : (\sigma_x)_{\min} = 3:7$.



Рис. 89.

3. Определить условие, при котором уменьшение высоты h_1 сечения, показанного на рис. 90, сопровождается увеличением момента сопротивления.

$$\text{Решение. } W_z = \frac{bh^2}{6h_1} + \frac{dh^2}{6}; \quad \frac{dW_z}{dh_1} = -\frac{bh^2}{6h_1^2} + \frac{dh_1}{3}.$$

Условием для увеличения W_z с уменьшением h_1 является

$$\frac{bh^2}{6h_1^2} > \frac{dh_1}{3} \quad \text{или} \quad \frac{h}{2a} > \frac{h_1^2}{h^2}.$$

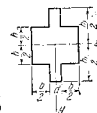


Рис. 90.

4. Определить, насколько нужно срезать угол равнобедренного треугольника поперечного сечения (рис. 87, c) для того, чтобы получить наибольший W_z .

5. Определить отношение весов трех балок одинаковой длины с одинаковым M и $(\sigma_x)_{\max}$ и имеющими соответственно поперечные сечения: круговое, квадратное и прямоугольное с отношением $h = 2b$.

Ответ. 1,12:1:0,793.

6. Сделать сравнение моментов сопротивления для двух балок одинакового веса, если первая является сплошной цилиндрической балкой диаметра d , а вторая представляет цилиндрическую трубу наружного диаметра D и внутреннего диаметра D_1 .

Решение. Площади поперечных сечений обеих балок $F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (D^2 - D_1^2)}{4}$.

Для сплошной балки $W = \frac{F d}{8}$, для трубчатой балки $W_1 = \frac{\pi (D^4 - D_1^4)}{32 D}$.

$= \frac{F d}{8} \left(1 + \frac{D^2}{D_1^2} \right)$. Замечая, что $D_1^2 - D^2 = \frac{4F}{\pi}$, находим для трубчатой балки

$W_1 = \frac{F D}{8} \left(2 - \frac{4F}{\pi D^2} \right)$, так что

$$\frac{W_1}{W} = \frac{D}{d} \left(2 - \frac{4F}{\pi D^2} \right).$$

Таким образом, для очень толстых труб D приближается к d и W_1 к W . Для очень тонких труб D велико по сравнению с d и отношение $W_1 : W$ приближается к значению $\frac{2D}{d}$.

25. Общий случай изгиба поперечно нагруженных симметричных балок

В общем случае изгиба балок, поперечно нагруженных в плоскости симметрии, напряжения, распределенные по поперечному сечению балки, должны уравновешивать поперечную силу и изгибающий момент в этом сечении. Вычисление напряжений обычно производят в два этапа, сначала определяют напряжения, вызываемые изгибающим моментом и называемые *нормальными напряжениями*, а затем определяют *касательные напряжения*, возникающие от поперечной силы. В этом параграфе мы ограничимся вычислением нормальных напряжений; вопрос о касательных напряжениях будет обсужден в следующем параграфе. При вычислении нормальных напряжений мы предполагаем, что эти напряжения распределяются таким же образом, как и в случае чистого изгиба, и формулы для определения напряжений, введенные в параграфе 23, будут справедливы. (Более полное обсуждение вопроса о распределении напряжений вблизи точек приложения сосредоточенных сил дано в томе II.)

Вычисление нормальных напряжений обычно производят для поперечных сечений, в которых изгибающий момент имеет наибольшее положительное или отрицательное значение. Имея численно наибольший изгибающий момент и величину допустимого напряжения $[\sigma_n]$ при изгибе, получим необходимые размеры поперечного сечения из уравнения

$$[\sigma_n] = \frac{M_{\max}}{W}. \quad (63)$$

Приложение этого уравнения покажем теперь на числовых примерах.

ЗАДАЧИ

1. Определить необходимые размеры прокатной двутавровой балки, свободно лежащей на двух опорах с распределенной нагрузкой 500 кг/м, как показано на рис. 91, если допустимое напряжение $[\sigma_n] = 1400$ кг/см². Принять во внимание только нормальные напряжения и весом балки пренебречь.

Решение. Чтобы получить сечение, соответствующее наибольшему изгибающему моменту, нужно построить эпюру поперечных сил (рис. 91, б). Реакция левой опоры равна

$$R_1 = \frac{4 \cdot 500 \cdot 5 + 2 \cdot 500 \cdot 1}{7} = 1570 \text{ кг.}$$

Поперечная сила для какого-либо сечения участка AC балки равняется

$$Q = R_1 - qx = 1570 - 500x.$$

Эта сила равна нулю при $x = \frac{1570}{500} = 3,14$ м. Для этого сечения изгибающий момент будет наибольший:

$$M_{\max} = 1570 \cdot 3,14 - 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,14^2 = 2465 \text{ кгм} = 246\,500 \text{ кг см.}$$

Необходимый момент сопротивления $W_z = \frac{246\,500}{1400} = 176 \text{ см}^3$. Этому условию удовлетворяет двутавровая балка № 20 с моментом сопротивления $W_z = 184 \text{ см}^3$.

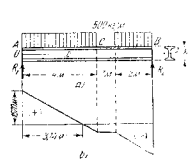


Рис. 91.

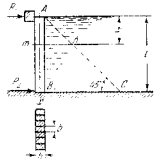


Рис. 92.

2. Деревянная плотина (рис. 92) состоит из вертикальных брусков, подобных AB, прямоугольного поперечного сечения размером $h = 30$ см, опертых на концы. Определить $(\sigma_n)_{\max}$, если длина брусков $l = 6$ м и весом брусков пренебрегаться.

Решение. Если b есть ширина бруса, то полное гидростатическое давление на брус, изображенное трехгранной призмой ABC, равняется $H = \frac{1}{2} b l^2$. Реакция в A равняется $R_1 = \frac{1}{3} H = \frac{1}{6} b l^2$ и поперечная сила в каком-либо сечении

¹⁾ Здесь и на стр. 99, 100, 101, 102 и 274 номера и размеры американских двутавровых балок заменены номерами и размерами, установленными в СССР ГОСТом 8239—56. (Прим. перев.).

тл равна реакции R_1 минус вес призмы Alm воды, т. е.

$$Q = R_1 - H \frac{x^2}{l^2} = H \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Положение поперечного сечения, соответствующего M_{\max} , найдется из условия $Q = 0$ или

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

откуда $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 3,46$ м.

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении тл равняется моменту от реакции R_1 минус момент от распределенной нагрузки, изображенной трехгранной призмой Alm . Следовательно,

$$M = R_1 x - \frac{Hx^3}{l^2} \frac{x}{3} = \frac{Hx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Подставляя найденные выше значения $\frac{x^2}{l^2} = \frac{1}{3}$ и $x = 3,46$ м, получаем

$$M_{\max} = \frac{1}{9} H l^2 = 3,46 \text{ тм};$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6M_{\max}}{b h^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{3460}{100^2} = 92,3 \text{ кг/см}^2.$$

3. Определить величину M_{\max} в балке, нагруженной треугольной нагрузкой ADB , равной $P = 4800$ кг, если $l = 4$ м и $d = 1$ м (рис. 93).

Решение. Расстояние c до вертикали, проходящей через центр тяжести C , от опоры B в случае треугольника равняется

$$c = \frac{1}{3}(l + d) = \frac{5}{3} \text{ м.}$$

Реакция опоры A равна

$$R_1 = \frac{Pc}{l} = \frac{4800 \cdot 5}{4 \cdot 3} = 2000 \text{ кг.}$$

Поперечная сила в каком-либо сечении тл равняется реакции R_1 минус вес нагрузки.

Представленной площадью Alm . Так как нагрузка, представленная площадью ADE , равняется

$$\frac{P(l-d)}{l} = \frac{3}{4} P,$$

то получаем

$$Q = R_1 - \frac{3}{4} P \frac{x^2}{(l-d)^2}.$$

Положение сечения, для которого момент имеет максимальное значение, найдется из условия

$$R_1 - \frac{3}{4} P \frac{x^2}{(l-d)^2} = 0$$

или

$$\frac{x^2}{(l-d)^2} = \frac{4R_1}{3P} = \frac{5}{9},$$

откуда $x = 2,24$ м.

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении тл равен моменту от реакции R_1 минус момент от нагрузки Alm . Следовательно,

$$M = R_1 x - \frac{3}{4} P \frac{x^3}{(l-d)^2} \frac{x}{3}.$$

Вставляя $x = 2,24$ м, получаем $M_{\max} = 2910P$ кгм.

4. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 94, а, и определить необходимые размеры двутаврового сечения, если $a = c = \frac{l}{4} = 1,8$ м, $P = 800$ кг, $q = 500$ кг/м, $[\sigma] = 1400$ кг/см². Весом балки можно пренебречь.

Решение. На рис. 94, б и 94, с показаны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от распределенной нагрузки. К ним необходимо добавить моменты и поперечные силы от сосредоточенной нагрузки P . Наибольший изгибающий момент будет посередине пролета и равняется

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{32} + \frac{P l}{4} = 2250 \text{ кгм.}$$

Необходимый момент сопротивления равняется

$$W_x = \frac{2250 \cdot 100}{1400} = 160 \text{ см}^3.$$

Двутавровая балка № 18а с площадью

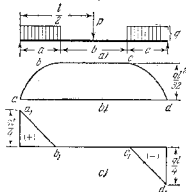


Рис. 94.

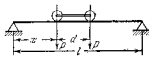


Рис. 95.

поперечного сечения $25,4$ см² и моментом сопротивления $W_x = 159$ см³ является ближайшей, удовлетворяющей условиям прочности.

5. Определить наиболее невыгодное положение тележки подъемного крана, которая перемещается на балке, как показано на рис. 95. Найти M_{\max} , если давление на колесо равно $P = 4000$ кг, $l = 7,2$ м, $d = 1,8$ м. Весом балки можно пренебречь.

Решение. Если x есть расстояние левого колеса от левой опоры балки, то изгибающий момент под этим колесом равняется

$$\frac{2P \left(l - x - \frac{1}{2} d \right) x}{l}.$$

Этот момент получает наибольшее значение при

$$x = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}.$$

Следовательно, для того чтобы получить наибольший изгибающий момент под левым колесом, необходимо переместить тождку из среднего положения на расстоянии $\frac{d}{4}$ к правой опоре. То же значение изгибающего момента можно получить под правым колесом перемещением тележки на $\frac{d}{4}$ из среднего положения к левой опоре.

$$M_{\max} = \frac{2P \left(\frac{l}{2} - \frac{d}{4} \right)^2}{l} = 11\,025 \text{ кжм.}$$

6. Путь подземного крана (рис. 96) уложен на двух двутавровых балках. Определить наиболее невыгодное положение крана, соответствующее M_{\max} , и размеры двутавровых балок, если $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, $l = 10 \text{ м}$, $a = 4 \text{ м}$, $d = 2 \text{ м}$, вес

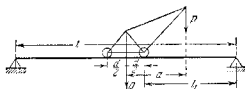


Рис. 96.

крана $Q = 4 \text{ т}$ и груз, поднимаемый краном, $P = 0,8 \text{ т}$. Нагрузки расположены посередине между двумя балками и распределяются поровну между ними.

Решение. Наибольший изгибающий момент будет под правым колесом, когда расстояние этого колеса от правой опоры равняется $l_1 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{1}{6} d \right)$;

$M_{\max} = 1\,121\,000 \text{ кжм}$. Считая, что момент поровну распределяется между двумя балками, находим необходимый момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{2[\sigma_{\text{ст}}]} = 400 \text{ см}^3.$$

Нужно взять двутавровую балку № 27а с площадью поперечного сечения $43,2 \text{ см}^2$ и моментом сопротивления $W_z = 407 \text{ см}^3$.

7. Круглая деревянная балка, опертая в точке С и прикрепленная к основанию в точке А (рис. 97), несет нагрузку $q = 400 \text{ кг/м}$, равномерно распределенную на части ВС. Построить эпюры изгибающих моментов и определить необходимый диаметр d , если $[\sigma] = 80 \text{ кг/см}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

Рис. 97.

Решение. Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 97, б. Численно наибольший изгибающий момент будет в точке С и равняется $80\,000 \text{ кгсм}$. Тогда из уравнения (63) получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M}{\pi [\sigma]}} \approx 22 \text{ см.}$$

8. Деревянная плотина состоит из горизонтальных досок, поддерживаемых вертикальными стойками, заделанными нижним концом (рис. 98). Определить раз-

мера квадратного поперечного сечения стоек, если $l = 2 \text{ м}$, $d = 1 \text{ м}$ и $[\sigma] = 40 \text{ кг/см}^2$. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Решение. Полное боковое давление H на одну стойку представлено весом трехгранной призмы ABC воды. В каком-либо сечении m поперечная сила и изгибающий момент будут

$$Q = -\frac{Hx^2}{l^2}, \quad M = -\frac{Hx^2}{l^2} \frac{x}{3}.$$

При определении знаков Q и M предполагается, что рис. 98 повернут на 90° против часовой стрелки, так что оси x и y совпадают с теми же осями рис. 61. Необходимый размер b найдется из уравнения (63)

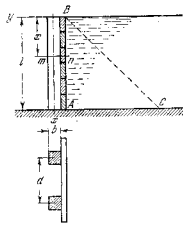


Рис. 98.

$$W_z = \frac{b^3}{6} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1,2^2 \cdot 2}{2} \frac{100\,000}{40},$$

откуда $b = 27,1 \text{ см}$.

Построение эпюр предоставляется читателю.

9. Определить необходимые размеры консольной балки двутаврового сечения, которая несет равномерно нагрузку $q = 200 \text{ кг/м}$

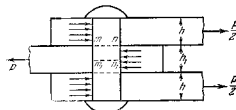


Рис. 99.

и сосредоточенную нагрузку $P = 300 \text{ кг}$ на конце, если длина $l = 1,5 \text{ м}$ и $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$.

$$\text{Ответ. } W_z = \frac{(300 \cdot 1,5 + \frac{200 \cdot 1,5^2}{2}) \cdot 100}{1400} = 48,2 \text{ см}^3.$$

Необходимо взять двутавровое сечение № 12 с моментом сопротивления $W_z = 58,4 \text{ см}^3$.

10. Определить напряжения от изгиба в заклепке, предполагая, что силы, действующие на заклепку, распределяются, как указано на рис. 99. Диаметр заклепки $d = 2 \text{ см}$, $h = 0,6 \text{ см}$, $h_1 = 1 \text{ см}$, $P = 4 \text{ т}$.

Решение. Изгибающий момент в поперечном сечении m равняется $\frac{P}{2} \frac{h}{2}$. Изгибающий момент в среднем поперечном сечении $m_1 n_1$ равняется

$$\frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right).$$

Этот последний момент является наибольшим, и его нужно принять для вычисления напряжений. Тогда

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right) \cdot \frac{\pi d^3}{32} = \frac{4P^2}{\pi d^2} \frac{2h + h_1}{d} = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

11. Определить необходимые моменты сопротивления и необходимые размеры балок двутаврового сечения для случаев, показанных на рис. 72, а, 72, с и 73, в, приняв допустимое напряжение равным 1600 кг/см^2 .

Ответ. $W_1 = 64 \text{ см}^3$, $W_2 = 88 \text{ см}^3$; $W_3 = 262 \text{ см}^3$. Необходимо взять соответственно следующие номера профилей: 14, 16 и 21.

12. Определить необходимый момент сопротивления и необходимые размеры свободно лежащей балки двутаврового сечения, несущей равномерную нагрузку 400 кг/м и сосредоточенную нагрузку $P = 4 \text{ т}$ в середине пролета. Длина балки $l = 5 \text{ м}$ и допустимое напряжение $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $W_x = 390 \text{ см}^3$. Необходимо взять двутавровое сечение № 27а с моментом сопротивления $W_x = 407 \text{ см}^3$.

13. Швеллер с поперечным сечением, показанным на рис. 89, свободно опирается на концах и несет сосредоточенную нагрузку посередине пролета. Вычислить наибольшее значение нагрузки, которую балка может нести, если допустимое напряжение на растяжение равняется 70 кг/см^2 и на сжатие — 140 кг/см^2 , $t = 5 \text{ см}$, $h = 25 \text{ см}$, $b = 60 \text{ см}$ и длина $l = 3 \text{ м}$.

Ответ. $P = 2780 \text{ кг}$.

26. Касательные напряжения при изгибе

В предыдущем параграфе было указано, что когда балка изгибается поперечными нагрузками, то в каком-либо поперечном сечении mn балки (рис. 100) возникают не только нормальные напряжения σ_x , но также и касательные напряжения τ . Рассматривая правую часть балки (рис. 100), мы можем заключить из условий

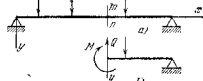


Рис. 100.

равновесия, что величина этих касательных напряжений такова, что их сумма дает поперечную силу Q . При исследовании закона распределения этих касательных напряжений по площади поперечного сечения мы начнем с простого случая прямоугольного поперечного сечения $mnop$ (рис. 101). В этом случае естественно предположить, что касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения параллельно поперечной силе Q , т. е. параллельно сторонам mn поперечного сечения. Мы обозначаем в этом случае напряжения через τ_{yx} . Знаком y при τ_{yx} указывает на то, что касательное напряжение параллельно оси y , а знаком x , что напряжение действует в плоскости, перпендикулярной оси x . В качестве второго допущения предполагаем равномерное распределение касательных напряжений по ширине балки ac . Эти два допущения дают возможность найти закон распределения касательных напряжений. Более точное исследование поставленной задачи показывает, что резуль-

таты, получаемые путем приближенного решения, достаточно точны и для узкого прямоугольника (h велико по сравнению с b , рис. 101) практически совпадают с результатами точного решения¹⁾.

Если из балки вырезать двумя смежными поперечными сечениями и двумя смежными плоскостями, параллельными нейтральному слою, элемент $acdea_1c_1d_1e_1$ (рис. 101, б), то, согласно нашим допущениям, по вертикальной грани acc_1a_1 имеем равномерное распределение касательных напряжений τ_{yx} . Эти напряжения дают момент $(\tau_{yx} b dy) dx$ относительно нижнего заднего ребра e_1e_1 , элемента, который должен уравновешиваться моментом $(\tau_{xy} b dx) dy$ от

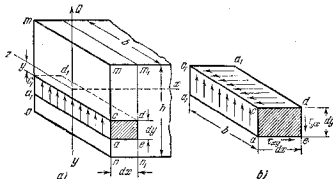


Рис. 101.

касательных напряжений, распределенных по горизонтальной грани add_1c_1 элемента. Тогда

$$\tau_{yx} b y dy dx = \tau_{xy} b dx dy \quad \text{и} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

т. е. касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным граням элемента, равны между собой²⁾. Тот же вывод был сделан прежде, при простом растяжении (см. стр. 40), а также при растяжении или сжатии по двум перпендикулярным направлениям (см. стр. 45).

Существование касательных напряжений в плоскостях, параллельных нейтральному слою, можно показать на простом опыте. Возьмем два равных прямоугольных бруса, положенных вместе

¹⁾ Точное решение этой задачи принадлежит St.-Venant'у, J. math. (Liouville), 1856. Оценка этой знаменитой работы St.-Venant'a дана Todhunter и Peacock, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, 1886—1893. Приближенное решение, данное в этом параграфе, принадлежит Журавскому. Французский перевод этой работы см. Ann. ponts et chaussées, 1856. Точная теория показывает, что когда высота балки мала по сравнению с шириной, разница между точной и приближенной теориями становится значительной.

²⁾ Мы рассматриваем здесь только абсолютное значение этих напряжений.

свободно на опорах, как показано на рис. 102, и изгибаемых сосредоточенной нагрузкой P . Если нет трения между брусами, то изгиб каждого бруса будет происходить независимо от другого; каждый будет иметь сжатие верхних и растяжение нижних продольных волокон, и они примут вид, показанный на рис. 102, б. Нижние продольные волокна верхнего бруса скользят по верхним волокнам нижнего бруса. В цельном бруссе высотой $2h$ (рис. 102, а) по нейтральному слою mn должны появиться касательные напряжения такой величины, чтобы они смогли помешать скольжению верхней части бруса относительно нижней, как показано¹⁾ на рис. 102, б. Благодаря такому воспрепятствованию скольжению один брус высотой $2h$ гораздо жестче и прочнее, чем два бруса, каждый высотой h . Для того чтобы помешать скольжению, на практике иногда

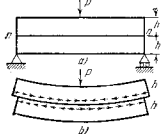


Рис. 102.

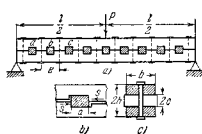


Рис. 103.

применяют в составных деревянных балках шпонки, подобно а, б, с, ... (рис. 103, а). Наблюдения над зазорами у шпонок (рис. 103, б) дают возможность определить направление скольжения в случае составной балки и, следовательно, направление касательных напряжений, действующих по нейтральному слою в цельной балке²⁾.

Предыдущие рассуждения показывают, что касательные напряжения τ_{xy} в какой-либо точке поперечного сечения действуют в плоскости сечения и численно равны горизонтальным касательным напряжениям τ_{xy} , действующим в плоскости, параллельной нейтральному слою и проходящей через ту же точку. Это последнее напряжение легко может быть вычислено из условия равновесия элемента $pp_1n_1n_2$, вырезанного из балки двумя смежными поперечными сечениями mn и m_1n_1 и плоскостью pp_1 , параллельной нейтральному слою (рис. 104, а) и (104, б). Воздействием на этот эле-

мент в направлении оси x , будут касательные напряжения τ_{xy} по грани pp_1 и нормальные напряжения σ_x по граням pn и p_1n_1 . Если изгибающие моменты в поперечных сечениях mn и m_1n_1 равны, т. е. в случае чистого изгиба, то нормальные напряжения σ_x по граням pn и p_1n_1 будут равны и взаимно уравновесятся. Тогда касательные напряжения τ_{xy} будут равны нулю.

Рассмотрим теперь более общий случай переменного изгибающего момента, обозначая через M и $M+dM$ соответственно моменты в поперечных сечениях mn и m_1n_1 . Тогда нормальное усилие, дейст-

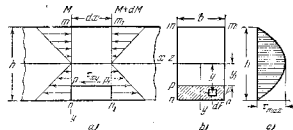


Рис. 104.

вующее на элементарную площадку dF грани pp_1 , будет (уравнение (57)).

$$\sigma_x dF = \frac{My}{J_z} dF.$$

Сумма всех этих усилий, распределенных по грани pp_1 элемента, равняется

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{My}{J_z} dF. \quad (a)$$

Таким же образом сумма нормальных усилий, действующих по грани $p_1r_1r_2n_1$, равняется

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{(M+dM)y}{J_z} dF. \quad (b)$$

Равнодействующая касательных напряжений τ_{xy} , действующих по верхней грани pp_1 элемента, равняется

$$\tau_{xy} b dx. \quad (c)$$

Усилия, определяемые уравнениями (а), (б) и (с), должны удовлетворять уравнению $\sum X=0$, поэтому

$$\tau_{xy} b dx = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(M+dM)y}{J_z} dF - \int_{y_1}^{y_2} \frac{My}{J_z} dF,$$

¹⁾ Верхний ряд стрелок указывает действие нижней половины балки на верхнюю половину, нижний ряд стрелок указывает действие верхней половины балки на нижнюю.

²⁾ О расчете составных деревянных балок см. статью F. S t u s s i, Schwere Nolbrücke mit verdübelten Balken, Gesellschaft für militärische Bautechnik, Zürich.

откуда

$$\tau_{xy} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{bJ_z} \int_{y_1}^{h/2} y dF,$$

или, пользуясь уравнением (50), получаем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{bJ_z} \int_{y_1}^{h/2} y dF. \quad (64)$$

В этом уравнении интеграл представляет выражение для статического момента заштрихованной части поперечного сечения, рис. 104, b , относительно нейтральной оси z . Для рассматриваемого прямоугольного сечения

$$dF = b dy,$$

и интеграл получается

$$\int_{y_1}^{h/2} b y dy = \left[\frac{b y^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (d)$$

Тот же результат можно получить умножением площади $b \left[\left(\frac{h}{2} \right) - y_1 \right]$ заштрихованной части на расстояние

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right) + y_1 \right]$$

ее центра тяжести от нейтральной оси.

Подставляя (d) в уравнение (64), получаем для прямоугольного сечения

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (65)$$

Видно, что касательные напряжения неравномерно распределяются по площади поперечного сечения. Наибольшее значение τ_{xy} получается при $y_1 = 0$, т. е. для точек, расположенных по нейтральной оси. Из уравнения (65) получаем

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{Qh^2}{8J_z}$$

или, так как $J_z = \frac{bh^3}{12}$,

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{3Q}{2bh}. \quad (66)$$

Итак, наибольшее касательное напряжение в балке прямоугольного поперечного сечения на 50% больше среднего значения касательного

напряжения, полученного путем деления величины поперечной силы на площадь поперечного сечения.

В предыдущем выводе мы брали элемент ppr, n_1 из нижней части балки. Тот же результат получится, если взять элемент из верхней части балки.

Для верхних и нижних точек поперечного сечения $y_1 = \pm \frac{h}{2}$ и уравнение (65) дает $\tau_{xy} = 0$. График уравнения (65) (рис. 104, c) показывает, что касательные напряжения изменяются по высоте балки по параболическому закону. Заштрихованная площадь, ограниченная параболой и умноженная на ширину b балки, дает $\frac{2}{3} (\tau_{xy})_{\max} hb = Q$, как это и должно быть.

Естественным следствием действия касательных напряжений является сдвиг, который заставляет элементы сечения, первоначально плоские, искривляться. Это искривление можно легко продемонстрировать путем изгиба приложенной на конце силой прямоугольного бруска из резины (рис. 105), на боковых гранях которого нанесены предварительно линии. После изгиба линии не остаются прямыми, как указано пунктиром, а искривляются, так что наибольший сдвиг имеет место около нейтрального слоя. В точках m', m'_1, n', n'_1 сдвига нет, и в этих точках касательные к кривым $m'n'$ и $n_1n'_1$ останутся нормальными к верхней и нижней поверхностям бруска и после изгиба. У нейтрального слоя углы между касательными к кривым $m'n'$ и $n_1n'_1$ и нормальными сечениями равны $\gamma = (\tau_{xy})_{\max} / G$. Пока поперечная сила остается постоянной по длине балки, искривление всех поперечных сечений будет одинаково, так что $mm' = n_1n'_1, nn' = n_1n'_1$, и не будет влиять на деформации растяжения или сжатия продольных волокон, вызываемые изгибающим моментом. Это обстоятельство объясняет законность применения здесь уравнения (57), которое было выведено для чистого изгиба и основано на допущении, что поперечные сечения бруска остаются плоскими при изгибе.

Более точное исследование задачи¹⁾ показывает, что в случае, если на балку действует распределенная нагрузка и, следовательно, величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, то искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия

¹⁾ См. W. Voigt, Göttingen Abhandl., т. 34, 1887; J. H. Michell, Quart. J. Math., т. 32, стр. 63, 1901; L. N. G. Filon, Trans. Roy. Soc. (London) A, т. 201, 1903, и Proc. Roy. Soc. (London), т. 72, 1904. См. также Th. Kármán, Abhandl. Aerodyn. Inst., Tech. Hochschule (Aachen), т. 7, 1927.

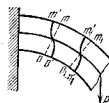


Рис. 105.

изгибающего момента. В случае сосредоточенных грузов распределение напряжений вблизи точек приложения грузов следует более сложному закону, но это отклонение от прямолинейного закона имеет местное значение (см. том II).

ЗАДАЧИ

1. Определить предельные значения грузов P , действующих на деревянную прямоугольную балку (рис. 106), если $b = 20$ см, $h = 25$ см, $[\sigma] = 60$ кг/см², $[\tau] = 15$ кг/см², $c = 0,5$ м.

Решение. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил даны на рисунке 106.

$$Q_{\max} = P, \quad M_{\max} = Pc.$$

Из уравнений

$$\frac{Pc}{W_z} = [\sigma] \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = [\tau]$$

получим

$$P = 2500 \text{ кг} \quad \text{и} \quad P = 5000 \text{ кг}.$$

Следовательно, $P = 2500$ кг есть предельное значение груза.

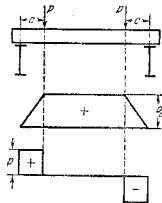


Рис. 106.

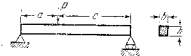


Рис. 107.

2. Определить наибольшее нормальное и наибольшее касательное напряжения в балке, изображенной на рис. 107, если $a = 0,6$ м, $c = 1,2$ м, $b = 20$ см, $h = 25$ см и $P = 2,5$ т.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = 48$ кг/см² и $(\tau_{xy})_{\max} = 5$ кг/см².

3. Определить наибольшее касательное напряжение, действующее по нейтральному слою равномерно нагруженной балки, если длина балки $l = 2$ м, нагрузка на погонный метр $q = 1500$ кг/м, высота поперечного сечения $h = 25$ см и ширина $b = 20$ см.

Ответ. $\tau_{\max} = 3,9$ кг/см².

4. Определить наибольшее касательное напряжение в вертикальных брусках AB задачи 2 параграфа 25.

27. Распределение касательных напряжений в случае кругового поперечного сечения

При выводе закона распределения напряжений по круговому сечению (рис. 108) нет никакого основания предполагать, что касательные напряжения все параллельны поперечной силе Q . В самом деле, мы можем легко показать, что в точках p у контура поперечного сечения касательные напряжения направлены по касатель-

ной к контуру. Рассмотрим бесконечно малый элемент $abcd$ (рис. 108, *c*) в форме прямоугольного параллелепипеда с гранью $adfg$ на поверхности балки и гранью $abcd$ в плоскости yz поперечного сечения. Если касательное напряжение, действующее по грани $abcd$ элемента, имеет направление τ , то оно может быть разложено на два составляющих: τ_x в радиальном направлении и τ_{xy} в направлении по касательной к контуру. На основании условий равновесия прежде было доказано (см. стр. 103), что если по какой-либо элементарной площадке действует касательное напряжение τ , то по элементарной площадке, перпендикулярной к данной, будет действовать такое же касательное напряжение. Применяя этот вывод в данном случае, мы должны заключить, что если на элементе $abcd$ в радиальном направлении действует касательное напряжение τ_{xy} , то должно действовать касательное напряжение, равное τ_{xy} , и по грани $adfg$ элемента, совпадающей с поверхностью балки. Если боковая поверхность свободна от касательных напряжений, то радиальная составляющая τ_{xy} касательного напряжения τ должна быть равна нулю, т. е. τ должно быть направлено по касательной к контуру поперечного сечения балки. В середине n хорды pp' симметрия требует, чтобы касательное напряжение имело направление поперечной силы Q . Тогда направления касательных напряжений в точках p и n будут пересекаться в некоторой точке O на оси y (рис. 108, *b*). Полагая теперь, что касательное напряжение в какой-либо другой точке линии pp' также направлено к точке O , имеем вполне определенные направления касательных напряжений. В качестве второго допущения принимаем, что вертикальные составляющие касательных напряжений для всех точек линии pp' одинаковы¹⁾. Так как это допущение вполне совпадает с тем, что было сделано в случае прямоугольного поперечного сечения, то можем воспользоваться для вычисления этой составляющей уравнением (64). В этом случае b означает длину хорды pp' . Зная направление полного касательного напряжения и его вертикальную составляющую, можем легко вычислить его величину для любой точки поперечного сечения.

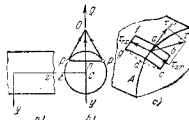


Рис. 108.

¹⁾ Приближенная теория, основанная на двух вышеуказанных допущениях, дает удовлетворительную точность, и сравнение с точной теорией показывает, что ошибка в величине наибольшего касательного напряжения составляет около 5%, что невелико для практических приложений. См. St. Venant, *цитир.* на стр. 103. См. также А. Е. Н. Л о в е, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4 изд., стр. 346, 1927.

Вычислим теперь величину касательных напряжений по линии pp поперечного сечения (рис. 109). Для того чтобы применить уравнение (64) к определению вертикальной составляющей τ_{yx} этих напряжений, нужно найти статический момент площади кругового сегмента, ограниченного линией pp , относительно оси z . Элементарная полоска mn имеет длину $2\sqrt{R^2 - y^2}$ и ширину dy . Площадь равна $dF = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$. Момент этой полоски относительно Cz есть $y dF$ и полный момент всего сегмента равен

$$\int_{y_1}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} y dy = \frac{2}{3} (R^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя это в уравнение (64) и принимая b равным $2\sqrt{R^2 - y_1^2}$, получаем значение вертикальной составляющей касательного напряжения

$$\tau_{yx} = \frac{Q(R^2 - y_1^2)}{3J_z}, \quad (67)$$

и полное касательное напряжение в точках p (рис. 109) равняется

$$\tau = \frac{\tau_{yx} R}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \frac{QR\sqrt{R^2 - y_1^2}}{3J_z}.$$

Отсюда видно, что максимум τ получается при $y_1 = 0$, т. е. у нейтральной оси поперечного сечения. Тогда, подставляя $J_z = \frac{\pi R^4}{4}$, получим

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}. \quad (68)$$

Следовательно, в случае кругового поперечного сечения наибольшее касательное напряжение на 33% больше среднего значения, полученного путем деления поперечной силы на площадь поперечного сечения.

28. Распределение касательных напряжений в двутавровых балках

При выводе закона распределения касательных напряжений в стенке двутавровой балки (рис. 110) делаем те же допущения, что и для прямоугольного поперечного сечения, а именно, что касательные напряжения параллельны поперечной силе Q и равномерно распределяются по толщине b стенки. Тогда для вычисления напряжений τ_{xy} можно воспользоваться уравнением (64). Для то-

чек линий pp , отстоящих на расстоянии y_1 , от нейтральной оси, где ширина поперечного сечения равна b_1 , момент заштрихованной части относительно нейтральной оси z равняется

$$\int_{y_1}^{h/2} y dF = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right).$$

Подставляя в уравнение (64), получаем

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right]. \quad (69)$$

Отсюда видно, что напряжения τ_{yx} изменяются по высоте балки по параболическому закону. Наибольшее и наименьшее значения τ_{yx} в стенке балки получаются подстановкой в уравнение (69) $y_1 = 0$ и $y_1 = \frac{h}{2}$:

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right], \quad (70)$$

$$(\tau_{yx})_{\min} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right). \quad (71)$$

Когда b , очень мало по сравнению с b_1 , то нет большой разницы между $(\tau_{yx})_{\max}$ и $(\tau_{yx})_{\min}$ и практически можно считать, что касательные напряжения по площади поперечного сечения стенки распределяются равномерно.

Хорошее приближение для $(\tau_{yx})_{\max}$ получается путем деления полной поперечной силы Q на площадь поперечного сечения только одной стенки. Это следует из того, что касательные напряжения, распределенные по поперечному сечению стенки, дают силу, которая почти равна Q , что означает, что стенка воспринимает почти всю поперечную силу, а полки — лишь незначительную часть ее. Чтобы доказать это, вычислим сумму

$$Q_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{yx} b_1 dy.$$

Подставляя выражение (69) вместо τ_{yx} , получаем

$$Q_1 = \frac{Q}{b_1 J_z} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right] b_1 dy$$

и после интегрирования находим

$$Q_1 = \frac{Q}{J_z} \left[\frac{b(h-h_1)}{2} \frac{h+h_1}{2} + \frac{b_1 h_1}{2} + \frac{b_1 h_1^2}{12} \right]. \quad (a)$$

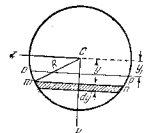


Рис. 109.

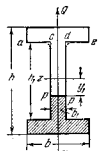


Рис. 110.

Для малой толщины полок, т. е. когда h_1 приближается к h , момент инерции J_z с достаточной точностью выражается уравнением

$$J_z = \frac{b(h-h_1)(h+h_1)^3}{8} + \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad (b)$$

в котором первый член представляет площадь поперечного сечения полок, умноженную на квадрат расстояния $(h+h_1)/4$ их центра тяжести до оси z , что приблизительно равно моменту инерции площади поперечного сечения полок. Второй член есть момент инерции площади поперечного сечения стенки. Сравнивая (а) и (b), мы видим, что, когда h_1 приближается к h , сила Q_1 по величине приближается к Q и, следовательно, поперечная сила будет восприниматься почти только одной стенкой.

При выводе закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению полок не может быть сделано допущение, что напряжения не изменяются по ширине сечения. Например, на уровне ae (рис. 110) по нижней грани полки ac и de касательные напряжения τ_{xy} должны быть равны нулю, так как соответственно равны им напряжения τ_{yx} на свободной нижней поверхности полки равны нулю (см. стр. 105, а также рис. 108, с). Однако в части cd касательные напряжения не равны нулю, но имеют значения, численные выше для $(\tau_{xy})_{\min}$ в стенке. Это указывает на то, что в месте cd , при сопряжении стенки и полки, распределение касательных напряжений следует более сложному закону, чем можно вывести на основании элементарного анализа. Для того чтобы уменьшить концентрацию напряжений в точках c и d , острые углы обычно заменяют выкружками, как указано на рисунке 110 пунктирными линиями. Более подробное исследование распределения касательных напряжений в полках будет дано ниже (см. том II).

ЗАДАЧИ

1. Определить $(\tau_{xy})_{\max}$ и $(\tau_{xy})_{\min}$ в поперечном сечении стенки двутавровой балки (рис. 110), если $b=12$ см, $b_1=1,2$ см, $h=30$ см, $h_1=26$ см, $Q=12$ т. Определить часть воспринимаемой силы Q_1 , воспринимаемому стенкой.

Ответ. $(\tau_{xy})_{\max} = 390$ кг/см², $(\tau_{xy})_{\min} = 300$ кг/см², $Q_1 = 0,94 Q$.

2. Определить наибольшее касательное напряжение в стенке тавровой балки (рис. 111), если $h = 20$ см, $h_1 = 17,5$ см, $b = 40$ см, $b_1 = 2,5$ см и $Q = 400$ кг.

Ответ. Пользуясь методом, принятым для двутавровой балки, находим $(\tau_{xy})_{\max} \approx 11,5$ кг/см².

3. Определить наибольшее касательное напряжение в задаче 1 и 6 параграфа 25. Принять балку двутаврового сечения и предположить, что вся поперечная сила равномерно распределяется по поперечному сечению стенки.

4. Определить наибольшее касательное напряжение в швеллере задачи 2 стр. 95, если $Q = 4,8$ т.

Ответ. $(\tau_{xy})_{\max} = 23,4$ кг/см².

29. Главные напряжения при изгибе

При помощи уравнений (57) и (64) можно вычислить нормальные напряжения σ_x и касательное напряжение τ_{xy} для любой точки поперечного сечения, если известны изгибающий момент M и поперечная сила Q для этого сечения. Наибольшее численное значение σ_x будет в волокне, наиболее удаленном от нейтральной оси, и наибольшее значение τ_{xy} — обычно у нейтральной оси. В большинстве случаев при проектировании пользуются лишь наибольшими значениями σ_x и τ_{xy} , полученными приведенным выше способом, и размеры поперечных сечений балок принимают такими, чтобы удовлетворить условиям

$$(\sigma_x)_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{и} \quad (\tau_{xy})_{\max} \leq [\tau].$$

Здесь предполагается, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию и что $[\sigma]$ имеет одно значение. В противном случае условия прочности при растяжении и сжатии должны быть удовлетворены отдельно, и тогда получаем

$(\sigma_x)_{\max} \leq [\sigma]$ при растяжении; $|(\sigma_x)_{\min}| \leq [\sigma]$ при сжатии.

Однако имеются случаи, когда необходимо сделать более подробный анализ напряжений и вычислить главные напряжения. Покажем такое вычисление для балки, свободно опертой и нагруженной посередине (рис. 112). Для точки A , лежащей ниже нейтральной оси в поперечном сечении mn , величины напряжений σ_x и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ определяются по уравнениям (57) и (64). На рис. 112, б эти напряжения показаны действующими на бесконечно малый элемент, вырезанный из балки у точки A ; их значения легко определяются по значениям M и Q . Для бесконечно малого элемента можно пренебречь изменениями напряжений σ_x и τ_{xy} в различных точках, и можно допустить, что элемент находится в *однородном напряжен-*

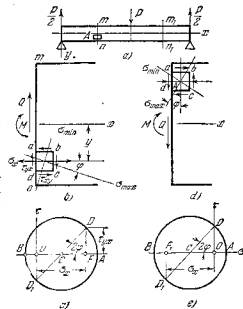


Рис. 112.

ном состоянии, т. е. что величины σ_x и τ_{xy} постоянны по всем граням элемента. Такое напряженное состояние элемента конечных размеров изображено на рис. 40, а.

Из предыдущих выводов (см. стр. 47) мы знаем, что напряжения по граням элемента, вырезанного из напряженного тела, изменяются с изменением направления этих граней и что можно так повернуть элемент, что будут существовать лишь нормальные напряжения (см. стр. 50). Такие направления граней называются главными направлениями, а соответствующие напряжения — *главными напряжениями*. Значения этих напряжений в данном случае можно найти из уравнений (31) и (32) подстановкой в эти уравнения $\sigma_y = 0$. Тогда мы получим

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (72)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (73)$$

Необходимо заметить, что σ_{\max} — растягивающее напряжение, а σ_{\min} — сжимающее. Зная главные напряжения, наибольшее касательное напряжение в любой точке получим из уравнения (34) (см. стр. 51):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (74)$$

Для определения направлений главных напряжений можно воспользоваться кругом Мора. Для элемента у точки A (рис. 112, б) соответствующий круг Мора показан на рис. 112, с. Взяв расстояние $\overline{OF} = \sigma_x$ и $\overline{DF} = \tau_{xy}$, получим точку D , определяющую напряжения, действующие по граням bc и ad элемента. Отрезок \overline{OF} отложен в положительном направлении σ , \overline{DF} вверх, так как σ_x есть растягивающее напряжение, а касательные напряжения τ_{xy} , действующие по граням bc и ad , дают вращающую по часовой стрелке (см. стр. 71). Точка D , определяет напряжения, действующие по граням ab и dc элемента, по которым нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения отрицательны. Окружность, построенная на диаметре DD_1 , определяет $\sigma_{\max} = \overline{OA}$ и $\sigma_{\min} = -\overline{OB}$. Из того же построения определяется угол 2φ , и направление σ_{\max} на рис. 112, б получается измерением φ от оси x по направлению движения часовой стрелки. Конечно, σ_{\min} перпендикулярно σ_{\max} .

Взяв сечение m, n , справа от груза P (рис. 112, а) и рассмотрим точку A , расположенную выше нейтральной оси, найдем, что напряжения, действующие на элемент $abcd$ у точки A , будут направлены так, как указано на рис. 112, д. Соответствующий круг Мора показан на рис. 112, е. Точка D определяет напряжения для граней ab и cd элемента $abcd$ и точка D_1 — напряжения по граням ad и bc .

Угол φ , определяющий направление σ_{\max} , должен быть измерен по направлению движения часовой стрелки от внешней нормали к грани ab или cd , как показано на рис. 112, д.

Если возьмем точку на нейтральном слое, то σ_x получается равным нулю. Элементу этой точки будет находиться в состоянии чистого сдвига. Главные напряжения будут направлены под углом 45° к осям x и y .

Можно построить две системы ортогональных кривых, касательные к которым в любой точке будут иметь направления главных напряжений в этой точке. Такие кривые называются *траекториями напряжений*. Рис. 113 показывает траектории напряжений для консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной на конце. Все эти кривые пересекают нейтральный слой под углом 45° и имеют горизонтальное и вертикальное направление в точках, где касательные напряжения τ_{xy} равны нулю, т. е. у верхней и нижней

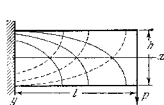


Рис. 113.

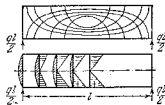


Рис. 114.

поверхностей балки. Траектории, дающие направления (σ_x) $_{\max}$ (растяжение), изображены сплошными линиями, а пунктирные траектории определяют направления σ_{\min} . На рис. 114 изображены траектории и эпюры распределения напряжений для σ_x и τ_{xy} по нескольким поперечным сечениям свободно опертой прямоугольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Ясно видно, что σ_x имеет наибольшее значение в середине, где изгибающий момент M является наибольшим, а τ_{xy} — наибольшее на опорах, где действует наибольшая поперечная сила 1).

При проектировании балок имеет значение численно наибольшая величина σ . Из уравнения (72) можно видеть, что для наиболее удаленных растянутых волокон, где сдвига нет, продольное нормальное напряжение σ_x становится главным напряжением, т. е. $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_{\max}$. Для волокон, близких к нейтральной оси, продольные напряжения σ_x меньше, чем для крайних волокон. Однако здесь действует еще касательное напряжение τ_{xy} , и напряжения σ_x и τ_{xy} , действующие вместе в этой точке, могут дать главное напряжение,

¹ Несколько примеров построения траекторий напряжений разобрано в W a g n e r' ом Z. Osterr. Ing. u. Architekt. Ver., стр. 615, 1911.

определяемое уравнением (72), которое численно может быть больше напряжений в крайнем волокне. В балках прямоугольного или круглого поперечных сечений, в которых касательные напряжения τ_{xy} изменяется постепенно по высоте балки, этого обычно не бывает, и напряжение $(\sigma_x)_{\max}$, вычисленное для наиболее удаленного волокна в сечении с наибольшим изгибающим моментом, есть наибольшее напряжение, действующее в балке. Однако в некоторых балках, например, двутаврового сечения, в которых происходит резкое изменение величины касательного напряжения в месте сопряжения полки и стенки (см. стр. 111) главное напряжение, вычисленное в этом месте из уравнения (72), может быть больше напряжений $(\sigma_x)_{\max}$ в наиболее удаленном волокне и должно быть принято в расчет при проектировании. Для иллюстрации рассмотрим представленную на рис. 112, а балку двутаврового сечения с теми же размерами, как и в задаче 1-й, стр. 112, и при этом длина пролета $l = 0,6$ м и $P = 24$ т. Тогда $M_{\max} = 360\,000$ кг·см и $Q_{\max} = 12$ т. По формуле (57) растягивающее напряжение в наиболее удаленном волокне равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{360\,000 \cdot 15}{11\,200} = 482 \text{ кг/см}^2.$$

Для точки в месте сопряжения полки и стенки получаем следующие значения нормального и касательного напряжений:

$$\sigma_x = \frac{482 \cdot 26}{30} = 417,7 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_{xy} = 300 \text{ кг/см}^2.$$

Тогда из уравнения (72) главное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = 575 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда видно, что σ_{\max} в месте сопряжения полки и стенки больше растягивающего напряжения наиболее удаленного волокна, и поэтому оно должно быть принято при проектировании.

ЗАДАЧИ

1. Определить σ_{\max} и σ_{\min} в точке, находящейся на 5 см ниже нейтральной оси, в сечении, отстоящем на 1 м от нагруженного конца консоли (рис. 113), если высота $h = 20$ см, ширина $b = 10$ см и $P = 800$ кг. Определить угол между направлением σ_{\max} в этой точке и осью x .
 Ответ. $\sigma_x = -60$ кг/см², $\tau_{xy} = 4,5$ кг/см², $\sigma_{\max} = 0,34$ кг/см², $\sigma_{\min} = -60,34$ кг/см². Угол между направлением σ_{\max} и осью x равняется 85°44', считая по направлению движения часовой стрелки.
2. Определить σ_{\max} и σ_{\min} на нейтральной оси в поперечном сечении, отстоящем на 0,3 м от левой опоры, для балки прямоугольного сечения, равномерно нагруженной и свободно опертой по концам (рис. 114). Размеры поперечного сечения те же, что и в предыдущей задаче: $q = 1300$ кг/м, $l = 3$ м.
 Ответ. $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = 11,7$ кг/см².
3. Определить длину двутавровой балки, рассмотренной на стр. 116, при которой $(\sigma_x)_{\max}$ будет равняться σ_{\max} в месте сопряжения полки и стенки.
 Ответ. $l = 102$ см.

30. Напряжения в составных балках

В инженерной практике часто применяют составные балки, и напряжения в них обычно рассчитывают в предположении, что их части жестко соединены. Тогда расчет будет заключаться в: а) проектировании балки, как цельной балки, и б) проектировании и расположении элементов, которые соединяют части балки. В первом случае применяются формулы для цельных балок, а влияние ослаблений заклепочными и болтовыми отверстиями, прорезами для шпонок и т. д. учитывается путем уменьшения сечений. Проиллюстрируем теперь расчет шпонок и заклепок.

Рассмотрим сначала составную деревянную балку, показанную на рис. 103. Предполагается, что шпонки, поставленные между двумя брусками, составляющими балку, достаточно прочны для того, чтобы сопротивляться срезающему усилию S (рис. 103, б). Тогда для определения величин σ_x можно будет применить уравнение (57). Для того чтобы учесть ослабление сечения шпоночными канавками и болтовыми отверстиями, необходимо ввести в расчет только заштрихованную часть сечения, указанную на рис. 103, в. Тогда

$$J_z = \frac{b-d}{12} [(2h)^4 - (2e)^4].$$

При нахождении срезающего усилия S , действующего на каждую шпонку, предполагаем, что это усилие равно равнодействующей касательных напряжений, распределенных в цельной балке на площади be нейтрального слоя, где b есть ширина балки и e — расстояние между осями шпонок (рис. 103, а). Тогда, пользуясь уравнением (66) и считая в этом случае высоту балки равной $2h$, получаем

$$S = be \cdot \frac{3}{2} \frac{Q}{2hb} = \frac{3}{2} \frac{Qe}{2h}. \quad (75)$$

Размеры шпонок и расстояние e между ними должны быть выбраны так, чтобы обеспечить прочное сопротивление шпонок срезающему и смятию по боковым граням, а также смятию торцевых площадок брусков в шпоночных канавках. При таких расчетах обычно делают грубое допущение, что касательные напряжения равномерно распределяются по среднему сечению ab шпопки и что давление на боковых гранях шпонок равномерно распределяется по площади cb . Тогда, обозначая через $[\tau]$ допускаемое напряжение на срез шпонок и через $[\sigma_{\text{см}}]$ допускаемое напряжение на поперечное смятие деревянных шпонок или шпоночных канавок, получим следующие уравнения для определения размеров шпонок:

$$\frac{S}{ab} \leq [\tau], \quad \frac{S}{bc} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

Необходимо также обеспечить достаточную сопротивляемость скальванию деревянной балки вдоль волокон между двумя шпонками. Скальвающее усилие опять будет равно S и воспринимающая его площадь равна $b(e-a)$. Обозначая через $[\tau']$ допускаемое напряжение на скальвание материала балки вдоль волокон, получим условие прочности:

$$\frac{S}{b(e-a)} \leq [\tau'].$$

В дополнение к шпонкам имеются болты (рис. 103), соединяющие части балки. При стягивании их возникает между частями балки трение. При расчетах этим трением обычно пренебрегают и полагают, что вся поперечная сила воспринимается шпонками. Опыты показывают, что такие составные деревянные балки слабее цельных балок тех же размеров¹⁾.

При вычислении напряжений σ_x в составных стальных балках или сплошных фермах влияние ослабления сечения заклепочными отверстиями обычно принимают во внимание, полагая, что все отверстия находятся в одном и том же поперечном сечении балки²⁾ (рис. 115, а), и вычисляют для уравнения (57) J_z площади, ослабленной отверстиями.

При вычислении наибольшего касательного напряжения τ_{xy} на практике также принимают в расчет ослабление сечения заклепочными отверстиями. Можно видеть, что площадь поперечного сечения стенки благодаря отверстиям уменьшается в отношении $(e-d)/e$, где e есть расстояние между центрами отверстий и d — диаметр отверстий. Поэтому для вычисления τ_{xy} в стенке двутавровых балок в правую часть уравнения (64) обычно вставляется множитель $e/(e-d)$. При этом необходимо заметить, что этот способ учета влияния ослабления заклепочными отверстиями является грубым приближением. Действительное же распределение напряжений около отверстий весьма сложно. Рассмотрение концентрации напряжений у краев отверстия будет приведено ниже (см. том II).

Для определения перерезывающей силы, действующей на заклепку, например A (рис. 115, б), рассмотрим два поперечных сечения m_1 и m_2 . Вследствие разности изгибающих моментов в этих двух сечениях нормальные напряжения σ_x в сечениях m_1 и m_2 будут различны, и пояс балки, заштрихованный на рис. 115, с, будет стремиться скользить по стенке. Этому скольжению препят-

ствуют силы трения и заклепка A . Если пренебречь влиянием трения, то сила, действующая на заклепку, получается равной разности нормальных усилий, действующих на сечения m_1 и m_2 , пояса.

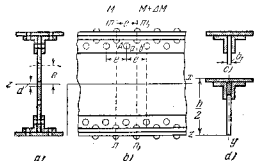


Рис. 115.

Усилие, действующее на пояс в поперечном сечении m_1 , равняется (см. уравнение (а), стр. 105)

$$\frac{M}{J_z} \int y dF,$$

где интегрирование должно быть распространено на заштрихованную площадь поперечного сечения пояса. Таким же образом в поперечном сечении m_2 получаем

$$\frac{(M+\Delta M)}{J_z} \int y dF.$$

Тогда усилие, передаваемое заклепкой A от пояса к стенке, будет равно

$$S = \frac{\Delta M}{J_z} \int y dF. \quad (a)$$

Пользуясь уравнением (50) и подставляя вместо dx расстояние e между заклепками, получаем

$$\Delta M = Qe,$$

где Q есть поперечная сила в поперечном сечении балки, проходящем через заклепку A . Вставляя в уравнение (а), получаем

$$S = \frac{Qe}{J_z} \int y dF. \quad (b)$$

Интеграл, входящий в это уравнение, представляет статический момент заштрихованной площади поперечного сечения (рис. 115, с) пояса относительно оси z .

Легко видеть, что для того, чтобы происходило скольжение пояса по стенке, заклепка должна быть срезана по двум поперечным

¹⁾ Опыты, произведенные проф. E. Kidwell'ом в Мичиганском горном колледже, показывают, что составные деревянные балки имеют около 75% прочности по сравнению с цельными тех же размеров.

²⁾ Отверстия в вертикальной стенке имеются в сечениях, где прикреплены к балке уголки жесткости.

сечениям. Полагая, что сила S равномерно распределится по этим сечениям, получаем касательное напряжение в заклепке

$$\tau = \frac{S}{2 \cdot \pi d^2} = \frac{2Qe}{\pi d^2 J_z} \int y dF. \quad (77)$$

Сила S иногда вызывает значительные касательные напряжения в стенке балки по длине ab (см. рис. 115, б), что должно быть принято во внимание. Полагая, что эти напряжения равномерно распределены, и разделив S на площадь $b_1(e-d)$, получаем

$$\tau' = \frac{Q}{b_1 d^2} \frac{e}{e-d} \int y dF. \quad (b)$$

В добавление к этому напряжению, возникающему от усилия S , передаваемого от поясов, будет действовать в той же плоскости ab касательное напряжение τ' , возникающее от изгиба стенки. Величина этих напряжений получится из вышеуказанного уравнения (b) посредством подстановки, вместо $\int y dF$, статического момента относительно нейтральной оси Z части прямоугольного поперечного сечения стенки, расположенной выше плоскости ab . Таким образом, мы приходим к следующему уравнению для касательных напряжений τ_{yx} в стенке по площади ab :

$$\tau_{yx} = \tau + \tau' = \frac{Q}{b_1 d^2} \frac{e}{e-d} \int y dF, \quad (78)$$

в котором интеграл распространяется на заштрихованную площадь поперечного сечения, показанную на рис. 115, d. Зная σ_x и τ_{yx} , можем вычислить σ_{\max} и σ_{\min} для точек площади ab из уравнений (72) и (74), как было указано в предыдущем параграфе, а также определить направления главных напряжений.

Из предыдущих рассуждений видно, что при определении напряжений в составных двутавровых балках для упрощения вычислений сделано несколько допущений. Это до некоторой степени уменьшает точность вычисления напряжений, что должно быть принято во внимание при выборе допускаемых напряжений для составных балок¹⁾.

¹⁾ Опыты показывают, что разрушение двутавровых балок обычно происходит вследствие выщипывания сжатых поясов или стенок (см. Н. Ф. Мооге, Univ. of Illinois. Bull. No. 68. 1913).

Этот вопрос о выщипывании будет рассмотрен ниже. Влияние изгиба заклепок на распределение напряжений в двутавровых балках рассмотрен I. A. Гову-Гел в I. e. Z. Architekt. u. Ingenieurw., стр. 57, 1910. Он нашел, что вследствие этого изгиба напряжения для обычных соотношений и балок увеличиваются приблизительно на 6%.

ЗАДАЧИ

1. Деревянная балка (рис. 103) состоит из двух брусков прямоугольного поперечного сечения, соединенных шпиками.

Определить срывающую силу, действующую на шпикку, касательное напряжение τ в шпикке и давление на единицу площади ее боковых граней, если нагрузка $P = 2$ т, ширина балки $b = 12,5$ см, высота $2a = 40$ см, ширина шпикки $a = 7,5$ см, высота шпикки $2c = 6$ см и расстояние между центрами шпикки $e = 27,5$ см.

$$\text{Ответ. } S = \frac{3}{2} \cdot \frac{1000 \cdot 27,5}{40} = 1031 \text{ кг.}$$

Касательное напряжение в шпикке будет

$$\tau = \frac{S}{ab} = \frac{1031}{7,5 \cdot 12,5} = 11 \text{ кг/см}^2.$$

Давление на единицу площади боковой грани равняется

$$\sigma = \frac{S}{bc} = \frac{1031}{12,5 \cdot 3} = 27,5 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить касательное напряжение по нейтральному слою балки, стенка которой имеет толщину 2 см и высоту 1,25 м, пояса состоят из двух пар уголков $150 \times 150 \times 12$ мм, если полная поперечная сила в сечении равняется 60 т. Определить также касательные напряжения в заклепках, прикрепляющих пояса к стенке, если диаметр этих заклепок равен 2,5 см и шаг $e = 10$ см (рис. 115).

Решение. Для данных размеров имеем:

$$J_z = \frac{2 \cdot 125^4}{12} + 4(745 + 34,9 \cdot 58,35^2) = 803 \ 600 \text{ см}^4.$$

Статический момент половины сечения относительно нейтральной оси равен

$$\int_0^{\frac{h}{2}} y dF = 2 \cdot \frac{125}{2} \cdot \frac{125}{4} + 2 \cdot 34,9 \cdot 58,35 = 7980 \text{ см}^3.$$

В этом вычислении $34,9 \text{ см}^2$ есть площадь поперечного сечения уголка, 745 см^3 есть момент инерции площади сечения уголка относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно нейтральной оси балки, $58,35 \text{ см}$ — расстояние центра тяжести каждого уголка от нейтральной оси Z балки. Все численные данные можно взять из справочника. Теперь из уравнения (64) получаем

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{60 \ 000 \cdot 7980}{2 \cdot 803 \ 600} = 298 \text{ кг/см}^2.$$

Если примем во внимание ослабление стенки заклепочными отверстиями, то

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{e}{e-d} \cdot 298 = \frac{10}{7,5} \cdot 298 = 397 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие S , передаваемое на одну заклепку, по уравнению (76) будет

$$S = \frac{60 \ 000 \cdot 10 \cdot 4073}{803 \ 600} = 3040 \text{ кг.}$$

Касательные напряжения в заклепке находим по уравнению (77)

$$\tau = \frac{3040 \cdot 2}{3 \cdot 14 \cdot 2,5^2} = 310 \text{ кг/см}^2.$$

3. Определить σ_{\max} в точках сечения ab , отстоящего (рис. 115) на расстоянии 55 см от нейтральной оси, если размеры балки те же, что в предыдущей задаче, $Q=60\ 000$ кг и изгибающий момент $M=3 \cdot 10^6$ кгсм.

Решение. Из уравнения (78) имеем

$$\tau_{yx} = \frac{60\ 000}{2 \cdot 803\ 600} \cdot \frac{10}{7,5} (4073 + 881) = 246 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_x = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 55}{803\ 600} = 205 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2} = 369 \text{ кг/см}^2.$$

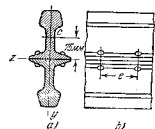


Рис. 116.

4. Определить срезающую силу в заклепках, соединяющих два рельса, показанных на рис. 116, если площадь поперечного сечения одного рельса $F=62,5$ см², расстояние от подошвы рельса до центра тяжести его поперечного сечения $c=7,5$ см, момент инерции площади поперечного сечения рельса относительно оси, проходящей через его центр тяжести s и параллельной оси z , равен 1562 см⁴, расстояние между заклепками $e=15$ см и поперечная сила $Q=2$ т.

$$\text{Ответ: } S = \frac{1}{2} \frac{2000 \cdot 15 \cdot 62,5 \cdot 7,5}{(1562 + 62,5 \cdot 56,25)} = 692 \text{ кг}.$$

ГЛАВА V ИЗОГНУТАЯ ОСЬ БАЛКИ

31. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

При расчете балок инженер обычно интересуется не только напряжениями, возникающими от действующих нагрузок, но также и прогибами, вызываемыми этими нагрузками. Кроме того, во многих случаях ставится условие, чтобы наибольший прогиб не превосходил некоторой небольшой части пролета.

Пусть кривая AmB на рис. 117 изображает форму оси балки после изгиба. Изгиб имеет место в плоскости симметрии вследствие того,

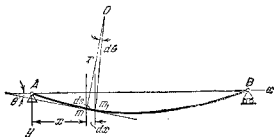


Рис. 117.

что поперечные силы действуют в этой плоскости. Эта кривая называется *изогнутой осью балки*. Для того чтобы вывести дифференциальное уравнение этой кривой, возьмем координатные оси, как показано на рисунке, и предположим, что кривизна изогнутой оси в любой точке зависит только от величины изгибающего момента M в этой точке¹⁾. В таком случае зависимость между кривизной и изгибающим моментом будет та же, что и в случае чистого изгиба (см. уравнение (56)), и мы получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}. \quad (a)$$

¹⁾ Влияние поперечной силы на кривизну будет рассмотрено ниже (см. параграф 39). Будет показано, что это влияние мало и им можно пренебречь.

Чтобы вывести выражение, устанавливающее зависимость между кривизной и формой кривой, мы рассмотрим две смежных точки m и m_1 , находящиеся на изогнутой оси на расстоянии ds одна от другой. Если угол, который касательная в точке m образует с осью x , обозначить через ψ , то угол между нормальными к кривой в точках m и m_1 будет $d\psi$. Точка O пересечения этих нормалей дает центр кривизны и определяет длину r радиуса кривизны. Тогда

$$ds = r d\psi \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|; \quad (b)$$

линейки указывают, что мы рассматриваем только численное значение кривизны. Относительно знака следует заметить, что изгибающий момент в уравнении (a) принимается положительным, если он вызывает искривление, направленное вогнутостью вверх (см. стр. 65). Следовательно, кривизна положительна, когда центр кривизны находится выше кривой, как на рис. 117. Однако легко видеть, что при такой кривизне угол ψ уменьшается при перемещении точки m по кривой от A к B . Следовательно, положительному приращению ds соответствует отрицательное $d\psi$. Таким образом, чтобы иметь надлежащий знак, уравнение (b) необходимо написать в таком виде:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\psi}{ds}. \quad (c)$$

В практических приложениях допускают лишь очень малые прогибы, и изогнутая ось балки является весьма пологой кривой. В таком случае мы можем положить с достаточной точностью, что

$$ds \approx dx \quad \text{и} \quad \psi \approx \text{tg } \psi = \frac{dy}{dx}. \quad (d)$$

Подставляя эти приближенные значения вместо ds и ψ в уравнение (c), получаем

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2}. \quad (e)$$

Тогда из уравнения (a) находим

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (79)$$

Это есть дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, и чтобы найти деформации балки, его нужно проинтегрировать в каждом частном случае.

Необходимо заметить, что знак в уравнении (79) зависит от направления координатных осей. Например, если мы примем y положительным вверх, то необходимо положить

$$\psi \approx -\frac{dy}{dx}$$

вместо уравнения (d), и мы получаем в правой части уравнения (79) плюс вместо минуса.

В случае весьма гибких стержней, в которых прогибы могут быть большие, нельзя пользоваться упрощениями (d), и мы должны прибегнуть к помощи точного выражения

$$\psi = \text{arc tg } \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Тогда

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\psi}{ds} = -\frac{d \text{ arc tg } \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx} \frac{dx}{ds} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (f)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (e), мы можем заключить, что упрощения, показанные в уравнении (d), равнозначны допущению, что величина $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ в знаменателе точной формулы (f) мала по сравнению с единицей и поэтому ею можно пренебречь¹⁾.

Дифференцируя уравнение (79) по x и пользуясь уравнениями (50) и (51), получаем

$$EJ_z \frac{d^2q}{dx^2} = -Q$$

и

$$EJ_z \frac{d^2q}{dx^2} = q. \quad (80)$$

Последнее уравнение иногда применяется при определении прогибов балок, несущих распределенную нагрузку.

32. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой

В случае *свободно опертой и равномерно нагруженной балки* (рис. 68) изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении l , отстоящем на расстоянии x от левой опоры, равенется

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2},$$

и дифференциальное уравнение (79) получается

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}.$$

¹⁾ Точное выражение (f) для кривизны применялось первыми исследователями изогнутой оси. Оно применялось, например, Л. Эйлером в его знаменитой работе *Elastic Curves*, английский перевод которой был опубликован в [52, том 20 стр. 1, Ноябрь, 1933 г.; см. также С. П. Тимошенко, История науки о сопротивлении материалов, перевод, 1957, стр. 45.

Умножая обе части уравнения на dx и интегрируя, получаем

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C, \quad (a)$$

где C есть постоянная интегрирования, которая определяется так, чтобы удовлетворить условиям этой частной задачи. Мы замечаем, что угол наклона касательной к кривой посередине пролета вследствие симметрии равен нулю. Полагая $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = \frac{l}{2}$, мы таким образом получаем

$$C = \frac{ql^2}{24},$$

и уравнение (a) будет

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^2}{24}. \quad (b)$$

Второе интегрирование дает

$$EJ_z y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^2x}{24} + C_1. \quad (c)$$

Новая постоянная интегрирования определяется из условия, что прогиб на опорах равен нулю. Подставляя в уравнение (c) $y=0$ и $x=0$, находим $C_1=0$. Тогда уравнение (c) получается в таком виде

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (l^2x - 2lx^2 + x^4). \quad (81)$$

Это есть уравнение оси свободно опертой и равномерно нагруженной балки. Наибольший прогиб этой балки имеет место, очевидно, посередине пролета. Подставляя в уравнение (81) $x=l/2$, мы таким образом находим

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z}. \quad (82)$$

Наибольший угол наклона касательной к кривой имеет место на левом конце балки, где путем подстановки в уравнение (b) $x=0$ получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \frac{ql^2}{24EJ_z}. \quad (83)$$

В случае *равномерно нагруженной консоли* (рис. 118, a) изгибающий момент в поперечном сечении m , отстоящем на расстоянии x от левого конца, равен

$$M = -\frac{qx^2}{2},$$

и уравнение (79) получается в таком виде:

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Первое интегрирование дает

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C. \quad (d)$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что угол наклона касательной к кривой в заделанном конце равен нулю, т. е. $dy/dx = 0$ при $x=l$. Подставляя эти значения в уравнение (d), находим

$$C = -\frac{ql^3}{6}.$$

Второе интегрирование дает

$$EJ_z y = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{6} + C_1. \quad (e)$$

Постоянная C_1 найдется из условия, что прогиб в заделанном конце равен нулю. Таким образом, подставляя в уравнение (e) $x=l$, $y=0$, получаем

$$C_1 = \frac{ql^4}{8}.$$

Подставляя это значение в уравнение (e), находим

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (x^4 - 4l^3x + 3l^4). \quad (84)$$

Это уравнение представляет изогнутую ось равномерно нагруженной консоли.

Если вместо правого конца будет заделан левый, как показано на рис. 118, b, то уравнение изогнутой оси, очевидно, получится путем подстановки в уравнение (84) $l-x$ вместо x . Таким образом, мы находим

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2). \quad (85)$$

ЗАДАЧИ

1. Равномерно нагруженная стальная двутавровая балка, опертая на концах, имеет прогиб посередине пролета $f = 0,8$ см, а угол наклона касательной к кривой на конце равен $\theta = 0,01$ радиана. Найти высоту h балки, если наибольшее нормальное напряжение при изгибе равно $\sigma = 1200$ кг/см².

Решение. Воспользуемся известными формулами

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}, \quad \theta = \frac{ql^2}{24EJ_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{ql^2}{8} \frac{h}{J_z}.$$

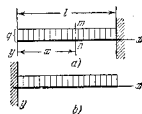


Рис. 118.

Из первых двух формул мы находим

$$\frac{5}{16} l = \frac{f}{9} = 0,8 \cdot 100 \text{ и } l = 256 \text{ см.}$$

Тогда вторая формула дает

$$\frac{9l^2}{8J_z} = \frac{3E\theta}{l} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,01}{256}$$

Подставляя это в третью формулу, получаем

$$h = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 256}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,01} = 10,2 \text{ см.}$$

2. Свободно опертая и равномерно нагруженная деревянная балка квадратного поперечного сечения имеет пролет $l = 3 \text{ м}$. Найти наибольший прогиб, если $(\sigma_x)_{\max} = 70 \text{ кг/см}^2$, $E = 10^5 \text{ кг/см}^2$ и $q = 500 \text{ кг/м}$.

Ответ. $f = 0,78 \text{ см}$.

3. Определить высоту h равномерно нагруженной и свободно опертой стальной двутавровой балки, имеющей пролет 3 м , если наибольшее нормальное напряжение равно 1200 кг/см^2 и наибольший прогиб $f = 0,25 \text{ см}$.

Ответ. $h = 45 \text{ см}$.

4. Равномерно нагруженная консоль пролета l имеет прогиб на конце, равный $0,01 l$. Каков угол наклона касательной к изогнутой оси на конце?


Ответ. $\theta = 0,0133 \text{ радиана}$.

5. Какова длина равномерно нагруженной консоли, если прогиб на свободном конце равен $2,5 \text{ см}$ и угол наклона касательной к изогнутой оси в той же точке равен $0,01$?

Ответ. $l = 3,33 \text{ м}$.

33. Прогиб свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенным грузом

В этом случае имеются два различных выражения для изгибающего момента (см. параграф 22), соответствующих двум участкам балки (рис. 119). Поэтому уравнение (79) для изогнутой оси должно быть написано для каждого участка. Таким образом, мы получаем



$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x \quad \text{при } x \leq a$$

и

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x + P(x-a) \quad \text{при } x \geq a.$$

Рис. 119.

Интегрируя эти уравнения, получим

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + C \quad \text{при } x \leq a$$

и

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1 \quad \text{при } x \geq a.$$

Так как обе ветви изогнутой оси должны иметь общую касательную в точке приложения груза P , вышеприведенные выражения (а) для угла наклона должны быть равны при $x=a$. Из этого мы заключаем, что постоянные интегрирования равны между собой, т. е. $C=C_1$. Выполняя второе интегрирование и подставляя C вместо C_1 , получаем

$$EJ_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + Cx + C_2 \quad \text{при } x \leq a,$$

и

$$EJ_z y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{E(x-a)^3}{6} + Cx + C_2 \quad \text{при } x \geq a. \quad (b)$$

Так как обе ветви изогнутой оси имеют общий прогиб в точке приложения груза, то два выражения (b) должны быть идентичны при $x=a$. Из этого следует, что $C_2=C_2$. Окончательно нам необходимо определить только две постоянные C и C_2 , а для этого мы имеем два условия, а именно, прогиб на каждом из двух концов балки равен нулю. Подставляя в первое из выражений (b) $x=0$ и $y=0$, находим

$$C_2 = C_2 = 0. \quad (c)$$

Подставляя во второе из выражений (b) $y=0$ и $x=l$, получаем

$$C = \frac{Pbl}{6} - \frac{Pb^3}{6l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}. \quad (d)$$

Подставляя значения (c) и (d) постоянных в уравнения (b) для изогнутой оси, получаем

$$EJ_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) \quad \text{при } x \leq a \quad (86)$$

и

$$EJ_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad \text{при } x \geq a. \quad (87)$$

Первое из этих уравнений дает прогибы для левого участка балки, а второе дает прогибы для правого участка.

Подставляя значение (d) в уравнения (a), получаем

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) \quad \text{при } x \leq a$$

и

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad \text{при } x \geq a. \quad (e)$$

Из этих уравнений можно легко вычислять угол наклона в любой точке изогнутой оси. Часто нам нужны значения углов наклона на концах балки. Подставляя $x=0$ в первое из уравнений (e), $x=l$

во второе и обозначая углы наклона на соответствующих концах через θ_1 и θ_2 , получаем¹⁾

$$\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEJ_z}, \quad (88)$$

$$\theta_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Pab(l+a)}{6lEJ_z}. \quad (89)$$

Наибольший прогиб имеет место в точке, где касательная к изогнутой оси горизонтальна. Если $a > b$, как на рис. 119, то наибольший прогиб будет, очевидно, на левом участке балки. Мы можем найти положение этой точки, приравняв первое из выражений (e) нулю. Тогда получим

$$l^2 - b^2 - 3x^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}. \quad (f)$$

Это есть расстояние от левой опоры до точки, соответствующей наибольшему прогибу. Для того чтобы найти наибольший прогиб, мы подставляем выражение (f) в уравнение (86), которое дает

$$y_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEJ_z}. \quad (g)$$

Если груз P приложен посередине пролета, то наибольший прогиб будет, очевидно, также посередине пролета. Его величина получится подстановкой $b = \frac{l}{2}$ в уравнение (g), которое дает

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^4}{48EJ_z}. \quad (90)$$

Из уравнения (f) можно заключить, что в случае одной сосредоточенной силы наибольший прогиб находится всегда близко к середине пролета балки. Когда $b = \frac{l}{2}$, он — посередине пролета; в предельном случае, когда b весьма мало и P находится близко к опоре, расстояние x , определяемое при помощи уравнения (f), равняется $\frac{l}{\sqrt{3}}$, и точка, соответствующая наибольшему прогибу,

¹⁾ Для пологих кривых, которые мы имеем в большинстве случаев, углы наклона θ_1 и θ_2 можно принять численно равными углам поворота концов балки при изгибе, причем углы считаются положительными, если поворот происходит по часовой стрелке.

отстоит от середины пролета лишь на расстоянии

$$\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} = 0,077 l.$$

Вследствие этого прогиб посередине пролета приблизительно равен наибольшему прогибу. Чтобы получить прогиб посередине пролета, подставляем в уравнение (86) $x = \frac{l}{2}$ и находим

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pb}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2). \quad (91)$$

Разность прогибов, определяемых по формулам (g) и (91) в наиболее неблагоприятном случае, т. е. когда b приближается к нулю, составляет лишь около 2,5% наибольшего прогиба.

ЗАДАЧИ

1. Найти положение груза P (рис. 119), если отношение численных значений углов наклона на концах балки равняется $\left|\frac{\theta_1}{\theta_2}\right| = \frac{3}{4}$.

$$\text{Ответ. } a = \frac{5}{7} l.$$

2. Найти разность наибольшего прогиба и прогиба посередине пролета балки (рис. 119), если $b = \frac{2a}{3}$.

$$\text{Ответ. } 0,0046 \frac{Pl^4}{27EJ_z}.$$

3. Найти наибольший прогиб балки, показанной на рис. 119, если балка имеет двутавровое сечение с высотой 20 см и площадью поперечного сечения 35,5 см²; $a = 3,6$ м, $b = 2,4$ м и $P = 800$ кгс.

4. Каким будет наибольший прогиб, если двутавровую балку в предыдущей задаче заменить деревянной балкой, имеющей поперечное сечение 25 × 25 см². Модуль упругости для дерева можно принять $E = 10^8$ кг/см².

34. Определение прогибов при помощи эпюры изгибающих моментов

Графоаналитический метод. В предыдущих параграфах было показано, как можно получить изогнутую ось балки путем интегрирования дифференциального уравнения (79). Однако во многих случаях, в особенности, когда нам нужно знать скорее прогиб в определенной точке, чем общее уравнение изогнутой оси балки, вычисление можно значительно упростить при помощи эпюры изгибающих моментов. Ниже следует изложение этого метода¹⁾.

¹⁾ Применение эпюры изгибающих моментов к вычислению прогибов балок было разработано O. Mohr'ом, см. Z. Architekt. u. Ing.-Ver. (Hannover), стр. 10, 1868; см. также его Abhandlungen, стр. 294; цитированная на стр. 43. Подобный метод был разработан независимо профессором С. E. Green'ом, Univ. of Michigan, 1874. Кажется, что впервые этот метод был предложен St. Venant'ом. См. его замечания в книге Navier, стр. 72 и 79, цитированные на стр. 103.

На рис. 120 AB представляет часть изогнутой оси балки и a, b_x — соответствующий участок эпюры изгибающих моментов. Два смежных поперечных сечения балки на расстоянии ds одно от другого будут пересекаться после изгиба под углом $d\theta$, и из уравнения (56) имеем

$$d\theta = \frac{1}{r} ds = \frac{M}{EJ_z} ds.$$

Для балок, применяемых в сооружениях, кривизна очень мала, и мы можем принять dx вместо ds . Тогда

$$d\theta = \frac{M}{EJ_z} dx. \quad (a)$$

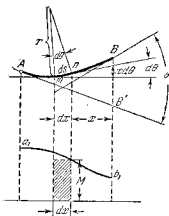


Рис. 120.

С графической точки зрения это означает, что элементарный угол $d\theta$ между двумя последовательными радиусами или двумя последовательными касательными к изогнутой оси равняется заштрихованной элементарной площади $M dx$ эпюры изгибающих моментов, поделенной на жесткость при изгибе¹⁾. Это будет справедливо для каждого элемента n , следовательно, угол между касательными в A и B получится суммированием элементов, определяемых уравнением (a). Тогда

$$\theta = \int_A^B \frac{1}{EJ_z} M dx, \quad (92)$$

т. е. угол между касательными в двух точках A и B изогнутой оси равняется площади эпюры изгибающих моментов между соответствующими вертикалями, разделенной на жесткость при изгибе балки.

Рассмотрим теперь расстояние точки B изогнутой оси от касательной AB' в точке A . Припоминая, что изогнутая ось балки есть плоская кривая, указанное выше расстояние мы можем измерить по вертикали BB' . Отклонение, произведенное на этом расстоянии изгибом элемента tn балки и заключенное между двумя последовательными касательными в t и n , равняется,

$$x d\theta = x \frac{M dx}{EJ_z}.$$

Графически это означает момент заштрихованной площади $M dx$

¹⁾ Проперая размерность, получаем: $d\theta$ — радианах, т. е. угловое смещение, $M dx$ — в кг см см , EJ_z — в $(\text{кг см}^2) \text{ см}^4$.

относительно вертикали, проходящей через B , поделенный на EJ_z . Интегрирование дает полный прогиб BB' :

$$\overline{BB'} = f = \int_A^B \frac{1}{EJ_z} x M dx, \quad (93)$$

т. е. расстояние B от касательной в A равняется моменту площади эпюры изгибающих моментов между A и B относительно вертикали, проходящей через B , поделенному на жесткость при изгибе EJ_z . При помощи уравнений (92) и (93) в каждом частном случае легко можно вычислить угол наклона касательной к изогнутой оси и величину прогиба в любом поперечном сечении. Сначала мы вычисляем абсолютные значения θ и f . Затем, взяв положительные направления координатных осей, как указано на рис. 122, мы считаем поворот

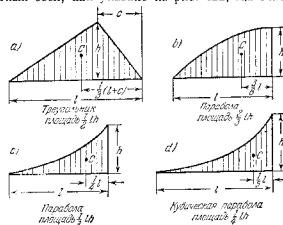


Рис. 121.

касательной к изогнутой оси положительным, если он происходит по направлению движения часовой стрелки, и прогиб балки положительным, если он совпадает с положительным направлением оси y . Этот метод вычисления деформаций балки называется *графоаналитическим методом*.

Вычисление интегралов в уравнениях (92) и (93) часто можно упростить при помощи известных формул, по которым определяются площади и центры тяжести их. Несколько формул, которые встречаются в приложениях, дано на рис. 121.

35. Определение прогиба консоли графоаналитическим методом

В случае консоли с сосредоточенным грузом на конце (рис. 122, a) эпюра изгибающих моментов показана на рис. 122, b . Так как касательная в заданном конце A остается неизменной, то

расстояния точек изогнутой оси от этой касательной являются действительными прогибами. Угол θ_x , который составляет касательная к изогнутой оси в B с касательной в A , согласно уравнению (92)¹⁾ равняется

$$\theta_b = Pl \frac{l}{2} \frac{1}{EJ_z} = \frac{Pl^2}{2EJ_z}. \quad (94)$$

Прогиб f вычисляется из уравнения (93) как момент площади oba , относительно оси bb_1 , разделенный на EJ_z . Тогда

$$f = Pl \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l \frac{1}{EJ_z} = \frac{Pl^3}{3EJ_z}. \quad (95)$$

Для какого-либо поперечного сечения mn угол поворота относительно оси x есть площадь $m'n'a'a$, рис. 122, b , поделенная на EJ_z . В случае пологой кривой, как, например, изогнутая ось балки,

угол поворота может быть принят равным тангенсу угла наклона касательной к кривой, и мы получаем

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl}{2EJ_z} \left[1 - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right]. \quad (96)$$

Прогиб y в том же поперечном сечении есть момент площади $m'n'a'a$, относительно $m'n'$, разделенный на EJ_z (см. уравнение (93)). Разбивая эту площадь на прямоугольник и треугольник, как указано на рисунке, получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left[P(l-x) \frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2} \frac{2x}{3} \right] = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (97)$$

Для консоли с сосредоточенным грузом P в поперечном сечении, отстоящем на расстоянии c от опоры (рис. 123, a), эпюра изгибающих моментов показана на рис. 123, b . Угол наклона и прогиб для какого-либо сечения слева от точки приложения груза определяются из уравнений (96) и (97) с заменой c вместо l . Для какого-либо сечения справа от груза изгибающий момент и кривизна равны нулю; следовательно, эта часть балки остается прямой. Угол наклона является постоянным и равным углу наклона в D , т. е. на основании уравнения (94), $Pc^2/2EJ_z$. Прогиб в каком-либо поперечном сечении mn равняется моменту площади треугольника $aa'd$ относительно вертикали $m'n'$, разделенному на EJ_z , что дает

$$y = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pc^2}{2} \left(x - \frac{1}{3}c \right). \quad (98)$$

¹⁾ Он принимается положительным, так как вращение происходит по часовой стрелке.

В случае консоли с равномерной нагрузкой интенсивностью q (рис. 124, a), изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn на расстоянии x_1 от заделанного конца равняется

$$M = -\frac{q(l-x_1)^2}{2},$$

и изображается параболой a_1db на рис. 124, b . Угол наклона в

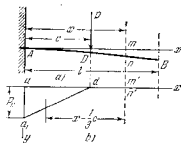


Рис. 123.

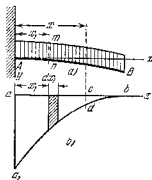


Рис. 124.

каком-либо поперечном сечении на расстоянии x от опоры, из уравнения (92), равняется

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^x \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1 = \frac{q}{2EJ_z} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right). \quad (99)$$

Угол наклона на конце получится путем подстановки в указанное уравнение l вместо x

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{ql^2}{6EJ_z}. \quad (100)$$

Прогиб в каком-либо сечении на расстоянии x от заделанного конца равняется моменту площади aa_1cd относительно вертикали cd , разделенному на EJ_z (рис. 124, b). Момент элементарной площадки, заштрихованной на чертеже, равняется

$$(x-x_1) \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1,$$

и полный момент есть интеграл этого выражения от $x_1=0$ до $x_1=x$. Следовательно,

$$y = \frac{1}{EJ_z} \frac{q}{2} \int_0^x (x-x_1)(l-x_1)^2 dx_1.$$

Тогда после интегрирования прогиб в какой-либо точке на расстоянии x от опоры равняется

$$y = \frac{q}{2EJ_z} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right). \quad (101)$$

Для прогиба на конце, т. е. при $x=l$, имеем

$$f = (y)_{x=l} = \frac{q l^4}{8EJ_z} \quad (102)$$

Та же задача может быть решена методом сложения действия сил. Равномерную нагрузку можно рассматривать как систему бесконечно малых грузов $q dx$, указанных на рис. 140, стр. 145.

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб верхнего конца стойки, изображенной на рис. 98.

Решение. Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении xy на расстоянии x от верха равенится

$$M = -\frac{Hx^2}{3R^2},$$

где $H = \frac{1}{2} \rho l^2 \cdot 1000$ кг есть полное гидростатическое давление, приходящееся на одну стойку. Пользуясь уравнением (93), находим прогиб верха стойки

$$f = \frac{H}{EJ_z} \int_0^l \frac{x^2 dx}{3R^2} = \frac{Hl^3}{15EJ_z} = \frac{1 \cdot 2^3 \cdot 1000 \cdot 2^3 \cdot 100^3 \cdot 12}{2 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 27 \cdot 1^4} = 0,22 \text{ см.}$$

2. Определить прогиб и угол наклона на конце консоли, изогнутой парой сил M (рис. 125).

Ответ:

$$(y)_{x=l} = -\frac{Ml^2}{2EJ_z}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Ml}{EJ_z}.$$

3. Две деревянные прямоугольные балки, зажатые на левом конце (рис. 126), изгибаются путем натяжения болта на правом конце. Определить диаметр d болта



Рис. 125.

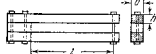


Рис. 126.

таким образом, чтобы коэффициенты безопасности для деревянных балок и для стального болта были одинаковы. Длина балок $l=1$ м, высота $h=20$ см, ширина $b=15$ см, допустимое напряжение для стали $[\sigma]=800$ кг/см², для дерева $[\sigma]=80$ кг/см². Определить прогиб балок, если растягивающее напряжение в болте 800 кг/см².

Решение. Если P есть сила, действующая в болте, то уравнение для определенной d будет

$$\frac{4P}{\pi d^3} \cdot \frac{6Pl}{bh^3} = \frac{800}{80} = 10,$$

откуда

$$d = 1,13 \text{ см и } P = 800 \cdot \frac{\pi d^3}{4} = 800 \text{ кг.}$$

Тогда, взяв $E=10^6$ кг/см², получим из уравнения (95) прогиб $f=0,267$ см.

4. Какое должно быть уравнение оси бруса до изгиба, если движущийся по нему груз P остается на одном и том же уровне (рис. 127).

Ответ.

$$y = -\frac{Px^2}{3EJ_z}.$$

5. Определить допустимый прогиб балки, показанной на рис. 125, если дано допустимое напряжение $[\sigma]$. Определить также прогиб для консоли, нагруженной на конце (рис. 122).

$$\text{Ответ. 1) } f = \frac{[\sigma] l^3}{Eh}, \quad 2) f = \frac{\rho}{3} \frac{[\sigma] l^4}{Eh}.$$

6. Крутящий диск N радиуса R (рис. 128) вызывает в тонкой стальной полоске толщиной h и притяжение магнитными силами, равномерно распределенными с интенсивностью q кг/см². Определить длину l свободной части AC полоски и наибольшее напряжение в ней, если $h=0,025$ см, $R=7,5$ см и $q=1$ кг/см².

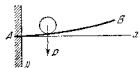


Рис. 127.

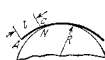


Рис. 128.

Решение. Длину свободной части полоски можно определить из условия, что в точке C кривизна, вызываемая равномерно распределенной нагрузкой q , должна быть равна $\frac{1}{R}$. Поэтому

$$\frac{q l^2}{2} = \frac{EJ_z}{R},$$

откуда

$$l = \sqrt{\frac{2EJ_z}{qR}} = 0,83 \text{ см.}$$

Наибольшее напряжение определится из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{Fh}{2R} = 3333 \text{ кг/см}^2.$$

36. Определение прогиба свободно опертой балки графоаналитическим методом

Рассмотрим случай свободно опертой балки с грузом, приложенным в точке F (рис. 129). Эпюра изгибающих моментов представляет треугольник $a_1 b_1 f_1$ (рис. 129. б). Его площадь равна $\frac{Pab}{2}$ и его центр тяжести C находится на расстоянии $\frac{l_1 \cdot b}{3}$ от вертикали Bb_1 . Вертикальное расстояние f конца B до линии Ab' , которая является касательной к изогнутой оси в A , получается из уравнения (93)

и равняется

$$j = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3} = \frac{Pab(l+b)}{6EJ_z}.$$

Пользуясь этим значением, найдем угол наклона θ_1 левого конца балки, а именно

$$\theta_1 = \frac{j}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6EJ_z l}, \quad (a)$$

что совпадает с ранее полученной формулой (88)¹⁾. При вычислении угла поворота θ_2 конца B балки (рис. 129, а) мы замечаем, что

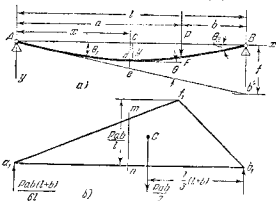


Рис. 129.

поворот конца B относительно конца A на основании уравнения (92) равняется

$$\theta_2 = \frac{Pab}{2EJ_z}.$$

Следовательно,

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta = \frac{Pab(l+b)}{6EJ_z l} - \frac{Pab}{2EJ_z} = -\frac{Pab(l+a)}{6EJ_z l}. \quad (b)$$

Можно дать простое толкование формулам (a) и (b), если рассматривать a_1b_1 на рис. 129, б, как свободно опертую балку, несущую треугольную нагрузку, представленную треугольником $a_1f_1b_1$. Реакция левой опоры a_1 этой воображаемой балки равняется

$$R_1 = \frac{Pab(l+b)}{2} \frac{1}{3} = \frac{Pab(l+b)}{6l}.$$

Подобно этому

$$R_2 = \frac{Pab(l+a)}{6l}.$$

¹⁾ Заметить, что $a=l-b$.

Сравнивая эти результаты с формулами (a) и (b), можем заключить, что углы поворота θ_1 и θ_2 концов действительной балки AB получаются путем деления поперечных сил на концах воображаемой балки a_1b_1 на жесткость при изгибе EJ_z . Воображаемая балка a_1b_1 называется *фигурной балкой*.

Чтобы вычислить угол наклона в какой-либо точке d изогнутой оси (рис. 129, а), необходимо вычесть из угла θ_1 на опоре угол θ между касательными в A и d . Пользуясь уравнением (92) для вычисления угла θ , из рис. 129, б мы получаем

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 - \theta = \frac{1}{EJ_z} (R_1 - \Delta a, mn).$$

Первый член в скобках представляет реакцию левой опоры фигурной балки a_1b_1 , а второй — нагрузку на этой балке слева от поперечного сечения mn . Поэтому выражение в скобках представляет поперечную силу в сечении mn фигурной балки. Следовательно, угол наклона действительной балки в точке d можно получить делением поперечной силы в соответствующем сечении фигурной балки на жесткость при изгибе EJ_z .

Рассматривая прогиб y в точке d , мы можем видеть из рис. 129, а, что

$$y = \overline{ce} - \overline{de}. \quad (c)$$

Из треугольника Ace мы получаем

$$\overline{ce} = \theta_1 x = \frac{R_1 x}{EJ_z}, \quad (d)$$

где R_1 есть реакция левой опоры фигурной балки. Второй член правой части уравнения (c) представляет расстояние точки d изогнутой оси до касательной Ae и оно получается из уравнения (93)

$$\overline{de} = \frac{1}{EJ_z} (\text{площадь } \Delta a_1 mn) \frac{x}{3}. \quad (e)$$

Подставляя выражения (d) и (e) в уравнение (c), получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(R_1 x - \text{пл. } \Delta a_1 mn \frac{x}{3} \right). \quad (f)$$

Видно, что выражение в скобках представляет изгибающий момент в поперечном сечении mn фигурной балки. Таким образом, прогиб в какой-либо точке свободно опертой балки получается делением изгибающего момента в соответствующем поперечном сечении фигурной балки на жесткость при изгибе EJ_z . Подставляя в уравнение (f) значение R_1 и замечая, что

$$\text{площадь } \Delta a_1 mn = \frac{Pbx^2}{2l},$$

получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pobx(l+b)}{6l} - \frac{Pbx^2}{6l} \right] = \frac{Pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6lEJ_z}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (86), которое было ранее получено интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси. Прогиб для точки, находящейся справа от груза P , можно вычислить подобным образом. Результат будет, конечно, такой же, какой дает уравнение (87). Видно, что при помощи графоаналитического метода мы исключаем процесс интегрирования, который был применен в параграфе 33.

В случае равномерно нагруженной балки (рис. 130, а), мы рассматриваем фиктивную балку ab (рис. 130, б), нагруженную параболическим сегментом acb , который в этом случае представляет эпюру изгибающих моментов. Полная фик-

тивная нагрузка на фиктивную балку равняется

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} l,$$

и каждая реакция равна $\frac{q l^2}{24}$. Тогда угол наклона в конце действительной балки получится делением этой реакции на EJ_z . Чтобы вычислить прогиб в середине, мы находим изгибающий момент в середине фиктивной балки, который равняется

$$\frac{q l^3}{24} \left(\frac{l}{2} - \frac{3l}{16} \right) = \frac{5q l^4}{384}.$$

Тогда прогиб получится делением этого момента на EJ_z . В случае свободно опертой балки AB с парой сил M , действующей на конце (рис. 131), эпюра изгибающих моментов представляет треугольник abd , изображенный на рис. 131, б. Рассматривая ab как фиктивную балку, находим, что полная фиктивная нагрузка равна $\frac{Ml}{2}$. Тогда реакции на концах фиктивной балки будут равны

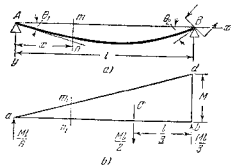


Рис. 130.

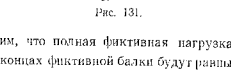


Рис. 131.

$\frac{Ml}{6}$ и $\frac{Ml}{3}$. Следовательно, углы поворота концов действительной балки равняются

$$\theta_1 = \frac{Ml}{6EJ_z} \quad (103)$$

и

$$\theta_2 = -\frac{Ml}{3EJ_z}. \quad (104)$$

Прогиб в поперечном сечении m балки получается делением изгибающего момента в соответствующем поперечном сечении m, n , фиктивной балки на EJ_z , что дает

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{Ml}{6} x - \frac{Ml x^2}{2} \frac{x}{3} \right) = \frac{Mlx}{6EJ_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (105)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить углы поворота концевых сечений и прогибы под грузами и в середине балки, показанной на рис. 132.

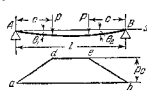


Рис. 132.

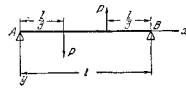


Рис. 133.

Решение. Фиктивная балка будет нагружена трапецией $adob$, площадь которой равна $Pc(l-c)$. Углы поворота на концах будут

$$\theta_1 = -\theta_2 = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pc(l-c)}{2}.$$

Прогиб под грузом равняется

$$(y)_{x=c} = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pc^2(l-c)}{2} - \frac{Pc^2 c}{2} \right] = \frac{Pc^2}{EJ_z} \left(\frac{l}{2} - \frac{2}{3} c \right).$$

Прогиб в середине из уравнения (91) равняется

$$(y)_{x=l/2} = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pc}{24} (3l^2 - 4c^2).$$

2. Определить углы наклона касательных на концах балки, показанной на рис. 92.

$$\text{Отвст. } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{7Hl^2}{180EJ_z}, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{2Hl^2}{45EJ_z}.$$

где H — полное давление на балку.

3. Свободно опертой балка AB нагружена, как показано на рис. 133. Найти прогиб в середине балки и наибольший прогиб; определить углы наклона касательных на концах балки.

$$\text{Ответ. (f)} \quad i_{x=0} = 0; \quad i_{\text{max}} = \frac{2\sqrt{2} P l^2}{27^2 \sqrt{3} E J_z} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{P l^2}{81 E J_z}.$$

4. Определить углы θ_1 и θ_2 и прогиб в каком-либо поперечном сечении m балки, свободно опертой на концах и изгибаемой парой сил P (рис. 134).

Решение. Нагрузку фиктивной балки указана на рис. 134, в. Реакции в a_1 и b_1 равняются

$$R_{a_1} = \frac{1}{l} \left[\frac{Pca^2}{2l} \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{Pcb^2}{2l} \cdot \frac{2}{3} b \right],$$

$$R_{b_1} = \frac{1}{l} \left[\frac{Pca^2 2a}{2l} - \frac{Pcb^2}{2l} \left(a + \frac{b}{3} \right) \right].$$

Рис. 134.

Следовательно, углы поворота θ_1 и θ_2 равны

$$\theta_1 = \frac{Pc}{2l^2 E J_z} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] = \frac{Pc}{2l^2 E J_z} \left(\frac{l^3}{3} - b^2 \right),$$

$$\theta_2 = - \frac{Pc}{2l^2 E J_z} \left[\frac{2}{3} a^2 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right] = - \frac{Pc}{2l^2 E J_z} \left(\frac{l^3}{3} - a^2 \right).$$

Если $a = b = \frac{l}{2}$, мы получаем

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pcl}{24 E J_z}.$$

Если $a > \frac{l}{3}$, то угол θ_1 меняет свой знак, и прогибы везде будут направлены вниз. Изгибающий момент в поперечном сечении m , n , фиктивной балки равняется

$$R_{a_1} x - \frac{Pca^2 x^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Pcx}{2l} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] - \frac{Pcx^2}{6l}.$$

Следовательно, уравнение изогнутой оси для левой части действительной балки будет

$$y = \frac{Pcx}{2l^2 E J_z} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^2 \right] - \frac{Pcx^2}{6l E J_z}.$$

5. Балка изгибается двумя парами сил, как показано на рис. 135. Определить отношения $M_1 : M_2$, если точка перегиба находится на расстоянии $l/3$ от левой опоры.
Ответ. $M_1 = 2M_2$.

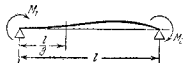


Рис. 135.



Рис. 136.

6. Две доски разной толщины h_1 и h_2 , лежащие одна на другой, несут равномерно распределенную нагрузку, как показано на рис. 136. Определить отношение наибольших напряжений, возникающих в каждой,

Решение. Обе доски имеют одну и ту же изогнутую ось в кривизну, поэтому их изгибающие моменты находятся в таком же отношении, как и моменты инерции их поперечных сечений, т. е. в отношении $h_1^3 : h_2^3$.

Моменты сопротивления находятся в отношении $h_1^3 : h_2^3$, следовательно, наибольшие напряжения относятся как $h_1 : h_2$.

7. Стальной стержень AB имеет такую первоначальную кривизну, что при выпрямлении его силами P (рис. 137) возникает равномерно распределенное давление по длине твердой плоскости MN . Определить силы P , необходимые для выпрямления стержня, и наибольшие напряжения, возникающие в нем, если $l = 50$ см, $f = 0,25$ см и поперечное сечение стержня представляет квадрат со стороной 2,5 см.

Решение. Чтобы получить равномерно распределенное давление, первоначальная кривизна стержня должна быть такой же, как и у свободно опертой балки, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $\frac{2P}{l}$. Тогда мы получим

$$M_{\text{max}} = \frac{2P l^2}{l^2} = \frac{Pl}{4}, \quad (g)$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{2P l^4}{E J_z}. \quad (h)$$

Наибольшие напряжения будут

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{Plh}{8J_z}. \quad (i)$$

Теперь из (h) в (i)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{24 E f h}{5 l^3} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,25 \cdot 2,5}{5 \cdot 50^3} = 2400 \text{ кг/см}^2$$

и из (i)

$$P = 500 \text{ кг.}$$

8. Определить прогиб f в середине деревянной балки, изображенной на рис. 72, а, если поперечное сечение ее имеет размеры 25х25 см. Найти наибольшее нормальное напряжение.

Ответ. $f = 0,52$ см, $\sigma_{\text{max}} = 39$ кг/см².

9. Пользуясь той же балкой, что и в предыдущей задаче, найти наибольшее нормальное напряжение и прогиб в середине пролета при условии загрузки, показанного на рис. 72, в.

Ответ. $f = 0$, $\sigma_{\text{max}} = 9,5$ кг/см².

37. Метод сложения действия сил

Из рассмотрения графоаналитического метода видно, что прогибы балки вполне определяются эпюрой изгибающих моментов. Из определения понятия изгибающего момента (параграф 20) следует, что изгибающий момент, вызванный в каком-либо поперечном сечении балки несколькими одновременно действующими поперечными грузами, равняется сумме изгибающих моментов, вызванных в том же поперечном сечении каждым грузом, действующим отдельно. Из этого следует, что прогиб, вызванный в какой-либо точке

балки системой одновременно действующих поперечных грузов, можно получить суммированием прогибов, вызванных в этой точке каждым грузом отдельно. Имея, например, уравнения изогнутых осей для случаев, изображенных на рис. 123 и 119, мы можем получить простым суммированием прогибы для консоли или свободно опертой балки, несущей какую-либо поперечную нагрузку.

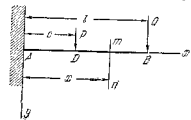


Рис. 138.

Взяв в качестве примера случай, показанный на рис. 138, и воспользовавшись уравнениями (97) и (98), мы заключаем, что прогиб в B равняется

$$f_b = \frac{Ql^3}{3EJ_z} + \frac{Pc^2}{2EJ_z} \left(l - \frac{c}{3} \right).$$

Подобно этому прогиб в D равняется

$$f_D = \frac{Q}{EJ_z} \left(\frac{lc^2}{2} - \frac{c^3}{6} \right) + \frac{Pc^3}{3EJ_z}.$$

Прогиб в каком-либо поперечном сечении *m*n для части DB консоли будет

$$y = \frac{Pc^2}{2EJ_z} \left(x - \frac{c}{3} \right) + \frac{Q}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

В случае распределенной нагрузки суммирование будет естественно интегрировано. В качестве примера мы возьмем случай свободно опертой балки, несущей равномерно распределенную нагрузку (рис. 130), и вычислим углы наклона на концах и прогиб в середине балки. Из уравнения (а) параграфа 36 следует, что приращение угла наклона *dh*, вызываемое на левом конце балки элементарным грузом *qdb*, показанным на рис. 130, равняется

$$dh_1 = \frac{qab(l+b)db}{6EJ_z} = \frac{qb(l^2 - b^2)db}{6EJ_z}.$$

Тогда угол наклона θ_1 , вызываемый всей нагрузкой, равняется сумме приращений угла наклона, вызываемых всеми элементами *qdb* от *b* = 0 до *b* = *l*. Следовательно,

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{qb(l^2 - b^2)db}{6EJ_z} = \frac{q^2 l^3}{24EJ_z}. \quad (а)$$

Прогиб в середине получается из уравнения (91), которое было выведено на основании предположения, что груз расположен справа от середины. Какой-либо элементарный груз *qdb*, распо-

ложенный справа от середины, вызывает в середине прогиб

$$(dy)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Суммируя прогибы, вызываемые всеми такими элементарными грузами, расположенными справа от середины, и замечая, что нагрузка на левой половине балки вызывает такой же прогиб в середине, как и нагрузка на правой половине, получаем для полного прогиба

$$f = (y)_{x=\frac{l}{2}} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2) = \frac{5}{384} \frac{q^2 l^4}{EJ_z}. \quad (b)$$

Результаты (а) и (б) совпадают с формулами (83) и (82), ранее полученными интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси.

Метод сложения действия сил особенно пригоден, если распределенная нагрузка покрывает лишь часть пролета, как на рис. 139. Пользуясь выражением, введенным выше для $(dy)_{x=\frac{l}{2}}$, найдем, что прогиб,

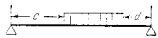


Рис. 139.

вызванный в середине нагрузкой, расположенной справа от середины, равняется

$$f_1 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Нагрузка, расположенная слева от середины, вызывает прогиб

$$f_2 = \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

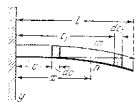


Рис. 140.

Следовательно, полный прогиб в середине равняется

$$f = f_1 + f_2 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2) + \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qbd}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Рассмотрим теперь равномерно нагруженную консоль (рис. 140). Прогиб, вызываемый в каком-либо поперечном сечении *m*n каждым элементарным грузом *qdc*, расположенным слева от сечения, можно найти из уравнения (98) подстановкой *qdc* вместо *P*. Прогиб *y*₁, вызываемый полной нагрузкой, расположенной слева от *m*n, равняется сумме прогибов, вызываемых всеми такими элементарными

грузами; при этом c изменяется от $c=0$ до $c=x$:

$$y_1 = \frac{1}{EJ_z} \int_0^x \frac{qc^2}{2} \left(x - \frac{1}{3}c\right) dc = \frac{q}{2EJ_z} \frac{x^3}{4}.$$

Прогиб, вызываемый в каком-либо поперечном сечении mn элементарным грузом qdc , расположенным справа от сечения, найдется из уравнения (97) подстановкой qdc вместо P и c , вместо l . Прогиб y_2 , вызываемый полной нагрузкой, расположенной справа от сечения, равняется сумме прогибов, вызываемых всеми такими элементарными грузами; при этом c_1 изменяется от $c_1=x$ до $c_1=l$:

$$y_2 = \frac{1}{EJ_z} \int_x^l q \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{x^2}{6}\right) dc_1 = \frac{q}{2EJ_z} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 l}{2} - \frac{l^3}{3}\right).$$

Тогда полный прогиб в сечении mn будет равен

$$y = y_1 + y_2 = \frac{q}{2EJ_z} \left(\frac{l^3 x^2}{2} - \frac{l^3 x}{3} + \frac{x^4}{12}\right),$$

что согласуется с ранее найденным уравнением (101).

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб в середине балки AB , показанной на рис. 141, если $J_z = 3570 \text{ см}^4$, $q = 760 \text{ кг/м}$, $l = 7,2 \text{ м}$, $a = 3,6 \text{ м}$, $b = 2,4 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.



Рис. 141.

Решение. Вследствие того, что $a = \frac{l}{2}$, прогиб, вызываемый в середине нагрузкой, действующей на левой половине балки, на основании уравнения (82) равняется

$$(y_1)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ_z}.$$

Прогиб, вызываемый в середине нагрузкой, расположенной на правой половине балки, равняется

$$(y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \int_0^b \frac{qc dc}{48EJ_z} (3l^2 - 4c^2) = \frac{25}{48 \cdot 162} \frac{q l^4}{EJ_z}.$$

Полный прогиб равняется

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = (y_1)_{x=\frac{l}{2}} + (y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{384} + \frac{25}{48 \cdot 162}\right) \frac{q l^4}{EJ_z} = 2,55 \text{ см}.$$

2. Определить прогиб в середине балки, показанной на рис. 95, когда груз находится в положении, при котором имеет место наибольший изгибающий момент.

Указание. Прогиб можно получить при помощи уравнения (94) и метода сложения действия сил, подставляя в это уравнение $b = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$ для одного груза и $b = \frac{l}{2} - \frac{3}{4}d$ для другого.

3. Определить прогибы в середине и углы поворота конечных сечений балок, показанных на рис. 72, б и 72, д. Принять для этих вычислений двутавровую балку с $J_z = 2500 \text{ см}^4$.

Ответ. Для балки, изображенной на рис. 72, б, $f = 0,3 \text{ см}$, $\theta_1 = 0,00241$ радиана и $\theta_2 = -0,00276$ радиана.

4. Балка со свободно опертными концами изгибается двумя парами сил M_1 и M_2 , приложенными на концах (рис. 142). Определить углы поворота конечных сечений и положение поперечного сечения, в котором прогиб является наибольшим.

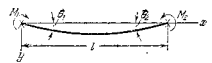


Рис. 142.

Решение. Абсолютные значения углов из уравнений (103) и (104) будут

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3EJ_z} + \frac{M_2 l}{6EJ_z}, \quad |\theta_2| = \frac{M_2 l}{3EJ_z} + \frac{M_1 l}{6EJ_z}.$$

При помощи уравнения (105) находим уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{M_1 l (l-x)}{6EJ_z} \left[1 - \left(\frac{l-x}{l}\right)^2\right] + \frac{M_2 l x}{6EJ_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

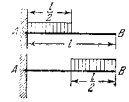


Рис. 143.

Положение наибольшего прогиба можно найти из этого уравнения, если первую производную приравнять нулю.

5. Каково отношение прогибов на концах консолей, показанных на рис. 143, если интенсивность равномерной нагрузки одна и та же в обоих случаях?

Ответ: 7 : 41.

6. Определить прогибы на концах консолей, показанных на рис. 73, предполагая, что материал является сталью, высота каждой балки равняется 25 см и наибольшее нормальное напряжение равно 1400 кг/см^2 . Вычислять методом сложения действия сил.

Решение. Взяв, например, случай, представленный на рис. 73, б, и заметив, что полная распределенная нагрузка равняется $q = 1800 \text{ кг}$, а груз на конце равняется

$$P = 500 \text{ кг} = \frac{5}{18} q l, \text{ мы имеем}$$

$$f = \frac{q l^4}{8EJ_z} + \frac{P l^3}{3EJ_z} = \frac{47 q l^4}{216EJ_z}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h}{2J_z} = \frac{h}{2J_z} \left(P l + \frac{q l^2}{2}\right) = \frac{7 q l^2 h}{18 J_z}.$$

Исключая J_z , получаем

$$f = \frac{47 P^2 \sigma_{\max}}{84 E h} = \frac{47 \cdot (300)^2 \cdot 1400}{84 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 25} = 1,41 \text{ см}.$$

Подобным образом могут быть решены другие три задачи.

7. Найти прогиб f конца B консоли AB , нагруженной треугольной нагрузкой (рис. 144).

Решение. Применяя метод сложения действия сил и пользуясь уравнением (102) и результатом задачи 1 параграфа 35, получаем

$$f = \frac{q l^4}{8EJ_z} \cdot \frac{q l^2}{30EJ_z} = \frac{11 q^2 l^6}{120 E^2 J_z^2}.$$

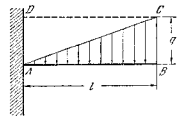


Рис. 144.

38. Прогиб балок с консолями

Балка с консолью может быть разделена на две части: часть между опорами, которая может быть рассматривается как балка с опертыми концами, и свешивающаяся часть, которая может быть рассматривается как консоль. Для иллюстрации мы рассмотрим изгиб балки с консолью под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 145). Балка разделена на две части AB и BC

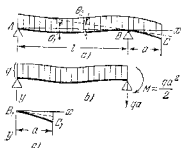


Рис. 145.

и действие консоли на часть балки между опорами заменено поперечной силой qa и парой сил $M = qa^2/2$. Мы находим, что поперечная сила непосредственно передается на опору и что необходимо рассмотреть только пару сил $qa^2/2$. Тогда прогиб в каком-либо поперечном сечении между опорами получится вычитанием прогиба, вызываемого парой сил $qa^2/2$, из прогиба, вызываемого равномерно распределенной нагрузкой b (рис. 145, б). Пользуясь уравнениями (81) и (105), мы получаем

$$y = \frac{q}{24EI_z} (l^2x - 2lx^2 + x^3) - \frac{qa^2lx}{12EI_z} \left(1 - \frac{x^2}{l}\right).$$

Угол поворота поперечного сечения в точке B получается при помощи уравнений (83) и (104), из которых, считая поворот положительным в направлении движения часовой стрелки, мы получаем

$$\theta_B = \frac{qa^2l}{6EI_z} - \frac{ql^2}{24EI_z}.$$

Прогиб в каком-либо поперечном сечении свешивающегося конца (рис. 145, в) получится теперь путем сложения прогиба консоли (уравнение (101)) с прогибом

$$\theta_B x = \left(\frac{qa^2l}{6EI_z} - \frac{ql^2}{24EI_z} \right) x,$$

вследствие поворота поперечного сечения B .

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб и угол наклона конца C балки, показанной на рис. 147, а. Отстп. Прогиб $f = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI_z}$; угол $\theta = \frac{Pa(2l+3a)}{5EI_z}$.

2. Определить прогиб в конце C , а также в середине между опорами балки, показанной на рис. 146.

Решение. Часть балки между опорами будет находиться в условиях балки, нагруженной силой P и парами сил P_1a и P_2b на опорах. Согласно уравнениям (91)

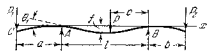


Рис. 146.

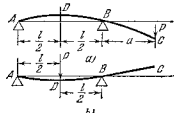


Рис. 147.

и (105) и методу сложения действия сил прогиб в середине равняется

$$f = \frac{Pc}{48EI_z} (3l^2 - 4c^2) - \frac{P_1al^2}{16EI_z} - \frac{P_2bl^2}{16EI_z}.$$

Угол θ_1 на опоре A получается из уравнений (88), (103) и (104)

$$\theta_1 = \frac{Pc}{6EI_z} - \frac{P_1al}{3EI_z} - \frac{P_2bl}{6EI_z}.$$

Из уравнения (95) прогиб на конце C равняется

$$\frac{P_1a^3}{3EI_z} - a\theta_1.$$

3. Балка с консолью изгибается в одном случае силой P , приложенной на конце (рис. 147, а), а в другом случае той же силой, приложенной в середине пролета (рис. 147, б). Доказать, что прогиб в точке D в первом случае равен прогибу на конце C во втором случае.

Ответ. В каждом случае прогиб равен

$$\frac{P^2a}{16EI_z}.$$

4. Балка длиной l с двумя равными консолями нагружена двумя равными силами P на концах (рис. 148). Определить отношение, x/l , при котором: 1) про-

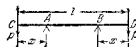


Рис. 148.

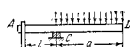


Рис. 149.

гиб в середине равен прогибу на любом конце, 2) прогиб в середине имеет наибольшую величину.

Ответ. 1) $x = 0,152l$; 2) $x = l/6$.

5. Деревянная балка круглого поперечного сечения, опертая в C с концом, прикрепленным в A , несет равномерно распределенную нагрузку q на консоли CD (рис. 149). Определить диаметр поперечного сечения и прогиб в D , если $l = 1$ м, $a = 2$ м, $q = 400$ кг/м и $[\sigma] = 80$ кг/см².

Решение. Диаметр найдется из уравнения

$$\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{\pi d^3}{32} = [s].$$

Тогда прогиб на конце D найдется из уравнения

$$f = \frac{qa^4}{8EJ_z} + \frac{qa^2l}{6EJ_z} = \frac{qa^3}{24EJ_z} (3a + 4l).$$

6. Балка длиной l несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q (рис. 150). Определить длину консолей так, чтобы численно наибольший изгибающий момент был насколько возможно меньшим. Определить прогиб в середине при этом условии.

Решение. Полагая численные значения изгибающих моментов в середине и на опорах равными, мы получаем

$$x = 0,207l.$$

Рис. 150

Прогиб в середине определится из уравнения

$$f = \frac{5}{384} \frac{q(l-2x)^4}{EJ_z} - \frac{qx^2(l-2x)^2}{16EJ_z},$$

в котором первый член правой части представляет прогиб, вызываемый нагрузкой, лежащей между опорами (уравнение (82)), а второй — прогиб, вызываемый нагрузкой, лежащей на консолях (уравнение (105)).

7. Определить прогибы на концах консолей для балок, представленных на рис. 79, а, б, с. Для вычисления принять балку двутаврового сечения $J_z = 2500 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. Если l — длина балки между опорами и a — длина консоли, то

$$f_a = \frac{qa^4}{8EJ_z} + \left(\frac{qa^2l}{6EJ_z} - \frac{ql^3}{24EJ_z} \right) a,$$

$$f_b = \frac{Pa^2l}{4EJ_z} - \frac{117Pa^3}{384EJ_z},$$

$$f_c = \frac{qa^2}{8EJ_z} (a + 2l) - \frac{PlPa}{16EJ_z}.$$

39. Влияние поперечных сил на прогиб балок

Выше (стр. 118) при рассмотрении прогибов было принято во внимание лишь действие изгибающего момента. Дополнительный прогиб будет вызван поперечной силой при взаимном сдвиге смежных поперечных сечений одного относительно другого. В результате неравномерного распределения касательных напряжений поперечные сечения, прежде плоские, становятся искривленными, как на рис. 151, на котором показан изгиб только от сдвига 1 . Элементы поперечных сечений в центре тяжести остаются вертикальными и скользят один по другому. Поэтому угол наклона касательной к изогнутой оси только от сдвига равен в каждом поперечном сечении отношению к сдвигу в центре тяжести этого сечения. Обозначая через α прогиб от сдвига, мы получаем для какого-либо поперечного сечения следующее

выражение для угла наклона:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_y=0}{G} = -\frac{\alpha Q}{FG}, \quad (a)$$

где Q/F есть среднее касательное напряжение τ_{xy} , G — модуль упругости при сдвиге и α — численный коэффициент, на который нужно умножить среднее касательное напряжение для того, чтобы получить касательное напряжение в центре тяжести поперечного сечения. Для прямоугольного поперечного сечения $\alpha = 2/3$ (см. уравнение (66)); для круглого поперечного сечения $\alpha = 1/2$ (см. уравнение (68)). При неравномерной нагрузке на балке поперечная сила Q есть непрерывная функция, которую можно дифференцировать по x . Тогда кривизна, вызываемая только сдвигом, будет

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = -\frac{\alpha}{FG} \frac{dQ}{dx} = -\frac{\alpha}{FG} q,$$

где q — интенсивность нагрузки. Сумма этих кривизн и кривизны, вызываемой изгибающим моментом (см. уравнение (79)), дает полное выражение для кривизны:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EJ_z} \left(M + \frac{\alpha EJ_z}{FG} q \right). \quad (106)$$

Во всех случаях, в которых при определении прогиба нужно принять во внимание влияние поперечной силы, необходимо пользоваться этим уравнением вместо уравнения (79) ². Если M и q , как функции x , можем легко проинтегрировать уравнение (106) таким же образом, как было указано в параграфе 32.

В этом случае с большим успехом может быть применен графоаналитический метод, причём интенсивность фиктивной нагрузки будет

$$M \leftarrow \alpha \frac{EJ_z}{FG} q \quad (b)$$

вместо одного M (см. стр. 139).

Рассмотрим, например, случай балки, свободно лежащей на двух опорах, с равномерно распределенной нагрузкой (рис. 152). Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении x равен

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}. \quad (c)$$

Фиктивная нагрузка на балке состоит из двух частей: 1) нагрузки, представленной первым членом уравнения (b) и определяемой параболической эпюрой изгибающих моментов (рис. 152, б) и 2) нагрузки, представленной вторым членом уравнения (b), т. е. $\alpha(EJ_z/FG)q$. Так как q постоянно, то это есть равномерно распределенная нагрузка, показанная на рис. 152, с.

Дополнительный прогиб в каком-либо сечении от поперечной силы равен изгибающему моменту, вызываемому в этом сечении фиктивной балки, показанной на рис. 152, с и нагрузкой, разделенному на EJ_z . Следовательно, в середине балки дополнительный прогиб равен

$$l_1 = \frac{1}{EJ_z} \left(\alpha \frac{EJ_z}{FG} q \right) \frac{l^3}{8} = \frac{\alpha^2 q l^3}{8FG}.$$

¹ Другой способ определения дополнительного прогиба вследствие сдвига рассмотрен на стр. 270.

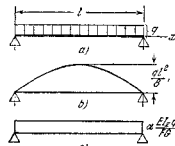
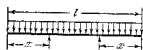


Рис. 152.



Рис. 151.

Складывая это с прогибом от изгибающего момента (уравнение (82)), получаем полный прогиб

$$f = \frac{5ql^4}{384EJ_z} + \frac{\alpha l^2 q}{8FG} = \frac{5ql^4}{384EJ_z} \left(1 + \frac{48\alpha l^2 E}{5 l^2 FG} \right), \quad (d)$$

где $t_2 = \sqrt{\frac{J_z}{I_p}}$ есть радиус инерции поперечного сечения относительно оси z .

Для прямоугольного поперечного сечения высотой h $t_2^2 = \frac{1}{12} h^2$, $\alpha = \frac{3}{2}$. Полагая $\frac{l}{G} = 2(1 + \mu) = 2,6$, получаем из (d)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} \left(1 + 3,12 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Можно видеть, что при $\frac{l}{h} = 10$ влияние поперечной силы на прогиб составляет около 3%. Если отношение $\frac{l}{h}$ уменьшится, то это влияние увеличивается.

Коэффициент α обычно бывает больше 2 для двутавровых балок, и если эти балки коротки, то влияние поперечной силы может быть сравнительно велико. Пользуясь уравнением (70) и рис. 110, мы получаем

$$\frac{\alpha Q}{P} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right],$$

$$\alpha = \frac{P}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right]. \quad (e)$$

Например, положим $h=60$ см, $F = 175$ см², $J_z = 91660$ см⁴, $b = 18$ см, $b_1 = 1,7$ см, $h_1 = 35,6$ см, $l = 6$ л. Тогда уравнение (e) дает $\alpha = 1,99$. Подставляя в уравнение (d), находим

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z} \left(1 + \frac{48}{5} \cdot 1,99 \frac{91660}{175 \cdot 360^2} \cdot 2,6 \right) = 1,203 \frac{5ql^4}{384EJ_z}.$$

Дополнительный прогиб от сдвига в этом случае равен 20,3% от прогиба, вызываемого изгибающим моментом, и поэтому должен быть принят во внимание.

В случае сосредоточенной нагрузки P (рис. 153) последняя может рассматриваться как предельный случай нагрузки, распределенной по очень короткой части c балки. Величина фиктивной нагрузки P_1 на балке $A_1 B_1$ соответствующему второму члену в выражении (b) будет

$$P_1 = \alpha \frac{EJ_z}{FG} P. \quad (i)$$

Дополнительный прогиб от поперечной силы получается делением на EJ_z изгибающего момента, вызываемого в балке фиктивной сосредоточенной нагрузкой, определяемой уравнением (f). Например, для центральной нагрузки балки изгибающий момент в середине фиктивной балки, возникающий от нагрузки (i), будет $\alpha(EJ_z/FG)Pl/4$, и дополнительный прогиб в середине от поперечной силы равен

$$f_1 = \frac{\alpha Pl}{FG} \frac{1}{4}. \quad (g)$$

Складывая этот прогиб с прогибом, вызываемым только изгибающим моментом (уравнение (90)), получим следующее уравнение для полного прогиба:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} + \frac{\alpha}{FG} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left(1 + \frac{12\alpha l^2 E}{l^2 FG} \right).$$

Для балки прямоугольного поперечного сечения высотой h имеем

$$\frac{l^2 E}{l^2 FG} = \frac{h^2}{12P}; \quad \alpha = \frac{3}{2},$$

и мы получаем

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left(1 + 3,96 \frac{h^2}{P} \right). \quad (h)$$

При $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ дополнительный прогиб от поперечной силы составляет около 4% от прогиба от изгибающего момента.

Во всех приведенных выше рассуждениях предполагалось, что поперечные сечения балки могут свободно искривляться, как показано на рис. 151. Равномерно нагруженная балка представляет случай, в котором это условие приблизительно удовлетворится. Поперечная сила в середине такой балки равна нулю и здесь нет никакого искривления. Искривление постепенно увеличивается с увеличением поперечной силы по длине балки от середины к левому и правому концам. Следовательно, условие симметрии деформации относительно середины удовлетворится. Рассмотрим теперь изгиб сосредоточенной нагрузки посередине. Из условия симметрии среднее поперечное сечение балки должно остаться плоским. В то же самое время смежные поперечные сечения справа и слева от нагрузки воспринимает поперечную силу, равную $P/2$, и должно иметь место искривление поперечности сечения, вызванное этими поперечными силами. Однако из условий непрерывности деформаций не может быть резкого изменения от плоского среднего сечения к искривленным смежным сечениям. Должно быть непрерывное увеличение искривления по длине балки в любом направлении от середины, и только в некотором расстоянии от нагрузки искривление может быть таким, какое производит поперечная сила $P/2$ при условиях свободы искривлений. Из всех рассуждений необходимо заключить, что вблизи среднего поперечного сечения распределение напряжений будет не таким, как указано элементарной теорией изгиба (см. стр. 187). Искривление будет частично задержано, и дополнительный прогиб от поперечной силы будет несколько меньше того, что найдено выше (см. уравнение (g)). Более подробное исследование¹⁾ показывает, что в случае сосредоточенной нагрузки в середине прогиб там же равняется

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left[1 + 2,85 \frac{h^2}{P} - 0,84 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right]. \quad (i)$$

Аналогичное условие мы имеем в случае консольной балки. Если заданное поперечное сечение может свободно искривляться, как показано на рис. 154, а, то

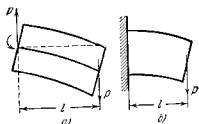


Рис. 154.

¹⁾ См. L. N. G. Filon, цитирован на стр. 107; S. Timoshenko, Phil. Mag., т. 47, стр. 1095, 1924; см. также Th. Kármán, Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolimitanarum, 1923 и автора Theory of Elasticity стр. 95, 1934.

условия будут такими, какие предполагались при выводе уравнения (h). Прогиб консоли прямоугольного поперечного сечения получится подстановкой l вместо $l/2$ и P вместо $P/2$ в это уравнение, т. е.

$$i = \frac{Pl^3}{3EJ} \left(1 + 0,98 \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (j)$$

Когда заделанное поперечное сечение полностью препятствует искривлению (рис. 154, б), условия будут теми же, что предполагались при выводе уравнения (i), и прогиб станет

$$i = \frac{Pl^3}{3EJ} \left[1 + 0,71 \left(\frac{h^2}{l^2} - 0,10 \left(\frac{h}{l} \right)^4 \right) \right], \quad (k)$$

что меньше прогиба, данного уравнением (j).



ГЛАВА VI

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ИЗГИБЕ

40. Лишние закрепления

В предыдущих параграфах были рассмотрены три типа балок: 1) консоль, 2) балка, свободно опертая на концах и 3) консольная балка (со свешивающимися концами). Во всех трех случаях реакции могли быть определены из основных уравнений статики; следовательно, эти задачи — *статически определимы*. Рассмотрим теперь задачи на изгиб балок, в которых уравнений статики недостаточно, чтобы определить все реакции опор, так что необходимо вывести

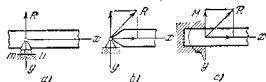


Рис. 155.

дополнительные уравнения, основанные на рассмотрении деформаций балок. Такие задачи называются *статически неопределимыми*.

Рассмотрим различные типы опор, которые может иметь балка. Опора, изображенная на рис. 155, а, называется *шарнирно-подвижной опорой*. Если пренебречь трением в шарнире и в катках, то очевидно, что в этом типе опор реакция должна проходить через центр шарнира и быть перпендикулярной к плоскости mn , по которой передвигаются катки. Следовательно, мы знаем точку приложения реакции и ее направление. Остается только один неизвестный элемент — величина реакции.

На рис. 155, б показана *шарнирно-неподвижная опора*. В этом случае реакция должна проходить через центр шарнира, но может иметь любое направление в плоскости рисунка. Мы имеем два неизвестных элемента, которые нужно определить из уравнений статики, а именно: направление реакции и ее величину, или иначе: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции.

На рис. 155, в представлен заделанный конец. В этом случае не только неизвестны направление и величина реакции, но также и

точка приложения. Реактивные силы, распределенные по заданному сечению, могут быть заменены силой R , приложенной в центре тяжести сечения, и парой сил M . В таком случае мы имеем три неизвестные, которые нужно определить из уравнений статики, а именно: две составляющих реактивной силы R и величину пары M .

Для балок, нагруженных поперечными силами в плоскости симметрии, мы имеем для определения опорных реакций три уравнения статики, а именно:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0. \quad (a)$$

Если балка опирается так, что имеются лишь три неизвестных *реактивных элемента*, то они могут быть определены из уравнений (а), и, следовательно, задача статически определима. Эти три элемента как раз достаточны, чтобы обеспечить неподвижность балки. Когда число реактивных элементов больше трех, мы говорим, что имеются *лишние закрепления*, и задача является статически неопределимой.

Консоль опирается заданным концом. В этом случае, как было выяснено выше, число неизвестных реактивных элементов — три и они могут быть определены из уравнений статики (а). Для балок, свободно лежащих на опорах, и балок со свешивающимися концами обычно предполагают, что одна из опор имеет неподвижный, а другая — подвижный шарнир. В таком случае мы опять имеем три неизвестных реактивных элемента, которые могут быть определены из уравнений статики.

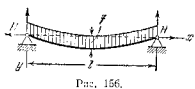


Рис. 156.

Если балка имеет неподвижные шарниры на обоих концах (рис. 156), задача становится статически неопределимой. На каждом конце мы имеем по два неизвестных реактивных элемента, являющихся составляющими каждой реакции. Для определения этих четырех неизвестных мы имеем лишь три уравнения (а). Следовательно, мы имеем одно лишнее закрепление, и для определения реакций необходимо рассмотреть деформацию балки. Вертикальные составляющие реакции можно вычислить из уравнений статики. В случае вертикальной нагрузки можно заключить также из статики, что горизонтальные составляющие H равны, но противоположны по направлению. Чтобы найти величину H , рассмотрим удлинение оси балки при изгибе. Приближенное значение этого удлинения можно получить при допущении, что изогнутая ось балки является параболой ¹⁾, уравнение которой представляется

$$y = -\frac{4lx(f-z)}{l^2}, \quad (b)$$

¹⁾ Точное выражение для изогнутой оси балки будет дано ниже (см. том II)

где f есть прогиб посередине. Длина кривой равняется

$$S = 2 \int_0^{l/2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_0^{l/2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (c)$$

В случае пологих кривых величина $(dy/dx)^2$ мала по сравнению с единицей и, пренебрегая малыми величинами порядка выше второго, мы получаем приближительно

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение (с) и пользуясь уравнением (b), находим длину кривой

$$S = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2}\right).$$

Разность между длиной кривой и расстоянием l между опорами представляет полное осевое удлинение балки и равняется $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l)$. Тогда относительное удлинение будет $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l^2)$. Зная его и обозначая через E модуль упругости материала балки и через F площадь поперечного сечения балки, мы получаем горизонтальную реакцию из уравнения

$$H = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} EF. \quad (d)$$

Необходимо отметить, что для большинства балок на практике прогиб f весьма мал по сравнению с длиной l и растягивающие напряжения $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l^2)E$, вызываемые силами H , обычно малы по сравнению с напряжениями от изгиба, и ими можно пренебречь. Это оправдывает обычную практику расчета балок с опертными концами, когда предполагают, что одна из двух опор представляет подвижный шарнир, хотя специальные приспособления для возможности свободного движения шарнира в действительности применяются только в случае больших пролетов, например мостов.

В случае изгиба гибких стержней и тонких металлических пластинок, где прогиб f уже не очень мал по сравнению с l , растягивающими напряжениями, вызываемыми продольными силами H , пренебрегать нельзя. Такие задачи будут рассмотрены в дальнейшем (см. том II).

В следующем изложении для решения статически неопределимых задач изгиба будет применен метод сложения действия сил. Решения будут получены комбинацией вышеисследованных статически определенных случаев таким образом, чтобы удовлетворить условиям на опорах.

41. Балка, заделанная одним концом и опертая другим

В этом случае мы имеем три неизвестных реактивных элемента на одном конце и один неизвестный на другом конце. Следовательно, задача однажды статически неопределима. Начиная со случая одного сосредоточенного груза P (рис. 157, *a*), примем за лишнее закрепление то, которое препятствует вращению концу A балки поворачиваться при изгибе. Отбрасывая это закрепление, мы получаем статически определенную задачу, показанную на рис. 157, *b*. Изгиб, вызываемый статически неопределимой парой M_a , теперь будет рассмотрен отдельно, как показано на рис. 157, *c*¹⁾. Очевидно, что изгиб балки, изображенный на рис. 157, *a*, можно получить сложением случаев (b) и (c). Необходимо лишь величину пары M_a на опоре подобрать таким образом, чтобы удовлетворить условию

$$\theta_1 = -\theta'_1. \quad (a)$$

Таким образом, поворот левого конца балки от силы P будет уничтожен реактивным моментом M_a и будет удовлетворено условие в заделанном конце, а именно, угол наклона здесь равен нулю. Чтобы получить статически неопределимую пару M_a , необходимо лишь вставить в уравнение (a) известные значения для углов θ_1 и θ'_1 из уравнений (88) и (104). Тогда

$$\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EJ_z} = -\frac{M_a l}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_a = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^3}. \quad (107)$$

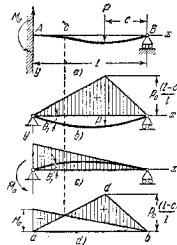


Рис. 157.

Эпюра изгибающих моментов теперь может быть получена сложением эпюр для случаев (b) и (c), как показано заштрихованной площадью на рис. 157, *d*. Наибольший изгибающий момент будет либо в a , либо в d .

Прогиб в какой-либо точке легко можно получить вычитанием прогиба, вызываемого парой M_a (рис. 157, *c*), из прогиба в этой точке, вызываемого сосредоточенным грузом P (рис. 157, *b*). Уравнения изогнутых осей для обоих этих случаев уже были даны в (86) и (87) стр. 129 и в (105), стр. 141. Возьмем, например, случай $c < \frac{1}{2} l$

¹⁾ Изогнутая ось балки и эпюра изгибающих моментов показаны вместе.

и вычислим прогиб f в середине пролета. Из уравнений (91) и (105) имеем

$$f = \frac{Pc}{48EJ_z}(3l^3 - 4c^3) + \frac{M_a l^3}{16EJ_z},$$

или, при помощи уравнения (107),

$$f = \frac{Pc}{96EJ_z}(3l^3 - 5c^3).$$

В точке c , где изгибающий момент получается равным нулю, кривизна изогнутой оси балки также равна нулю, и мы имеем точку перегиба, т. е. точку, где кривизна изменяет знак.

Из уравнения (107) можно видеть, что изгибающий момент в заделанном конце зависит от положения груза P . Если мы приравняем нулю производную от уравнения (107) по c , мы найдем, что момент M_a имеет численно наибольшее значение при $c = l/\sqrt{3}$. Тогда

$$|M_a|_{\max} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0,192 Pl. \quad (108)$$

Изгибающий момент под грузом, из рис. 157, *d*, равняется

$$M_a = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{c}{l} \frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2} = \frac{Pc}{2l^2}(l-c)^2(2l+c). \quad (b)$$

Если мы возьмем производную от (b) по c и приравняем ее нулю, то мы найдем, что M_a получается наибольшим при

$$c = \frac{l}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0,366 l.$$

Подставляя это в уравнение (b), мы получаем

$$(M_c)_{\max} = 0,174 Pl.$$

Сравнивая это с уравнением (108), мы находим, что в случае подвижной нагрузки наибольшие нормальные напряжения σ_x будут в заделанном сечении и при условии, что

$$c = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Имея решение для одного сосредоточенного груза и пользуясь методом сложения действия сил, можно решить задачу для других типов поперечной нагрузки при помощи изложенной выше теории. Возьмем, например, случай, изображенный на рис. 158. Момент на опоре A , возникающий от элементарной нагрузки $q dc$, получится из уравнения (107) подстановкой $q dc$ вместо P .

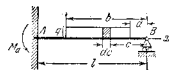


Рис. 158.

Полный момент M_a на опоре будет

$$M_a = - \int_a^b \frac{q dx (l^2 - x^2)}{2l^2} = - \frac{q}{2l^2} \left[\frac{l^2 (b^2 - a^2)}{2} - \frac{b^4 - a^4}{4} \right]. \quad (c)$$

Если нагрузка распределена по всей длине балки (рис. 159, а), то, подставляя в уравнение (с) $a = 0$, $b = l$, получаем

$$M_a = - \frac{ql^2}{8}. \quad (109)$$

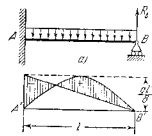


Рис. 159.

Опора изгибающих моментов получится вычитанием треугольной эпюры от пары M_a (рис. 159) из параболической эпюры от равномерной нагрузки. Можно видеть, что наибольшие нормальные напряжения от изгиба будут в заданном сечении. Прогиб в какой-либо точке балки получится вычитанием прогиба в этой точке от пары M_a (уравнение (105))

из прогиба в той же точке от равномерной нагрузки (уравнение (81)). Тогда для середины пролета мы получим

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} - \frac{M_a l^2}{16 EJ_z} = \frac{ql^4}{192 EJ_z}. \quad (110)$$

ЗАДАЧИ

1. Построить эпюры поперечных сил для случаев, показанных на рис. 157 и 159.

2. Определить, наибольший прогиб для случая равномерно распределенной нагрузки, показанной на рис. 159.

Решение. Складывая уравнения (81) и (105), получаем следующие уравнения для изогнутой оси:

$$y = \frac{q}{48 EJ_z} (3l^2 x^2 - 5lx^3 + 2x^4). \quad (d)$$

Полагая производную dy/dx равной нулю, мы находим точку наибольшего прогиба при $x = (l/16) (15 - \sqrt{33}) = 0,579l$. Подставляя в (d), получаем

$$f_{\max} = \frac{ql^4}{185 EJ_z}.$$

3. Определить реакцию правой опоры балки, показанной на рис. 159, считая реакцию за лишнюю неизвестную.

Решение. Отбрасывая опору В, находим, что прогиб этого конца балки, рассматриваемой как консоль, из уравнения (84) будет $ql^4/8EJ_z$. Реакция В должна быть такова, чтобы уничтожить указанный прогиб. Тогда, пользуясь уравнением (95), получаем уравнение

$$\frac{ql^4}{8EJ_z} - \frac{Rl^2}{3EJ_z} = 0$$

из которого

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

4. Балка нагружена, как показано на рис. 160. Определить момент M_a и реакции А и В опор.

Ответ.

$$-M_a = \frac{ql^2}{8} + \frac{7}{12} ql^2,$$

$$A = \frac{5}{8} ql \div \frac{9}{40} ql, \quad B = \frac{3}{8} ql \div \frac{11}{40} ql.$$

5. Определить реакцию В опоры равномерно нагруженной балки, показанной на рис. 159, если опора В упруга, так что направленная вниз сила величиной k подвигает опору на единицу длины.

Решение. Пользуясь тем же методом, что и в задаче 3, найдем уравнение для определения В:

$$\frac{ql^4}{8EJ_z} - \frac{Bl^2}{3EJ_z} = \frac{B}{k},$$

из которого

$$B = \frac{3}{8} ql \frac{1}{1 + \frac{kl^3}{3EJ_z}}.$$



Рис. 160.

6. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для равномерно нагруженной балки, опертой в середине и на концах.

Указание. Из условий симметрии среднее поперечное сечение не поворачивается при изгибе и каждая половина балки будет находиться в условиях балки, заделанной одним концом и свободно опертой другим.

7. Определить прогиб конца С балки, показанной на рис. 161.

Решение. Заменяя действительное свешивающееся конца парой Pa , получим изгиб балки между опорами сложением случаев б) и в) на рис. 161. Пользуясь формулами (103) и (104), мы найдем статически неопределимую пару M_a из уравнения $\psi_1 = -\psi_2'$ или

$$\frac{Pa l}{6EJ_z} = \frac{M_a l}{3EJ_z},$$

откуда $M_a = Pa/2$. Прогиб в С будет

$$f = \frac{Pa^4}{3EJ_z} + a(\psi_1 - \psi_2') = \frac{Pa^4}{3EJ_z} + \frac{Pa^4}{4EJ_z}.$$

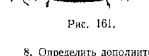
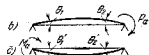
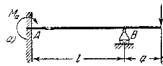


Рис. 161.

Первый член правой части представляет собой прогиб консоли, а второй — прогиб вследствие поворота поперечного сечения балки в В.

8. Определить дополнительное давление балки при условии, что температура изменяется от t_0 внизу до t вверху балки по линейному закону ($t > t_0$).

Решение. Если опора В отброшена, то неравномерное нагревание вызовет изгиб оси балки по дуге круга. Радиус этого круга может быть определен из уравнения $1/r = \alpha(t - t_0)/h$, в котором h есть высота балки и α — коэффициент линейного расширения. Соответствующий прогиб в В может быть найден, как в задаче

2 на стр. 90, и равен

$$f = \frac{P}{2r} = \frac{P\alpha(t-t_0)}{2h}.$$

Этот прогиб должен быть увячен реакцией опоры B . Пусть B означает эту реакцию; тогда мы получим

$$\frac{Bf^3}{3EJ_z} = \frac{P\alpha(t-t_0)}{2h},$$

откуда

$$B = \frac{3EJ_z}{2hl} \alpha(t-t_0).$$

9. Консоль AB (рис. 162), нагруженная на конце B , опирается на короткую консоль CD такого же поперечного сечения, как и консоль AB . Определите давление X между двумя балками в точке C .

Решение. Давление X будет найдено из условия, что в точке C обе консоли имеют один и тот же прогиб. Пользуясь уравнением (96) для нижней консоли и уравнением (97) вместе с уравнением (95) для верхней, мы получаем



$$\frac{Xl_1^3}{3EJ_z} = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{l_1^3}{2} - \frac{l_1^3}{6} \right) - \frac{Xl_1^3}{3EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{3P}{4} \left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3} \right).$$

Рис. 162

Из рассмотрения эпюры изгибающих моментов для верхней и нижней консоли можно заключить, что в точке C верхняя консоль имеет больший угол наклона, чем нижняя. Это указывает на то, что соприкосновение между двумя консолями будет только в точках C и D .

10. Решить задачу 7, полагая, что вместо сосредоточенного груза равномерная нагрузка интенсивностью q распределяется: 1) по длине a с обеих концов и 2) по всей длине балки. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для этих двух случаев.

11. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для случая, показанного на рис. 168, если $a = 1,2$ м, $b = 3,6$ м, $l = 4,5$ м и $q = 500$ кг/м.

42. Балка с двумя заделанными концами

В этом случае (рис. 163) мы имеем шесть реактивных элементов (три на каждом конце), т. е. задача имеет три статически неопределимых элемента. Однако для обыкновенных балок горизонтальными составляющими реакций можно пренебречь (см. стр. 155), что уменьшает число статически неопределимых величин до двух. Примем моменты M_a и M_b на опорах за статически неопределимые величины. Тогда для случая одной сосредоточенной силы P (рис. 163, а) решение можно получить сложением двух статически определенных задач, показанных на рис. 163, б и 163, в. Очевидно, что условия в заделанных концах балки AB будут удовлетворены, если пары M_a и M_b подобраны таким образом, чтобы сделать

$$\theta_a = -\theta'_a, \quad \theta_b = -\theta'_b. \quad (а)$$

Из этих двух уравнений получаются статически неопределимые пары. Пользуясь уравнениями (88) и (89) для сосредоточенной силы и уравнениями (103) и (104) для пар, получаем из уравнения (а)

$$-\frac{Pc(l-c)}{6EJ_z} = \frac{M_a l}{3EJ_z} + \frac{M_b l}{6EJ_z},$$

$$-\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6IJ_z} = \frac{M_a l}{6EJ_z} + \frac{M_b l}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_a = -\frac{Pc(l-c)}{l}, \quad M_b = -\frac{Pc(l-c)}{l}. \quad (111)$$

Оба опорных момента отрицательны и вызывают изгиб выпуклостью вверх. Складываем эпюры изгибающих моментов для случаев б) и в), получаем эпюру, показанную на рис. 163, д. Мы видим, что наибольший положительный изгибающий момент для случая, показанного на рис. 163, а, находится под силой в точке C . Его величина может быть найдена из рис. 163, д и выражена следующей формулой:

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} + \frac{M_a c}{l} + \frac{M_b(l-c)}{l} = \frac{2Pc^2(l-c)^2}{l^3}. \quad (112)$$

Из рис. 163, д можно видеть, что численно наибольший изгибающий момент будет или в точке C , или на ближайшей опоре. Для подвижной нагрузки, т. е. когда c изменяется, при $c < l/2$ наибольшее численное значение M_b получается подстановкой $c = l/3$ в уравнение (111). Этот максимум равен $4Pl/27$. Изгибающий момент под грузом будет наибольшим, когда $c = l/2$, и этот максимум из уравнения (112) равен $P/8$. Следовательно, для подвижной нагрузки наибольший момент будет на конце.

Пользуясь методом сложения действия сил, прогиб в какой-либо точке балки можно получить сложением прогиба от силы P с прогибами от пар M_a и M_b .

Имея решение для одного сосредоточенного груза P , какой-либо иной тип поперечной нагрузки легко можем исследовать при помощи метода сложения действия сил.

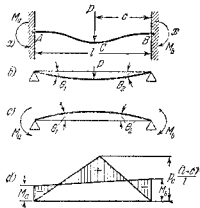


Рис. 163.

ЗАДАЧИ

1. Построить эпюру поперечных сил для случая, показанного на рис. 163, а, если $P = 400$ кг, $l = 3,6$ м и $c = 1,2$ м.

2. Найти моменты на концах балки, нагруженной в точках, отстоящих на $1/3$ длины балки от опор (рис. 164). Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

$$\text{Ответ. } M_a = M_b = -\frac{2}{9} Pl.$$

3. Решить предыдущую задачу, когда сила в точке D имеет противоположное направление.

$$\text{Ответ. } M_a = -M_b = -\frac{2}{27} Pl.$$

4. Построить эпюру изгибающих моментов для равномерно нагруженной балки с заделанными концами (рис. 165).

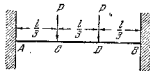


Рис. 164.

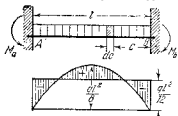


Рис. 165.

Решение. Момент в A , вызываемый элементарным грузом qdc (рис. 165, а), по уравнению (111), равняется

$$dM_a = -\frac{qc^2(l-c)dc}{l^3}.$$

Тогда момент, вызываемый нагрузкой, лежащей по всему пролету, равняется

$$M_a = -\int_0^l \frac{qc^2(l-c)dc}{l^3} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Момент на опоре B будет иметь ту же величину. Складывая параболическую эпюру изгибающих моментов, вызываемой равномерной нагрузкой, с прямоугольной эпюрой моментов от двух равных шар, приложенных на концах, мы получим эпюру, показанную на рис. 165, б заштрихованной площадью.

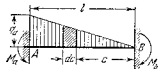


Рис. 166.

5. Определить моменты на опорах балки с заделанными концами в нагруженной треугольной нагрузкой, показанной на рис. 166.

Решение. Интенсивность нагрузки в расстоянии c от опоры B равняется $q_0 c / l$, а нагрузка, изображенная заштрихованной элементарной нагрузкой, на основании уравнения (111) будет

$$dM_a = -\frac{q_0 c^2(l-c)dc}{l^3}, \quad dM_b = -\frac{q_0 c^2(l-c)^2 dc}{l^3}.$$

Поэтому

$$M_a = -\int_0^l \frac{q_0 c^2(l-c)dc}{l^3} = -\frac{q_0 c^2}{20}, \quad M_b = -\int_0^l \frac{q_0 c^2(l-c)^2 dc}{l^3} = -\frac{q_0 c^2}{30}.$$

6. Определить реактивные моменты M_a и M_b в балке с заделанными концами, изгибаемой парой Pc (рис. 167).

Решение. Пользуясь решением задачи 4, стр. 142 в уравнениях (103) и (104), получаем следующие уравнения:

$$2M_a + M_b = -\frac{3Pc}{l^2} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right],$$

$$2M_b + M_a = -\frac{3Pc}{l^2} \left[\frac{2}{3} a^3 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right],$$

из которых можно легко вычислить M_a и M_b .

7. Определить моменты на опорах балки с заделанными концами от неравномерного нагревания, если температура изменяется от t_0 внизу до t сверху балки по линейному закону.

$$\text{Ответ. } M_a = M_b = \frac{\alpha EJ_z(t-t_0)}{h},$$

где α — коэффициент линейного расширения и h — высота балки.

8. Определить влияние на реактивную силу и реактивный момент в A , вызываемое малым вертикальным перемещением b заделанного конца A балки AB (рис. 163).

Решение. Отбросим опору A ; тогда прогиб f_1 в A и угол наклона θ_1 в этой точке найдутся как для консоли, заделанной в B и нагруженной силой P , т. е.

$$f_1 = \frac{Pc^3}{3EJ_z} + \frac{Pc^2}{2EJ_z}(l-c), \quad \theta_1 = \frac{Pc^2}{2EJ_z}.$$

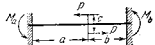


Рис. 167.

Прикладывая в A реактивную силу X вверх и реактивный пару Y в том же направлении, как M_a , такой величины, чтобы уничтожить угол наклона θ_1 и сделать прогиб равным δ , получим для определения неизвестных величин X и Y следующие уравнения:

$$\frac{XP}{2EJ_z} - \frac{Yl}{EJ_z} = \frac{Pc^2}{2EJ_z}, \quad \frac{Xl^3}{3EJ_z} - \frac{Yl^2}{2EJ_z} = f_1 - \delta.$$

9. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 166, если $q_0 = 500$ кг/м, $l = 4,5$ м.

10. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки с заделанными концами, если левая половина балки равномерно нагружена нагрузкой $q = 500$ кг/м. Длина балки $l = 5$ м.

43. Рамы

Метод, примененный в предыдущем параграфе для статически неопределимых балок, можно приложить также к изучению рам. Возьмем в качестве простого примера симметричную раму (рис. 168), с шарнирами в C и D , и нагруженную симметрично. Вид рамы после деформации показан пунктиром. Пренебрегая изменением длины стержней и влиянием осевых сил на изгиб стержней¹⁾, можем рассматривать раму составленной из трех балок, как показано на рис. 168, б. Очевидно, что на концах горизонтальной балки AB

¹⁾ Одновременное действие изгиба и сжатия будет рассмотрено ниже (см. часть II).

будут действовать пары M , которые препятствуют свободному повороту этих концов и представляют действие вертикальных стержней на горизонтальную балку. Эта пара M может быть принята за статически неопределимую величину. Зная M , можем изгиб трех стержней исследовать без всякого затруднения. Для определения M мы имеем условие, что в A и B стержни между собой соединены жестко, так что поворот верхнего конца вертикального стержня AC должен быть равен повороту левого конца горизонтального стержня. Отсюда уравнение для определения M будет

$$\theta_1 = \theta'_1. \quad (а)$$

θ_1 должно быть определено из изгиба горизонтальной балки AB . Если обозначим через l длину этой балки и через EJ — ее жест-

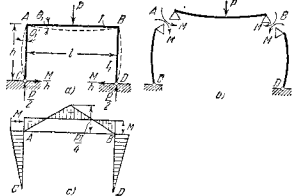


Рис. 168.

кость при изгибе, то угол поворота конца A от силы P , на основании уравнения (88) при $b=l/2$, равняется $P l^2 / 16 E J$. Пары на концах сопротивляются этому изгибу и вызывают угол поворота в противоположном направлении, который из уравнений (103) и (104) равняется $M l / 2 E J$. Окончательное значение угла поворота будет

$$\theta_1 = \frac{P l^2}{16 E J} - \frac{M l}{2 E J}.$$

Рассматривая теперь вертикальный стержень AC как балку с опертими концами, изгибаемую парой сил M , и обозначая через h его длину и через EJ_1 его жесткость при изгибе, найдем из уравнения (104) угол вверху

$$\theta'_1 = \frac{M h}{3 E J_1}.$$

Вставляя в уравнение (а), получаем

$$\frac{P l^2}{16 E J} - \frac{M l}{2 E J} = \frac{M h}{3 E J_1}.$$

откуда

$$M = \frac{P l}{8} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}. \quad (113)$$

Это есть абсолютное значение M . Его направление показано на рис. 168, *b*. Зная M , можем построить эпюры изгибающих моментов, как показано на рис. 168, *c*. Также показаны реакции в шарнирах C и D (рис. 168, *a*). Вертикальные составляющие этих реакций из условий симметрии равны между собой и каждая из них равна $P/2$. Что же касается горизонтальных составляющих, то их величина M/h получается, если рассматривать вертикальные стержни, как свободно опертые балки и нагруженные сверху парами M .

Эта задача может быть решена и другим путем, если вместо M за статически неопределимую величину принять горизонтальную реакцию H в шарнирах C и D . Статически неопределимая задача решается путем сложения двух статически определимых задач, показанных на рис. 169, *b* и 169, *c*. В случае *b*) отброшено лишнее закрепление, препятствующее горизонтальному перемещению шарниров C и D . Вертикальные стержни уже не имеют изгиба. Горизонтальный стержень AB находится в условиях бруса со свободно опертыми концами, углы поворота которых равны $P l^2 / 16 E J$, и поэтому горизонтальное перемещение каждого шарнира C и D равняется $h(P l^2 / 16 E J)$. В случае *c*) рассматривается действие сил H . Эти силы вызывают изгибающие пары на концах горизонтального стержня AB , равные Hh , так что углы поворота его концов θ' будут $Hh / 2 E J_1$. Перемещение каждого шарнира C и D состоит из двух частей: 1) перемещения $\theta' h = H h^2 / 2 E J_1$, вследствие поворота верхнего конца и 2) перемещения $H h^2 / 3 E J_1$ вертикальных стержней, как консолей. В действительности же (рис. 169, *a*) шарниры C и D не перемещаются. Следовательно, горизонтальные перемещения, вызываемые силой P

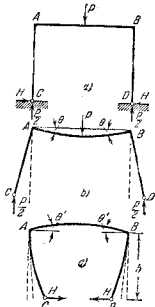


Рис. 169.

(рис. 169, б), должны быть уничтожены силами H (рис. 169, с), т. е.

$$\frac{P^2}{16EJ} h = \frac{Hh^2}{2EJ} - \frac{Hh^2}{3EJ_1},$$

откуда

$$H = \frac{1}{h} \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}.$$

Замечая, что $Hh = M$, видим, что этот результат согласуется с найденным выше уравнением (113).

Этот последний метод анализа особенно пригоден для несимметричной нагрузки, как например, указанной на рис. 170. Отбрасывая закрепление, препятствующее горизонтальному перемещению шарниров C и D , мы имеем положение, изображенное на рис. 170, б. Очевидно, что увеличение расстояния между C и D можно получить умножением суммы углов ψ_1 и ψ_2 на h . Пользуясь уравнениями (88) и (89), находим это увеличение расстояния

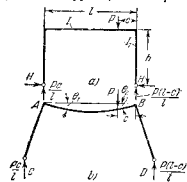


Рис. 170.

Оно должно быть уничтожено горизонтальными реакциями H (рис. 169, с). Тогда, пользуясь результатами, полученными в предыдущей задаче, мы получаем следующее уравнение для определения H :

$$2 \left(\frac{Hh^2}{2EJ} + \frac{Hh^2}{3EJ_1} \right) = \frac{Pc(l-c)h}{2EJ},$$

$$H = \frac{Pc(l-c)}{2hl} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}. \quad (114)$$

Имея решение для одной сосредоточенной силы, можем легко исследовать при помощи метода сложения действия сил какой-либо иной случай нагрузки балки AB рамы.

Рассмотрим теперь раму с заданными опорами и несимметрично нагруженную, как показано на рис. 171. В этом случае мы имеем три реактивных элемента на каждой опоре, и система имеет три статически неопределимых элемента. При решении этой задачи мы будем пользоваться методом, основанным на методе сложения действия сил, в котором данная система нагрузки разделяется на части,

так что для каждой отдельной нагрузки можно найти простое решение ¹⁾. Задача, показанная на рис. 171, а, может быть решена сложением решений двух задач, показанных на рис. 171, б и в. Случай, показанный в б), является симметричным и может быть рассмотрен таким же образом, как первый пример, показанный на рис. 168. Исследование в с), показывает, что точка перегиба O горизонтального стержня AB находится в середине стержня. Это следует из того условия, что силы $P/2$ равно отстоят от вертикальной оси симметрии рамы и противоположны по направлению. Момент, прогиб и осевое усилие, вызываемые в средней точке O горизонтальной балки AB одной из сил $P/2$, будут уничтожены действием другой силы $P/2$. Следовательно, в точке O не будет ни изгибающего момента, ни вертикального прогиба, ни осевой силы. Величина поперечной силы X в той же точке может быть найдена из того условия, что вертикальный прогиб в O равен нулю (рис. 171, д). Этот прогиб состоит из двух частей: прогиба f_1 от изгиба консоли OB и прогиба f_2 вследствие поворота конца B вертикального стержня BD . Пользуясь известными уравнениями для консоли (уравнение (98)) и обозначениями, данными на рисунке, получим следующие уравнения:

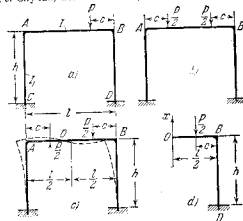


Рис. 171.

$$f_1 = \frac{P}{2} \frac{c^3}{3EJ} + \frac{P}{2} \frac{c^2}{2EJ} \left(\frac{l}{2} - c \right) - \frac{X \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3EJ},$$

$$f_2 = \left(\frac{Pc}{2} - X \frac{l}{2} \right) \frac{h}{EJ_1} \frac{l}{2}.$$

Подставляя это в уравнение $f_1 + f_2 = 0$, найдем величину X поперечной силы. Определив X , можем высчитать изгибающий момент для случая с) в любом поперечном сечении рамы. Складывая его с изгибающими моментами для симметричного случая б), получим решение задачи ²⁾.

ЗАДАЧИ

1. Найти осевые усилия во всех стержнях рамы, показанной на рис. 168, а. Ответ. Сжимающие усилия в вертикальных стержнях $= P/2$; сжимающее усилие в горизонтальном стержне $= M/h$.
2. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 170, а.

¹⁾ Такой метод был широко применен W. L. André см. его книгу «Das B-U Verfahren», Berlin, 1919.

²⁾ Решения многих важных задач на рамы можно найти в книге: Kleinlogel, Mehrstielige Rahmen, Berlin, 1927.

3. Определить изгибающие моменты в узлах рамы, показанной на рис. 172. *Решение.* Рассматривая стержень AB как балку, опертую на концах (рис. 172, б), и обозначая через M моменты в узлах, получим угол поворота θ_1

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{MI}{2EJ}$$

Полагая это равным углу θ_1 в концах вертикальных стержней, которые изгибаются только парами M , получим следующее уравнение для определения M :

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{MI}{2EJ} = \frac{Mh}{2EJ_1}$$

откуда

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{hJ}{lJ_1}}$$

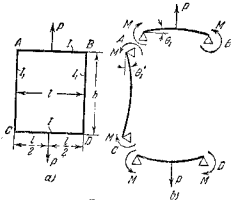


Рис. 172.

4. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы предыдущей задачи.

5. Определить горизонтальные реакции H для случая, показанного на рис. 173.

Указание. Пользуясь уравнением (114) и применяя метод сложения действия сил, получаем

$$H = \frac{qP}{24h} \frac{1}{1 + \frac{3}{8} \frac{hJ}{lJ_1}}$$

6. Построить эпюру изгибающих моментов для трех стержней предыдущей задачи, полагая $h=1$ и $J=J_1$.

7. Определить изгибающие моменты в узлах рамы, показанной на рис. 174.

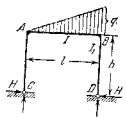


Рис. 173.

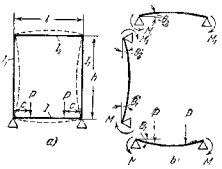


Рис. 174.

Решение. Разъединяя раму, как показано на рис. 174, б, получим уравнения для определения пар M и M_1

$$\theta_1 = \theta_1' \quad \text{и} \quad \theta_2 = \theta_2'$$

Оставляя в эти уравнения значения

$$\theta_1 = \frac{Pl(l-c)}{2EJ} - \frac{MI}{2EJ}, \quad \theta_1' = \frac{Mh}{3EJ_1} - \frac{M_1h}{6EJ_1},$$

$$\theta_2 = \frac{M_1l}{2EJ_2}, \quad \theta_2' = \frac{Mh}{6EJ_1} - \frac{M_1h}{3EJ_1},$$

получим два уравнения для определения M и M_1 .

8. Построить эпюру изгибающих моментов и определить осевые усилия во всех стержнях рамы, показанной на рис. 174, а, если $h=1$ и $J=J_1=J_2$.

9. Симметричная прямоугольная рама подвергается действию горизонтальной силы H , как показано на рис. 175. Определить изгибающие моменты M и M_1 в узлах.

Решение. Вид деформированной рамы показан на рис. 175, а. Разъединяя раму, как показано на рис. 175, б, и прилагая моменты по направлениям, которые согласуются с искаженным видом рамы, мы имеем для стержня CD

$$\theta_1 = \frac{M_1l}{6EJ} = \left(\frac{Hh}{2} - M \right) \frac{l}{6EJ} \quad (b)$$

Рассматривая теперь вертикальный стержень AC , как консоль, заделанную в конце C с углом θ_1 , найдем угол наклона в конце A

$$\theta_1' = \theta_1 + \frac{H}{2} \frac{h^2}{2EJ_1} - \frac{Mh}{EJ_1} \quad (c)$$

Наконец, вследствие изгиба стержня AB

$$\theta_2 = \theta_2' = \frac{MI}{6EJ_2} \quad (d)$$

Тогда на уравнений (b), (c) и (d) получаем

$$M = \frac{Hh}{2} \left(1 + \frac{3hJ}{lJ_1} \right) \frac{1}{1 + \frac{J}{J_2} + 6 \frac{hJ}{lJ_1}} \quad (e)$$

Вставляя в уравнение (b), можем найти изгибающий момент M_1 . Когда горизонтальный стержень имеет очень большую жесткость, мы приближаемся к условиям рамы, показанной на рис. 171, а и подверженной действию поперечной нагрузки H . Вставляя в (e) $J = \infty$, получаем для этого случая

$$M = \frac{Hh}{4} \frac{1}{1 + \frac{lJ_1}{6hJ_2}} \quad (f)$$

Случай рамы, показанной на рис. 168 с шарнирными опорами и подверженной действию поперечной нагрузки, приложенной в A , можно получить подстановкой $J=0$ в уравнение (e).

10. Определить горизонтальные реакции H и изгибающие моменты M_a и M_b в узлах A и B рамы, показанной на рис. 176.

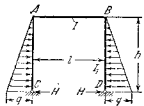


Рис. 176.

Ответ.

$$H = \frac{qh}{20} \frac{11m+20}{2m+3}, \quad M_a = M_b = -\frac{qh^2}{60} \frac{7m}{2m+3}, \quad \text{где } m = \frac{hJ}{lJ_1}.$$

11. Рама состоит из двух стержней, соединенных жестко в B и заделанных в A и C (рис. 177). Определить изгибающий момент M в B и сжимающее усилие

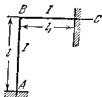


Рис. 177.

в AB , если, вследствие повышения температуры, стержень AB увеличивается в длину на $\Delta = \alpha l(t - t_0)$.

Ответ. P и M могут быть найдены из уравнений:

$$\frac{Pl_1^3}{3EJ} - \frac{MP_1^2}{2EJ} = \Delta, \quad \frac{Pl_1^2}{2EJ} - \frac{Ml_1}{EJ} = \frac{Ml}{4EJ}.$$

44. Балки на трех опорах

В случае балки на трех опорах (рис. 178, а) имеется один статически неопределимый элемент. Пусть будет этим элементом реакция промежуточной опоры. Тогда при помощи метода сложения действия сил решение случая а) можно получить путем сложения

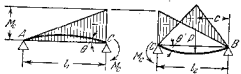
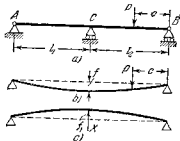


Рис. 178.

случаев, представленных в $b)$ и $c)$ рис. 178. Промежуточная реакция X найдется из того условия, что прогиб f , вызванный в C силой P , должен быть уничтожен реакцией X . Пользуясь уравнением (86),

получаем следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Pc l_1 (l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^3}{6(l_1 + l_2) EJ_z} = \frac{X l_1^3}{3(l_1 + l_2) EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{Pc (l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^3}{2l_1^3}. \quad (115)$$

Если P действует на левом пролете балки, то можно воспользоваться тем же уравнением, но расстояние c должно быть измерено от опоры A и l_1 и l_2 должны переименоваться местами. Для $l_1 = l_2 = l$ из уравнения (115) следует

$$X = \frac{Pc(3l^2 - c^2)}{2l^3}. \quad (116)$$

Имея решение для одной силы P , какую-либо иную нагрузку легко можно исследовать при помощи метода сложения действия сил.

Та же задача может быть решена и другим способом. Вообразим балку разрезанной на две части в C (рис. 178, d) и пусть M_c обозначает величину изгибающего момента первоначальной балки в этом поперечном сечении. Таким образом, задача сводится к рассмотрению двух свободно опертых балок, показанных в d), которые являются статически определенными. Величина M_c определится из условий непрерывности изогнутой оси на опоре C . Из этого следует, что угол $^1) \theta = \theta'$, или, пользуясь уравнениями (88) и (104) и предполагая, что изгибающий момент M_c положительный, получаем

$$-\frac{M_c l_1}{3EJ_z} = \frac{Pc (l_1^2 - c^2)}{6l_1 EJ_z} + \frac{M_c l_2}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_c = -\frac{Pc (l_1^2 - c^2)}{2l_2 (l_1 + l_2)}. \quad (117)$$

Следовательно, M_c — отрицателен и направлен, как указано на рис. 178, d . Эпюра изгибающих моментов показана заштрихованной площадью на рис. 178, d .

ЗАДАЧИ

1. Для примера, представленного на рис. 178, доказать, что величина изгибающего момента M_c , определяемая уравнением (117), та же самая, что получается для поперечного сечения C при помощи уравнения (115).

2. Построить эпюры поперечных сил для балки предыдущей задачи, если $l_1 = l_2$, $c = l_1/2$ и $P = 400$ кг.

3. Балка на трех опорах (рис. 178, а), несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Определить изгибающий момент на опоре C .

Решение. Пользуясь методом сложения действия сил, подставляя qdc вместо P в уравнение (117) и интегрируя по обоим пролетам, получаем

$$M_c = -\int_0^{l_1} \frac{qc (l_1^2 - c^2) dc}{2l_2 (l_1 + l_2)} - \int_0^{l_2} \frac{qc (l_1^2 - c^2) dc}{2l_1 (l_1 + l_2)} = -\frac{q}{8} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 + l_2}$$

¹⁾ Угол считаем положительным, если вращение происходит по направлению движения часовой стрелки.

при $i_1=i_2=1$, $M_c = -\frac{q l^2}{8}$. Направление этого момента такое, как указано на рис. 178, *а*.

4. Построить эпюру поперечных сил для предыдущей задачи, полагая $i_1=i_2$ и $q=700$ кг/м.

5. Определить численно наибольший изгибающий момент в балке *ACB* (рис. 178, *а*), если $P=4$ т, $i_1=3$ м, $i_2=4$ м, $c=2$ м.
 Ответ. $M_{\max}=3140$ кгм.

6. Балка на трех равностоящих друг от друга опорах несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Какое будет иметь влияние на среднюю реакцию понижение средней опоры на величину δ ?

Решение. Пользуясь указанным на рис. 178, *б* и 178, *с* методом, найдем среднюю реакцию X из уравнения

$$\frac{5}{84} \frac{q (2l)^3}{EJ} = \frac{X (2l)^3}{48 EJ} + \delta,$$

откуда

$$X = \frac{5}{8} 2ql - \frac{6 \delta EJ}{l}.$$

7. Определить дополнительное давление балки *AB* на опору *C* (рис. 178, *а*) вследствие неравномерного нагрева балки, если температура изменяется от t внизу до t_1 сверху балки по линейному закону, полагая $t > t_1$ и $i_1=i_2=1$.

Решение. Если отбросить опору *C*, то вследствие неравномерного нагрева изогнутая ось балки будет дугой круга. Радиус этого круга определяется из уравнения

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha (t - t_1)}{h},$$

в котором h — высота балки и α — коэффициент линейного расширения. Соответствующий прогиб в середине $f = l^2/2r$ и реакция X в *C* может быть найдена из уравнения

$$\frac{X (2l)^3}{48 EJ} = f.$$

8. Определяя эпюру изгибающих моментов для балки *ABC*, опертой на три понтона (рис. 179), если горизонтальная площадь поперечного сечения каждого понтон равняется F и вес единицы объема воды равняется γ .

Решение. Отбрасывая опору *C*, находим, что прогиб, вызываемый в этой точке грузом P , состоит из двух частей: 1) прогиба от изгиба балки и 2) прогиба вследствие опускания понтон *A* и *B*. Из уравнения (31) получаем

$$f = \frac{Pc}{48EJ_z} [3(2l)^3 - 4c^3] + \frac{P}{2F\gamma}. \quad (a)$$

Реакция X средней опоры уменьшает этот прогиб на величину

$$\frac{X (2l)^3}{48EJ_z} + \frac{X}{2F\gamma}. \quad (b)$$

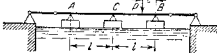


Рис. 179.

Разность между (a) и (b) представляет величину погружения среднего понтон, равную $X/F\gamma$, откуда получаем следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Pc}{48EJ_z} [3(2l)^3 - 4c^3] + \frac{P}{2F\gamma} - \frac{X (2l)^3}{48EJ_z} - \frac{X}{2F\gamma} = \frac{X}{F\gamma}.$$

Зная X , легко можем получить эпюру изгибающих моментов.

45. Неперезрезанные балки

В случае неперезрезной балки на многих опорах (рис. 180) обычно одна опора считается неподвижным шарниром, в то время как другие — подвижными шарнирами. При таком устройстве каждая промежуточная опора имеет только один неизвестный реактивный элемент, а именно величину вертикальной реакции. Отсюда число статически неопределимых элементов равно числу промежуточных опор. Например, в случае, показанном на рис. 180, *а*, число статически неопределимых элементов равняется пяти. Здесь также могут

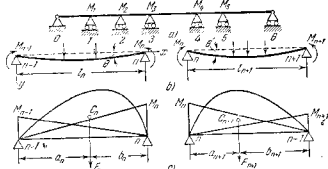


Рис. 180.

быть применены оба метода, указанные в предыдущем параграфе. Но если число опор велико, то второй метод, в котором за статически неопределимые элементы принимаются изгибающие моменты, гораздо проще. Пусть рис. 180, *б* представляет два смежных пролета l и $l+1$ неперезрезной балки, рассеченной на опорах $n-1$, n и $n+1$. Пусть M_{n-1} , M_n , M_{n+1} означают изгибающие моменты на этих опорах. Направления этих моментов зависят от нагрузки на балку. Мы примем за положительные — направления их, показанные на рисунке ¹⁾. Очевидно, что если изгибающие моменты на опорах известны, задача о неперезрезной балке сведется к расчету стальных балок, свободно лежащих на двух опорах, сколько имеется пролетов в неперезрезной балке. Для вычисления изгибающих моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} воспользуемся условием непрерывности изогнутой оси балки на опорах. Для какой-либо опоры n это условие непрерывности удовлетворится, если изогнутые оси двух смежных пролетов имеют общую касательную на опоре n , т. е. если угол наклона на правом конце пролета l равен углу наклона на левом конце пролета $l+1$. Чтобы вычислить эти углы наклона, воспользуемся гра-

¹⁾ Если окончательно получим для некоторых моментов отрицательные значения, то это укажет, что направления моментов противоположно направлению, показанному на рисунке.

фоаналитическим методом. Пусть F_n означает площадь эпюры изгибающих моментов для пролета n (рис. 180, *c*), рассматриваемого как свободно опертая балка, от действительной нагрузки на этом пролете. Пусть a_n и b_n представляют горизонтальные расстояния центра тяжести C_n площади эпюры моментов от опор $n-1$ и n . Тогда для этого условия нагрузки угол на правом конце будет (см. § 3б).

$$-\frac{F_n a_n}{l_n E J_z}$$

В дополнение к изгибу, вызываемому нагрузкой, расположенной на пролете, пролет n изгибается также парами M_{n-1} и M_n . Из уравнений (103) и (104) угол, вызываемый на опоре n этими парами, равняется

$$-\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z}\right).$$

Тогда полный угол поворота равняется¹⁾

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z} + \frac{F_n a_n}{l_n E J_z}\right). \quad (a)$$

Таким же образом для левого конца пролета $n+1$ получаем

$$\theta' = \frac{F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} E J_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{3EJ_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{6EJ_z}. \quad (b)$$

Из условия непрерывности следует, что

$$\theta = \theta'. \quad (c)$$

Вставляя выражения (a) и (b) в это уравнение, получаем

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6F_n a_n}{l_n} - \frac{6F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (118)$$

Это есть *уравнение трех моментов*²⁾. Очевидно, что число этих уравнений равно числу промежуточных опор, и следовательно, изгибающие моменты на опорах могут быть вычислены без затруднений.

Вначале предполагалось, что концы неразрезной балки оперты. Если один или оба конца заделаны, то число статически неопределимых величин будет больше числа промежуточных опор, и тогда необходимые дополнительные уравнения могут быть выведены из того условия, что заделанные концы балки не поворачиваются (см. задачу 5 ниже).

Зная моменты на опорах, можем вычислить без затруднения реакции опор неразрезной балки. Взяв, например, два смежных

пролета n и $n+1$ (рис. 180, *b*) и рассматривая их как две свободно опертые балки, можем легко вычислить реакцию A_n опоры n от нагрузки на этих двух пролетах. В добавление к этому будет возникать реакция от опорных моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} . Взяв направление этих моментов, как указано на рис. 180, *b*, найдем дополнительное давление на опору n :

$$\frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Складывая это с найденной выше реакцией A'_n , получим полную реакцию

$$A_n = A'_n + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (119)$$

Если на опорах приложены сосредоточенные силы, то они непосредственно передаются на соответствующие опоры и должны быть прибавлены к правой части уравнения (119).

Общее уравнение непрерывности (c) можно применить также в тех случаях, когда, вследствие неточности расположения опор или неравномерной осадки опор, расположены не на одной высоте (рис. 181). Пусть β_n и β_{n+1} означают углы наклона к горизонту прямых линий, соединяющих точки опор n -го и $(n+1)$ -го пролетов; углы поворота, определяемые уравнениями (a) и (b), измерены от линии, соединяющей центры шарниров. Следовательно, угол θ между касательной в n и горизонтальной линией будет для пролета n

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z} + \frac{F_n a_n}{l_n E J_z} - \beta_n\right).$$

Точно таким же образом для пролета $n+1$

$$\theta' = \frac{F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} E J_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{3EJ_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{6EJ_z} + \beta_{n+1}.$$

Приравняв эти углы, получаем

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6F_n a_n}{l_n} - \frac{6F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} - 6EJ_z (\beta_{n+1} - \beta_n). \quad (120)$$

Если h_{n-1} , h_n , h_{n+1} означают вертикальные расстояния опор $n-1$, n и $n+1$ относительно какой-либо горизонтальной линии, то

$$\beta_n = \frac{h_{n-1} - h_n}{l_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{h_n - h_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Подставляя в уравнение (120), можем вычислить изгибающие моменты на опорах, возникающие вследствие понижения опор.

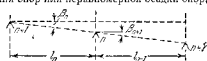


Рис. 181.

¹⁾ Угол принимается за положительный, если вращение происходит по часовой стрелке.

²⁾ Это уравнение было выведено B e r t o t, Compt. rend. soc. ing. civils, стр. 278, 1855; см. также C l a r e u g o n, Compt. rend., т. 45, 1857.

ЗАДАЧИ

1. Определить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки с тремя равными пролетами, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q (рис. 182).

Решение. Для свободно лежащей балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра изгибающих моментов представляет параболу с наибольшей ординатой $\frac{1}{8} q l^2$. Площадь параболического сегмента равняется

$$F_n = \frac{2}{3} l_n \frac{q l_n^2}{8} = \frac{q l_n^3}{12}.$$

Центр тяжести этой площади находится в середине пролета, так что $a_n = b_n = l_n/2$. Вставляя в уравнение (118), получаем

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{q l_n^3}{4} - \frac{q (l_{n+1})^3}{4}. \quad (118')$$

Применяя это уравнение в нашем случае (рис. 182) для первого и второго пролетов и замечая, что на опоре O изгибающий момент равняется нулю, получаем

$$4M_1 l + M_2 l = -\frac{q l^3}{2}. \quad (d)$$

Из условий симметрии очевидно, что $M_1 = M_2$. Тогда из (d) следует $M_1 = M_2 = -(q l^2/10)$. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 182, а заштрихованной площадью. Реакция опоры O равняется

$$A_0 = \frac{q l}{2} - \frac{q l}{10} = \frac{4}{10} q l.$$

Реакция опоры I равняется

$$A_1 = q l + \frac{q l^2}{10} = \frac{11}{10} q l.$$

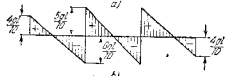


Рис. 182.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 182, б. Наибольший момент будет, очевидно, на расстоянии $4l/10$ от концов балки, где поперечная сила равняется нулю. Численно наибольший изгибающий момент будет на промежуточных опорах.

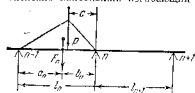


Рис. 183.

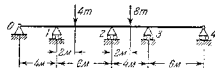


Рис. 184.

2. Определить выражение для правой части уравнения (118), когда имеется сосредоточенная нагрузка на пролете n и нет ее на пролете $n+1$ (рис. 183).

Решение. В этом случае F_n есть площадь треугольника с высотой $Pc(l_n - c)/l_n$ и с основанием l_n , следовательно

$$F_n = Pc(l_n - c)/2 \text{ и } a_n = l_n - b_n = l_n - (l_n + c)/3.$$

Вставляя в (118), получим

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{Pc(l_n - c)(2l_n - c)}{l_n}.$$

3. Определить изгибающие моменты на опорах и реакции для неразрезной балки, показанной на рис. 184.

Ответ. $M = -1,54 \text{ тм}$; $M_2 = -3,74 \text{ тм}$; $M_3 = -1,65 \text{ тм}$. Реакции: $A_0 = -0,386 \text{ т}$; $A_1 = 2,69 \text{ т}$; $A_2 = 6,22 \text{ т}$; $A_3 = 3,75 \text{ т}$; $A_4 = -0,275 \text{ т}$. Моменты на опорах отрицательны и вызывают изгиб выпуклостью вверх.

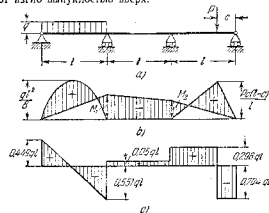


Рис. 185.

4. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки, показанной на рис. 185, а, если $P = ql$, $c = l/4$.

Ответ. $M_1 = -\frac{49}{90} q l^2$; $M_2 = -\frac{11}{240} q l^2$. Эпюры показаны на рис. 185, б и 185, с.

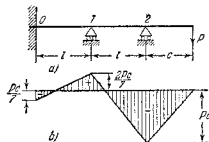


Рис. 186.

5. Определить эпюру изгибающих моментов для случая, показанного на рис. 186, а.

Решение. Уравнение (118) для этого случая получается

$$M_2 l + 4M_1 l + M_2 l = 0.$$

Очевидно, что $M_2 = -Pc$, между тем как условие в заданном конце (опоры

ры 0) даст (из уравнений (103) и (104))

$$\frac{M_0 l}{3EJ} + \frac{M_1 l}{6EJ} = 0.$$

Из приведенных выше уравнений получаем $M_0 = -\frac{1}{7} P\epsilon$; $M_1 = \frac{2}{7} P\epsilon$; $M_2 = -P\epsilon$.

Эпюры изгибающих моментов показана на рис. 186, б.

6. Определить изгибающие моменты на опорах неразрезной балки с семью равными пролетами, когда нагружен только средний пролет равномерно распределенной нагрузкой q .

Ответ. $M_1 = M_4 = -\frac{15}{284} q l^2$, $M_2 = M_3 = -\frac{4}{15} M_1$, $M_5 = M_6 = \frac{1}{15} M_2$.

7. Неразрезная балка, имеющая четыре равных пролета, каждый длиной 4,8 м, равномерно нагружена на последнем пролете. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, если $q = 500$ кг/м.

8. Решить задачу 5, полагая, что равномерная нагрузка интенсивностью q распределена по всей длине балки и что $\epsilon = l/2$. Построить эпюры поперечных сил для этого условия нагружения.

Ответ. $M_0 = -\frac{5}{56} q l^2$, $M_1 = -\frac{1}{14} q l^2$, $M_2 = -\frac{1}{8} q l^2$.

ГЛАВА VII

СИММЕТРИЧНЫЕ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ. БАЛКИ ИЗ ДВУХ МАТЕРИАЛОВ

46. Балки переменного поперечного сечения

В предыдущих параграфах рассматривались балки призматической формы. Более подробное исследование показывает, что уравнения (56) и (57), которые были выведены для призматических стержней, могут быть применены с достаточной точностью для стержней переменного поперечного сечения при условии, что изменение является не слишком резким. Случай резкого изменения поперечного сечения, в которых имеет место значительная концентрация напряжений, будут рассмотрены во II-й части.

В качестве первого примера балки переменного поперечного сечения рассмотрим изгиб консольной балки *равного сопротивления*, т. е. балки, в которой момент сопротивления изменяется по длине ее в том же отношении, как и изгибающий момент. Тогда, как видно из уравнений (60), $(\sigma_x)_{\max}$ остается постоянным по длине балки и оно может быть принято равным $[\sigma]$. Такое условие является выгодным в отношении употребляемого количества материала, так как каждое поперечное сечение будет иметь наименьшую площадь для того, чтобы удовлетворить условиям прочности.

Для консоли с нагрузкой на конце (рис. 187) изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении на расстоянии x от груза численно равен Px . Для того чтобы иметь балку *равного сопротивления*, момент сопротивления также должен быть пропорциональным x . Это условие может быть выполнено различными путями. Возьмем в качестве первого примера случай прямоугольного поперечного сечения постоянной ширины b и переменной высоты h (рис. 187). Из определения понятия балки *равного сопротивления* следует, что

$$\frac{M}{W} = \frac{Px}{bh^2} = \frac{Px}{bh_0^2} = \text{const},$$

где h_0 есть высота балки в заделанном конце. Тогда $h^2 = \frac{h_0^2 x}{l}$.

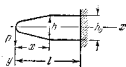


Рис. 187.

Можно видеть, что в этом случае высота балки изменяется, следуя параболическому закону. В нагруженном конце площадь поперечного сечения равна нулю. Этот результат получается потому, что при выводе формулы балки равного сопротивления касательным напряжениям пренебрегалось. В практических приложениях эти напряжения должны быть приняты в расчет таким образом, чтобы путем некоторого изменения формы в нагруженном конце иметь достаточную площадь поперечного сечения для того, чтобы воспринять поперечную силу. Прогиб балки на конце найдется из уравнения (93):

$$f = \int_0^l \frac{12Px^2 dx}{Eb h^3} = \frac{12Pl^3}{Eb h^3} \int_0^l \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EJ_0} \quad (121)$$

где $J_0 = \frac{bh_0^3}{12}$ представляет момент инерции поперечного сечения в заделанном конце. Сравнивая с уравнением (95), видим, что этот прогиб в два раза больше прогиба призматического стержня, имеющего жесткость при изгибе EJ_0 , и ту же нагрузку, т. е. стержень имеет такую же прочность, но не такую же жесткость, как призматический стержень.

В качестве второго примера мы рассмотрим консоль прямоугольного поперечного сечения постоянной высоты h и переменной ширины b (рис. 188, *a* и 188, *b*). Так как момент сопротивления и момент инерции J_x балки треугольной формы увеличиваются с возрастом x в том же отношении, как и изгибающий момент, то наибольшее напряжение (σ_x)_{max} и кривизна (см. уравнение (56)) остаются постоянными по длине балки, и величина радиуса кривизны может быть определена из уравнения (см. уравнение (55)):

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{hE}{2r} \quad (a)$$

Прогиб на конце дуги круга можно принять, в случае небольших прогибов, равным

$$f = \frac{l^2}{2r} = \frac{Pl^2}{2EJ_0} \quad (122)$$

или при помощи уравнения (a)

$$f = (\sigma_x)_{\max} \frac{l^2}{hE} \quad (123)$$

Из этого уравнения видно, что для этого типа консолей равного сопротивления прогиб на конце изменяется пропорционально квадрату длины и обратно пропорционально высоте. Этим результатом можно воспользоваться для приближенного расчета напряжений и прогибов в листовых ресорах. Рассмотренная выше треугольная

пластинка разрезается на полоски, которые затем накладываются друг на друга, как показано на рис. 188, *b, c, d*. Для первого приближения первоначальной кривизны и трением между полосками пренебрегают и тогда уравнение (123) можно считать достаточно точным¹⁾.

При вычислении прогиба балок переменного сечения можно воспользоваться с выгоды графоаналитическим методом (см. § 34). В связи с этим необходимо лишь помнить, что кривизна изогнутой оси в каком-либо поперечном сечении равна отношению M/EJ_x (уравнение (56)). Поэтому увеличение жесткости при изгибе в данном сечении будет иметь то же влияние, как уменьшение в том же отношении изгибающего момента. Следовательно, задачу на изгиб балок переменного сечения можно свести к задаче на изгиб балок постоянного поперечного сечения при помощи измененной эпюры изгибающих моментов.

Изменяющаяся эпюра моментов получается умножением ординат действительной эпюры моментов на отношение J_0/J_x , где J_x есть момент инерции в данном поперечном сечении и J_0 есть постоянный момент инерции. Это сводит изгиб стержня переменного поперечного сечения к изгибу стержня постоянного поперечного сечения с моментами инерции J_0 .

Например, задачу на изгиб круглого вала (рис. 189), который имеет сечения двух разных диаметров с моментами инерции J_0 и J_1 и нагружен силой P , можно свести к задаче на изгиб круглого вала, имеющего постоянный момент инерции J_0 . При рассмотрении фиктивной балки A_1B_1 вместо треугольной нагрузки $A_1C_1B_1$, пред-

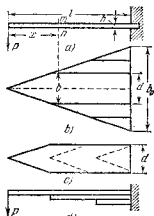


Рис. 188.

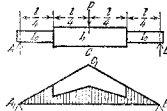


Рис. 189.

¹⁾ Это решение получено E. Phillipson, Ann. mines, т. I, стр. 165—336, 1852. См. также Todhunter and Pearson, History of the Theory of Elasticity, т. 2, стр. 330, 1893 и A. Castiglione, Theorie der Biegungs- und Torsions — Federn, Vienna, 1888. Влияние трения между листами было рассмотрено S. Marie, Ann. mines, тт. 7—9, 1905—1906. D. Landau и P. H. Рагг исследовали распределение нагрузки между отдельными листами ресоры, J. Franklin Inst., тт. 185—187. Полная библиография о механических ресорах была опубликована Ann. Soc. Mech. Engrs, New York, 1927. См. также книгу: S. G. Ross и E. L. H. r, Die Federn, VDI, Verlag, 1938. Весьма полное исследование различных типов механических ресор дано в книге A. M. W. A. H. I., Mechanical Springs, Cleveland, 1914.

ставляющей эпюру изгибающих моментов от действительной нагрузки, мы воспользуемся нагрузкой, представленной заштрихованной площадью. Эта площадь получается уменьшением ординат эпюры на среднем участке вала в отношении J_1/J_2 . Определение прогибов и углов наклона можно теперь сделать, как в случае призматических стержней; величина прогиба и угол наклона в каком-либо поперечном сечении балки будут равны изгибающему моменту и поперечной силе от фиктивной нагрузки, поделенным на EJ_2 . Необходимо заметить, что в случае, представленном на рис. 189, имеет место резкое изменение диаметра вала в расстоянии $l/4$ от опор, вызывающее местные напряжения в этих точках. Это не имеет существенного влияния на изгиб вала при условии, что разница в диаметрах двух участков мала по сравнению с длинами этих участков.

Метод, примененный для вала переменного поперечного сечения, можно применить также к составным двутавровым балкам или фермам со сплошной

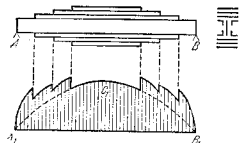


Рис. 190.

стенкой переменного поперечного сечения. Пример фермы со сплошной стенкой, опертой на концах и равномерно нагруженной, показан на рис. 190. Изгибающий момент уменьшается от середины к концам фермы, и вес балки можно уменьшить путем уменьшения числа листов в поясах, как показано схематически на рисунке. Прогиб такой балки можно вычислить на основании момента инерции среднего поперечного сечения. За фиктивную нагрузку вместо одной параболы, указанной пунктиром, взята представленная на рис. 190 заштрихованная площадь, в которой уменьшение поперечного сечения компенсируется увеличением ординат эпюры моментов в отношении $J_{\text{сред}}/J_1$.

ЗАДАЧИ

1. Стальной лист фермы, показанной на рис. 191, заделан на одном конце и нагружен силой P на другом. Определить прогиб на конце, если длина вала $2l$, ширина — a , толщина листа — h и нагрузка на конце — P .

Решение. Прогиб будет состоять из трех частей:

$$f_1 = \frac{Pl^2}{3EJ_2} + \frac{Pl^2}{2EJ_1} \text{ — прогиб в } B.$$

$$f_2 = \frac{3Pl^2}{2EJ_2} \text{ — прогиб в } C \text{ вследствие угла наклона в } B.$$

$$f_3 = \frac{Pl^2}{2EJ_2} \text{ — прогиб от изгиба части } BC \text{ листа.}$$

Полный прогиб равен $f = f_1 + f_2 + f_3$.

2. Решить предыдущую задачу, полагая $l=25$ см, $a=7,5$ см, $P=400$ кг и $\sigma_{\text{раз}}=4800$ кг/см².

3. Определить ширину d листового рессоры (рис. 188) в ее прогибе, если $P=2,5$ т, $h=1,25$ см, $l=60$ см, $[\sigma]=4800$ кг/см² и число листов $n=10$.

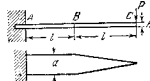


Рис. 191.

Решение. Считая листы рессоры вырезанными из треугольной пластинки (рис. 188, б), найдем наибольшее напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{6Pl}{nd^2h^2},$$

откуда

$$d = \frac{6Pl}{n[\sigma]h^2} = \frac{6 \cdot 2500 \cdot 60}{10 \cdot 4800 \cdot 1,25^2} = 12 \text{ см.}$$

Прогиб определится из уравнения (123)

$$f = \frac{4800 \cdot 60^3}{1,25^2 \cdot 2 \cdot 10^3} = 6,91 \text{ см.}$$

4. Сравнить прогибы в середине и углы поворота на концах вала, показанного на рис. 189, с теми же величинами вала той же длины, но постоянного поперечного сечения, момент инерции которого равен J_2 . Принять $J_1/J_2=2$.

Решение. Вследствие большей жесткости при изгибе в середине углы поворота концов вала, показанного на рис. 189, будут меньше углов поворота концов цилиндрического вала во столько раз, во сколько заштрихованная площадь меньше всей площади треугольника $A_1C_1B_1$. Полная площадь пред-
отношение равно $5/8 : 1$.

Прогибы в середине для обоих валов будут находиться в таком же отношении, как изгибающие моменты от заштрихованной площади и площади треугольника $A_1C_1B_1$. Это отношение равно $9/16 : 1$.

5. Балка, опертая на концах, нагружена, как показано на рис. 192. Как должна измениться высота h балки для того, чтобы иметь форму равно го сопротивления, если ширина b прямоугольного поперечного сечения остается постоянной по длине балки?

$$\text{Ответ. } h^2 = h_0^2 \left(1 - 8 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

6. Определить прогиб стальной пластины толщиной 1,25 см, показанной на рис. 193, а в 193, б, под действием нагрузки $P=10$ кг, приложенной в середине.

Решение. Сводя эту задачу к определению прогиба пластины постоянной ширины равной 10 см, преобразуем эпюру моментов для этого случая в трапецию $abcd$

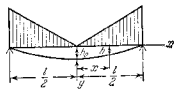


Рис. 192.

(рис. 193, с), тогда мы получим

$$i = \frac{11}{8} \frac{Pl^3}{48EJ_z},$$

где J_z есть момент инерции в середине пролета. Численное значение прогиба теперь легко можно найти.

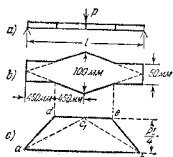


Рис. 193.

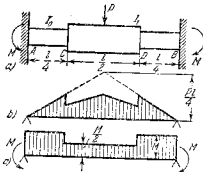


Рис. 194.

7. Определить наибольший прогиб листового рессоры (рис. 188, а), если $l=90$ см, $h=1,25$ см, $E=2 \cdot 10^4$ кг/см², $[\sigma]=4000$ кг/см².
 Ответ: $f=12,96$ см.

8. Свободно опертая балка прямоугольного сечения несет нагрузку P , которая движется по пролету. Как должна измениться высота h балки для того, чтобы иметь форму равного сопротивления, если ширина b прямоугольного поперечного сечения остается постоянной по длине балки?

Решение. Для какого-либо данного положения груза наибольший момент имеет место под грузом. Обозначая расстояние груза от середины пролета через x , находим изгибающий момент под грузом

$$M = \frac{P}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(\frac{l}{2} + x \right).$$

Необходимая высота h балки под грузом получается из уравнения

$$[\sigma] = \frac{6M}{bh^2},$$

откуда

$$h^2 = \frac{6M}{b[\sigma]} = \frac{6P}{l b [\sigma]} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

и

$$\frac{h^2}{\frac{6Pl}{4b[\sigma]} + \frac{x^2}{4}} = 1.$$

Можно видеть, что в этом случае высота h изменяется, следуя закону эллипса, полуоси которого равны

$$\frac{l}{2} \text{ и } \sqrt{\frac{6Pl}{4b[\sigma]}}.$$

9. Определить опорные моменты на концах балки AB с заделанными концами, нагруженной в середине пролета (рис. 194). Принять

$$\frac{J_1}{J_0} = 2.$$

Решение. Решение получается путем сложения двух простых случаев, показанных на рис. 194, б и в. Ясно, что условия в заделанных концах будут удовлетворены, если углы поворота концов будут равны нулю, т. е. если реакции от фиктивной нагрузки (см. стр. 139), представленной заштрихованными площадями в б) и в), равны. Поэтому уравнение для определения численного значения M будет

$$\frac{Pl}{4} \frac{l}{2} - \frac{3Pl}{8} \frac{l}{4} \frac{l}{2} - Ml - \frac{Ml}{4},$$

откуда

$$M = \frac{5Pl}{48}.$$

10. Решить предыдущую задачу в предположении, что в точках C и D приложены равные грузы P .

Ответ: $M = \frac{Pl}{6}$.

47. Симметричные балки из двух различных материалов

Имеются случаи, когда применяются балки из двух или нескольких различных материалов. Рис. 195, а представляет простой случай деревянной балки, усиленной стальной полосой, приклеенной к балке снизу. Полагая, что при изгибе не существует скольжения между сталью и деревом, здесь также мы можем воспользоваться теорией цельных балок. Согласно этой теории, удлинения и укорочения продольных волокон пропорциональны расстояниям от нейтральной оси. Благодаря тому, что модуль упругости дерева значительно меньше модуля упругости стали, деревянная часть балки при изгибе будет эквивалентна очень узкой стенке из стали, как показано на рис. 195, б. Чтобы момент внутренних сил не изменялся для данной кривизны, т. е. для данного удлинения и укорочения, толщина b_1 этой стенки должна быть следующей:

$$b_1 = \frac{bE}{E_c} \quad (a)$$

Таким образом, задача сводится к изгибу стальной балки таврового сечения, называемого *преобразованным сечением*; эта задача может быть решена на основании предыдущей теории.

Рассмотрим, например, свободно лежащую балку длиной 3 м и нагруженную в середине силой 400 кг. Размеры поперечного

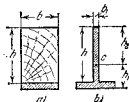


Рис. 195.

сечения деревянной части балки: $b=10$ см, $h=15$ см, а на выгнутой стороне она усилена стальной полосой шириной 2,5 см и толщиной 1,25 см. Полагая $E/E_c=1,20$ и пользуясь уравнением (а), будем иметь преобразованное сечение стенки $15 \times 0,5$ см и полки $2,5 \times 1,25$ см. Расстояния крайних волокон от нейтральной оси рис. 195, b равны $h_1=6,36$ см и $h_2=9,9$ см. Момент инерции преобразованного сечения относительно нейтральной оси равняется $J_c=290$ см⁴, следовательно, напряжения в крайних волокнах преобразованного сечения (из уравнений (б1)) будут

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h_1}{J_c} = \frac{30\,000 \cdot 6,35}{290} = 655 \text{ кг. см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_{\max} h_2}{J_c} = -\frac{30\,000 \cdot 9,9}{290} = 1024 \text{ кг. см}^2.$$

Чтобы получить наибольшее сжимающее напряжение в дереве действительной балки, нужно полученное выше напряжение σ_{\min} преобразованного сечения (стали) умножить на $E_s/E_c=1,20$. Наибольшее растягивающее напряжение для этого случая одно и то же и для действительной балки, и для преобразованной балки.

В качестве другого примера изгиба балки из двух разных материалов рассмотрим случай биметаллической полосы, составленной из никелевой стали и монель-металла (рис. 196). Изгиб такой полосы внешними силами может быть рассмотрен точно таким же образом, как в предыдущей задаче об изгибе балки из дерева и стали, при условии, что мы знаем отношение E_m/E_c , в котором E_m и E_c соответственно будут модули упругости монель-металла и стали. Рассмотрим теперь

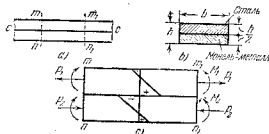


Рис. 196.

изгиб такой полосы вследствие изменения температуры. Коэффициент линейного расширения монель-металла больше, чем никелевой стали, и при повышении температуры будет происходить изгиб с вогнутостью со стороны стальной полосы, это явление изгиба биметаллических полос вследствие изменения температуры используют в различных автоматических инструментах для регулирования температуры¹⁾, как, например, термостатах. Пусть $h/2$ — толщина и b — ширина каждой металлической полосы, t — увеличение температуры, r — радиус кривизны, α_c и α_m — коэффициенты линейного расширения соответственно стали и монель-

металла. $E_c J_c$ — жесткость при изгибе стали, $E_m J_m$ — жесткость при изгибе монель-металла. При повышении температуры полоса монель-металла, имеющего больший коэффициент линейного расширения, будет подвергаться изгибу и сжатию, а стальной полосе — изгибу и растяжению. Рассматривая элемент полосы, выделенный двумя смежными поперечными сечениями m и m_1 (рис. 196, с), можем приравнять силы по поперечному сечению стали привести к растягивающему усилию P_1 и к паре M_1 . Таким же образом внутренние силы для монель-металла можно привести к сжимающему усилию P_2 и к паре M_2 . Внутренние силы в любом поперечном сечении балки должны быть в равновесии. Поэтому

$$P_1 = P_2 = P$$

и

$$\frac{Ph}{2} = M_1 + M_2. \quad (b)$$

Вставляя

$$M_1 = \frac{E_c J_c}{r}, \quad M_2 = \frac{E_m J_m}{r}$$

в уравнение (б), получаем

$$\frac{Ph}{2} = \frac{E_c J_c}{r} + \frac{E_m J_m}{r}. \quad (c)$$

Другое уравнение для определения P и r можно вывести из того условия, что по поверхности соприсоединения $c-c$ относительные удлинения монель-металла и стали должны быть одинаковы. Поэтому

$$\alpha_c t + \frac{2P_1}{E_c h b} + \frac{h}{4r} = \alpha_m t + \frac{2P_2}{E_m h b} - \frac{h}{4r}$$

или

$$\frac{2P}{h b} \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_m} \right) = (\alpha_m - \alpha_c) t - \frac{h}{2r}. \quad (d)$$

Из уравнений (с) и (d) мы получаем

$$\frac{4}{h b^2 r} (E_c J_c + E_m J_m) \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_m} \right) = (\alpha_m - \alpha_c) t - \frac{h}{2r}. \quad (e)$$

Вставляя в это уравнение

$$J_c = J_m = \frac{b h^3}{96} \quad \text{и} \quad E_c = 1,15 E_m,$$

получаем следующее приближенное уравнение:

$$\frac{1}{r} = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_m - \alpha_c) t}{h}. \quad (f)$$

Теперь из уравнения (с) находим

$$P = \frac{3}{h^2} (\alpha_m - \alpha_c) t (E_c J_c + E_m J_m) = \frac{b h}{32} (\alpha_m - \alpha_c) t (E_c + E_m) \quad (g)$$

и

$$M_1 = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_m - \alpha_c) t}{h} E_c J_c, \quad M_2 = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_m - \alpha_c) t}{h} E_m J_m. \quad (h)$$

Из уравнений (g) и (h) можно определить P , M_1 и M_2 . Наибольшее напряжение

1) См. статью автора в J. Opt. Soc. Amer., т. 11, стр. 23.

в стали получается сложением растягивающего напряжения, вызываемого усилием P , с растягивающим напряжением от кривизны $\frac{1}{r}$

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{bh} + \frac{h}{4} \frac{E_c}{r} = \frac{4}{bh^2 r} (E_c J_c + E_{\text{ст}} J_{\text{ст}} + \frac{bh^3}{16} E_c).$$

Полгая, например, что оба металла имеют один и тот же модуль упругости E , получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{hE}{3r},$$

или, пользуясь уравнением (f) ¹⁾, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} E I (\alpha_n - \alpha_c).$$

Для $E = 1,8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $t = 200^\circ \text{C}$ и $\alpha_n - \alpha_c = 4 \cdot 10^{-5}$ находим

$$\sigma_{\max} = 720 \text{ кг/см}^2.$$

Распределение напряжений, возникающих от нагревания, показано на рис. 196, с.

ЗАДАЧИ

1. Найти допускаемый изгибающий момент для деревянной балки, усиленной стальной полосой (рис. 195), если $b = 15 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$ и толщина стальной полосы равна $1,25 \text{ см}$. Принять $E_{\text{д}} = 10^4 \text{ кг/см}^2$, $E_{\text{с}} = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $[\sigma_{\text{д}}] = 80 \text{ кг/см}^2$ — для дерева и $[\sigma_{\text{с}}] = 1070 \text{ кг/см}^2$ для стали.

2. Предположить, что деревянная балка в предыдущей задаче усилена сверху стальной полосой шириной 5 см и толщиной $2,5 \text{ см}$, а внизу стальной полосой шириной 15 см и толщиной $1,25 \text{ см}$. Вычислить допускаемый изгибающий момент, если E и $[\sigma]$ те же, что и в предыдущей задаче.

Ответ. $M = 308 \text{ 000 кг см}$.

3. Биметаллическая полоса имеет длину $l = 2,5 \text{ м}$. Найти прогиб в середине, вызываемый увеличением температуры на 200°C , если $E_c = 1,15 E_n$ и $\alpha_n - \alpha_c = 4 \cdot 10^{-5}$.

48. Железобетонные балки

Известно, что сопротивление бетона гораздо больше при сжатии, чем при растяжении. Следовательно, прямоугольная балка из бетона будет разрушаться от растягивающих напряжений на выпуклой стороне. Балку можно сделать значительно прочнее путем добавления стальных (усиливающих) стержней на выпуклой стороне, как показано на рис. 197.

Так как бетон сцепляется со сталью очень крепко, то при изгибе не имеется никакого скольжения стальных стержней относительно бетона, и поэтому методы, изложенные в предыдущем параграфе, здесь также могут быть применены к расчету напряжений при изгибе. На практике площади поперечных сечений стальных стержней обычно таковы, что бетон на выпуклой стороне перестает

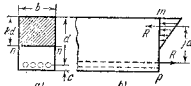


Рис. 197.

на расчету напряжений при изгибе. На практике площади поперечных сечений стальных стержней обычно таковы, что бетон на выпуклой стороне перестает

¹⁾ Это уравнение сохраняется также для $E_c = E_n$.

сокращаться растяжению раньше, чем начинается текучесть стали, и при больших нагрузках, практически, лишь одна сталь воспринимает все растяжение. Отсюда, при расчете напряжений при изгибе в железобетонных балках, практикой установлено допущение, что все растяжение воспринимается сталью и все сжатие — бетоном. Замена растягивающие усилия в стальных стержнях их равнодействующей, найдем, что распределение внутренних усилий по какому-либо поперечному сечению mn будет такое, как показано на рис. 197, б. Предполагаем, как и прежде, что поперечные сечения при изгибе остаются плоскими и обозначим через kd расстояние нейтральной оси от верха ¹⁾, найдем наибольшее продольное относительное укорочение ϵ_6 в бетоне и относительное удлинение осей стальных стержней по следующим формулам:

$$\epsilon_6 = -\frac{kd}{r}, \quad \epsilon_c = \frac{(1-k)d}{r}. \quad (a)$$

Бетон не следует закону Гука, и диаграмма сжатия для этого материала имеет форму, подобную диаграмме для чугуна на рис. 4, б. Когда сжимающие напряжения увеличиваются, угол наклона касательной к диаграмме уменьшается, т. е. модуль упругости бетона уменьшается с увеличением напряжений. При высоких напряжениях в железобетонных балках на практике обычно допускают, что бетон следует закону Гука, и вместо переменного модуля упругости принимают для этого модуля более низкое значение, чем то, которое получается из испытаний на сжатие при малых напряжениях. На практике для железобетона часто полагают, что $E_c/E_6 = 15$. Тогда из уравнений (a) наибольшее сжимающее напряжение в бетоне и наибольшее растягивающее напряжение в стали ²⁾ соответственно будут

$$\sigma_6 = -\frac{kd}{r} E_6, \quad \sigma_c = \frac{(1-k)d}{r} E_c. \quad (b)$$

Определим теперь положение нейтральной оси из того условия, что нормальные усилия по поперечному сечению mn должны приводиться к паре сил, равной изгибающему моменту в этом поперечном сечении. Сумма сжимающих усилий в бетоне должна равняться растягивающему усилию R в стальных стержнях, или

$$-\frac{bkd\sigma_6}{2} = \sigma_c F_c, \quad (c)$$

где F_c есть полная площадь поперечного сечения стали. Пользуясь обозначениями $F_c/bd = p$ и $E_c/E_6 = n$, получаем из (c) и (b)

$$k^2 = 2(1-k)pn, \quad (d)$$

откуда

$$k = \sqrt{(pn)^2 + 2pn} - pn. \quad (124)$$

После определения положения нейтральной оси из уравнения (124) получаем, на основании уравнения (b), отношение между наибольшим напряжением в бетоне и напряжением в стали

$$-\frac{\sigma_6}{\sigma_c} = \frac{k}{(1-k)n}. \quad (125)$$

Расстояние jd между равнодействующими R сжимающих и растягивающих усилий,

¹⁾ k есть численный коэффициент, меньший единицы.

²⁾ Поперечные размеры стальных стержней обычно малы, и вместо наибольшего напряжения принимаем среднее растягивающее напряжение.

действующих по поперечному сечению балки (рис. 197, б) равно ¹⁾

$$jd = \frac{2}{3} kd + (1 - k)d = \left(1 - \frac{k}{3}\right)d, \quad (126)$$

и момент внутренних усилий, равный изгибающему моменту M , будет

$$jdR = j d F_c \sigma_c = - \frac{j b b d^2}{2} \sigma_6 = M,$$

откуда

$$\sigma_c = \frac{M}{F_c j d}, \quad (127)$$

$$\sigma_6 = - \frac{2M}{j b b d^2}. \quad (128)$$

При помощи уравнений (124)–(128) легко вычисляются напряжения при изгибе в железобетонных балках.

ЗАДАЧИ

1. Определить расстояние нейтральной оси от верха балки, если $E_s/E_6=15$ и $F_c=0,008 bd$ (рис. 197).

Ответ. $kd=0,384 d$.

2. Определить отношение $\rho = F_c/bd$, если наибольшее растягивающее напряжение в стали равняется 800 кг/см^2 , наибольшее сжимающее напряжение в бетоне равняется 43 кг/см^2 и $E_s/E_6=n=15$.

Решение. Из уравнения (125) $k=0,446$. Тогда из уравнения (d)

$$\rho = \frac{k^2}{2(1-k)n} = 0,012.$$

3. Определить отношение ρ , если наибольшее сжимающее напряжение в бетоне равняется $\frac{1}{20}$ растягивающего напряжения в стали.

Ответ. $\rho=0,0107$.

4. Определить безопасную нагрузку посередине железобетонной балки длиной 3 м, опертой на концах и имеющей $b=26 \text{ см}$, $d=30 \text{ см}$, $F_c=7,31 \text{ см}^2$, если $n=15$ и допускаемое напряжение для бетона равно 43 кг/см^2 .

Ответ. $P=2290 \text{ кг}$.

5. Вычислить наибольший изгибающий момент, который может безопасно выдержать железобетонная балка, если $b=20 \text{ см}$, $d=30 \text{ см}$, $F_c=12,5 \text{ см}^2$, $E_s/E_6=12$ и допускаемое напряжение для стали равно 1000 кг/см^2 и для бетона — 53 кг/см^2 .

Ответ. $M=1920 \text{ кгм}$.

6. Определить значение k , при котором в бетоне и стали одновременно возникнут наибольшие допускаемые напряжения.

Решение. Пусть σ_6 и σ_c — допускаемые напряжения для бетона и стали. Тогда, зная отношение этих напряжений, определяемых формулами (b), и рассматривая лишь абсолютное значение этого отношения, получим

$$\frac{\sigma_6}{\sigma_c} = \frac{k E_6}{(1-k) E_s}$$

откуда

$$k = \frac{\sigma_6}{\sigma_6 + \sigma_c} \frac{E_6}{E_s}$$

Если это условие удовлетворяется, то говорят, что балка имеет *сбалансированную арматуру*. Имея k и пользуясь уравнением (126), получаем высоту из уравнения (128) и площадь F_c из уравнения (127).

¹⁾ j есть численный коэффициент, меньший единицы.

7. Определить отношение $\rho = F_c/bd$, если $\sigma_c=800 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_6=43 \text{ кг/см}^2$ и $n=15$. $E_s/E_6=15$.

Решение. Из формулы предыдущей задачи находим $k=0,446$. Тогда, вставив в уравнение (d), получаем

$$\rho = 0,012.$$

8. Рассчитать балку шириною 25 см, которая может безопасно выдержать изгибающий момент, равный 2700 кгм, если $\sigma_6=50 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_c=800 \text{ кг/см}^2$ и $E_s/E_6=12$. Найти высоту d и площадь стали F_c .

Принять сбалансированную арматуру, как в задаче 6.

49. Касательные напряжения в железобетонных балках

Пользуясь тем же методом, что и в § 26, и рассматривая элемент mm_1n_1 между двумя смежными поперечными сечениями mn и m_1n_1 (рис. 198), можем заключить, что наибольшие касательные напряжения будут действовать по нейтральному слою nn_1 . Обозначая через dR разность между сжимающими усилиями в бетоне по поперечным сечениям mn и m_1n_1 , найдем, что касательные напряжения τ_{yx} по нейтральному слою определятся из следующего уравнения:

$$(\tau_{yx})_{\max} b dx = dR,$$

откуда

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{1}{b} \frac{dR}{dx}. \quad (a)$$

Так как изгибающий момент равен

$$M = Rjd,$$

то уравнение (a) получает вид

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{1}{bjd} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{bjd}, \quad (b)$$

где Q есть поперечная сила в рассматриваемом сечении. При помощи уравнения (126) указанное выше уравнение для касательных напряжений получается

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{3Q}{bd(3-k)}. \quad (129)$$

При практических расчетах имеют важное значение не только касательные напряжения по нейтральному слою, но также касательные напряжения по поверхности соприкосновения стали и бетона (напряжения сцепления). Рассматривая снова два смежных поперечных сечения (рис. 198), найдем, что разность между растягивающими усилиями в стальных стержнях в этих двух сечениях равна

$$dR = \frac{Q dx}{jd}.$$

Эта разность уравновешивается напряжениями сцепления, распределенными по поверхности стержней. Обозначая через F полную боковую поверхность всех стальных стержней на единицу длины балки, найдем, что напряжения сцепления по поверхности стержней будут

$$\frac{dR}{F dx} = \frac{Q}{F jd} = \frac{3Q}{F(3-k)d}. \quad (130)$$

Эти напряжения получаются больше напряжений по нейтральному слою (уравнение (129)), если F меньше b . Чтобы увеличить F и в то же время сохранить площадь поперечного сечения стали постоянной, необходимо лишь увеличить число стержней и уменьшить их диаметр.

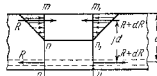


Рис. 198.

дикулярно поперечному сечению и имеет величину $Ey dF/r$. Уравнения равновесия части балки, показанной на рис. 199, *b*, будут¹⁾

$$\frac{E}{r} \int_F y dF = 0, \quad \frac{E}{r} \int_F y^2 dF = M, \quad \frac{E}{r} \int_F yz dF = 0. \quad (a)$$

Первое из этих уравнений устанавливает, что нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. Второе уравнение определяет величину кривизны $1/r$ изогнутой оси и третье уравнение устанавливает, что оси y и z являются главными осями инерции поперечного сечения (см. Приложение А, § IV, стр. 355) и что плоскости xy и xz являются *главными плоскостями* балки. Это показывает, что в общем случае чистого изгиба плоскость изгиба совпадает с плоскостью действующих пар лишь в том случае, когда последняя является одной из главных плоскостей бруса.

Если плоскость действующих пар не проходит через одну из главных осей инерции поперечного сечения бруса, то третье из уравнений равновесия (а) не будет удовлетворено. Следовательно, направление нейтральной оси не будет перпендикулярно плоскости изгибающих пар и должно быть найдено следующим образом. Предположим, что пара M действует в продольной плоскости бруса, которая пересекает поперечное сечение по линии mn , наклоненной к главной оси y под углом θ (рис. 200). Вектор M , представляющий момент пары, может быть разложен на две составляющие, как показано на рисунке. Так как каждая составляющая пары действует в одной из главных плоскостей балки, то соответствующие напряжения получаются при помощи обычных формул, выведенных для случая чистого изгиба (см. уравнение (57)), и полное напряжение в какой-либо точке A поперечного сечения будет определяться по формуле

$$\sigma = \frac{My \cos \theta}{J_z} + \frac{Mz \sin \theta}{J_y}. \quad (b)$$

Приравняв это напряжение нулю, получаем уравнение нейтральной оси:

$$\frac{y \cos \theta}{J_z} + \frac{z \sin \theta}{J_y} = 0, \quad (c)$$

¹⁾ Остальные три уравнения будут всегда удовлетворяться, так как моменты всех сил относительно осей x и проекции сил на оси y и z обращаются в нуль.

ГЛАВА VIII

ИЗГИБ БАЛОК В ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ

50. Чистый изгиб в плоскости, которая не является плоскостью симметрии

Если балка имеет плоскость симметрии, скажем плоскость xy (рис. 199, *a*), и пары, действующие в этой плоскости, приложены на концах, то балка будет изгибаться в той же плоскости и нейтральная ось nn в каждом поперечном сечении балки (рис. 199, *a*) будет проходить через центр тяжести C и будет перпендикулярна плоскости действующих пар. На основании симметрии можно заключить, что напряжения, соответствующие этому направлению нейтральной оси, дают равнодействующую пару в плоскости xy и при надлежащем подборе величины напряжений (см. уравнение (56)) эта пара будет уравновешивать внешнюю пару M .

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость xy изгибающих пар (рис. 199, *b*) не является плоскостью симметрии, и исследуем, при каком условии нейтральная ось будет перпендикулярна этой плоскости. Предполагая, что ось nn перпендикулярна плоскости xy , и постулируя так, как в § 23, найдем, что усилие, действующее на бесконечно малый элемент dF поперечного сечения, перпен-

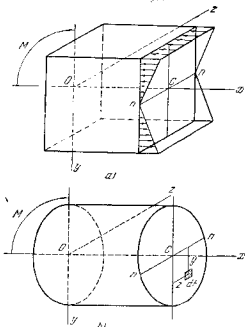


Рис. 199.

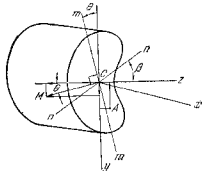


Рис. 200.

и тангенс угла β , определяющий направление нейтральной оси nn , будет

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{y}{z} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \theta. \quad (d)$$

Видно, что угол β вообще отличается от угла θ и нейтральная ось не перпендикулярна продольной плоскости mm , в которой действуют изгибающие пары. Эти два угла будут равны только, если $\theta = 0$ или $J_z = J_y$. В первом из этих случаев изгибающие пары действуют в главной плоскости xy , и нейтральная ось совпадает с главной осью z . Во втором случае два главных момента инерции поперечного сечения равны между собой. В таком случае эллипс инерции поперечного сечения (см. Приложение А, § V, стр. 359) становится кругом и любая пара взаимно перпендикулярных центральных осей может быть принята за главные оси, и, следовательно, нейтральная ось всегда будет перпендикулярна плоскости изгибающих пар.

В предыдущем изложении мы разложили заданную пару на две составляющие пары, действующие в главных плоскостях балки, и вычислили напряжения, вызванные каждой из этих составляющих. Иногда бывает удобно работать непосредственно с заданными изгибающими парами и иметь формулу для определения нормальных напряжений, вызываемых этими парами. Чтобы вывести такую формулу, рассмотрим изгиб балки парами M_x и M_y , действующими в двух произвольно выбранных перпендикулярных продольных плоскостях xu и xz (рис. 201).

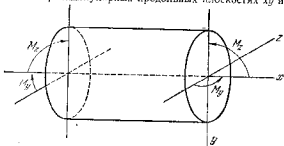


Рис. 201.

Предположим, что величины этих пар таковы, что изгиб происходит в плоскости xu , так что нейтральная ось в каждом поперечном сечении параллельна оси z . Обозначая r_y соответствующий радиус кривизны, находим, что нормальное напряжение будет $\sigma_x = Ey/r_y$ и получаем следующие значения изгибающих пар:

$$M_x = \int y \sigma_x df = \frac{EJ_z}{r_y}, \quad M_y = - \int z \sigma_x df = - \frac{FJ_{yz}}{r_y}. \quad (e)$$

Аналогично, если пары таковы, что изгиб происходит в плоскости xz , то $\sigma_x = -z/r_z$ и мы имеем

$$M_x = \frac{EJ_y}{r_z}, \quad M_z = - \frac{EJ_{yz}}{r_z}. \quad (f)$$

В общем случае, когда изгиб происходит в обеих плоскостях, зависимость между изгибающими моментами и радиусами кривизны получится сложением уравнений (e) и (f), и мы имеем

$$M_x = \frac{EJ_y}{r_z} - \frac{EJ_{yz}}{r_y}, \quad M_z = \frac{EJ_z}{r_y} - \frac{EJ_{yz}}{r_z}. \quad (g)$$

Если пары действуют только в плоскости xu , то $M_z = 0$ и мы получаем

$$\frac{EJ_y}{r_z} - \frac{EJ_{yz}}{r_y} = 0, \quad \frac{1}{r_z} = \frac{1}{r_y} \frac{J_{yz}}{J_y}.$$

Подставляя во второе из уравнений (g), находим

$$M_x = \frac{1}{r_y} \frac{E(J_{yz}^2 - J_y^2)}{J_y}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{M_x J_y}{E(J_{yz}^2 - J_y^2)}, \quad \frac{1}{r_z} = \frac{M_x J_{yz}}{E(J_{yz}^2 - J_y^2)}. \quad (11)$$

Тогда нормальные напряжения, вызываемые парой M_x , будут

$$\sigma_x = \frac{F_y}{r_y} - \frac{F_z}{r_z} = \frac{M_x}{J_{yz}^2 - J_y^2} (J_{yz}y - J_y z). \quad (12)$$

Аналогично, если M_z равно нулю, мы получаем

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_{yz}^2 - J_z^2} (J_{yz}y - J_z z). \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) особенно полезны для балок, в которых стенка и полки параллельны осям y и z .

ЗАДАЧИ

1. Копьольная балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 202) изгибается парой M , действующей в продольной плоскости mm . Какую кривую

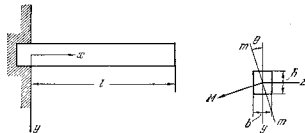


Рис. 202.

будет описывать конец балки, если угол θ , определяющий плоскость изгибающего момента, изменится от нуля до 2π ?

Решение. Разлагаем изгибающий момент M на два составляющих момента $M \cos \theta$ и $M \sin \theta$, действующих соответственно в главных плоскостях xu и xz , находим две составляющие η и ζ прогиба конца консоли соответственно по

направлению y и z :

$$u = -\frac{Mz^2 \cos^2 \theta}{2EJ_z}, \quad v = -\frac{Mz^2 \sin^2 \theta}{2EJ_y},$$

откуда

$$\left(\frac{u^2}{\left(\frac{Mz^2}{2EJ_z}\right)^2}\right) + \left(\frac{v^2}{\left(\frac{Mz^2}{2EJ_y}\right)^2}\right) = 1.$$

Мы видим, что конец консоли описывает эллипс с полуосями $Mz^2/2EJ_z$ и $Mz^2/2EJ_y$.

2. Найти для предыдущей задачи численное значение отношения вертикального и горизонтального прогибов конца консоли, если $\theta = 45^\circ$ и $h = 2b$.

Ответ. $u/v = J_y/J_z = \frac{1}{4}$.

3. Найти для консоли, изображенной на рис. 202, угол наклона β нейтральной оси к горизонтальной и величину наибольшего напряжения, если $\theta = 45^\circ$ и $h = 2b = 15$ см, $M = 1200$ кгс·м.

Ответ. $\operatorname{tg} \beta = 4$, $\sigma_{\max} \approx 9$ кгс/см².

4. Двутавровая балка, свободно лежащая на опорах, изгибается двумя равными и противоположными парами M , действующими на концах балки в плоскости mn (рис. 203). Найти наибольшее напряжение и наибольший прогиб f балки, если $J_y = 158$ см⁴, $J_z = 2370$ см⁴, $M = 50\,000$ кгс·м, $\theta = 30^\circ$, $l = 3,6$ м.

Ответ. $\sigma_{\max} = \frac{10M \cos \theta}{J_z} + \frac{5M \sin \theta}{J_y} = 974$ кгс/см²,

$$f_{\max} = \left(\frac{Ml^2 \cos^2 \theta}{8EJ_z}\right) + \left(\frac{Ml^2 \sin^2 \theta}{8EJ_y}\right) \quad \text{и} \quad f_{\max} = 1,29 \text{ см.}$$

5. Стержень углового поперечного сечения (рис. 204) изгибается парами M , приложенными на концах и действующими в плоскости большей полки. Найти направления главных центральных осей u и v , величины J_u и J_v главных моментов инерции и величину наибольшего нормального напряжения при изгибе, если $M = 10\,000$ кгс·м. При решении задачи воспользоваться формулой (132).

Ответ. $\varphi = 14^\circ 10'$, $J_u = 150,19$ см⁴, $J_v = 16,16$ см⁴, $\sigma_{\max} = 601$ кгс/см² в точке A .

51. Изгиб балок, имеющих две плоскости симметрии

Если балка имеет две плоскости симметрии, то задача об изгибе поперечными силами, наклонными к этим плоскостям и пересекающимися ось балки, может быть легко решена при помощи метода сложения действия сил. Каждая поперечная сила может быть разложена на две составляющие, действующие в двух плоскостях симметрии, и после решения задачи на изгиб для каждой из этих плоскостей окончательные напряжения и прогибы получатся путем сложения.

В качестве примера рассмотрим консоль прямоугольного поперечного сечения (рис. 205) с поперечной силой P , приложенной на конце под углом θ к вертикальной плоскости симметрии. Разлагая силу на две составляющие $P \cos \theta$ и $P \sin \theta$ и рассматривая изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях симметрии, мы найдем, что абсолютные значения соответствующих изгибающих моментов в заданном конце равны $Pl \cos \theta$ и $Pl \sin \theta$. Принимая во внимание направление этих моментов, найдем, что нормальное напряжение в какой-либо точке заданного поперечного сечения будет

$$\sigma = -\frac{Pl y \cos \theta}{J_z} + \frac{Pl z \sin \theta}{J_y}.$$

Наибольшее растягивающее напряжение будет в точке A , и его величина определится по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bh} \left(\frac{\cos \theta}{h} + \frac{\sin \theta}{b} \right).$$

Вертикальный и горизонтальный прогибы нагруженного конца будут

$$f_y = \frac{Pl^2 \cos^2 \theta}{3EJ_z}, \quad f_z = -\frac{Pl^2 \sin^2 \theta}{3EJ_y},$$

и полный прогиб получится из уравнения

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Горизонтальная деревянная балка прямоугольного поперечного сечения несет вертикальную нагрузку, равномерно распределенную по оси, и опирается на концах в положении, указанном на рис. 206. Определить наибольшее нормальное напряжение и вертикальный прогиб в середине, если длина балки $l = 3$ м, интенсивность нагрузки $q = 300$ кгс/м, $h = 20$ см, $b = 15$ см, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\sigma_{\max} = 46,2$ кгс/см², $f = 0,341$ м.

2. Решить предыдущую задачу, если расстояние между опорами равно 1,8 м и балка имеет два сходящихся конца, длина каждого из которых равна 0,6 м.

3. Горизонтальный круглый стержень длиной l с заданными концами несет равномерно распределенную вертикальную нагрузку интенсивностью q и горизонтальную поперечную нагрузку P , сосредоточенную в середине. Найти наибольшее напряжение, если $Pl = 24\,000$ кгс·м, $ql^2 = 48\,000$ кгс и диаметр стержня $d = 10$ см.

Ответ. $\sigma_{\max} = 51$ кгс/см².

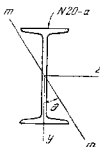


Рис. 203.

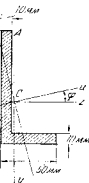
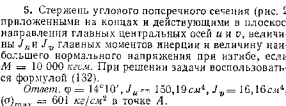


Рис. 204.

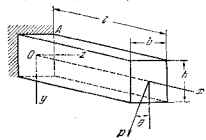


Рис. 205.

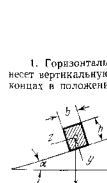


Рис. 206.

4. Горизонтальная балка квадратного поперечного сечения (рис. 207) со свободно опираемыми концами нагружена в точках, отстоящих от опор на расстоя-

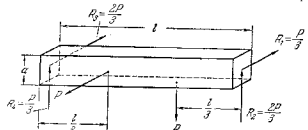


Рис. 207.

ниях, равных $\frac{l}{3}$ длины двумя равными силами P , одна из которых вертикальна, а другая горизонтальна. Найти σ_{\max} , если $l=3,6$ м, $a=30$ см, $P=2,4$ т.

$$\text{Ответ. } \sigma_{\max} = \frac{2Pl}{a^3} = 64 \text{ кг/см}^2.$$

52. Изгиб балок в главной плоскости, которая не является плоскостью симметрии

Центр сдвига. При рассмотрении чистого изгиба (см. стр. 195) было показано, что плоскость изогнутой оси совпадает с плоскостью изгибающих пар при условии, что эти пары действуют в одной из двух *главных плоскостей изгиба*. В случае изгиба балки копланарной системой поперечных сил задача становится более сложной. Если главная плоскость, в которой действуют силы, не является плоскостью симметрии балки, то такой изгиб обычно сопровождается кручением балки. В последующем изложении будет показано, как можно исключить это кручение и получить *простой изгиб* надлежащим перемещением плоскости действующих сил параллельно самой себе.

Мы начнем с простых примеров, в которых поперечное сечение балки имеет одну ось симметрии (ось z) и силы действуют в плоскости, перпендикулярной к этой оси (рис. 208). Рассмотрим случай тонкостенной балки, показанной на рис. 208, а, и определим положение вертикальной плоскости, в которой должны действовать поперечные силы для того, чтобы произвести простой изгиб балки в вертикальной плоскости. Из наших предыдущих рассуждений о распределении вертикальных касательных напряжений τ_{xy} (см. стр. 110) мы можем заключить, что практически вся поперечная сила Q будет воспринята только одними полками. Если мы будем рассматривать полки как две отдельные балки, поперечные сечения которых имеют соответственно моменты инерции J'_2 и J''_2 , то

их кривизна и прогибы при изгибе будут одинаковы, если нагрузка распределяется между ними в отношении $J'_2 : J''_2$ ¹⁾. Тогда поперечные силы в этих полках будут находиться в том же отношении.

Это условие будет удовлетворено, если поперечная нагрузка действует в вертикальной плоскости, проходящей через точку O (рис. 208, а), причем $h_1 : h_2 = J'_2 : J''_2$, где h_1 и h_2 — расстояния O от центров тяжести поперечных сечений полок. Таким образом, мы находим, что точка O перемещается от центра тяжести C поперечного сечения к той полке, поперечное сечение которой имеет больший момент инерции. В предельном случае, показанном на рис. 208, б, в котором одна из полок отсутствует, можно предположить с достаточной точностью, что точка O совпадает с центром тяжести полки и что поперечная нагрузка должна действовать в вертикальной плоскости, проходящей через эту точку, для того, чтобы иметь простой изгиб. Точка O , через которую должна проходить плоскость нагрузки, чтобы исключить кручение, называется *центром сдвига*.

Рассмотрим теперь сечение швеллера (рис. 208, в) и определим положение плоскости, в которой должна действовать вертикальная нагрузка, чтобы произвести простой изгиб с нейтральной осью, совпадающей с осью z . Для этой цели необходимо рассмотреть распределение касательных напряжений по поперечному сечению при простом изгибе. Чтобы вычислить вертикальные касательные напряжения τ_{xy} для поперечного сечения стенки, можно воспользоваться тем же методом, что и в случае двутавровой балки (стр. 111), т. е. можно предположить с достаточной точностью, что вертикальная поперечная сила Q воспринимается только стенкой. В полках возникнут горизонтальные касательные напряжения, которые мы будем обозначать через τ_{xz} . Чтобы найти величину этих напряжений, рассмотрим элемент, вырезанный из полки двумя смежными поперечными сечениями на расстоянии dx и вертикальной плоскостью mn , параллельной стенке (рис. 209). Если балка изогнута выпуклостью вниз, то нижняя полка будет растянута и растягивающие усилия N и $N+dN$, действующие на указанный выше элемент, будут равны

$$N = M \int y dF$$

¹⁾ При этом рассмотрении пренебрегается влиянием поперечной силы на прогиб полок.

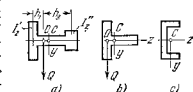


Рис. 208.

и

$$N + dN = \frac{M + \frac{dM}{dx} dx}{J_z} \int y dF.$$

где интегрирование должно быть распространено на заштрихованную часть поперечного сечения полки. Интеграл представляет статический момент заштрихованной площади относительно оси z .

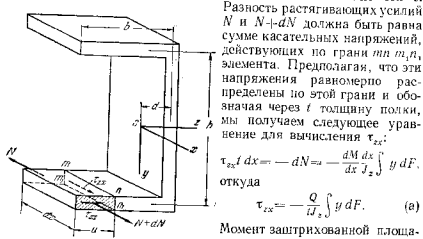


Рис. 209.

Разность растягивающих усилий N и $N + dN$ должна быть равна сумме касательных напряжений, действующих по грани mn m_1n_1 элемента. Предполагая, что эти напряжения равномерно распределены по этой грани и обозначая через t толщину полки, мы получаем следующее уравнение для вычисления τ_{xz} :

$$\tau_{xz} t dx = -dN = -\frac{dM}{dx} \frac{dx}{J_z} \int y dF,$$

откуда

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{t J_z} \int y dF. \quad (a)$$

Момент заштрихованной площади пропорционален расстоянию u от края полки; следовательно, τ_{xz} пропорционально u . Как мы видели ранее (стр. 104), касательные напряжения τ_{xz} , равные τ_{zx} , должны действовать горизонтально в точках по линии mn_1 в поперечном сечении полки. Следовательно, напряжения τ_{xz} распределяются неравномерно по поперечному сечению полки, но они пропорциональны расстоянию u . У сопряжения полки и стенки распределение касательных напряжений является сложным. В нашем приближенном вычислении мы предполагаем, что уравнение (a) сохраняется от $u=0$ до $u=b$. Тогда, обозначая через h расстояние между центрами тяжести полки и замечая, что момент площади поперечного сечения bt полки относительно оси z равен $bt h/2$, мы получаем из уравнения (a)

$$\int (\tau_{xz})_{\max} = (\tau_{zx})_{\max} = -\frac{Qbh}{2J_z}. \quad (b)$$

Равнодействующая R (рис. 210) касательных напряжений τ_{xz} , распределенных по площади поперечного сечения bt полки, равняется

$$R = \frac{Qbh}{2} \frac{bt}{2} = \frac{Qb^2ht}{4J_z}. \quad (c)$$

Суммирование касательных напряжений τ_{xz} по поперечному сечению верхней полки, очевидно, дает равную и противоположную силу. Таким образом, касательные напряжения по сечению швеллера приводятся к силам, показанным на рис. 210. Эта система сил статически эквивалентна силе Q , приложенной в точке O на расстоянии от центра стенки

$$e = \frac{Rb}{Q} = \frac{b^2ht}{4J_z}. \quad (d)$$

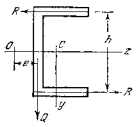


Рис. 210.

Отсюда видно что для получения простого изгиба с нейтральной осью, совпадающей с осью z , вертикальная плоскость, в которой действуют поперечные силы, должна проходить через точку O , называемую *центром сдвига*. При каком-либо другом положении этой плоскости изгиб балки будет сопровождаться кручением, и напряжения уже не будут следовать простому закону, в котором σ_x пропорционально y и не зависят от координаты z .

В случае изгиба углового сечения в вертикальной плоскости касательные напряжения τ в точках по mn будут направлены, как указано на рисунке 211, а и равны ¹⁾

$$\tau = \frac{Q}{J_z} \int y dF,$$

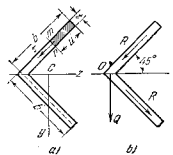


Рис. 211.

где интеграл представляет момент заштрихованной площади относительно оси z . Эти касательные напряжения дают равнодействующую силу в указанном на рис. 211, b направлении и равную

$$R = \frac{Qb^2t}{3J_z \sqrt{2}}.$$

Сила такой же величины получится также для нижней полки. Равнодействующая этих двух сил равна Q и проходит через точку O пересечения средних линий полки, которая, следовательно, в этом случае и является центром сдвига.

В предыдущих случаях мы рассмотрели балку с одной плоскостью симметрии, которые изгибаются перпендикулярно этой плоскости. В таком случае центр сдвига находится на оси симметрии поперечного сечения, и для определения его положения необходимо найти лишь одну координату. Рассмотрим теперь несимметричную балку, для которой необходимо найти две координаты, чтобы

¹⁾ При вычислении этих напряжений применяется тот же метод, что и в случае швеллера.

определить положение центра сдвига ¹⁾. В качестве примера мы возьмем швеллер одинаковой толщины, но с неодинаковыми полками (рис. 212). Взяв центральные оси y и z параллельно стенке и полкам, мы предположим сначала, что поперечные силы, действующие на балку, параллельны стенке и находятся на таком расстоянии от стенки, что не вызывают кручения балки. Вертикальная поперечная сила Q_y будет воспринята только стенкой.

Для вычисления горизонтальных поперечных сил в полках мы поступим, как и прежде, и рассмотрим усилия, действующие на элемент нижней полки, заштрихованный на рис. 212. Чтобы вычислить продольное усилие N , действующее

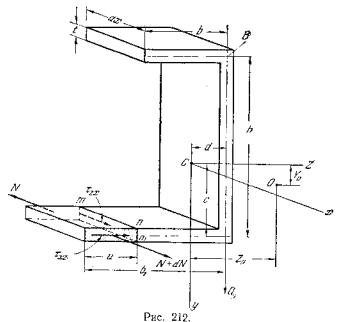


Рис. 212.

на элемент, мы воспользуемся уравнением (132) для продольных нормальных напряжений. Тогда мы получим

$$N = \int \sigma_x df = \frac{M_z}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left(J_y \int y df - J_{yz} \int z df \right),$$

где интегралы в правой части представляют моменты относительно осей z и y

¹⁾ Вопрос об определении центра сдвига был рассмотрен несколькими авторами. См., например, A. A. Griffith and G. L. Taylor, Advisory Comm. Aeronaut. (England), Tech. Repts. t. 3, стр. 950, 1917; R. Mair, Z. angew. Math. u. Mech., t. 7, стр. 197, t. 79, стр. 254 и т. 83, стр. 111 и 176; C. Weber, Z. angew. Math. u. Mech., t. 4, стр. 334, 1924; A. Eggenschwyler, Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 434, 1926. См. также статью автора и J. Franklin Inst., t. 239, стр. 201, 1945. В последнее время автор приобрел важное значение при проектировании самолетов. Обзор соответствующей литературы дан в статье P. Kuhn, Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Techn. Notes, N. 694.

г.ююди, заштрихованной на рис. 212, так что

$$\int y df = ctu$$

"

$$\int z df = -tu \left(b_1 - d - \frac{u}{2} \right) = t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right);$$

дифференцируя, получаем

$$\frac{dN}{dx} dx = \frac{Q_y dx}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y ctu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right],$$

и уравнение равновесия рассматриваемого элемента будет

$$\tau_{xz} dx = \frac{-Q_y dx}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y ctu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right].$$

Тогда горизонтальное касательное напряжение по поперечному сечению полки будет

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{-Q_y}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y cu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right],$$

и соответствующая касательная сила в полках равняется

$$t \int_0^{b_1} \tau_{xz} du = \frac{-Q_y b_1^3 t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} c}{2} - J_{yz} t \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]. \quad (c)$$

Так как силы, действующие на балку, все вертикальны, горизонтальные касательные силы в полках должны образовать пару, которую можно получить умножением поперечной силы в нижней полке на расстояние h . Тогда момент ²⁾ относительно центра тяжести C (рис. 212) всех касательных напряжений, действующих по поперечному сечению, будет

$$Q_y \left\{ d + \frac{b_1^3 ht}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} c}{2} - J_{yz} t \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \right\}.$$

Это указывает на то, что вертикальная плоскость, в которой действуют внешние силы, чтобы произвести изгиб балки без кручения, находится на расстоянии

$$z_0 = d + \frac{b_1^3 ht}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} c}{2} - J_{yz} t \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \quad (d)$$

от центра тяжести C поперечного сечения. В частном случае, когда полки одинаковы, оси y и z являются главными осями и J_{yz} отсутствуют, $c = \frac{h}{2}$, и мы получаем

$$z_0 = d + \frac{b^3 ht}{4J_z},$$

что согласуется с ранее полученным результатом (d), см. стр. 203.

Расстояние z_0 представляет горизонтальную координату центра сдвига. Чтобы вычислить координату y_0 , предположим, что внешние поперечные силы

²⁾ Момент, вращающий по часовой стрелке, считается положительным.

действуют в плоскости, параллельной плоскости xz . Для вычисления нормальных напряжений σ_x мы теперь воспользуемся уравнением (133). Рассматривая охват элемент, заштрихованный на рис. 212, и постулируя, как прежде, получаем

$$\epsilon_{zx} = \frac{-Qz}{J_{xz}^y - J_{yz}^2} \left[J_{yz} \epsilon_{tu} - J_x t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right].$$

Горизонтальная касательная сила в нижней полке равняется

$$t \int_0^{b_1} \tau_{xz} du = \frac{-Qz b_1^2 t}{J_{xz}^y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} \epsilon}{2} - J_x \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right].$$

Взяв момент этой силы относительно точки B (рис. 212) и разделив на горизонтальную касательную силу Q_z , вызываемую внешними силами, мы получим расстояние f плоскости действующих сил от точки B .

Тогда исконая координата центра сдвига будет

$$y_0 = f - c - h = -c - h + \frac{b_1^2 h t}{J_{xz}^y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} \epsilon}{2} - J_x \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]. \quad (g)$$

Для частного случая равных полок мы имеем $J_{yz} = 0$, $c = \frac{h}{2}$ и, выразив в числах d и J_x , можем показать, что выражение (g) обратится в нуль, и, следовательно, центр сдвига лежит на оси z . Координаты y_0 и z_0 , представляемые уравнениями (f) и (g), полностью определяют положение центра сдвига для швеллера, показанного на рис. 212.

В случае зетового сечения (рис. 213), рассматривая сначала действие поперечных сил в плоскости, параллельной стенке, и получив уравнение, подобное уравнению (e), мы можем легко доказать, что горизонтальные касательные силы в полках будут отсутствовать. Следовательно, горизонтальная координата z_0 центра сдвига также будет отсутствовать. Далее, рассматривая поперечные силы, действующие в горизонтальной плоскости, найдем, что горизонтальные касательные силы в полках равны $\frac{1}{2} Q_z$; это указывает на то, что плоскость горизонтальной нагрузки должна проходить через центр тяжести C .

Во всех случаях, когда полки тонкостенной балки пересекаются по одной оси O , как на примерах, показанных на рис. 214, найдено, что равнодействующая поперечная сила проходит через эту ось и эта же ось, очевидно, является осью центров сдвига.

Возвращаясь теперь к общему случаю игиба несимметричных балок, мы заключаем из предыдущих рассуждений, что для того, чтобы иметь простой изгиб балки (изгиб без кручения), внешние силы должны быть распределены по оси центров сдвига. Для

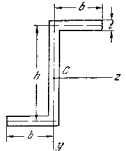


Рис. 213.

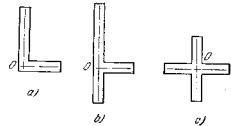


Рис. 214.

вычисления прогибов, вызываемых этими силами, мы можем воспользоваться теми же методами, что и в случае чистого изгиба (см. § 50). Мы можем разложить каждую силу на две составляющие, параллельные главным центральным осям поперечного сечения балки, исследовать изгиб балки в каждой из главных плоскостей, применяя обычные формулы для балок, и получить полные прогибы геометрическим сложением прогибов, найденных в двух главных плоскостях.

Другой прием заключается в том, чтобы выбрать ось y и z параллельно стенкам и полкам балки, как показано на рис. 212, разложить каждую действующую поперечную силу на две составляющие, параллельные осям y и z , и применить формулы (131) для сил в плоскости xy . Подобные формулы можно вывести для сил в плоскости xz . Окончательные прогибы получатся опять геометрическим сложением.

Это напряжение является численно наибольшим. В точке m мы получаем

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6Ql}{bh^2} - \frac{N}{bh}.$$

Когда сила P не параллельна одной из двух плоскостей симметрии, напряжения при изгибе, вызываемые ее поперечной составляющей Q , найдутся разложением Q на составляющей, параллельные этим плоскостям (см. § 51). Результирующее напряжение в какой-либо точке получается сложением этих напряжений от изгиба с сжимающими напряжениями, вызванными продольной силой.

ГЛАВА IX

ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ. ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

53. Изгиб, сопровождаемый растяжением или сжатием

Здесь предполагается, что призматический брусок нагружен силами в одной из его плоскостей симметрии, но, если прежде эти силы были перпендикулярны к оси бруска, то теперь они могут иметь составляющие вдоль оси бруска. Простой случай такого рода показан на рис. 215, который представляет колонну, нагруженную наклонной силой P . Эта сила разложена на поперечную составляющую Q и продольную N , причем предполагается, что колонна сравнительно жестка и прогиб так мал, что им можно пренебречь при рассмотрении напряжений, вызываемых силой N . Тогда результирующее напряжение в какой-либо точке получится сложением сжимающего напряжения от силы N с напряжением при изгибе от поперечной нагрузки Q . Случай гибкой колонны, в которой продольное усилие, благодаря вызываемому им прогибу колонны (рис. 215, б), имеет значительное влияние на изгиб, будет рассмотрен в дальнейшем. Напряжения от силы N постоянно во всех поперечных сечениях колонны и равно N/F , где F есть площадь поперечного сечения. Напряжение при изгибе зависит от момента, который увеличивается от нуля вверху до максимума Ql внизу. Следовательно, опасное сечение находится в заданном конце, и напряжения здесь в какой-либо точке на расстоянии y от оси z будут

$$\sigma_x = -\frac{Qly}{J_z} - \frac{N}{F}. \quad (a)$$

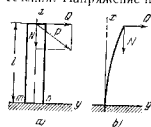


Рис. 215.

Полагая, например, что поперечное сечение колонны на рис. 215 есть прямоугольник с размерами $b \times h$, где $h = bh^2/12$. Тогда наибольшее сжимающее напряжение будет в точке n и равняется

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{6Ql}{bh^2} - \frac{N}{bh}. \quad (b)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее сжимающее напряжение в круглых деревянных столбах высотой 6 м и диаметром 20 см, показанных на рис. 216, если груз P на проволоке ABC равен 24 кг. Растягивающее усилие в каждом канате DF равно $S=400$ кг, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{10}$, $\sin \beta = \frac{1}{5}$ и $DK=4,5$ м.

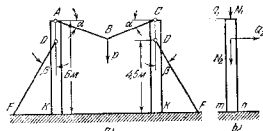


Рис. 216.

Решение. Составляющие силы в проволоке BC (рис. 216, б) будут $Q_1=120$ кг, $N_1=12$ кг. Составляющие силы в канате DF будут $Q_2=80$ кг и $N_2=392$ кг. На-



Рис. 217.

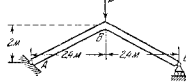


Рис. 218.

большой изгибающий момент должен быть в заданном конце, где $M_{\max} = 36000$ кгсм. Давление в том же поперечном сечении равно $N_1+N_2=404$ кг. Наибольшее сжимающее напряжение в точке m равняется

$$\sigma = \frac{4 \cdot 404}{\pi d^2} - \frac{32 \cdot 36000}{\pi d^3} = 1,3 + 45,9 = 47,2 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить наибольшее растягивающее напряжение в прямоугольной деревянной балке, показанной на рис. 217, если $S=1600$ кг, $b=20$ см, $h=25$ см.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = \frac{6 \cdot 404 \cdot 200}{21 \cdot 625} - \frac{1600}{500} = 41,6 \text{ кг/см}^2.$

3. Определить наибольшее сжимающее напряжение в конструкции ABC , которая подерживает нагрузку $P=800$ кг (рис. 218) и имеет жесткое соединение брусков в B , неподвижный шарнир в A и подвижную опору в C . Поперечное сечение брусков AB и BC представляет квадрат 25×25 см.

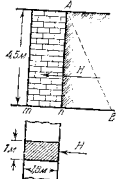


Рис. 219.

$$\text{Ответ. } \sigma = \frac{6 \cdot 400 \cdot 240}{25^3} + \frac{240}{25^2} = 37,2 \text{ кг/см}^2.$$

4. Кирпичная подпорная стена толщиной 1,8 м и высотой 4,5 м испытывает давление со стороны песчаной насыпи (рис. 219). Определить наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения внизу стены, если ее вес равен $\gamma=2200$ кг/м³ и боковое давление песка равняется 4400 кг на погонный метр. Распределение давления песка по высоте стены следует линейному закону, как показано прямой AB .

Ответ. Напряжение в m равняется

$$\sigma_m = \frac{2200 \cdot 4,5}{10000} - \frac{4400 \cdot 1,5 \cdot 100 \cdot 6}{100 \cdot 180^3} = -0,99 - 1,22 = -2,21 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в n равняется

$$\sigma_n = \frac{2200 \cdot 4,5}{10000} + \frac{4400 \cdot 1,5 \cdot 100 \cdot 6}{100 \cdot 180^3} = 0,23 \text{ кг/см}^2.$$

5. Определить толщину стены в предыдущей задаче, при которой напряжение в n будет равно нулю.

Ответ. 2 м.

6. На круглую колонну высотой 1,8 м действует сила P , составляющие которой Q и N равны 400 кг каждая. Найти диаметр колонны, если наибольшее сжимающее напряжение равняется 65 кг/см².

7. Найти σ_{\max} и σ_{\min} в поперечном сечении, находящемся посередине бруса BC (рис. 218), если вместо сосредоточенного груза P будет действовать вертикальная нагрузка $q=500$ кг/м, распределенная по оси ABC .

8. Круглый стержень AB (рис. 220), прикрепленный шарниром в B и опертый на гладкую вертикальную плоскость (без трения) в A , подвергается действию собственного веса. Определить положение поперечного сечения mn , в котором сжимающее напряжение будет наибольшим.

Решение. Обозначим через l длину стержня, через q вес единицы длины его и через α угол наклона к горизонту. Тогда горизонтальная реакция в A равняется $R=(ql/2) \sin \alpha$, сжимающее усилие в каком-либо поперечном сечении mn на расстоянии x от A равняется $qx \sin \alpha + (ql/2)(\cos^2 \alpha / \sin \alpha)$ и изгибающий момент в том же поперечном сечении равняется

$$M = \frac{ql}{2} x \cos \alpha - \frac{qx^2 \cos \alpha}{2}.$$

Наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении mn равно

$$\frac{4}{\pi d^3} \left(qx \sin \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{ql}{2} x \cos \alpha - \frac{qx^2 \cos \alpha}{2} \right),$$

где d есть диаметр стержня.

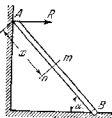


Рис. 220.

Приравняв нулю производную от этого выражения по x , получаем

$$x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8} \lg \alpha.$$

9. Стержень, показанный на рис. 215, имеет длину 2 м и диаметр 30 см. Определить величину силы P , если ее составяющие N и Q равны и наибольшее сжимающее напряжение в n равно 70 кг/см².

Ответ. $P=1280$ кг.

10. Сила P вызывает изгиб стержня ABC , заделанного в A (рис. 221). Определить угол поворота конца C при изгибе, если изгибающие моменты в A и B численно равны между собой.

Решение. Из равенства изгибающих моментов в A и B следует, что сила P проходит через среднюю точку D стержня AB . Тогда $P_x = P_y l / 2a$ и составляющие P_x и P_y могут быть теперь вычислены. Угол поворота поперечного сечения B вследствие изгиба части AB от составляющей силы P_y равен $P_y l^2 / 2EI$ по направлению часовой стрелки. Угол поворота того же поперечного сечения от составляющей силы P_x равен $P_x h l / EI$ в направлении против часовой стрелки. Угол поворота поперечного сечения C относительно поперечного сечения B , вследствие

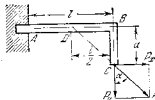


Рис. 221.

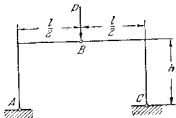


Рис. 222.

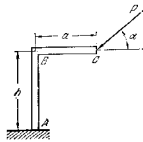


Рис. 223.

изгиба части BC стержня, равен $P_x a^2 / 2EI$ в направлении против часовой стрелки. Полный угол поворота конца C в направлении по часовой стрелке равняется

$$\frac{P_y l^3}{2EI} - \frac{P_x a l}{EI} - \frac{P_x a^3}{2EI} = -\frac{P_x a^3}{2EI}.$$

11. Трехшарнирная рама ABC (рис. 222) поддерживает вертикальную нагрузку P . Найти численно наибольший изгибающий момент M_{\max} в раме и сжимающее усилие N в горизонтальных стержнях.

$$\text{Ответ. } M_{\max} = \frac{Pl}{4}, \quad N = \frac{Pl}{4h}.$$

12. Найти угол наклона α силы P , действующей на стержень ABC (рис. 223), если известно, что прогиб в B равен нулю.

$$\text{Ответ. } \lg \alpha = \frac{2h}{3a}.$$

54. Внецентренная нагрузка короткой стойки

Внецентренная нагрузка есть частный случай сложения растягивающих или сжимающих напряжений с напряжениями от изгиба. Когда длина стержня не очень велика по сравнению с его поперечными размерами, его прогиб настолько мал, что им можно пренебречь по сравнению с первоначальным эксцентриситетом e ; поэтому можно пользоваться принципом сложения действия ¹⁾. Возьмем, например, случай сжатия продольной силой P , приложенной с эксцентриситетом e (рис. 224) на одной из двух главных осей поперечного сечения. Если мы приложим две равные и противоположные силы P в центре тяжести O поперечного сечения, то от этого условие не изменится, так как они эквивалентны нулю. Тогда мы получим осевое сжатие силой P , вызывающей непосредственно сжимающие напряжения $-P/F$, как показано на рис. 224, *b*, и изгиб в одной из главных плоскостей парой сил P , e , вызывающей нормальные напряжения $-(Pe/I_z)$, как показано на рис. 224, *c*. Следовательно, полное напряжение будет

$$\sigma_x = -\frac{P}{F} - \frac{Pe y}{J_z}. \quad (a)$$

Эпюра распределения этого полного напряжения показана на рис. 224, *d*. На рис. 224, *d* предполагается, что наибольшее напряжение от изгиба меньше осевого сжимающего напряжения, так что по всему поперечному сечению стержня будут лишь одни сжимающие напряжения. Если наибольшее напряжение от изгиба будет больше непосредственно сжимающего напряжения, то нулевая линия напряжений будет параллельна оси z и делит поперечное сечение на две зоны с растягивающими напряжениями налево и сжимающими напряжениями направо.

Для прямоугольного поперечного сечения со сторонами h и b (рис. 224, *a*) уравнение (a) становится

$$\sigma_x = -\frac{P}{bh} - \frac{12Pe y}{bh^3}, \quad (a')$$

и мы получаем подстановкой $y = -(h/2)$

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left(-1 + \frac{6e}{h} \right). \quad (b)$$

¹⁾ Случай внецентренной нагрузки длинных стержней см. § 56.

[Подстановкой $y = h/2$ мы получаем

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{P}{bh} - \frac{6Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right). \quad (c)$$

Можно видеть, что когда $e < h/6$, нигде по поперечному сечению знак напряжений не изменится. Когда $e = h/6$, то на основании уравнения (c) наибольшее сжимающее напряжение равняется $2P/bh$ и напряжение на противоположной стороне прямоугольного поперечного сечения равняется нулю. Когда $e > h/6$, то знак напряжений меняется, и положение нулевой линии напряжений получится приравняв к нулю общего выражения (a') для σ_x ; тогда

$$y = -\frac{h^2}{12e} \quad (d)$$

или, посредством обозначения i_z для радиуса инерции относительно оси z (см. Приложение)

$$y = -\frac{z^2}{e}. \quad (134)$$

Видно, что расстояние нулевой линии напряжений от центра тяжести O уменьшается с увеличением эксцентриситета e . То же рассуждение можно применить и в случае внецентренно растягивающей нагрузки. Уравнение (134) можно применить также для других форм поперечного сечения, если точка приложения нагрузки находится на одной из главных осей инерции.

Рассмотрим теперь случай, когда точка B приложения внецентренно сжимающей силы F не находится ни на одной из двух главных осей инерции поперечного сечения, принятых за оси y и z . Если взять m и n за координаты этой точки, то моменты силы F относительно осей y и z будут соответственно равны Pm и Pn . Используя принцип сложения действия сил, получим напряжения в какой либо точке F поперечного сечения

$$\sigma_x = -\frac{P}{F} - \frac{Pmy}{J_z} - \frac{Pnz}{J_y}; \quad (e)$$

первый член правой части представляет сжимающее напряжение, а два другие — напряжения от изгиба, вызываемые соответственно моментами Pm и Pn . Можно видеть, что распределение напряжений следует линейному закону. Уравнение нулевой линии напряжений получится приравняв к нулю правую часть уравнения (e) нулю. При помощи обозначений $J_z/F = i_z^2$ и $J_y/F = i_y^2$, где i_z и i_y — соответствующие радиусы инерции относительно осей z и y , получится

$$\frac{my}{i_z^2} - \frac{nz}{i_y^2} + 1 = 0. \quad (f)$$

Подставляя в это уравнение сначала $y = 0$, а затем $z = 0$, мы получаем точки M

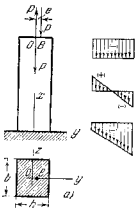


Рис. 224.

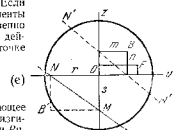


Рис. 225.

и N пересечения нулевой линии напряжений с осями координат z и y (рис. 225). Координаты этих точек s и r будут

$$s = -\frac{i_y^2}{n}, \quad r = -\frac{i_z^2}{m}, \quad (g)$$

откуда находим

$$n = -\frac{i_y^2}{s}, \quad m = -\frac{i_z^2}{r}.$$

Эти уравнения имеют такую же форму, как и уравнения (g), поэтому можно заключить, что когда нагрузка приложена в точке B' с координатами s и r , соответствующей нулевой линией будет линия $M'N'$, показанная на рисунке пунктиром и отсекающая на осях y и z отрезки m и n .

Существует другая важная зависимость между точкой приложения B нагрузки и положением соответствующей нулевой линии напряжений, а именно, когда B движется по линии B_1B_2 (рис. 226), то соответствующая нулевая линия напряжений поворачивается около некоторой постоянной точки B' . Это доказывается следующим образом: разложим нагрузку в B на две параллельные составляющие—одну в B_1 и другую в B_2 . Составляющая в B_1 действует в главной плоскости xz ; следовательно, соответствующая нулевая линия напряжений параллельна оси y и ее отрезок на Oz , как найдено из уравнения, аналогичного уравнению (134), равняется

$$s = -\frac{i_y^2}{n_1} \quad (h)$$

Рис. 226

Подобно этому нулевая линия напряжений для составляющей B_2 параллельна оси z , и ее расстояние от этой оси равняется

$$r = -\frac{i_z^2}{m_1}. \quad (i)$$

Для некоторого положения нагрузки на линии B_1B_2 напряжение будет равняться нулю в B' . Следовательно, когда точка приложения нагрузки движется по прямой B_1B_2 , то соответствующая нулевая линия напряжений поворачивается около точки B' , координаты которой определяются уравнениями (h) и (i).

ЗАДАЧИ

1. Площадь поперечного квадратного сечения стержня уменьшена на половину в m (рис. 227). Определить наибольшее растягивающее напряжение в поперечном сечении m , вызываемое продольной нагрузкой P .

$$\text{Ответ. } (\sigma_x)_{\max} = \frac{2P}{a^2} + \frac{Pa}{4} \frac{2\delta P}{a^3}.$$

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круглое поперечное сечение.

3. Стержень таврового сечения инцентренно нагружен силами P (рис. 228). Определить наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения в этом стержне, если $d = 1$ см, $h = 9$ см, ширина полки $b = 9$ см, $P = 1000$ кг.

Решение. Расстояния центра тяжести таврового сечения от низа и верха соответственно равны $h_1 = 2,47$ см и $h_2 = 6,53$ см. Эксцентриситет силы P равняется $e = 0,5 - 2,47 = -2,97$ см. Момент инерции $J_z = 118$ см⁴. Напряжения от изгиба будут

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Peh_1}{J_z} = \frac{1000 \cdot 2,97 \cdot 2,47}{118} = 62 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{Peh_2}{J_z} = -\frac{1000 \cdot 2,97 \cdot 6,53}{118} = -164 \text{ кг/см}^2.$$

Складывая их с растягивающим напряжением $P/F = 1000/17,05 = 58$ кг/см², получаем наибольшее растягивающее напряжение $62 + 58 = 120$ кг/см² и наибольшее сжимающее напряжение $164 - 58 = 106$ кг/см².

4. Определить наибольшее растягивающее напряжение в сечении m зажимной скобы, показанной на рис. 229, если $P = 120$ кг, $b = 7,5$ см и поперечное сечение представляет прямоугольник с размерами $2,5 \times 0,6$ см.

$$\text{Ответ. } \sigma_{\max} = 1520 \text{ кг/см}^2.$$

5. Определить ширину поперечного сечения m в предыдущей задаче так, чтобы σ_{\max} было равно 1300 кг/см².

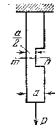


Рис. 227.

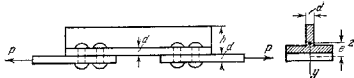


Рис. 228.

6. Найти наибольшее и наименьшее напряжения в заделанном поперечном сечении прямоугольной колонны, показанной на рис. 224, если $b = 25$ см, $h = 30$ см, $P = 2t$ и координаты точки B приложения нагрузки (рис. 225) равны $m = n = 5$ см. Найти положение нейтральной оси.

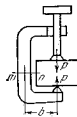


Рис. 229.

55. Ядро сечения

В предыдущем параграфе было показано, что для малого эксцентриситета e нормальные напряжения имеют один и тот же знак по всей площади поперечного сечения инцентренно нагруженного стержня. При больших значениях e нулевая линия напряжений пересекает поперечное сечение, и напряжения получают разных знаков. В случае материалов очень слабых при растяжении, как, например, бетон или кирпичная кладка, возникает вопрос об определении области, в пределах которой можно прикладывать сжимающую нагрузку, не вызывая по всему поперечному сечению растягивающих напряжений. Эта область называется **ядром сечения**. Метод определения ядра сечения иллюстрируется следующими простыми примерами.

В случае **круглого поперечного сечения** радиуса R можем заключить в силу симметрии, что ядро сечения представляет круг. Радиус a этого круга найдется из того условия, что когда точка приложения нагрузки находится на контуре ядра, соответствующая нулевая линия напряжений должна быть касательной к контуру поперечного сечения. Припоминая, что момент инерции площади круга относительно диаметра равен $\pi R^4/4$ (см. Приложение), в, следовательно, радиус инерции равен $i = \sqrt{J/F} = R/2$, находим из уравнения (134) подстановкой a вместо e и R

вместо y , что

$$a = \frac{r^2}{R} = \frac{R}{4}. \quad (135)$$

т. е. радиус ядра сечения равен одной четверти радиуса поперечного сечения.

Для случая *кругового кольцевого сечения* с внешним радиусом R_n и внутренним радиусом R_B имеем

$$J = \frac{\pi}{4} (R_n^4 - R_B^4), \quad i^2 = \frac{J}{F} = \frac{R_n^2 + R_B^2}{4},$$

и радиус ядра на основании уравнения (134) получается

$$a = \frac{r^2}{R_n} = \frac{R_n^2 + R_B^2}{4R_n}. \quad (136)$$

Для $R_B=0$ уравнение (136) совпадает с уравнением (135). Для очень тонкого кольца, когда R_n приближается к R_B , радиус a ядра приближается к значению $R_n/2$.

В случае *прямоугольного поперечного сечения* (рис. 230) нулевая линия напряжений совпадает со стороной bc , когда нагрузка приложена в точке A , на расстоянии $b/6$ от центра тяжести (см. стр. 213). Таким же образом нулевая линия напряжений совпадает со стороной gf , когда нагрузка находится в точке B , на расстоянии $h/6$ от центра тяжести. Когда нагрузка движется по линии AB , нейтральная ось поворачивается около точки g (см. стр. 214), не пересекая поперечного сечения. Следовательно, AB есть одна из сторон ядра сечения. Другие стороны вытекают из симметрии. Поэтому ядро сечения представляет ромб с диагоналями, равными $h/3$ и $b/3$. До тех пор, пока точка приложенная остается в пределах этого ромба, нулевая линия напряжений не пересекает поперечного сечения и напряжения не будут меняться по знаку.

Для двутаврового сечения (рис. 231) крайние положения нулевой линии напряжений, в которых она не пересекает поперечное сечение, определяются сторонами AB и CD и пунктирными линиями AC и BD . Соответствующие положения точки приложенная нагрузки могут быть определены из уравнения (134). По симметрии можно заключить, что эти точки будут вершинами ромба, заштрихованного на рис. 231.

Если точка приложения несимметричной нагрузки находится вне ядра сечения, то соответствующая нулевая линия напряжений пересекает поперечное сечение, и нагрузка вызывает не только сжимающие, но также и растягивающие напряжения. Если материал совсем не сопротивляется растягивающим усилиям, то часть поперечного сечения будет бездействовать, а оставшаяся — будет испытывать только сжимающие напряжения. Возьмем, например, прямоугольное поперечное сечение (рис. 232) с точкой приложения A нагрузки на главной оси yy и на расстоянии s от края сечения. Если смещение $h/3$, то часть поперечного сечения не будет работать. Рабочий участок может быть найден из того условия, что распределение сжимающих усилий по поперечному сечению следует линейному закону, изображенному на рисунке прямой mn , и что равнодействующая этих усилий равняется P . Так как эта равно-

действующая должна проходить через центр тяжести площади треугольника mnt , то размер mt рабочего участка поперечного сечения должен быть равен $3s$.

В случае кругового поперечного сечения (рис. 233), если эксцентриситет CA нагрузки больше $R/4$ и материал не сопротивляется растягивающим усилиям, будет работать только часть поперечного сечения. Пусть линия mn , перпендикулярная к AC , будет границей этого участка. Ее расстояние b от точки A может быть найдено из следующих условий: 1) сжимающие напряжения пропорциональны расстоянию y от mn , 2) сумма сжимающих усилий, приходящихся на рабочий участок поперечного сечения, равна нагрузке P и 3) момент этих усилий относительно mn равен моменту Pb нагрузки P относительно той же оси. Если обозначить наибольшее сжимающее напряжение через σ_{\max} , то сжимающее напряжение в некотором расстоянии y от mn будет

$$\sigma = \frac{y \sigma_{\max}}{b - y}$$

и для определения b получаются следующие уравнения:

$$\int \frac{y \sigma_{\max}}{b - y} dF = P, \quad \int \frac{y^2 \sigma_{\max}}{b - y} dF = Pb,$$

из которых

$$b = \frac{J_{mn}}{S_{mn}}, \quad (a)$$

где $J_{mn} = \int y^2 dF$ есть момент инерции площади рабочего участка поперечного сечения относительно оси mn и $S_{mn} = \int y dF$ есть статический момент площади рабочего участка поперечного сечения относительно той же оси. При помощи уравнения (а) положение A для данного положения mn легко можно найти. То же уравнение можно применить также и для других форм поперечного сечения при условии, что A находится на одной из главных осей¹⁾. Если нагрузка не приложена на главной оси, задача об определении рабочего участка поперечного сечения становится более сложной²⁾.

При помощи понятия о ядре сечения можно значительно упростить вычисления наибольших напряжений от изгиба в случае, когда изгиб происходит не в главной плоскости. Например, пусть mt на рис. 230 будет продольная плоскость балки, в которой действует изгибающий момент M , и mn — соответствующая нейтральная ось, которая образует угол α с плоскостью mt (см. стр. 195). Обозначая через σ_{\max} наибольшее напряжение в наиболее удаленной точке s и через d е расстояние от нейтральной оси mn , находим, что напряжение в какой либо другой

¹⁾ Для случаев круглых поперечных сечений и круглых кольцевых сечений, которые являются важным при расчете напряжений в трубах, изданы таблицы, упрощающие эти вычисления. (См. Kesk, Z. Architekt. u. Ing. Ver. (Hannover), стр. 627, 1842; см. также Z. Ver. deut. Ing., стр. 1321, 1902 и статья G. D r e y e r, в Bautechnik, 1925.

²⁾ Некоторые расчеты для прямоугольных поперечных сечений можно найти в следующих статьях: F. E n g e s s e r, Zentr. Bauverwaltung, стр. 429, 1919; O. H e n k e l s, там же, стр. 447, 1918; K. P o h l, Der Eisenbau, стр. 211, 1918; F. K. E s l i n g, Proc. Inst. Civil Engrs. (London), т. 3, 1905—1906.

Рис. 230.

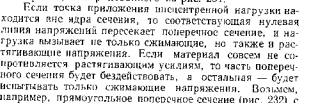
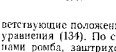


Рис. 231.



Рис. 232.



Рис. 233.



точке, находящейся на расстоянии w от nn , будет $\sigma = \sigma_{\max} w/d$, в момент всех усилий, распределенных по поперечному сечению, относительно оси nn равняется

$$\frac{\sigma_{\max} w^2}{d} dF = \frac{\sigma_{\max}}{d} J_{nn}. \quad (b)$$

где J_{nn} есть момент инерции поперечного сечения относительно оси nn . Момент внешних сил относительно той же оси равняется $M \sin \alpha$. Приравняв это правой части уравнения (b), имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{Md \sin \alpha}{J_{nn}}. \quad (c)$$

Это уравнение можно значительно упростить, пользуясь свойствами ядра сечения ¹⁾. Пусть O будет точка пересечения плоскости mm с ядром сечения и r — ее расстояние от центра тяжести поперечного сечения. Из свойств ядра сечения вытекает, что сжимающая сила P , приложенная в точке O , вызывает напряжение, равное нулю, в вершине c . Следовательно, растягивающее напряжение, вызываемое в точке с изгибающим моментом Pr , действующим в плоскости mm , численно равно сжимающему напряжению P/F от силы P или, подставляя Pr вместо M в уравнение (c), получаем

$$\frac{P}{F} = \frac{Prd \sin \alpha}{J_{nn}},$$

откуда

$$\frac{d \sin \alpha}{J_{nn}} = \frac{1}{Fr}. \quad (d)$$

Вставляя это в уравнение (c), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Fr}. \quad (137)$$

Произведение Fr называется моментом сопротивления поперечного сечения в плоскости mm . Это определение согласуется с определением, которое мы имели прежде (см. стр. 86), и для изгиба в главной плоскости Fr становится равным W .

ЗАДАЧИ

1. Определить ядро сечения профиля двутавровой балки, для которой $F = 151 \text{ см}^2$, $J_x = 83860 \text{ см}^4$, $i_x = 23,5 \text{ см}$, $J_y = 1700 \text{ см}^4$, $i_y = 3,36 \text{ см}$. Ширина полка $b = 17,6 \text{ см}$.

Ответ. Ядро сечения представляет ромб с диагоналями, равными 36,82 см и 2,56 см.

2. Определить радиус ядра кругового кольцевого сечения, если $R_n = 25 \text{ см}$ и $R_e = 20 \text{ см}$.

Ответ. Радиус ядра $a = 10,25 \text{ см}$.

3. Определить ядро поперечного сечения, имеющего форму равностороннего треугольника.

4. Определить ядро поперечного сечения квадратной тонкой трубки.

Решение. Если h — толщина трубки и b — сторона квадратного поперечного сечения, то имеем:

$$J_x = J_y \approx \frac{2}{3} hb^3, \quad i_x^2 = i_y^2 = \frac{b^2}{6}.$$

Ядро сечения есть квадрат с диагональю

$$d = 2 \frac{i_x^2}{b} = \frac{2b}{3}.$$

¹⁾ См. R. L. and d. Z. Architekt. et Ingenieurw., стр. 291, 1897.

56. Внецентренное сжатие гибкой симметричной колонны

При рассмотрении изгиба гибкой колонны под действием внецентренной нагрузки (рис. 234) прогибом f уже более нельзя пренебрегать по сравнению с эксцентриситетом e . Предположим, что эксцентриситет имеется в плоскости симметрии, тогда изгиб будет происходить в той же продольной плоскости xu , в которой действует нагрузка P , и изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn будет

$$M = -P(f+e-y). \quad (a)$$

При определении знака момента необходимо заметить, что, вращая рис. 234 по часовой стрелке на угол $\pi/2$, мы получим те же направления координатных осей, которые были приняты при выводе уравнения (79). Поэтому, следуя правилу, представленному на рис. 63b, мы берем момент (a) со знаком минус, так как изогнутая ось обращена вогнутостью в сторону положительного направления оси y . Дифференциальное уравнение изогнутой оси получится подстановкой (a) в уравнение (76), а именно

$$FJ_x \frac{d^2y}{dx^2} = P(f+e-y). \quad (b)$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{P}{FJ_x} = p^2, \quad (138)$$

получаем из уравнения (b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = p^2(f+e). \quad (c)$$

Путем подстановки можно легко доказать, что уравнение

$$y = c_1 \sin px + c_2 \cos px + f+e \quad (d)$$

есть решение уравнения (c). Это решение содержит две постоянные интегрирования c_1 и c_2 , величины которых должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить условиям на концах колонны и получить истинную изогнутую ось колонны. На нижнем конце, который является заделанным, условия следующие:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0. \quad (e)$$

Пользуясь этими условиями совместно с выражением (d) и его

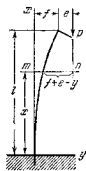


Рис. 234.

первой производной, получаем

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -(f + e),$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси (d) получается в виде

$$y = (f + e)(1 - \cos px). \quad (f)$$

Чтобы получить величину прогиба f на верхнем конце колонны, мы подставляем $x = l$ в правую часть уравнения (f). Тогда прогиб y в левой части должен быть равен f , и мы получаем уравнение

$$f = (f + e)(1 - \cos pl),$$

откуда

$$f = \frac{e(1 - \cos pl)}{\cos pl}. \quad (139)$$

Подставляя это в уравнение (f), получаем уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pl}. \quad (140)$$

Пользуясь этим уравнением, мы можем легко вычислить прогиб в любом поперечном сечении стержня.

В случае короткой стойки, которая была рассмотрена в § 54, величина pl мала по сравнению с единицей, и с достаточной точностью можно принять

$$\cos pl \approx 1 - \frac{1}{2} p^2 l^2. \quad (g)$$

Пользуясь этим значением $\cos pl$ и пренебрегая величиной $p^2 l^2 / 2$ в знаменателе выражения (139), как малой величиной по сравнению с единицей, мы получаем

$$f = \frac{ep^2 l^2}{2} = \frac{Pcl^2}{2EJ_z}. \quad (h)$$

Это представляет величину прогиба на конце консоли, изгибаемой парой сил Pe , приложенной на конце. Следовательно, использование приближенного выражения (g) равносильно тому, что пренебрегается влиянием прогибов на величину изгибающего момента и принимается взамен него постоянный момент, равный Pe .

Если pl не мало, что обычно бывает в случаях, когда колонна является гибкой, то при вычислении f мы должны пользоваться выражением (139). Таким путем мы находим, что прогиб уже не пропорционален нагрузке P . Он увеличивается гораздо быстрее, чем P , как это видно из значений этого прогиба, данных во второй строчке таблицы 2.

Таблица 2
Прогибы, вызываемые внецентренной продольной нагрузкой

pl	0,1	0,5	1,0	1,5	$\pi/2$
приближенное f	0,005e	0,139e	0,851e	13,1e	∞
$\sec pl$	0,005e	0,139e	0,840e	12,8e	∞
$P/P_{кр}$	1,005	1,140	1,867	13,2	∞
	0,004	0,101	0,403	0,911	1

Наибольший изгибающий момент имеет место в заделанном конце колонны и равняется

$$M_{\max} = P(e + f) = Pe \sec pl. \quad (141)$$

Ряд значений $\sec pl$ дан в четвертой строчке вышеприведенной таблицы. Эти значения показывают, как быстро увеличивается момент, когда pl приближается к значению $\pi/2$. Это явление будет рассмотрено в следующем параграфе.

Здесь, однако, необходимо повторить, что в рассматриваемом случае нет пропорциональности между величиной сжимающей силы и прогибом f , который она вызывает. Следовательно, здесь не может быть применен принцип сложения действия сил (стр. 144). Сила P , направленная по оси, вызывает только сжатие стержня, но когда та же сила действует вместе с изгибающей парой Pe , она вызывает не только сжатие, но также и дополнительный изгиб, так что полная деформация не может быть получена простым сложением продольного сжатия от силы P и изгиба от пары сил Pe . Причину, почему в этом случае не применим принцип сложения действия сил, можно легко объяснить, если мы сравним эту задачу с изгибом балки поперечными грузами. В последнем случае можно предположить, что малые прогибы балки не изменяют расстояния между силами, и изгибающие моменты можно вычислить без рассмотрения прогиба балки. В случае внецентренного сжатия колонны прогибы, вызываемые парой сил Pe , совершенно изменяют характер действия осевой нагрузки, которая вынуждена производить как сжатие, так и изгиб. В каждом случае, когда деформация, возникающая от одной нагрузки, изменяет действие другой нагрузки, будет найдено, что окончательная деформация не может быть получена методом сложения действия сил.

Предыдущие рассуждения относились к изгибу в плоскости симметрии колонны. Если колонна имеет две плоскости симметрии и эксцентриситет e не находится на одной из главных осей поперечного сечения, то необходимо разложить изгибающую пару Pe на две составляющие пары, каждая из которых действует в плоскости симметрии колонны. Тогда можно будет исследовать изгиб в каждой из двух плоскостей таким же способом, как рассмотрено выше.

Приведенные выводы об изгибе колонны, заделанной одним концом, можно также применить к случаю стойки, внецентренно сжатой двумя равными и противоположными силами P (рис. 235). На основании симметрии можно заключить, что среднее поперечное сечение A не поворачивается при изгибе, и каждая половина стойки на рис. 235 находится точно в таких же условиях, как стойка на рис. 234. Следовательно, прогиб и наибольший изгибающий момент получаются подстановкой $l/2$ вместо l в уравнения (139) и (141). Таким путем мы получим

$$f_{\max} = \frac{e \left(1 - \cos \frac{pl}{2}\right)}{\cos \frac{pl}{2}}, \quad (142)$$

$$M_{\max} = Pe \sec \frac{pl}{2}, \quad (143)$$

и уравнение для наибольшего сжимающего напряжения получается

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W} \sec \frac{pl}{2},$$

где W означает момент сопротивления.

ЗАДАЧИ

1. Найти прогиб в середине и наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения и внецентренно сжатой стальной стойке с шарнирными концами длиной 3 м, если поперечное сечение представляет швеллер с высотой 14 см, $J_x = 53,2 \text{ см}^4$, $J_y = 563,7 \text{ см}^4$, $F = 18,51 \text{ см}^2$, шириной полок 5,8 см. Расстояние между центром тяжести и наружной гранью стенки швеллера $e_0 = 1,71 \text{ см}$ и сжимающая сила $P = 1,8 \text{ т}$ действует по линии пересечения плоскости симметрии швеллера с наружной гранью стенки швеллера.

Ответ. $f = 0,363 \text{ см}$, $\sigma_{\max} = 193 \text{ кг/см}^2$ — растягивающее напряжение, $\sigma_{\min} = 169 \text{ кг/см}^2$ — сжимающее напряжение.

2. Стальной брус квадратного поперечного сечения $5 \times 5 \text{ см}$ и длиной 1,8 м внецентренно сжимается силами $P = 400 \text{ кг}$. Эксцентриситет e направлен по диагонали квадрата и равен 2,5 см. Найти наибольшее сжимающее напряжение, полагая, что стержень имеет шарнирные концы.

Ответ. $\sigma_{\max} = 85 \text{ кг/см}^2$.

3. Стальной стержень, имеющий длину 1,2 м и прямоугольное поперечное сечение $2,5 \times 5 \text{ см}$, сжимается двумя силами $P = 400 \text{ кг}$, приложенными в вершинах концевых поперечных сечений, так что эксцентриситет направлен по диагонали поперечного сечения и равен половине длины диагонали. Найти наибольшее сжимающее напряжение, считая концы шарнирными.

Ответ. $\sigma = 231 \text{ кг/см}^2$.

57. Критическая нагрузка

В предыдущем параграфе было указано, что прогиб внецентренно сжатой колонны очень быстро увеличивается, когда величина pl в уравнении (139) приближается к значению $\pi/2$. Когда pl становится равным $\pi/2$, то формулы (139) для прогибов и (141) для наибольшего изгибающего момента дают бесконечно большие значения. Чтобы найти соответствующее значение нагрузки, мы воспользуемся формулой (138). Подставляя $p = \pi/2l$ в это выражение, мы находим,

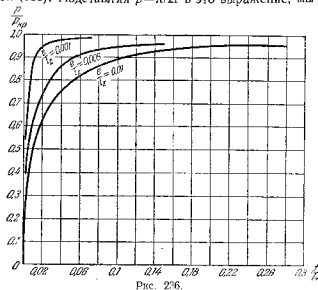


Рис. 236.

что значение нагрузки, при котором выражения (139) и (141) становятся бесконечно большими, равняется

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_x}{4l^2}. \quad (144)$$

Это значение, которое зависит только от размеров колонны и модуля упругости материала, называется *критической нагрузкой* или *эйлеровой нагрузкой*, так как Эйлер был первым, который вывел это значение в своем знаменитом исследовании упругих кривых¹⁾. Чтобы более ясно видеть физическое значение этой нагрузки, построим кривые, представляющие зависимость между нагрузкой P и прогибом f , каковая дается уравнением (139). Несколько кривых такого рода для различных значений отношения e/l_0 , т. е. эксцентриситета к радиусу инерции, показано на рис. 236. Абсциссы этих

¹⁾ Цитировано на стр. 125.

кривых представляют значение отношения f/l , в то время как ординаты представляют значение отношения $P/P_{кр}$, т. е. значения отношения действующей нагрузки к ее критическому значению, определяемому уравнением (144).

Из кривых видно, что прогибы f делаются все меньше и меньше и кривые все ближе и ближе подходят к вертикальной оси по мере того, как уменьшается эксцентриситет e . В то же самое время прогибы быстро увеличиваются, когда нагрузка P приближается к ее

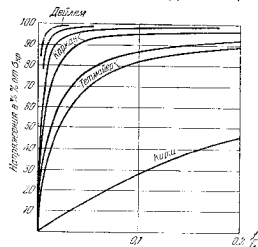


Рис. 237.

критическому значению (144), и все кривые имеют своей асимптотой горизонтальную линию $P/P_{кр} = 1$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси (79), которое было использовано при изложении предыдущего параграфа, было выведено на основании предположения, что прогибы малы по сравнению с длиной l стержня. Следовательно, формула (139) для прогиба f не может дать нам точного результата, когда P весьма близко к $P_{кр}$. Однако кривые на рис. 236 указывают, что независимо от того, насколько мал может быть эксцентриситет e , возникают весьма большие прогибы, если нагрузка P достаточно близка к ее критическому значению. Если прогибы становятся большими, то изгибающий момент в заделанном конце и напряжения также получаются большими.

Эксперименты, относящиеся к сжатию колонн, показывают, что даже, когда приняты все практические меры предосторожности к тому, чтобы приложить нагрузку центрально, всегда имеется некоторый неизбежный малый эксцентриситет. Следовательно, в таких опытах нагрузка P вызывает не только сжатие, но и изгиб. Кривые на рис. 237 показывают результаты таких опытов, полученные

некоторыми экспериментаторами. Можно видеть, что с увеличением точности в приложении нагрузки кривые все ближе и ближе подходят к вертикальной оси и быстрое увеличение прогиба становится все более и более резко выраженным, когда нагрузка приближается к ее критическому значению. Нагрузки P , которые близки к их критическим значениям, всегда вызывают большие деформации, обычно имеющие место за пределами упругости материала, так что после такой нагрузки колонна теряет свою практическую пригодность. Это указывает на то, что критическая нагрузка, определяемая уравнением (144), должна рассматриваться как предельная нагрузка, которая производит полное разрушение колонны. В практических приложениях допустимая нагрузка должна быть меньше критической нагрузки, и она получается путем деления критического значения нагрузки на некоторый коэффициент безопасности. Дальнейшее обсуждение этого вопроса находится в следующих двух параграфах.

В предыдущем изложении была рассмотрена колонна с одним заделанным концом и другим свободным. Подобные выводы могут быть сделаны в случае стойки с шарнирными концами (рис. 235). Уравнения (142) и (143) дают бесконечно большие значения, когда

$$\frac{pr}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя вместо r его значение из формулы (138), мы получаем в этом случае

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{\mu}. \quad (145)$$

Это есть критическое значение сжимающей силы для стойки с шарнирными концами. Рис. 238.

В случае сжатия колонны с заделанными концами изгиб имеет форму, показанную на рис. 238. Изогнутую ось можно рассматривать как состоящую из четырех участков, каждый из которых подобен кривой, полученной ранее для колонны с одним заделанным и другим свободным концом. В этом случае критическое значение нагрузки найдется подстановкой $l/4$ вместо l в уравнение (144), что дает

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ_x}{\mu}. \quad (146)$$

Такова критическая нагрузка для колонны с заделанными концами. Необходимо отметить, что при выводе уравнения (139) предполагалось, что эксцентриситет находится в направлении оси y и что эта ось является осью симметрии. Если колонна имеет две



Рис. 238.

плоскости симметрии, то подобные формулы будут получены, если первоначальный эксцентриситет находится в направлении оси z . Тогда изгиб будет происходить в плоскости xz , и, чтобы вычислить прогибы, нужно в уравнение (139) подставить J_y вместо J_x . Если сделана попытка приложить нагрузку центрально и изгиб произойдет в результате малого неизбежного эксцентриситета, то мы должны рассматривать изгиб в обеих главных плоскостях xy и xz , и при вычислении критического значения нагрузки мы должны в уравнениях (144), (145) и (146) подставить меньший из двух главных моментов инерции. В последующем изложении предполагается, что J_x есть наименьший главный момент инерции и i_z — соответствующий радиус инерции.

При вычислении прогибов иногда бывает удобно применять приближенные формулы вместо точных формул (139) и (142). В предыдущем параграфе было показано (стр. 220), что для малых нагрузок, т. е. когда ρl есть малая дробь, скажем меньше $\frac{1}{10}$, прогиб определяется с достаточной точностью из уравнения

$$f = \frac{Pe^2}{2EJ_z}, \quad (a)$$

в котором влиянием продольной силы на изгиб пренебрегается и предполагается, что изгибающий момент Pe является постоянным. Для больших нагрузок уравнение (a) является недостаточно точным, и необходимо принять во внимание влияние сжимающей силы на изгиб. Это влияние зависит, главным образом, от отношения $P/P_{кр}$, и прогиб может быть получен с весьма удовлетворительной точностью из приближенной формулы

$$f = \frac{Pe^2}{2EJ_z} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (b)$$

Прогибы, вычисленные по этой формуле, даны в третьей строчке таблицы 2 на стр. 221. Сравнивая эти числа с числами второй строчки той же таблицы, видим, что эта формула (b) является достаточно точной почти до критического значения нагрузки.

Подобная приближенная формула для прогиба стойки с шарнирными концами представится в виде ¹⁾

$$f = \frac{Pe^2}{8EJ_z} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (c)$$

Первый множитель в правой части представляет прогиб, вызванный

¹⁾ Это приближенное решение было дано Thomas'ом Joung'ом в его знаменитой книге «A course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts», London, 1807.

двумя парами сил Pe , приложенными на концах. Второй множитель представляет влияние на прогиб продольной сжимающей силы P .

Уравнение (c) весьма полезно для определения критической нагрузки из опыта со сжатой стойкой. Если результаты такого опыта представлены в форме кривой, подобной кривым, показанным на рис. 237, то для определения $P_{кр}$ нужно провести горизонтальную асимптоту к этой кривой. Эта операция не может быть сделана с достаточной точностью, особенно если неизбежные эксцентриситеты не очень малы и кривая не поворачивается очень резко при приближении к горизонтальной асимптоте. Более удовлетворительное определение $P_{кр}$ получается при помощи уравнения (c). Разделив это уравнение на $P/P_{кр}$, мы получим

$$\frac{f}{P} P_{кр} = \frac{e^2 \pi^2}{8} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}$$

и

$$\frac{f}{P} P_{кр} - f = \frac{e^2 \pi^2}{8}.$$

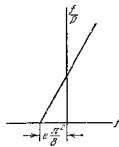


Рис. 239.

Это уравнение показывает, что если мы возьмем за абсциссы прогибы f , измеренные при опыте, а за ординаты — отношение f/P , то построенный на этих координатах график представит прямую линию (рис. 239). Эта линия пересечет горизонтальную ось ($f/P = 0$) на расстоянии $e^2 \pi^2 / 8$ от начала координат, и величина, обратная тангенсу угла наклона линии, даст критическую нагрузку ¹⁾.

58. Критическое напряжение. Расчет колонн

Рассматривая случай стойки с шарнирными концами, мы получим критическое напряжение путем деления критической нагрузки, определяемой из уравнения (145), на площадь поперечного сечения. Таким путем мы находим

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{(l/i_z)^2}. \quad (147)$$

Видно, что для данного материала значение критического напряжения зависит от величины отношения l/i_z , которое называется гибкостью стержня. На рисунке 240 кривая ACB представляет ²⁾

¹⁾ Этот метод, указанный R. V. Southwell'ом Proc. Roy. Soc. (London) A., т. 135, стр. 601, 1932, оказался весьма полезным и теперь широко применяется при испытаниях колонн.

²⁾ Эта кривая иногда называется кривой Эйлера, так как она получена из формулы Эйлера для критической нагрузки.

зависимость между $\sigma_{кр}$ и l/i_z для случая стали, имеющей $E=2 \cdot 10^6$ кг/см². Необходимо отметить, что кривая вполне определяется величиной модуля упругости материала и не зависит от его предела прочности. Для больших значений гибкости l/i_z критическое напряжение становится малым и это указывает на то, что очень гибкая стойка выпучивается и теряет свою прочность при очень малом сжимающем напряжении. Это положение не может быть улучшено, если взять сталь высокой прочности, так как модуль упругости стали значительно не изменяется благодаря примесям и термической обработке и остается практически постоянным.

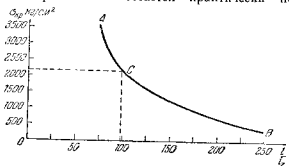


Рис. 240.

Стойка может быть сделана более прочной путем увеличения момента инерции J_z и радиуса инерции i_z , что может быть очень часто выполнено без какого-либо увеличения площади поперечного сечения путем расположения материала стойки по возможности дальше от нейтральной оси. Таким образом, колонны трубчатого сечения более экономичны, чем колонны со сплошным сечением. Когда гибкость уменьшается, то критическое напряжение увеличивается, и кривая ACB приближается асимптотически к вертикальной оси. Однако должен быть некоторый предел применения кривой Эйлера для коротких стоек. Вывод выражения для критической нагрузки основан на применении дифференциального уравнения (79) для изогнутой оси, а при выводе этого последнего предполагалось, что материал совершенно упругий и следует закону Гука (см. § 31). Поэтому кривая ACB на рис. 240 дает удовлетворительные результаты лишь для сравнительно гибких стержней, для которых $\sigma_{кр}$ остается в пределах упругости материала. Для коротких стоек, для которых $\sigma_{кр}$, полученное из уравнения (147), выше предела пропорциональности материала, кривая Эйлера не дает удовлетворительного результата и нужно прибегнуть к опытам на продольный изгиб стоек, сжатых за пределом пропорциональности. Эти опыты показывают, что стойки из такого материала, как строительная сталь, которая имеет резко выраженный предел текучести, теряют

свою устойчивость и выпучиваются, как только сжимающее напряжение становится равным пределу текучести. Некоторые результаты опытов показаны на рис. 241. Материалом является строительная сталь, имеющая резко выраженный предел текучести $\sigma_{т} = 3000$ кг/см². Видно, что для стоек, обладающих относительно большой гибкостью ($l/i_z > 80$), опытные значения критических напряжений совпадают удовлетворительно с кривой Эйлера, в то время как для коротких стоек критическое напряжение остается практически независимым от гибкости l/i_z и равняется пределу текучести.

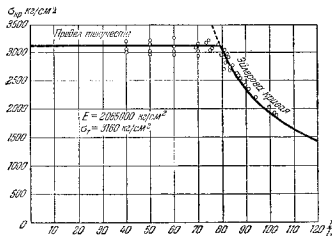


Рис. 241.

В случае обыкновенной низкоуглеродистой стали предел текучести не так резко выражен, как в предыдущем примере, и имеет место при более низком напряжении. Для таких сталей мы можем принять $\sigma_{т} = 2200$ кг/см². Предел пропорциональности также значительно ниже, так что кривая Эйлера удовлетворительна лишь для гибкостей выше $l/i_z = 100$, что соответствует сжимающему напряжению $\sigma_{кр} = 2000$ кг/см². При более высоких напряжениях, т. е. для $l/i_z < 100$, материал не следует закону Гука, и кривой Эйлера пользоваться нельзя. Она обычно заменяется в неупругой области двумя прямыми линиями AB и BC , как показано на рис. 242. Горизонтальная линия AB соответствует пределу текучести, а наклонная линия BC взята для напряжений между пределом пропорциональности и пределом текучести материала.

Имея такую диаграмму, как линия $ABCD$ на рис. 242, построенная для обыкновенной строительной стали, мы можем легко получить критическое напряжение для стальной стойки любых размеров. Необходимо лишь вычислить в каждом частном случае значение гибкости l/i_z и взять соответствующую ординату из кривой.

Чтобы получить безопасное напряжение для стойки, необходимо критическое напряжение разделить на надлежащий коэффициент безопасности. При выборе этого коэффициента необходимо принять во внимание, что, так как гибкость увеличивается, различные недостатки, такие как первоначальная кривизна колонны, по-видимому, увеличиваются. Поэтому кажется логичным вводить переменный коэффициент безопасности, который увеличивается с увеличением гибкости. В некоторых технических условиях коэффициент безопасности увеличивается от 1,7 для $li/z=0$, до 3,5 для

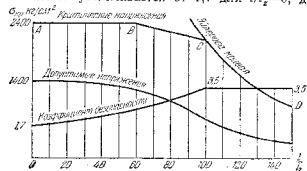


Рис. 242.

$li/z=100$. Он изменяется таким образом, что допускаемые напряжения в неупругой области следуют параболическому закону. Для $li/z > 100$ коэффициент безопасности принимается постоянным и равным 3,5 в допускаемые напряжения вычисляются при помощи кривой Эйлера. На рис. 242 даны кривые, которые представляют допускаемые напряжения и коэффициенты безопасности как функции гибкости для обыкновенной строительной стали.

Выше была рассмотрена стойка с шарнирными концами. Этот случай иногда называется *основным случаем* продольного изгиба стоек, так как он встречается очень часто при расчете сжатых элементов ферм с шарнирными узлами. Допускаемые напряжения, определяемые по диаграмме рис. 242 для основного случая, также могут быть использованы в других случаях при условии, если мы возьмем вместо действительной длины колонны *приведенную длину*, зависящую от условий на концах колонны. Рассматривая, например, случай колонны с одним заделанным и другим свободным концом (см. стр. 219), а также колонну с обоими заделанными концами (см. стр. 225), мы можем представить соответствующие формулы для критических нагрузок в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(2l)^2} \quad \text{и} \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Сравнивая эти формулы с формулой (145) для основного случая, мы можем заключить, что при расчете колонны с одним заделанным и другим свободным концом мы должны взять длину в два раза больше действительной длины, чтобы воспользоваться диаграммой рис. 242. В случае колонны с обоими заделанными концами приведенная длина равна половине действительной длины.

Подбор надлежащих размеров поперечного сечения колонны обычно производится путем последовательных попыток. Зная нагрузку P , действующую на колонну, мы принимаем некоторые размеры поперечного сечения и вычисляем i_z и li/z для этих размеров. Тогда значение безопасного сжимающего напряжения получится из диаграммы рис. 242. Умножая это значение на площадь принятого поперечного сечения, получим допускаемую нагрузку на колонну. Если эта нагрузка не меньше и незначительно больше P , то принятое поперечное сечение является удовлетворительным. В противном случае вычисления нужно повторить. В случае колонны с заделанными концами при вычислении i_z принимается площадь поперечного сечения брутто, так как закладочные отверстия не оказывают заметного влияния на величину критической нагрузки. Однако при вычислении безопасной нагрузки на колонну допускаемое напряжение умножается на площадь поперечного сечения нетто для того, чтобы застраховать от чрезмерных напряжений в колонне.

ЗАДАЧИ

1. Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения $2,5 \times 5$ см и с шарнирными концами сжимается продольными силами. Определить наибольшую длину, при которой можно применить уравнение (147) для критического напряжения, если предел пропорциональности материала равен 2000 кг/см^2 и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Определить величину критического напряжения, если длина стержня равна 1,5 м.

Ответ. Наибольшая длина = 72 см. Критическое напряжение для $l=1,5$ м равняется 457 кг/см^2 .

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круговое поперечное сечение диаметром 2,5 см и концы его заделаны.

3. Определить критическое сжимающее напряжение для бруса двутаврового сечения, длина которого равна 1,8 м и концы которого заделаны. $J_z = 64,4 \text{ см}^4$, $J_y = 712 \text{ см}^4$ и $F = 21,5 \text{ см}^2$. Определить безопасную нагрузку при помощи кривой рис. 242.

Ответ. $\sigma_{кр} = 1830 \text{ кг/см}^2$, $li/z = 104$, безопасная нагрузка = 11 240 кг.

4. Решить предыдущую задачу, полагая, что концы колонны заделаны. Воспользоваться рис. 242.

Ответ. $\sigma_{кр} = 2200 \text{ кг/см}^2$, коэффициент безопасности = 2, безопасная нагрузка = 23 650 кг.

5. Вычислить при помощи рис. 242 безопасную нагрузку для стержня (рис. 243), составленного из двух двутавровых балок того же поперечного сечения, что и в вышеприведенной задаче 3. Длина стержня равна 3 м и он имеет шарнирные концы. Предположить, что соединение осуществлено так жестко, что обе двутавровые балки работают, как один брус.



Рис. 243.

Решение. $J_z = 2 \times 712 = 1424 \text{ см}^4$, $J_y = 2 [64,4 + 21,5 \times (5)^2] = 1204 \text{ см}^4$. Поэтому большее значение гибкости равно

$$\frac{i}{i_y} = \frac{300}{\sqrt{\frac{1204}{2 \cdot 21,5}}} = 56,7,$$

и из рис. 242 находим, что допустимое сжимающее напряжение равняется 1030 кг/см^2 .

Безопасная нагрузка = $1030 \cdot 2 \cdot 21,5 = 44 \cdot 300 \text{ кг}$.

6. Решить предыдущую задачу, полагая, что концы стержня заделаны.

7. Колонна длиной 3 м с шарнирными концами состоит из двух швеллеров, имеющих $J_z = 53,2 \text{ см}^4$, $J_y = 563,7 \text{ см}^4$, $F = 18,51 \text{ см}^2$ и расстояние между центром тяжести и наружной гранью стенки швеллера $z_0 = 1,71 \text{ см}$. Найти безопасную нагрузку на колонну, если расстояние между наружными гранями стенок швеллеров равняется 10 см.

8. Определить необходимую площадь поперечного квадратного сечения стальной стойки длиной 1,8 м, если нагрузка $P = 16 \text{ т}$ и концы являются шарнирными. Воспользоваться рис. 242.

9. Решить предыдущую задачу, предполагая, что концы стойки заделаны.

59. Расчет колонн на основании предполагаемых неточностей

В предыдущем параграфе безопасная нагрузка на колонну была получена путем деления критической нагрузки для колонны на надлежащий коэффициент безопасности. Недостаток этого метода заключается в некотором произволе при выборе коэффициента безопасности, который, как мы видели, изменяется одновременно с гибкостью. Чтобы иметь более рациональный способ расчета колонн, был разработан ¹⁾ другой метод, который основан на предполагаемых неточностях. На основании существующих экспериментальных данных мы можем принять некоторые значения для величины неизбежного эксцентриситета e в приложении сжимающей силы P . Тогда, пользуясь этими значениями в формулах § 56, мы можем вычислить величину P_T нагрузки, при которой наибольшее сжимающее напряжение стойки получается равным пределу текучести материала. Тогда безопасная нагрузка получится путем деления P_T на надлежащий коэффициент безопасности. Таким образом, вместо того, чтобы пользоваться критической нагрузкой, которая эквивалентна разрушающей нагрузке, мы пользуемся нагрузкой, при которой начинается текучесть, как основанием для вычисления безопасной нагрузки.

Этот метод расчета колонн можно упростить при помощи диаграмм, построение которых будет теперь пояснено. Если взять случай стойки с шарнирными концами (рис. 235), то наибольший изгибаю-

щий момент получится из уравнения (143), и наибольшее сжимающее напряжение будет

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{P_e}{W} \sec \sqrt{\frac{P}{E J_z}} \frac{l}{2}. \quad (a)$$

Первый член правой части есть напряжение, возникающее непосредственно от силы P , а второй — наибольшее сжимающее напряжение, вызываемое изгибающим моментом. Нагрузка, при которой начинается текучесть, получается путем подстановки в это уравнение σ_T вместо σ_{\max} , что дает

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F} \left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2i_z} \sqrt{\frac{P_T}{E F}} \right). \quad (b)$$

Здесь мы пользуемся обозначением $r = \frac{W}{F}$ для радиуса ядра поперечного сечения (см. стр. 218) и $i_z = \sqrt{J_z/F}$ для наименьшего главного радиуса инерции. Величина P_T/F есть среднее сжимающее напряжение или центральное сжимающее напряжение, при котором начинается текучесть. Обозначая это напряжение через σ_c , мы получаем

$$\sigma_T = \sigma_c \left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2i_z} \sqrt{\frac{\sigma_c}{E}} \right). \quad (c)$$

Из этого уравнения для данного значения отношения e/r можно получить значение σ_c для любого значения гибкости li_z . Резуль-

татом вычислений для строительной стали, имеющей $\sigma_c = 2400 \text{ кг/см}^2$, представлены кривыми на рис. 244. Пользуясь этими кривыми, мы можем легко вычислить среднее сжимающее напряжение σ_c и сжимающую нагрузку $P_T = F \sigma_c$, при которой начинается текучесть, если даны e/r и li_z . Тогда безопасная нагрузка получится путем деления P_T на коэффициент безопасности.

В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что неизбежные неточности в колонне могли быть представлены эксцентриситетом нагрузки. Подобным образом мы можем также рассматривать как неточность первоначальную кривизну колонны. Обозначая наибольшее

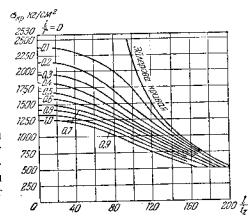


Рис. 244.

¹⁾ См. D. H. Young, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., Дек. 1934; также H. K. Stephenson and K. Clouinger, Ir. Texas Eng. Exp. Sta Bull. N 129, 1933.

начальное отклонение оси колонны от прямой линии ¹⁾ через a , можем получить кривые, подобные показанным на рис. 244 и представляющие σ_c как функцию отношения a/r и гибкости li/l_0 .

При практических расчетах обычно полагают, что первоначальное отклонение a находится в некотором отношении к длине l колонны. Взяв некоторую величину такого отношения ²⁾, мы вычислим

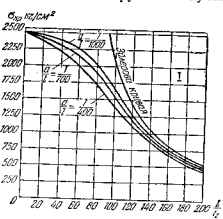


Рис. 245.

величину a , и тогда значение σ_c получится из вышеупомянутых кривых. Результаты, полученные таким путем для трех различных значений отношения a/l и для $\sigma_c = 2400 \text{ кг/см}^2$, показаны для двутаврового сечения на рис. 245. Для очень коротких колонн все три кривые дают $\sigma_c = 2400 \text{ кг/см}^2$. Для очень гибких колонн значения, даваемые кривыми, приближаются к значениям, получаемым из кривой Эйлера. Пользуясь одной из кривых и разделив значение σ_c взятое из кривой, на надлежащий коэффициент безопасности, скажем 2, получим безопасное значение среднего сжимающего напряжения. Преимущество этого метода заключается в том, что здесь применяется постоянный коэффициент безопасности, так как увеличение неточностей с возрастанием длины l колонны уже было принято в соображение, а именно: было предположено, что эксцентриситет пропорционален пролету. Однако величина неточностей, которая должна быть принята, остается в некоторой степени неопределенной и зависящей от существующих экспериментальных данных.

60. Эмпирические формулы для расчета колонн

В обоих методах расчета колонн, разработанных в двух последних параграфах на основании теоретических соображений, имеет место некоторая неопределенность, как, например, переменный коэффициент безопасности в процессе расчета, показанный на рис. 242, или предполагаемые неточности, принятые для составления кри-

¹⁾ Обычно принимается половина волны синусоиды, как представляющая начальную кривизну колонны.

²⁾ Обычно оно принимается в пределах $\frac{l}{400} \geq a \geq \frac{l}{1000}$.

вых на рис. 245. Эти величины могут быть должным образом выбраны лишь на основании опытов с действительными колоннами. При таких обстоятельствах является естественным, что многие инженеры на практике предпочитают пользоваться непосредственно результатами опытов, представленными эмпирическими формулами. Такой метод является совершенно правильным до тех пор, пока приложение этих формул остается в пределах, для которых они были установлены и для которых имеется достаточно экспериментальных данных. Однако, как только необходимо перейти за эти пределы, формулы должны быть изменены для того, чтобы соответствовать новым условиям. В этой работе теоретические соображения имеют основное значение. Одна из старейших эмпирических формул была установлена Трегголдом ¹⁾. Она была применена Гордоном для того, чтобы представить результаты опытов Годжинсона, и была дана в окончательной форме Рэнкином. Допускаемое среднее сжимающее напряжение, определяемое по формуле Гордона — Рэнкина равняется

$$[\sigma] = \frac{a}{1 + b \left(\frac{l}{l_0}\right)^2}, \quad (a)$$

где a есть напряжение и b — числовой коэффициент, обе эти величины постоянны для данного материала. При надлежащем выборе этих постоянных формула дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с результатами опытов в некоторых пределах.

Формула, выражающая эмпирический закон и выведенная главным образом на основании экспериментальной работы Л. Теммайера (и ранее применявшаяся Американской железнодорожной технической ассоциацией, так же, как и Чикагской строительной устав 1924 г.), дает допускаемое напряжение (в кг/см^2) в виде

$$[\sigma] = 1025 - 4,5 li/l_0. \quad (b)$$

Эта формула должна применяться при $30 < li/l_0 < 120$ для главных элементов и при $li/l_0 = 150$ для второстепенных элементов. Для значений $li/l_0 < 30$ применяется $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$.

Формула, выражающая параболический закон и предложенная А. Остенфельдом ²⁾, также иногда применяется. Она дает для критического сжимающего напряжения следующее значение:

$$\sigma_{кр} = a - b \left(\frac{l}{l_0}\right)^2, \quad (c)$$

где a и b — величины, зависящие от механических свойств материала.

¹⁾ Относительно истории формулы см. E. H. Salmon, Columbia, London, 1921; см. также Todhunter and Pearson, History of Theory of Elasticity, Cambridge, т. I, стр. 105, 1886.

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., т. 42, стр. 1462, 1898; см. также C. E. Fuller and W. A. Johnston, Applied Mechanics, т. 2, стр. 359, 1919.

Для строительной стали уравнение (с) иногда принимается в таком виде:

$$\sigma_{кр} = 2560 - 0,085 \left(\frac{l}{i_z}\right)^2. \quad (d)$$

Это уравнение дает параболу, которая касается кривой Эйлера при $li_z = 122,5$, и величину критического напряжения для короткой стойки, равную $\sigma_{кр} = 2560 \text{ кг/см}^2$. Чтобы получить допускаемое напряжение из этой формулы, необходимо принять коэффициент безопасности в пределах от $2^{1/2}$ до 3.

Нормы 1948 г. Американского института стальных конструкций (AISC) предписывают для определения допускаемых напряжений при сжатии пользоваться формулой, выражающей параболический закон,

$$[\sigma] = 1090 - 0,031 \left(\frac{l}{i_z}\right)^2 \quad (e)$$

при $li_z < 120$ для главных и второстепенных элементов. Для второстепенных элементов (решетка и т. п.) при значениях $120 < li_z < 200$ допускаемое сжимающее напряжение определяется по формуле типа Гордона — Ранкина

$$[\sigma] = \frac{1150}{1 + \frac{l^2}{18000i_z^2}}. \quad (f)$$

Для главных элементов при значениях $120 < li_z < 200$ допускаемое сжимающее напряжение получается путем умножения уравнения (f) на следующую дробь:

$$1,6 - \frac{l}{200i_z}. \quad (g)$$

Нормы 1946 г. Американской железнодорожной технической ассоциации (AREA) и нормы 1949 г. Американской ассоциации государственных дорог (AASHO) предписывают пользоваться для определения допускаемого напряжения в сжатых элементах формулой, выражающей параболический закон:

$$[\sigma] = 960 - 0,016 (li_z)^2 \quad \text{при } li_z < 140. \quad (h)$$

Строительный устав г. Нью-Йорка (1947 г.) предписывает пользоваться формулой (f) для элементов, обладающих гибкостью $li_z < 120$, с наибольшим значением 960 кг/см^2 .

ЗАДАЧИ

1. Строительная стальная колонна с шарнирно-опертыми концами имеет $J_z = 484 \text{ см}^4$ и $F = 42 \text{ см}^2$. Нужно рассмотреть колонны, имеющие три разные длины, а именно: $l = 1,5 \text{ м}$, $l = 3 \text{ м}$ и $l = 4 \text{ м}$. Каковы будут безопасные нагрузки в кг, если

применить: 1) нормы AISC, 2) строительный устав г. Нью-Йорка, 3) формулу (b) и 4) нормы AREA?

Отвст.

	$l = 1,5 \text{ м}$	$l = 3 \text{ м}$	$l = 4 \text{ м}$
1)	43260	35660	27760
2)	40320	33720	27300
3)	34730	26370	20830
4)	39020	35070	31000

2. Подобрать балку двутаврового сечения, которая должна служить в качестве колонны длиной 3,6 м с заделанными концами и нести нагрузку 80 т. Применить нормы Американского института стальных конструкций (AISC).

Решение. Взяв приведенную длину $l = \frac{1}{2}(3,6) = 1,8 \text{ м}$, получим уравнение (e)

в таком виде:

$$\frac{80000}{F} = 1090 - 0,031 \left(\frac{180}{i_z}\right)^2, \quad (i)$$

при этом полагаем $li_z < 120$. Наименьшая площадь может быть найдена, если принять $[\sigma] = 1090 \text{ кг/см}^2$, как для короткой стойки. Это дает $F = 80000/1090 = 73,4 \text{ см}^2$. Поэтому при подборе мы не должны брать сечение, которое имеет площадь меньше $73,4 \text{ см}^2$.

Мы попробуем сначала взять сечение, для которого $F = 73,4 \text{ см}^2$, наименьший радиус инерции $i_z = 2,46 \text{ см}$ и $li_z = 73,2$, что < 120 . Действительное напряжение, определяемое левой частью уравнения (i), равняется 1390 кг/см^2 , в то время как допускаемое напряжение, определяемое правой частью уравнения, равняется 924 кг/см^2 . Таким образом, взятое сечение является небезопасным, поэтому мы берем сечение с большей площадью, а именно такое, для которого $F = 86,1 \text{ см}^2$, наименьший радиус инерции $i_z = 2,77 \text{ см}$ и $li_z = 65$. Действительное напряжение равняется 929 кг/см^2 , а допускаемое напряжение равняется 950 кг/см^2 , так что выбранное сечение является удовлетворительным.

длина относительного сдвига γ найдется из малого треугольника ac' :

$$\gamma = \frac{c'c}{ac}.$$

Так как $c'c$ является малой дугой радиуса $d/2$, соответствующей разности $d\varphi$ углов поворота двух смежных поперечных сечений, то $c'c = (d/2)d\varphi$ и мы получаем

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx} d. \quad (a)$$

Для стержня, скручиваемого моментом на конце, угол закручивания пропорционален длине и величина $d\varphi/dx$ постоянна. Она представляет *угол закручивания на единицу длины стержня* и будет обозначаться через θ . Тогда из (a) имеем

$$\gamma = \frac{1}{2} \theta d. \quad (148)$$

Касательные напряжения, действующие по граням элемента и вызывающие вышеуказанный сдвиг, имеют направления, показанные на чертеже. Величина каждого на основании уравнения (39) равна

$$\tau = \frac{1}{2} G\theta d. \quad (149)$$

Таким образом, напряженное состояние элемента на поверхности стержня вполне выяснено. Что же касается напряженного состояния внутри стержня, то сделаем предположение, что не только круговой контур поперечного сечения стержня не искажается, но также и сами поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются, как абсолютно твердые, т. е. каждый диаметр поперечного сечения остается прямым и поворачивается на один и тот же угол. Испытания круглых стержней показывают, что теория, основанная на этом предположении, очень хорошо согласуется с результатами опытов. В таком случае рассуждение относительно элемента $abcd$ на поверхности стержня (рис. 246, b) остается в силе и для подобно элемента поверхности внутреннего цилиндра, радиус которого r заменяется $d/2$ (рис. 246, c). Толщина dr элемента в радиальном направлении считается очень малой. Следовательно, такие элементы находятся также в состоянии чистого сдвига, и касательное напряжение на их гранях равно

$$\tau = Gr\theta. \quad (b)$$

Это указывает на то, что касательное напряжение пропорционально расстоянию r от оси стержня. Рис. 247 изображает это распределение напряжений. Наибольшее напряжение имеет место на внешней поверхности стержня. Для вязких материалов пластическое течение начинается на внешней поверхности. Для материалов,

ГЛАВА X

КРУЧЕНИЕ И ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

61. Кручение круглого стержня

Рассмотрим круглый стержень, заделанный в верхнем конце и скручиваемый парой сил, приложенной к нижнему концу (рис. 246). Можно показать посредством измерений на поверхности, что круго-

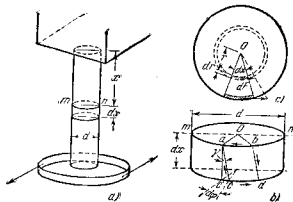


Рис. 246.

вые сечения стержня при кручении остаются круговыми и что их диаметры и расстояния между ними не изменяются при условии, что угол закручивания мал.

Диск, изображенный отдельно на рис. 246, b, будет находиться в следующем напряженном состоянии. Его нижнее поперечное сечение повернется относительно верхнего поперечного сечения на угол $d\varphi$, где φ измеряет поворот сечения mn относительно заделанного конца. Прямоугольный элемент $abcd$ боковой поверхности диска принимает форму, показанную на рис. 246, b. Длины сторон, по существу, остаются такими же, но только углы изменяются. Элемент находится в состоянии *чистого сдвига* (см. § 16) и ве-

которые слабее при сдвиге в продольном направлении, чем в поперечном, например в случае деревянного стержня с волокнами, параллельными оси, первые трещины появляются от касательных напряжений, действующих в осевых сечениях, и они возникают на поверхности стержня в продольном направлении.

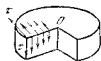


Рис. 247.

В образце из материала, который слабее при растяжении, чем при сдвиге, например в случае круглого чугунного стержня или цилиндрического куска мела, трещина часто имеет место по винтовой линии, наклоненной под углом 45° к оси стержня (рис. 248). Объяснение простое. Припомним, что состояние чистого сдвига эквивалентно растяжению в одном направлении и равному ему сжатию в перпендикулярном направлении (см. рис. 45). Прямоугольный элемент, вырезанный из внешнего слоя скрученного стержня со сторонами под углом 45° к оси, будет подвержен напряжениям, показанным на рис. 248. Показанные растягивающие напряжения производят упомянутую винтовую трещину.

Найдем теперь соотношение между приложенной скручивающей парой M_k и напряжениями, которые она вызывает. Из равновесия части стержня между низом и поперечным сечением mn (рис. 246, а) мы заключаем, что касательные напряжения, распределенные по поперечному сечению, статически эквивалентны паре сил, равной и противоположной скручивающей паре M_k . Для каждого элемента площади dF (рис. 246, в) сдвигающее усилие равно τdF . Момент этого усилия относительно оси стержня на основании уравнения (б) равен $(\tau dF)r = G\theta r^2 dF$. Крутящий момент M_k равен сумме этих моментов, взятой по всей площади поперечного сечения, т. е.

$$M_k = \int_F G\theta r^2 dF = G\theta \int_F r^2 dF = G\theta J_p, \quad (c)$$



Рис. 248.

где J_p есть полярный момент инерции круглого поперечного сечения. Для круга диаметра d мы имеем (см. Приложение А, стр. 353). $J_p = \pi d^4/32$, следовательно,

$$M_k = G\theta \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\theta = \frac{M_k}{G} \frac{32}{\pi d^4} = \frac{M_k}{G J_p}. \quad (150)$$

Мы видим, что θ , угол закручивания на единицу длины стержня, прямо пропорционален приложенному крутящему моменту и обратно пропорционален модулю упругости при сдвиге G и четвертой степени диаметра. Если длина стержня есть l , то полный угол

закручивания будет

$$\varphi = \theta l = \frac{M_k l}{G J_p}. \quad (151)$$

Этим уравнением пользуются для опытной проверки теории, причем многочисленными опытами подтверждаются предположения, сделанные при выводе теории.

Необходимо заметить, что опыты на кручение обычно производятся для определения модуля упругости G для различных материалов. Если измерить угол закручивания, вызванный в данном стержне заданным крутящим моментом, то величину G можно легко получить из уравнения (151).

Подставляя θ из уравнения (150) в уравнение (149), получим уравнение для вычисления наибольшего касательного напряжения при кручении круглого стержня

$$\tau_{\max} = \frac{M_k d}{2J_p} = \frac{16M_k}{\pi d^3}. \quad (152)$$

Наибольшее касательное напряжение пропорционально крутящему моменту M_k и обратно пропорционально кубу диаметра стержня.

В практических приложениях необходимый диаметр вала часто должен быть рассчитан по числу лошадиных сил N , которое он передает. По данному N крутящий момент в $kg\text{ см}$ получится из известного уравнения

$$M_k \frac{2\pi n}{60} = 7500N, \quad (153)$$

в котором n означает число оборотов вала в минуту. Величина $2\pi n/60$ есть угловая скорость, и левая часть уравнения (153) представляет работу, произведенную в одну секунду крутящим моментом, измеренным в $kg\text{ см}$. Правая часть уравнения представляет произведенную работу (в $kg\text{ см/сек}$), вычисленную по числу лошадиных сил N . Взяв M_k из уравнения (153) и подставив его в уравнение (152), получим

$$d(\text{см}) = 71,14 \sqrt[3]{\frac{N}{n\tau_{\max}}}. \quad (154)$$

Принимая, например, допускаемое напряжение при сдвиге $[\tau] = 600\text{ кг/см}^2$, имеем

$$d(\text{см}) = 8,43 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр d вала машины мощностью в 200 лошадиных сил при $n = 120$ оборотов в минуту, если допускаемое напряжение $[\tau] = 200\text{ кг/см}^2$.
Ответ: $d = 14,4\text{ см}$.
2. Определить мощность в лошадиных силах, передаваемую валом, если $d = 15\text{ см}$, $n = 120$ оборотов в минуту, $G = 8 \cdot 10^{10}\text{ кг/см}^2$ и угол закручивания,

измеренный между двумя поперечными сечениями на расстоянии 7,5 м, равен $\frac{1}{15}$ радиана.

Решение. Из уравнения (151) имеем

$$M_k = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{\varphi G}{l} = \frac{\pi \cdot 15^4}{32} \cdot \frac{8 \cdot 10^3}{15 \cdot 750}$$

Передаваемая мощность, на основании уравнения (153), равна

$$N = \frac{M_k \omega}{60 \cdot 7500} = \frac{\pi \cdot 15^4 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot 120}{32 \cdot 15 \cdot 750 \cdot 60 \cdot 7500} = 0,600 \text{ л. с.}$$

3. Вал диаметра $d=8,75$ см делает 45 оборотов в минуту. Определить передаваемую мощность, если наибольшее касательное напряжение равно 300 кг/см^2 .

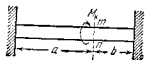


Рис. 249.

4. Стальная проволока ($G=8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$) должна иметь такие размеры, чтобы наибольшее касательное напряжение равнялось 900 кг/см^2 при угле закручивания 90° . Определить отношение l/d .

Ответ. $l/d=698$.

5. Стальной вал с заделанными концами (рис. 249) подвергается действию крутящего момента M_k , приложенного в промежуточном поперечном сечении m . Определить угол закручивания, если известно допустимое напряжение $[\tau]$.

Решение. Для обеих частей вала углы закручивания одинаковы. Поэтому, на основании уравнения (151), крутящие моменты обратно пропорциональны длинам этих частей. Если $a > b$, то больший крутящий момент будет на правой части вала и величина его равняется $M_k \cdot a/(a+b)$. Вставляя эту величину крутящего момента и $[\tau]$ вместо τ_{max} в уравнение (152), получим для d следующее уравнение:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_k}{(a+b)\pi[\tau]}}$$

Теперь угол закручивания можно получить при помощи уравнения (151).

6. 500 л. с. передается от шкива I, из них: 200 л. с. шкиву II и 300 л. с. шкиву III (рис. 250). Найти отношение диаметров d_1 и d_2 , чтобы иметь одно и то же наибольшее напряжение в обеих частях вала. Найти отношение углов закручивания для этих двух частей.

Решение. Крутящие моменты в двух частях вала находятся в отношении 5 : 3. Для того чтобы иметь одно и то же наибольшее напряжение, необходимо, на основании уравнения (152), чтобы

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

Углы закручивания, на основании уравнений (151) и (152), должны быть в отношении

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{l_1}{l_2} \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$$

7. Полагая, что вал предыдущей задачи имеет постоянный диаметр и вращается со скоростью 200 оборотов в минуту, найти величину диаметра, если

$[\tau]=100 \text{ кг/см}^2$. Найти угол закручивания для каждой части вала, если $G=8 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ и $l_1=l_2=1,2 \text{ м}$.

8. Определить длину стального вала диаметра $d=5 \text{ см}$ ($G=8 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$), если наибольшее напряжение равно 900 кг/см^2 , когда угол закручивания равен 6° . *Ответ.* $l=2,33 \text{ м}$.

9. Определить диаметр, начиная с которого имеет решающее значение при проектировании угол закручивания вала, а не наибольшее напряжение, если $G=8 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$, $[\tau]=200 \text{ кг/см}^2$ и наибольший допустимый угол закручивания равен $1/4^\circ$ на метр.

Решение. Исключая M_k из уравнений

$$\frac{16M_k}{\pi d^3} = 200 \text{ и } \frac{32M_k}{G\pi d^4} = \frac{\pi}{180 \cdot 4 \cdot 100}$$

получаем $d=11,46 \text{ см}$, так что для $d < 11,46 \text{ см}$ угол закручивания является решающим фактором при проектировании.

10. Определить крутящий момент в каждой части вала с заделанными концами, который скручивается моментами M'_k и M''_k , приложенными в двух промежуточных сечениях (рис. 251).

Решение. Определяя крутящие моменты, вызываемые в каждой части вала моментами M'_k и M''_k (см. выше задачу 5), и складывая полученные выражения для каждой части, получаем

$$\frac{M'_k(b+c) + M''_k c}{l}, \quad \frac{M'_k a - M''_k c}{l}, \quad \frac{M'_k a + M''_k(a+b)}{l}$$

11. Определить диаметры и углы закручивания для вала задачи 6, если $n=120$ оборотов в минуту, $\tau_{\text{max}}=200 \text{ кг/см}^2$, $l_1=1,8 \text{ м}$ и $l_2=1,2 \text{ м}$.

62. Кручение полого вала

Из предыдущего рассмотрения кручения сплошного вала видно (см. рис. 247), что материал только на внешней поверхности вала может быть напряжен до предела, равного допустимому напряжению. Внутри вала материал работает при более низком напряжении. Поэтому в случаях, где уменьшение веса имеет большое значение, например для валов аэропланов двигателей, уместно применять полые валы.

При рассмотрении кручения полых валов делаются те же предположения, что и в случае сплошных валов. Общее выражение для касательных напряжений здесь будет то же самое, как и в уравнении (b) предыдущего параграфа. Однако при вычислении момента сдвигающих усилий радиус r изменяется от радиуса внутреннего отверстия, который мы обозначим через $\frac{1}{2}d_1$, до внешнего радиуса вала, который, как прежде, будет $\frac{1}{2}d$. Тогда уравнение (c) предыдущего параграфа должно быть заменено



Рис. 251.

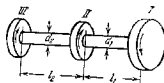


Рис. 250.

следующим уравнением:

$$G\theta \int_{\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} r^2 dF = M_K = G\theta J_p$$

где $J_p = (\pi/32)(d^4 - d_1^4)$ есть полярный момент инерции кольцевого сечения. Тогда

$$\theta = \frac{32M_K}{\pi(d^4 - d_1^4)G} = \frac{M_K}{GJ_p}, \quad (155)$$

и угол закручивания будет

$$\Phi = \theta l = \frac{M_K l}{GJ_p}. \quad (156)$$

Подставляя уравнение (155) в уравнение (149), получаем

$$\tau_{\max} = \frac{16M_K}{\pi d^3 \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)} = \frac{M_K d}{2J_p}. \quad (157)$$

Из уравнений (156) и (157) мы видим, что, взяв, например, $d_1 = \frac{1}{2}d$, угол закручивания и наибольшее напряжение по сравнению с теми же величинами для сплошного вала диаметра d увеличатся приблизительно на 6%, между тем как вес вала уменьшится на 25%.

ЗАДАЧИ

1. Полый цилиндрический стальной вал внешнего диаметра 25 см и внутреннего диаметра 15 см вращается со скоростью 1000 оборотов в минуту. Какова передаваемая мощность в лошадиных силах, если $\tau_{\max} = 520$ кг/см².
 Ответ. $N = 19$ 360 л. с.
2. Найти наибольший крутящий момент, который может быть приложен к полному круглому валу, если $d = 15$ см, $d_1 = 10$ см и $[\tau] = 520$ кг/см².
3. Полый вал парового двигателя передает 8000 л. с. при 100 оборотах в минуту и допускаемом напряжении 300 кг/см². Найти d , если $d_1/d_2 = 2$.
 Решение.

$$M_K = \frac{8000 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 60}{2\pi \cdot 100}$$

Из уравнения (157) имеем

$$\tau_{\max} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16M_K}{\pi d^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 16 \cdot 8000 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 60}{15 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot \pi \cdot 300}} = 47 \text{ см.}$$

следовательно, $d_1 = 23,5$ см.

63. Вал прямоугольного поперечного сечения

Задача о кручении вала прямоугольного поперечного сечения сложна вследствие искривления поперечного сечения при кручении. Это искривление можно показать на опыте с прямоугольным бруском из резины, на гранях которого начерчена система квадратов. Из фотографии 1) (рис. 232) видно, что при кручении линии, первоначально перпендикулярные к оси бруска, искривляются. Это указывает на то, что искажение упомянутых выше квадратов изменится по краям этого поперечного сечения, достигая наибольшего значения в середине и становясь равным нулю в углах. Поэтому мы полагаем, что касательные напряжения изменяются соответственно этому искажению, а именно: наибольшее значение в серединах сторон и нуль — в углах поперечного сечения. Строгое исследование задачи 2) указывает, что наибольшее касательное напряжение имеет место в серединах длинных сторон прямоугольного поперечного сечения и определяется уравнением

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{\alpha bc^2}, \quad (158)$$

в котором b — длинная сторона и c — короткая сторона прямоугольного поперечного сечения и α — числовой коэффициент, зависящий от отношения b/c . Несколько значений α дано ниже, в таблице 3. Величина наибольшего напряжения может быть вычислена с достаточной точностью из следующего приближенного уравнения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{bc^2} (3 + 1,8 \frac{c}{b}).$$



Рис. 232.

Угол закручивания на единицу длины в случае прямоугольного поперечного сечения определяется из уравнения

$$\theta = \frac{M_K}{\beta \pi^2 G}. \quad (159)$$

Значения числового коэффициента β даны в третьей строчке таблицы 3.

Таблица 3

Данные для кручения валов прямоугольного поперечного сечения

$\frac{b}{c}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

1) Фотография взята из книги С. В а с h, Elasticität und Festigkeit, 6-е изд., стр. 312, 1911.

2) Полное решение принадлежит St.-Venant'у, Mem. sav. étrangers, т. 14, 1855. Оценку этой работы можно найти у T o d h u n t e r a n d P e a r s o n, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, т. 2, стр. 312, 1893.

Во всех рассматриваемых случаях угол закручивания на единицу длины пропорционален крутящему моменту и может быть представлен уравнением

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{C}, \quad (a)$$

где C есть постоянная, называемая жесткостью при кручении вала. В случае круглого вала (уравнение (150)) $C = GJ_p$. Для прямоугольного вала (уравнение (159)) $C = \beta bc^3 G$.

64. Винтовая пружина с малым шагом витков

Предположим, что винтовая пружина кругового поперечного сечения подвергается действию сил P , направленных по оси (рис. 253), и что какой-либо виток лежит в плоскости, мало отличающейся

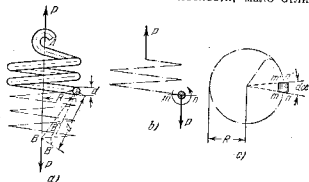


Рис. 253.

от плоскости, перпендикулярной к оси пружины. Рассматривая равновесие верхней части пружины, ограниченной осевым сечением, например mn (рис. 253, b), можем заключить из уравнений статики, что усилия по поперечному сечению mn витка приводятся к срезающей силе P , приложенной в центре тяжести поперечного сечения, и к паре сил, действующей в плоскости поперечного сечения в направлении против часовой стрелки. Момент пары равен PR , где R есть радиус цилиндрической поверхности, содержащей осевую линию пружины. Пара сил PR скручивает виток и вызывает наибольшие напряжения, которые, на основании уравнения (152), равняются

$$\tau_1 = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad (a)$$

где d — диаметр поперечного сечения mn витка. На эти напряжения от кручения должны накладываться напряжения от срезающей

силы P . Для грубого приближения эта сила считается равномерно распределенной по поперечному сечению. Тогда соответствующее касательное напряжение будет

$$\tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (b)$$

В точке m (рис. 253, b) направления τ_1 и τ_2 совпадают, так что здесь имеет место наибольшее касательное напряжение, величина которого равна

$$\tau_{\text{max}} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right). \quad (160)$$

Можно видеть, что второй член в скобках, представляющий влияние срезающей силы, увеличивается с увеличением отношения d/R . Это имеет практическое значение в тяжелых винтовых рессорах, каковые употребляются в железнодорожных вагонах. Такие точки, как m , на внутренней стороне витка находятся в менее благоприятных условиях, чем такие точки, как n . Опыт с тяжелыми рессорами показывает, что трещины обычно начинаются на внутренней стороне витка.

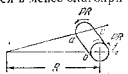


Рис. 254.

Имеется и другая причина, по которой необходимо ожидать более высокого напряжения на внутренней стороне витка. При вычислении напряжений от скручивания мы воспользовались уравнением (а), которое было выведено для цилиндрических стержней. В действительности, каждый элемент пружины будет находиться в условиях, показанных на рис. 254. Видно, что если при кручении поперечное сечение bc поворачивается относительно ac , то перемещение точки b относительно точки a будет такое же, как точки j относительно точки c . Благодаря тому, что расстояние ab меньше расстояния ac , относительный сдвиг на внутренней стороне ab будет больше, чем на внешней стороне bc , и, следовательно, касательные напряжения, вызываемые парой сил PR , будут больше в b , чем в j . Принимая это во внимание и учитывая влияние срезающей силы¹⁾, мы должны заменить уравнение (160) следующим уравнением для вычисления наибольшего касательного напряжения:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (161)$$

в котором $m = \frac{2R}{d}$.

¹⁾ Такие исследования были сделаны V. Roeverом, Z. Ver. deut. Ing., т. 57, стр. 1906, 1913, также А.М. Вагнера, Trans. ASME, 1928. Последний определил также напряжения опытным путем при помощи измерений на поверхности витка. Полное исследование различного рода пружин дано Вагнером, стр. 188.

Можно видеть, что *поправочный коэффициент* в скобках увеличивается с уменьшением *t*. Например, в случае *m=4* этот коэффициент равен приблизительно 1,40 и если *m=10*, он равен 1,14.

При вычислении удлинения пружины или опускания ее нижнего конца обычно принимается только влияние кручения витков. Для угла закручивания какого-либо элемента между двумя смежными поперечными сечениями *mn* и *m'n'* (рис. 253, *c*), пользуясь уравнением (151) и принимая *Rd_z* вместо *l*, получим

$$d\varphi = -\frac{PRR da}{GI_p}$$

Вследствие кручения нижняя часть пружины поворачивается относительно центра *mn* (рис. 253, *a*), и точка приложения *B* силы *P* описывает малую дугу *BB'*, равную *a dφ*. Вертикальная составляющая этого перемещения равна

$$B'B'' = BB' \frac{R}{a} = R d\varphi = \frac{PR^2 da}{GI_p} \quad (c)$$

Полное опускание пружины получится путем суммирования опусканий *B'B''*, вызываемых каждым элементом *mn m'n'*, по длине пружины. Тогда

$$\delta = \int_0^{2\pi n} \frac{PR^2}{GI_p} da = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad (162)$$

где *n* означает число витков.

Для пружины некругового поперечного сечения указанный выше метод можно применить к вычислению напряжений и деформаций, если вместо уравнений (151) и (152) принять уравнения, соответствующие данной форме поперечного сечения. Например, в случае прямоугольного поперечного сечения должны быть применены уравнения (158) и (159).

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее напряжение и удлинение винтовой пружины (рис. 253), если *P=100 кг*, *R=10 см*, *d=2 см*, число витков равно 20 и *G=8 · 10⁴ кг/см²*.
 Ответ. $\tau_{max} = 726 \text{ кг/см}^2$, $\delta = 10 \text{ см}$.
2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что виток имеет квадратное сечение 2 см в стороне.
 Решение. Полагая, что поправочный коэффициент для срезающей силы, в зависимости от кривизны витков (см. уравнение (161)) в этом случае такой же, как и для кругового поперечного сечения, получим из уравнения (158)

$$\tau_{max} = \frac{PR}{0,2086^4} \cdot 1,14 = \frac{100 \cdot 10 \cdot 1,14}{0,2086^4} = 696 \text{ кг/см}^2$$

При вычислении удлинения необходимо в уравнение (162) подставить 0,141 *d*⁴

641 ДЛИННОЕ ПРУЖИНА С МАЛЫМ ШАГОМ ВИТКОВ

(см. уравнение (159)) вместо *πd⁴/32*. Тогда

$$\delta = \frac{10l}{32 \cdot 0,141} = \approx 7 \text{ см}$$

3. Сравнить вес двух винтовых пружин, одну круговую, а другую — квадратного поперечного сечения, спроектированных при принятых в задаче 1 условиях и имеющих одно и то же наибольшее напряжение. Принять в обоих случаях поправочный коэффициент, равный 1,14. Сравнить удлинения этих пружин.

Решение. Длина стороны квадрата поперечного сечения найдем из уравнения $\tau_{d^3} = 16 = 0,2086^3$, откуда $b = \sqrt[3]{0,944} \cdot d = 0,981d$. Вес пружины находится в том же отношении, как и площади поперечных сечений, т. е. в отношении

$$\frac{\pi d^3}{4} : (0,981d)^2 = 0,816.$$

Удлинения двух пружин находятся в отношении

$$0,141b^4 : \frac{\pi d^4}{32} = 0,141 \cdot 0,926 : \frac{\pi}{32} = 1,33.$$

4. Как распределится нагрузка *P* между двумя концами винтовой пружины, показанной на рис. 255, если число витков выше точки приложения нагрузки равно 6 и ниже этой точки равно 5.

Ответ. *R₁ : R₂ = 5 : 6*.

5. Две винтовые пружины из одного и того же материала и одинакового кругового поперечного сечения и длины, собранные в две параллельные плоскости, сжаты между двумя параллельными плоскостями. Определить наибольшее напряжение в каждой пружине, если *d=1,25 см* и *P=40 кг*.

Решение. Из уравнения (162) следует, что нагрузка *P* распределяется между двумя пружинами обратно пропорционально кубу радиусов витков, т. е. силы, сжимающие внешнюю и внутреннюю пружины, будут относиться как 7,5³ : 10³. Тогда, на основании уравнения (161), наибольшее напряжения в этих пружинах соответственно будут равны 185 кг/см² и 343 кг/см².

6. Какова будет предельная нагрузка для пружины задачи 1, если допусковое напряжение равно $[\tau] = 1300 \text{ кг/см}^2$. Каково будет удлинение пружины при этой предельной нагрузке?

Ответ. 179 кг, $\delta = 17,9 \text{ см}$.

7. Коническая пружина (рис. 257) растягивается осевыми силами *P*. Определить безопасную величину *P*, если допусковое напряжение $[\tau] = 3000 \text{ кг/см}^2$, диаметр поперечного сечения *d=2,5 см*, радиус конуса вверх пружины *R₂=5 см* и вниз *R₁=20 см*. Определить удлинение пружины, если число витков равно 1

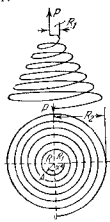


Рис. 257.

и горизонтальная проекция осевой линии пружины представляет спираль, заданную уравнением

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

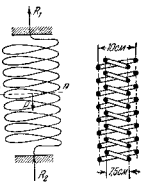


Рис. 253.

Рис. 255.

Решение. Для какой-либо точки A осевой линии пружины, определяемой величиной угла α , расстояние от оси пружины равняется

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n},$$

а соответствующий крутящий момент равен

$$M_k = P \left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n} \right].$$

Наибольший крутящий момент при $\alpha = 2\pi n$ равен PR_2 . Безопасный предел для P , на основании уравнения (161), будет

$$P = \frac{3000 \cdot \pi \cdot 2,5^3}{16 \cdot 20 \cdot 1,09} = 422 \text{ кг.}$$

Осадка пружины получится из уравнения (с) (см. стр. 248) равной:

$$\delta = \frac{32P}{\pi d^4 G} \int_0^{2\pi n} \left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n} \right]^2 d\alpha = \frac{16Pn}{d^4 G} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2).$$

8. Определить необходимую площадь поперечного сечения витков конической пружины, спроектированной при тех же условиях, как в предыдущей задаче, но квадратного поперечного сечения. Принять поправочный коэффициент равным 1,09 (см. предыдущую задачу).

Ответ. $b^2 = 6 \text{ см}^2$.

65. Одновременное действие изгиба и кручения. Изгиб и кручение валов круглого поперечного сечения

Выше, при рассмотрении кручения (см. стр. 238) предполагалось, что круглый вал испытывает простое кручение. В практических приложениях мы часто имеем случаи, когда действуют одновременно крутящий и изгибающий моменты. Силы, передаваемые валу посредством шкивов, зубчатых колес или маховиков, можно привести к скручивающим и изгибающим силам. Простой случай такого рода показан на рис. 258.

Круглый вал заделан в одном конце и нагружен на другом вертикальной силой P , приложенной на расстоянии R от оси. Этот случай приводится к нагрузке вала крутящим моментом $M_k = PR$ поперечной силой P на свободном конце ¹⁾. Крутящий момент является постоянным по оси, а изгибающий момент, вызываемый силой P , в каком-либо сечении равняется

$$M = -P(l - x). \quad (a)$$

При отыскании наибольших напряжений, возникающих в вале, необходимо рассмотреть: 1) касательные напряжения от крутящего

момента M_k , 2) нормальные напряжения от изгибающего момента (а) и 3) касательные напряжения от поперечной силы P . Наибольшие касательные напряжения от крутящего момента возникают на поверхности вала и имеют величину

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi d^3}. \quad (b)$$

Наибольшие нормальные напряжения σ_x от изгибающего момента имеют место в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

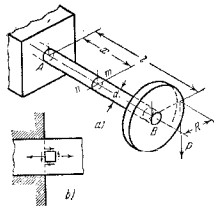


Рис. 258.

в заделанном конце, где изгибающий момент является численно наибольшим; величина этих напряжений равна

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi d^3}. \quad (c)$$

Касательные напряжения от поперечной силы обыкновенно имеют лишь второстепенное значение. Наибольшей величины они достигают на нейтральной оси, где нормальные напряжения от изгибающего момента равны нулю. Поэтому наибольшие сложные напряжения обычно имеют место в точках, где напряжения (1) и (2) являются наибольшими, в данном случае в волокнах на верхней и нижней поверхностях вала в заделанном конце.

Рисунок 258, б представляет вид сверху части вала в заделанном конце и выделенный у места заделки элемент с действующими на него напряжениями. Главные напряжения для этого элемента выдуются из уравнений (72) и (73) (стр. 114).

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2},$$

¹⁾ В этой задаче весами вала и шкива пренебрегаем.

или, пользуясь уравнениями (b) и (c), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2W} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (163)$$

Таким же образом, пользуясь уравнением (73), получаем

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2W} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (163')$$

Из уравнения (163) можно заметить, что σ_{\max} имеет такое же значение, как и при простом изгибе вала, если бы действовал некоторый эквивалентный изгибающий момент, равный

$$M_{\text{эвв}} = \frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}).$$

Наибольшее касательное напряжение в рассматриваемом элементе (рис. 258, б), по уравнению (34) (стр. 52), равняется

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_k^2}. \quad (164)$$

На практике для определения безопасных размеров диаметров валов, сделанных из мягких металлов, теперь обычно принимают теорию наибольших касательных напряжений. Обозначая допускаемое напряжение при сдвиге через $[\tau]$ и подставляя его вместо τ_{\max} в уравнение (164), получим следующее выражение для определения диаметра вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi [\tau]} \sqrt{M^2 + M_k^2}}. \quad (165)$$

Вышеприведенные рассуждения можно применить также и при расчете полого вала наружного диаметра d и внутреннего диаметра d_1 . Тогда

$$W = \frac{\pi (d^3 - d_1^3)}{32d} = \frac{\pi d^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^3 \right],$$

и полагая $d_1/d = n$, получим из уравнений (163) и (163') для полого вала

$$\sigma_{\max} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^3)} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}), \quad (166)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^3)} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (167)$$

Наибольшее касательное напряжение равняется

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^3)} \sqrt{M^2 + M_k^2}. \quad (168)$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi [\tau] (1 - n^3)} \sqrt{M^2 + M_k^2}}. \quad (169)$$

Если на вал действует несколько параллельных поперечных сил, то для определения необходимого диаметра по формуле (165) или (169) нужно взять полный изгибающий момент M и полный крутящий момент M_k в каждом поперечном сечении. Если поперечные силы, действующие на вал, не параллельны, то результирующие изгибающие моменты от них должны быть определены по способу сложения векторов. Пример такого вычисления разобран ниже, в задаче 3.

ЗАДАЧИ

1. Вал круглого сечения диаметром 6 см поддерживает шкив диаметром 75 см, весящий 200 кг (рис. 259). Определить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении m , если горизонтальные натяжения верхней и нижней частей ремня равны соответственно 700 кг и 100 кг.

Решение. В поперечном сечении m

$$M_k = (700 - 100) 37,5 = 22\,500 \text{ кг см.}$$

$$M = 15 \sqrt{200^2 + 800^2} = 12\,370 \text{ кг см.}$$

Тогда по формуле (164)

$$\tau_{\max} = 606 \text{ кг/см}^2.$$

2. Вертикальная труба, показанная на рис. 260, подвергается действию горизонтальной силы $P = 100$ кг, приложенной на расстоянии 1 м от оси трубы. Определить σ_{\max} и τ_{\max} , если длина трубы $l = 7,5$ м и момент сопротивления $W = 150 \text{ см}^3$.

Ответ. $\sigma_{\max} = 502 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{\max} = 252 \text{ кг/см}^2$.

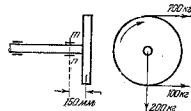


Рис. 259.

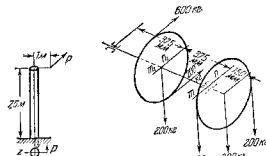


Рис. 260.

3. Определить необходимый диаметр однородного вала (рис. 261), несущего два одинаковых шкива диаметром 75 см и весом 200 кг каждый. Горизонтальные усилия в ремне для одного шкива и вертикальные усилия для другого показаны на рисунке. Допускаемое напряжение $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$.

Рис. 261.

Решение. Опасными сечениями будут m_1 и m_2 , которые выдерживают полный крутящий момент и наибольшие изгибающие моменты. Крутящий момент в обоих сечениях равен $M_k = (600 - 200) 37,5 = 15\,000$ кг см. Изгибающий момент в сечении m_1 равен $(600 + 200 + 200) 15 = 15\,000$ кг см. Изгибающий момент в сечении m_2 , действующий в горизонтальной плоскости, равен

$$\frac{1}{4} (600 + 200) 75 = 15\,000 \text{ кг см.}$$

Изгибающий момент в том же поперечном сечении, действующий в вертикальной плоскости, равен

$$\frac{200 \cdot 75}{4} - \frac{1000 \cdot 15 \cdot 37,5}{75} = -3750 \text{ кг см.}$$

Равнодействующий изгибающий момент в сечении m_2 равен

$$M = \sqrt{15\,000^2 + 3750^2} = 15\,460 \text{ кг см.}$$

Этот момент больше момента, действующего в сечении m_1 , и поэтому должен быть подставлен вместе с вычисленным выше крутящим моментом M_k в уравнение (165), из которого получаем $d = 6,50$ см.

4. Определить диаметр вала, показанного на рис. 259, если допустимое напряжение на сдвиг равняется $[\tau] = 400$ кг/см².

5. Определить внешний диаметр полого вала, если $[\tau] = 400$ кг/см², $d_1/d = \frac{1}{3}$, а остальные размеры и силы указаны на рис. 261.

6. Решить задачу 3, полагая, что на правый шкив действует такой же крутящий момент, как и в задаче 3, но вызываемый горизонтальной силой, касательной к окружности шкива, вместо вертикальных натяжений в ремне 600 кг и 200 кг.

ГЛАВА XI

ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ И УДАР

66. Энергия упругой деформации при растяжении

При рассмотрении простого растяжения стержня (см. рис. 1) мы видим, что во время удлинения под действием постепенно увеличивающейся силы последняя производит некоторую работу, и эта работа превращается, частично или полностью, в потенциальную энергию деформации. Если деформация остается в пределах упругости, то произведенная работа полностью преобразуется в потенциальную энергию и может быть возвращена при постепенной разгрузке деформированного стержня.

Если конечная величина нагрузки будет P и соответствующее удлинение — δ , то диаграмма растяжения будет иметь вид, показанный на рис. 262, где по оси абсцисс отложены удлинения, а по оси ординат — соответствующие силы. P_1 представляет промежуточное значение силы, а δ_1 — соответствующее удлинение. Увеличение dP_1 силы вызывает увеличение $d\delta_1$ удлинения. Работа, произведенная силой P_1 во время этого удлинения, равна $P_1 d\delta_1$ и представлена на рисунке заштрихованной площадью. Если принять во внимание увеличение силы P_1 во время удлинения, то совершенная работа изобразится площадью трапеции $abcd$. Полная работа, совершенная в процессе нагрузки, когда сила увеличивается от 0 до P , равняется сумме таких элементарных площадок и изображается площадью треугольника OAB . Этот же треугольник представляет полную энергию U , накопленную в стержне во время деформации. Тогда

$$U = \frac{P\delta}{2}. \quad (170)$$

Пользуясь уравнением (1), мы получаем следующие два выражения для энергии деформации в призматическом стержне:

$$U = \frac{P^2 l}{2FE}, \quad (171)$$

$$U = \frac{FE\delta^2}{2l}. \quad (172)$$

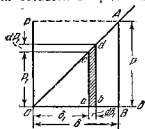


Рис. 262.

Первое из этих уравнений дает энергию деформации как функцию силы P , а второе дает ту же энергию, как функцию удлинения δ . Для стержня данных размеров и данного модуля упругости энергия деформации вполне определяется величиной силы P или величиной удлинения δ .

В практических приложениях часто имеет важное значение энергия деформации, отнесенная к единице объема. Из уравнений (171) и (172) она равняется

$$U' = \frac{U}{Fl} = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (173)$$

или

$$U' = \frac{E\epsilon^2}{2}, \quad (174)$$

где $\sigma = P/F$ есть растягивающее напряжение и $\epsilon = \delta/l$ — относительное удлинение.

Наибольшее количество энергии деформации в единице объема, которое может быть накоплено в стержне безостаточной деформации¹⁾, найдется подстановкой в уравнение (173) предела упругости вместо σ . Сталь с пределом упругости 2000 кг/см^2 и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ дает 1 кг см на куб см ; резина с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$ и пределом упругости 20 кг/см^2 дает $U' = 20 \text{ кг см}$ на куб см . Иногда интересно знать наибольшее количество энергии деформации на единицу веса U'' , которое может быть накоплено без появления остаточной деформации. Эта величина вычисляется из уравнения (173) подстановкой предела упругости вместо σ и делением U' на вес одного кубического сантиметра материала. Несколько числовых значений, полученных таким образом, дано в таблице 4.

Таблица 4

Значения потенциальной энергии на единицу объема и на единицу веса

Материал	Удельный вес	E кг/см ²	Предел упругости кг/см ²	U' кг см на см ³	U'' кг см на кг
Строительная сталь	7,8	$2 \cdot 10^6$	2000	1	128
Инструментальная сталь	7,8	$2 \cdot 10^6$	8000	16	2051
Медь	8,5	$1 \cdot 10^4$	270	0,0365	4,3
Дуб	1,0	$1 \cdot 10^6$	270	0,865	365
Резина	0,93	10	20	20	21505

¹⁾ Эта величина иногда называется «живое упругое сопротивление».

Эта таблица показывает, что количество энергии, которое может быть накоплено в данном весе резины приблизительно в 10 раз больше, чем для инструментальной стали и приблизительно в 170 раз больше, чем для строительной стали.

ЗАДАЧИ

1. Призматический стальной стержень длиной 25 см и площадью поперечного сечения 25 см^2 сжимается силой $P = 1600 \text{ кг}$. Определить количество энергии деформации.

Ответ. $U = 0,64 \text{ кг см}$.

2. Определить количество энергии деформации в предыдущей задаче, если площадь поперечного сечения вместо 25 см^2 равняется $12,5 \text{ см}^2$.

Ответ. $U = 1,28 \text{ кг см}$.

3. Определить количество энергии деформации в вертикальном однородном стержне, растянутом под действием собственного веса, если длина стержня равняется 30 м, площадь его поперечного сечения 6 см^2 и вес стали $7,8 \text{ кг/дм}^3$.

Ответ. $U = 0,81 \text{ кг см}$.

4. Определить количество энергии деформации в предыдущей задаче, если в дополнение к собственному весу стержень нагружен на конце продольной силой $P = 100 \text{ кг}$.

Ответ. $U = 27,81 \text{ кг см}$.

5. Проверить решение задачи, показанной на рис. 18, стр. 26, для того случая, когда все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и один и тот же модуль упругости, путем приравнивания энергии деформации системы работы, произведенной нагрузкой P .

Решение. Если X есть удлинение в вертикальном стержне, то его удлинение равно Xl/FE , и работа, произведенная силой P , будет $\frac{1}{2} P(Xl/FE)$. Приравнивая ее к энергии деформации, получаем

$$\frac{1}{2} P \frac{Xl}{FE} = \frac{X^2 l}{2FE} + 2 \frac{X \cos^2 \alpha l}{2FE \cos \alpha},$$

откуда

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

что подтверждает приведенное решение.

6. Проверить задачу 2, стр. 19, путем приравнивания работы, произведенной грузом, к энергии деформации двух стержней.

7. Стальной стержень длиной 75 см и площадью поперечного сечения 6 см^2 вытягивается на $0,05 \text{ см}$. Найти количество энергии деформации.

Ответ. Из уравнения (172) находим

$$U = \frac{(0,05)^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6}{2 \cdot 75} = 200 \text{ кг см}.$$

8. Сравнить количества энергии деформации в двух круглых стержнях, показанных на рис. 263, а и 263, б, предполагая равномерное распределение напряжений по поперечным сечениям стержней.

Решение. Энергия деформации призматического стержня равняется

$$U = \frac{P^2 l}{2FE}.$$

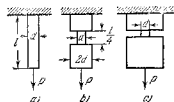


Рис. 263.

Энергия деформации стержня с выточками равняется

$$U_1 = \frac{\rho^2}{2FE} \frac{l}{4} + \frac{\rho^2}{8FE} \frac{3}{4} l = \frac{7}{16} \frac{\rho^2 l}{2FE},$$

отсюда

$$\frac{U_1}{U} = \frac{7}{16}.$$

При данном наибольшем напряжении количество энергии, накопленной в стержне с выточками, меньше, чем в стержне одинаковой толщины. Потребуется лишь весьма небольшое количество работы, чтобы довести растягивающее напряжение до опасного предела в таком стержне, как показано на рис. 263, с, который имеет очень узкую выточку и большой внешний диаметр, хотя его диаметр в самом слабом месте равен диаметру цилиндрического стержня.

67. Растяжение, вызываемое ударом

На рис. 264 показано простое устройство для того, чтобы вызвать растяжение ударом. Груз Q падает с высоты h на выступ mn и при ударе вызывает растяжение вертикального стержня AB , который закреплен в верхнем конце. Если массы стержня и выступа малы по сравнению с массой падающего тела, то удовлетворительное приближенное решение получается, если пренебречь массой стержня и предположить, что при ударе не происходит потери энергии. После удара о выступ mn тело Q продолжает двигаться вниз, вызывая растяжение стержня. Вследствие сопротивления стержня скорость движущегося тела уменьшается до тех пор, пока не сделается равной нулю. В этот момент удлинение стержня и соответствующие растягивающие напряжения будут наибольшими, и их величина определяется на основании предположения, что полная работа, произведенная грузом Q , преобразуется в энергию деформации стержня ¹⁾. Если δ означает наибольшее удлинение, то совершенная грузом Q работа равняется $Q(h+\delta)$. Энергия деформации стержня получится из уравнения (172). Тогда уравнение для вычисления δ будет

$$Q(h+\delta) = \frac{FE}{2l} \delta^2, \quad (a)$$

из которого

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}, \quad (175)$$

¹⁾ В действительности же часть энергии рассеется, и действительное удлинение будет всегда меньше того, которое вычисляется на основании указанных допущений.

где

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{FE}$$

есть статическое удлинение стержня от груза Q и $v = \sqrt{2gh}$ есть скорость падающего тела в момент удара о выступ mn . Если высота h велика по сравнению с $\delta_{ст}$, то тогда приближенно получается

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}.$$

Соответствующее растягивающее напряжение в стержне будет

$$\sigma = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l} \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2} = \sqrt{\frac{2E Q v^2}{Fl}}. \quad (176)$$

Выражение под радикалом прямо пропорционально кинетической энергии падающего тела, модулю упругости материала стержня и обратно пропорционально объему Fl стержня. Следовательно, напряжение может быть уменьшено не только увеличением площади поперечного сечения, но также и увеличением длины стержня или уменьшением модуля упругости E . Это совершенно отлично от статического растяжения стержня, где напряжение не зависит от длины l и модуля упругости E . Подставляя в уравнение (176) допускаемое напряжение вместо σ , получаем следующее уравнение для размеров стержня, подверженного предельному осевому удару:

$$Fl = \frac{2E}{(\sigma)^2} \frac{Qv^2}{2g} = \frac{2EQh}{(\sigma)^2}, \quad (177)$$

т. е. для того, чтобы сохранить наибольшее напряжение постоянным, объем стержня должен быть пропорционален кинетической энергии падающего тела.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, в котором h равняется нулю, т. е. тело Q внезапно положено на опору mn (рис. 264) без начальной скорости. Хотя в этом случае мы не имеем кинетической энергии в начале растяжения стержня, все-таки эта задача совершенно отлична от задачи при статическом нагружении стержня. В случае статического растяжения мы предполагаем постепенное приложение нагрузки и, следовательно, всегда существующее равновесие между действующей нагрузкой и сопротивляющимися силами упругости в стержне. При этих условиях вопрос о кинетической энергии не входит в задачу. В случае внезапного приложения нагрузки удлинение стержня и напряжение в стержне в начале равны нулю, и внезапно приложенный груз начинает падать под действием собственного веса. Во время этого движения сила сопротивления стержня постепенно увеличивается, и, когда она

сделается равной Q , вертикальное перемещение груза будет $\delta_{ст}$. В этот момент груз обладает некоторой кинетической энергией, приобретенной при перемещении на $\delta_{ст}$; следовательно, он продолжает двигаться вниз до тех пор, пока его скорость не дойдет до нуля вследствие действия силы сопротивления стержня. Наибольшее удлинение при этом условии получится из уравнения (175) подстановкой $v=0$. Тогда

$$\delta = 2\delta_{ст} \quad (178)$$

т. е. внезапно приложенный груз, вследствие динамических условий, вызывает удлинение, которое в два раза больше удлинения, получающегося в случае постепенно приложенной нагрузки.

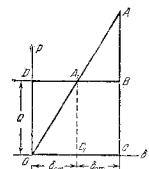


Рис. 265.

время накопленная в стержне энергия определится площадью треугольника OA_1C_1 , который представляет лишь половину площади упомянутого прямоугольника. Другая половина произведенной работы преобразуется в кинетическую энергию движущегося тела. Вследствие приобретенной скорости тело продолжает двигаться и останавливается лишь на расстоянии $\delta = 2\delta_{ст}$ от начала. В этот момент полная работа, совершенная грузом Q и изображенная прямоугольником $ODBC$, равняется количеству энергии, накопленной в стержне и представленной треугольником OAC .

Предыдущие рассуждения об ударе основаны на предположении, что напряжения в стержне остаются в пределах упругости. За этим пределом задача становится более сложной, так как удлинение стержня уже не пропорционально растягивающей силе. Предполагая, что диаграмма растяжения не зависит от скорости нагружения стержня¹⁾,

¹⁾ Опыты с мягкой сталью показывают, что с увеличением скорости испытания предел текучести повышается и количество работы, необходимой для разрушения образца, больше, чем при статическом испытании. См. Н. Д. Я в и н с о н о в, Известия Петербургского политехнического института, 1913, W e l l e r, Z. Metallkunde, 1924, M. J. M a n j o i n e, J. Appl. Mech., т. 11, стр. 211, 1923.

найдем, что удлинение за пределом упругости при ударе можно определить из обычной диаграммы растяжения, которая показана на рис. 266.

Для некоторого предполагаемого наибольшего удлинения δ соответствующая площадь $OADF$ дает работу, которую необходимо произвести, чтобы вызвать такое удлинение; она должна равняться работе $Q(h+\delta)$, совершенной грузом Q . Когда $Q(h+\delta)$ равно или больше всей площади $OABC$ диаграммы растяжения, то падающее тело разрушит стержень.

Из этого следует, что любое изменение формы стержня, которое влечет уменьшение полной площади $OABC$ диаграммы, уменьшает также силу сопротивления стержня удару.

В образцах с выточками, например, показанными на рис. 263, b и 263, c , пластическое течение металла будет сосредоточено у выточки, и полное удлинение и работа, необходимая для разрушения, будут гораздо меньше, чем в случае цилиндрического стержня, показанного на том же рисунке.

Такие образцы с выточками весьма слабы при ударе. Легкий толчок может произвести разрушение, даже если сам материал будет мягким. Точно так же слабо сопротивляются удару части, имеющие заклепочные отверстия или резкое изменение поперечного сечения¹⁾.

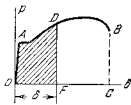


Рис. 266

В предыдущем изложении мы пренебрегли массой стержня по сравнению с массой падающего тела Q . Только в таком случае мы можем предполагать, что вся энергия падающего тела преобразуется в энергию деформации стержня. Действительные условия при ударе более сложны, и когда стержень имеет значительную массу, то часть энергии будет тратиться при ударе. Хорошо известно, что когда движущаяся со скоростью v масса Q/q центрально ударяет покоящуюся массу Q_1/q и деформация в точке соприкосновения является пластической, то конечная общая скорость v_0 двух тел равняется

$$v_0 = \frac{Q}{Q+Q_1} v. \quad (b)$$

В случае стержня, показанного на рис. 261, условия более сложны. При ударе верхний конец A остается в покое, в то время как нижний конец B приобретает скорость движущегося тела Q . Следовательно, для того чтобы вычислить из уравнения (b) конечную скорость v_0 , мы должны воспользоваться *приближенной массой* (место действительной массы стержня). Предполагая, что скорость стержня изменяется линейно по его длине, можем показать, что приведенная масса в этом случае равняется одной трети массы стержня²⁾. Для стержня весом q на единицу

¹⁾ См. H a c k s t r o m, Baumaterialienkunde, стр. 321, 1905 и H. Z i m m e r m a n n Zentr. Bauverw., стр. 265, 1899.

²⁾ Это решение было получено Н. С о р т о м, Trans. Cambridge Phil. Soc., стр. 73, 1849; см. также I o d h u n t e r and P e a r s o n, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, т. 1, стр. 895, 1886.

длины уравнение (b) получает вид

$$v_a = \frac{Q}{Q + \frac{ql}{3}} v. \quad (c)$$

Это есть общая скорость груза Q и нижнего конца стержня, которая устанавливается в первый момент удара. Полагая, что у поверхности соприкосновения между падающим грузом и опорой ml (рис. 264) происходит пластическая деформация без всякого отскокивания, получаем, что соответствующая кинетическая энергия равняется

$$\frac{v_a^2}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right) = \frac{Qv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{ql}{3Q}}.$$

Эта величина должна быть подставлена в уравнение (a) вместо

$$\frac{Qv^2}{2g} = Qh$$

для того, чтобы принять во внимание потерю энергии в первый момент удара. Тогда вместо уравнения (175) получаем

$$\delta = \delta_{ct} + \sqrt{\delta_{ct}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ct} v^2 \frac{1}{1 + \frac{ql}{3Q}}}. \quad (179)$$

Изложенный метод дает удовлетворительные результаты до тех пор, пока масса стержня мала по сравнению с массой падающего тела. В противном случае становится необходимым рассмотрение продольных колебаний стержня ¹⁾. Местная деформация в точке соприкосновения при ударе разобрана J. E. Sears'ом ²⁾ и J. E. P. Wagstaff'ом ³⁾.

ЗАДАЧИ

1. Груз в 4 кг, привязанный к стальной проволоке диаметром 0,3 см (рис. 267), падает из А с ускорением g . Определить возникающие в проволоке напряжения в тот момент, когда ее верхний конец внезапно остановится. Массой проволоки пренебречь.

Решение. Если ускорение груза Q равняется g , то растягивающих напряжений в проволоке нет. После остановки проволоки в А напряжения получаются из уравнения (176), в котором δ_{ct} пренебрегают. Подставляя $v^2 = 2gh$ и $l = h$, получаем

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EQ}{F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 4}{0,785 \cdot 0,3^2}} = 15\,038 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Продольные колебания призматического стержня при ударе были рассмотрены Navier. Более исчерпывающее решение было разработано St.-Venant'ом; см. его перевод: С. I e b s h, Theorie der Elasticität fester Körper, 1883, приложение к § 81. См. также J. B o u s s i n e s g, Application des Potentiels, стр. 508, 1885 и С. R a t z a u e r, Ann. Physik, т. 30, 1909.

²⁾ Trans. Cambridge. Phil. Soc., т. 21, стр. 49, 1908.

³⁾ Proc. Roy. Soc. (London) A т. 105, стр. 544, 1924.

Очевидно, что напряжения в этом случае не зависят от высоты h , с которой падает груз, так как кинетическая энергия тела увеличивается в том же отношении, как и объем проволоки.

2. Груз $Q = 400 \text{ кг}$ падает с высоты $h = 1 \text{ м}$ на вертикальный деревянный столб длиной 6 м и диаметром 30 см, закрепленный в нижнем конце. Определить наибольшее сжимающее напряжение в столбе, полагая для дерева $E = 10^4 \text{ кг/см}^2$ и пренебрегая массой столба и величиной δ_{ct} .

Ответ. $\sigma = 138 \text{ кг/см}^2$.

3. Груз $Q = 4000 \text{ кг}$, привязанный к концу стального проволоочного каната (рис. 267), движется вниз с постоянной скоростью $v = 1 \text{ м/сек}$. Каковы будут напряжения в канате, когда его верхний конец внезапно остановится? Свободная длина каната в момент удара равна $l = 20 \text{ м}$, площадь его поперечного сечения $F = 15 \text{ см}^2$ и $E = 10^4 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пренебрегая массой каната и полагая, что кинетическая энергия движущегося тела полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации каната, получаем следующее уравнение для определения наибольшего удлинения δ каната:

$$\frac{FE\delta^2}{2l} - \frac{FE\delta_{ct}^2}{2l} = \frac{Q}{2g} v^2 + Q(\delta - \delta_{ct}) \quad (d)$$

в котором δ_{ct} означает статическое удлинение каната. Замечая, что $Q = FE\delta_{ct}/l$, из уравнения (d) получаем

$$\frac{FE}{2l} (\delta - \delta_{ct})^2 = \frac{Qv^2}{2g},$$

откуда

$$\delta = \delta_{ct} + \sqrt{\frac{Qv^2 l}{FEg}}.$$

Следовательно, при внезапной остановке движения растягивающее напряжение в канате увеличивается в отношении

$$\frac{\delta}{\delta_{ct}} = 1 + \frac{v}{\delta_{ct}} \sqrt{\frac{Ql}{FEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{ct}}}. \quad (e)$$

Для указанных числовых данных получаем

$$\delta_{ct} = \frac{Ql}{FE} = \frac{4000 \cdot 20 \cdot 100}{15 \cdot 10^4} = 0,53 \text{ см},$$

$$\frac{\delta}{\delta_{ct}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{981 \cdot 0,53}} = 5,39,$$

следовательно,

$$\sigma = 5,39 \frac{Q}{F} = 1437 \text{ кг/см}^2.$$

4. Решить предыдущую задачу, если между канатом и грузом помещена проволока, которая удлиняется на 4 см от груза в 1000 кг.

Решение. $\delta_{ct} = 0,53 + 4 = 4,53 \text{ см}$. Вставляя в уравнение (e), получаем

$$\frac{\delta}{\delta_{ct}} = 1 + 0,506 = 1,506; \quad \sigma = 1,506 \frac{Q}{F} = 481,6 \text{ кг/см}^2.$$



Рис. 267.

Сравнивая это с результатом предыдущей задачи, видим, что пружина, заключенная между канатом и грузом, имеет большие влияния на уменьшение величины σ_{\max} при ударе.

5. Для случая, показанного на рис. 264, определить высоту h , для которой наибольшее напряжение в стержне при ударе равняется 2000 кг/см^2 . Принять $Q=10 \text{ кг}$, $l=2 \text{ м}$, $F=3 \text{ см}^2$, $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Массой стержня пренебречь.

Ответ. $h=60 \text{ см}$.

68. Энергия упругой деформации при сдвиге и кручении

Энергия деформации, накопленная в элементе, испытывающем чистый сдвиг (рис. 268), может быть вычислена по методу, примененному в случае простого растяжения. Если нижнюю грань ad элемента принять закрепленной, то необходимо рассмотреть лишь работу, произведенную силой P при деформации верхней грани bc . Полагая, что материал следует закону Гука, находим, что относительный сдвиг пропорционален касательному напряжению и диаграмма, изображающая эту зависимость, аналогична диаграмме, показанной на рис. 262. Тогда работа, произведенная силой P и накопленная



Рис. 268.

в форме энергии упругой деформации, будет равняться (см. уравнение 170, стр. 255)

$$U = \frac{P\delta}{2}. \quad (170')$$

Припоминая, что

$$\frac{\delta}{l} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{FG},$$

из (170') мы получим следующие два уравнения:

$$U = \frac{P^2 l}{2FG}, \quad (180)$$

$$U = \frac{FG\delta^2}{2l}. \quad (181)$$

Путем деления этих уравнений на объем Fl бруска получаем два выражения для энергии деформации на единицу объема:

$$U' = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (182)$$

$$U' = \frac{\nu^2 G}{2}, \quad (183)$$

где $\tau = P/F$ есть касательное напряжение и $\nu = \delta/l$ — относительный сдвиг. Количество энергии при сдвиге на единицу объема, которое

может быть накоплено в бруске без остаточной деформации, получается подстановкой в уравнение (182) предела упругости вместо τ .

Энергия, накопленная в скручиваемом круглом вале, легко вычисляется при помощи уравнения (182). Если τ_{\max} есть наибольшее касательное напряжение на поверхности вала, то $\tau_{\max}(2r/d)$ будет касательным напряжением в точке на расстоянии r от оси, где d — диаметр вала. Энергия на единицу объема в этой точке из уравнения (182) будет

$$U' = \frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2}. \quad (a)$$

Энергия, накопленная в материале, заключенном между двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r+dr$, равняется

$$\frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2} 2\pi r l dr,$$

где l — длина вала. Тогда полная энергия, накопленная в вале, будет

$$U = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2} 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \frac{\pi d l}{4} \frac{\tau_{\max}^2}{2G}. \quad (184)$$

Это выражение показывает, что полная энергия составляет лишь половину той энергии, которая была бы, если бы все элементы вала были напряжены до наибольшего касательного напряжения τ_{\max} .

Энергия кручения может быть вычислена из диаграммы кручения (рис. 269), в которой крутящие моменты изображены ординатами, а углы закручивания — абсциссами. В пределах упругости угол закручивания пропорционален крутящему моменту, как представлено наклонной линией OA . Узкая заштрихованная на чертеже площадка изображает работу, произведенную крутящим моментом при возрастании угла закручивания φ на величину $d\varphi$. Площадь $OAB = M_t \varphi/2$ изображает полную энергию, накопленную в вале во время кручения. Припоминая, что $\varphi = M_t l / GJ_p$, получаем

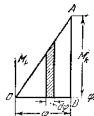


Рис. 269.

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GJ_p} \quad \text{или} \quad U = \frac{\varphi^2 GJ_p l}{2}. \quad (185)$$

В первом из этих уравнений энергия представлена как функция крутящего момента, во втором — как функция угла закручивания.

В общем случае, для любой формы поперечного сечения и крутящего момента, изменяющегося по длине вала, угол между двумя

смежными поперечными сечениями определяется по формуле (см. стр. 246)

$$\frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{M_{\kappa}}{C} dx.$$

Энергия деформации части вала между двумя смежными поперечными сечениями равняется

$$\frac{1}{2} M_{\kappa} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{C}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

и полная энергия кручения равняется

$$U = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2C} \int_0^l M_{\kappa}^2 dx. \quad (186)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить соотношение между пределом упругости при сдвиге и пределом упругости при растяжении, если количество энергии деформации на 1 см³, которое может быть накоплено без остаточной деформации, одно и то же как при растяжении, так и при сдвиге.

Решение. Из уравнений (173) и (183) имеем

$$\frac{\sigma^3}{2E} = \frac{\tau^3}{2G},$$

откуда

$$\frac{\tau}{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{E}}.$$

Для стали

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{1}{2,6}} = 0,62\sigma.$$

2. Определить осадку винтовой пружины (см. рис. 253), пользуясь выражением энергии деформации при кручении.

Решение. Обозначим через P силу, действующую в направлении оси пружины (рис. 253), через R — радиус витков и через n — число витков. Из уравнения (185) энергия кручения, накопленная в пружине, будет

$$U = \frac{(PR)^2 2\pi Rn}{2GJ_p}.$$

Приравняв это выражение произведенной работе $P\delta/2$, получаем

$$\delta = \frac{2\pi n PR^3}{GJ_p} = \frac{64\pi PR^3}{Gd^4},$$

что совпадает с уравнением (162).

3. Вес стальной винтовой пружины равен 4 кг. Определить количество энергии, которое можно накопить в этой пружине, не вызывая остаточных деформаций, если предел упругости при сдвиге равен 5000 кг/см².

Решение. Количество энергии на куб см из уравнения (182) равняется

$$U' = \frac{(3000)^2}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^8} = 16,25 \text{ кг см.}$$

Энергия, приходящаяся на кг материала (см. стр. 256), равняется 2051 кг см. Тогда полная энергия кручения ¹⁾, которая может быть накоплена в пружине, будет

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2051 = 4102 \text{ кг см.}$$

4. Сплошной круглый вал и тонкая труба из одного материала и одного и того же веса подвергнутся кручению. В каком отношении будут находиться количества энергии в вале и трубе, если наибольшие напряжения в них равны?

Ответ. 1 : 2.

5. Круглый стальной вал с маховым колесом на одном конце вращается со скоростью 120 оборотов в минуту. Другой его конец внезапно останавливается. Определить наибольшее напряжение вала при ударе, если длина вала $l = 1,5$ м, диаметр $d = 5$ см, вес махового колеса $Q = 40$ кг, радиус инерции его $i = 25$ см.

Решение. Наибольшее напряжение вала будет тогда, когда полная кинетическая энергия маховика преобразуется в энергию деформации скрученного вала. Кинетическая энергия маховика равняется

$$\frac{Ql^2 \omega^2}{2g} = \frac{40 \cdot 25^2 (4\pi)^2}{2 \cdot 981} = 2000 \text{ кг см.}$$

Подставляя это выражение в уравнение (184), вместо U , получаем

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{16 \cdot 7,7 \cdot 10^8 \cdot 2000}{\pi \cdot 25 \cdot 150}} = 1446 \text{ кг/см}^2.$$

6. Два круглых стержня из одного и того же материала, одинаковой длины, но разных поперечных сечений F и F_1 , скручиваются одинаковыми моментами. В каком отношении будут находиться количества энергии деформации в этих двух стержнях?

Ответ. Обратно пропорционально квадратам площадей поперечных сечений.

69. Энергия упругой деформации при изгибе

Начнем рассмотрение со случая чистого изгиба. Для призматического бруска, заделанного одним концом и изгибаемого парой сил на другом (рис. 270), угол поворота свободного конца равняется

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ_s}. \quad (a)$$

Это перемещение пропорционально изгибающему моменту M , и при помощи диаграммы, подобной изображенной на рис. 269, и путем подобных же рассуждений мы можем заключить, что работа, произведенная изгибающим моментом при изгибе, или энергия, накопленная в бруске, равняется

$$U = \frac{M\varphi}{2}. \quad (b)$$

¹⁾ Распределение напряжений предполагается такое же, как и в скручиваемом круглом стержне.

При помощи уравнения (а) эта энергия может быть выражена двойкою следующим образом:

$$U = \frac{M^2 l}{2EJ_z}, \quad (187)$$

$$U = \frac{\sigma_{\max}^2 E J_z}{2l}. \quad (188)$$

Иногда полезно иметь потенциальную энергию, выраженную в виде функции наибольшего нормального напряжения $\sigma_{\max} = M_{\max}/W$. Так, например, для прямоугольного бруска $\sigma_{\max} = 6M/bh^2$, или $M = bh^2 \sigma_{\max}/6$, и уравнение (187) получает вид

$$U = \frac{1}{3} bhl \frac{\sigma_{\max}^2}{2E}. \quad (189)$$

Очевидно, в этом случае полная энергия составляет лишь одну треть той энергии, которая была бы, если бы все волокна испытывали напряжение σ_{\max} .

При рассмотрении изгиба силами, перпендикулярными к оси, энергией деформации сдвига сначала пренебрегают. На основании уравнений (187) и (188) энергия, накопленная в элементе балки между двумя смежными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии dx одно от другого, равняется

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EJ_z} \quad \text{или} \quad dU = \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx.$$

Здесь изгибающий момент M есть величина переменная в зависимости от x , а

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| dx$$

(см. стр. 124). Следовательно, полная энергия, накопленная в бруске, равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_z} \quad (190)$$

или

$$U = \int_0^l \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (191)$$

Возьмем, например, консоль AB (рис. 271, а). Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении m равняется $M = -Px$. Подстановка в уравнение (190) дает

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EJ_z} = \frac{P^2 l^3}{6EJ_z}. \quad (с)$$

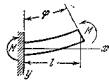


Рис. 270.

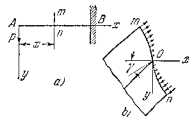


Рис. 271.

Для прямоугольного бруска $\sigma_{\max} = 6P/bh^2$, и уравнение (с) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{9} bhl \frac{\sigma_{\max}^2}{2E}. \quad (с')$$

Это показывает, что количество энергии, которое может быть накоплено в прямоугольной консольной балке, нагруженной на конце, без остаточных деформаций, составляет одну треть энергии для того же бруска при чистом изгибе и одну девятую — при растяжении того же бруска. Это соотношение является важным при проектировании рессор, которые должны без вреда поглощать данное количество энергии и, кроме того, иметь, по возможности, малый вес. Способность консоли поглощать энергию можно увеличить, давая ей переменное поперечное сечение. Например, консоль *равного сопротивления* с прямоугольным поперечным сечением постоянной высоты h (см. рис. 188) и с теми же значениями для P , h и σ_{\max} имеет прогиб, а следовательно, и количество накопленной энергии на 50% больше, чем призматический брусок. В то же самое время брусок *равного сопротивления* изгибу имеет половину веса призматического бруска, так что он может накопить в три раза больше энергии на 1 кг материала.

Возвращаясь к уравнению (с) и приравнявая энергию деформации работе, совершенной силой P при изгибе, получаем

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EJ_z}, \quad (д)$$

откуда прогиб на конце равняется

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ_z},$$

что совпадает с уравнением (95).

Дополнительный прогиб от сдвига можно также определить из потенциальной энергии деформации. Для консоли, показанной на рис. 271, с прямоугольным поперечным сечением касательное напряжение на расстоянии y от нейтральной оси равняется (см. уравнение (65))

$$\frac{P}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Следовательно, из уравнения (182) энергия сдвига в элементарном объеме $b dx dy$ равняется

$$\frac{P^2}{8GJ_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b dx dy$$

и

$$U = \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P^2}{8GJ_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b dx dy = \frac{P^2 h^4}{20GJ_z^2}. \quad (e)$$

Для того чтобы получить уравнение для определения полного прогиба, нужно эту величину сложить с правой частью вышеприведенного уравнения (d) ¹⁾

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EJ_z} + \frac{P^2 h^4}{20GJ_z^2}; \quad (f)$$

следовательно,

$$\delta = \frac{P l^3}{3EJ_z} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{h^2 E}{P G} \right). \quad (g)$$

Второй член в скобках выражает действие касательных напряжений на прогиб балки.

При помощи метода, изложенного в § 39, на основании предположения, что элемент поперечного сечения в центре тяжести заданного конца остается вертикальным (рис. 271, б), дополнительный угол наклона от сдвига определится

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3}{2} \frac{P}{bhG},$$

и дополнительный прогиб будет

$$\frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG}.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{P l^3}{3EJ_z} + \frac{3}{2} \frac{P l^3}{bhG} = \frac{P l^3}{3EJ_z} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{h^2 E}{P G} \right). \quad (g')$$

Мы видим, что уравнения (g) и (g') не совпадают. Расхождение объясняется следующим: вывод § 39 был основан на предположении, что поперечные сечения балки могут свободно искривляться под действием касательных напряжений. В таком случае заданное поперечное сечение будет искривляться по поверхности mO_n (рис. 271, б) и при вычислении полной работы, произведенной при изгибе консоли, мы должны принять во внимание не только работу, совершенную силой P (рис. 271, а), но также и работу, совершенную напряжениями, действующими в заданном поперечном сечении (рис. 271, б). Если будет принята во внимание эта последняя работа, то прогиб, вычисленный на основании рассмотрения энергии деформации, совпадает с прогибом, полученным в § 39 и определяемым по приведенной выше формуле (g').

В случае свободно опертой балки и нагруженной в середине, как можно заключить из условий симметрии, среднее поперечное сечение не искривляется. В таком случае уравнение (g), если его применить к каждой половине балки, будет давать лучшее приближение для прогиба, чем уравнение (g'). Это можно видеть, если сравнить приближенные уравнения (g) и (g') с более строгим решением, данным в § 39.

¹⁾ Такое сложение энергии сдвига с энергией от нормальных напряжений является правильным, так как касательные напряжения, действующие на элемент (рис. 268), не изменяют длины сторон элемента, и если нормальные напряжения действуют ко этим граням, то они не производят работу при деформации сдвига. Следовательно, касательные напряжения не изменяют количества энергии от растяжения или сжатия, и оба вида энергии можно просто сложить вместе.

ЗАДАЧИ

1. Деревянная консольная балка длиной 2 м, прямоугольного поперечного сечения 12×20 см несет равномерно распределенную нагрузку $q=250$ кг на 1 пог. м. Определить количество потенциальной энергии деформации, если $E=10^6$ кг/см².

$$\text{Ответ. } U = \frac{q^2 l^4}{40EJ_z} = \frac{(2,5)^2 \cdot 200^2 \cdot 12}{40 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 20^3} = 62,5 \text{ кг см.}$$

2. В каком отношении увеличится количество энергии деформации, вычисленное в предыдущей задаче, если высота балки будет 12 см, а ширина 20 см?

Ответ. Энергия деформации увеличится в отношении 20³:12³.

3. Два одинаковых бруска, один со свободно опертыми концами, а другой — с заделанными, изгибаются равными силами, приложенными в середине. В каком отношении находятся количества потенциальной энергии деформации?

Ответ. 4:1.

4. Решить предыдущую задачу для равномерно распределенной нагрузки одинаковой интенсивности q в обоих брусках.

5. Найти отношение количества потенциальной энергии деформации в балках прямоугольного сечения одинаково нагруженных, имеющих одинаковую длину и одинаковую ширину поперечного сечения, но высоты в которых относятся как 2:1.

Решение. Для данной нагрузки энергия деформации пропорциональна прогибу, а прогиб обратно пропорционален моменту энергии площади поперечного сечения. Поэтому при уменьшении высоты в два раза прогиб увеличивается в 8 раз и количество энергии деформации увеличивается во столько же раз.

70. Изгиб, вызываемый ударом

Динамический прогиб балки, которая подвержена удару падающего тела Q , может быть определен по методу, изложенному для случая удара, вызывающего растяжение (§ 67). Возьмем в качестве примера свободно лежащую на опорах балку, ударяемую в середине (рис. 272), и допустим, что массой балки можно пренебречь по сравнению с массой падающего тела и что балка напряжена до предела текучести. Тогда потери энергии при ударе не будут и работа, произведенная грузом Q при его падении, полностью преобразуется в энергию деформации изгиба балки ¹⁾. Пусть δ означает наибольший прогиб балки при ударе. Если мы предположим, что изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как при статическом изгибе, то сила, которая вызвала бы такой прогиб, на основании уравнения (90), должна равняться

$$P = \delta \frac{48EJ_z}{l^3}. \quad (a)$$

Полная энергия, накопленная в балке, равняется работе, со-

¹⁾ Местными деформациями на поверхности соприкосновения нагрузки с балкой при этом вычислении пренебрегают.

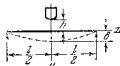


Рис. 272.

вершенной силой P ,

$$U = \frac{P\delta}{2} = \delta^2 \frac{24EJ_s}{l^3}$$

Если h по-прежнему означает высоту падения, то уравнение для определения δ будет

$$Q(h + \delta) = \delta^2 \frac{24EJ_s}{l^3}, \quad (b)$$

откуда

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}, \quad (192)$$

где

$$\delta_{ст} = \frac{Ql^3}{48EJ_s} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Уравнение (192) — точно такое же, как и при ударе, вызывающем растяжение (уравнение (175)).

Необходимо заметить, что вид уравнения остается тот же и для других случаев удара при условии, что деформация в точке удара пропорциональна силе P , приложенной в этой точке. Если через α обозначим коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции, то мы имеем

$$\alpha P = \delta \quad \text{и} \quad U = \frac{P\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\alpha}.$$

Тогда

$$Q(h + \delta) = \frac{\delta^2}{2\alpha},$$

и так как $\delta_{ст} = Q\alpha$, то это уравнение приводится к уравнению (192).

Необходимо заметить также, что прогиб δ , вычисленный из уравнения (192), представляет верхний предел, к которому приближается наибольший динамический прогиб, когда нет потери энергии при ударе. Всякая потеря будет уменьшать динамический прогиб. Когда динамический прогиб найден из уравнения (192), то соответствующие напряжения можно найти умножением на $\delta/\delta_{ст}$ напряжений, полученных при статическом приложении груза Q .

Когда h велико по сравнению с $\delta_{ст}$ или удар происходит в горизонтальном направлении, то уравнение (192) принимает более простой вид

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}. \quad (c)$$

Для случая балки, опертой на концах и ударяемой посередине, это уравнение дает

$$\delta = \sqrt{\frac{Qv^2}{2g} \frac{l^3}{24EJ_s}}. \quad (d)$$

Наибольший изгибающий момент в этом случае будет

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{\delta \cdot 48EJ_s}{l^3} \frac{l}{4}$$

и

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\delta \cdot 48EJ_s}{l^3} \frac{l}{4W}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения, пользуясь уравнением (d), получаем

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{Qv^2}{2g} \frac{18E}{lF}}. \quad (e)$$

Это указывает на то, что наибольшее напряжение зависит от кинетической энергии падающего тела и объема lF балки.

При определении влияния массы балки на наибольший прогиб будем предполагать, что изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как и при статическом изгибе. Тогда можно показать, что приведенная масса балки ¹⁾, опертой на концах, равняется $(17/35)(ql/g)$ и общая скорость, которая устанавливается в первый момент удара, равняется

$$v_e = \frac{Q}{Q + \frac{17}{35} ql} v.$$

Полная кинетическая энергия после установления общей скорости v_e равна

$$\frac{v_e^2}{2g} \left[Q + \frac{17}{35} ql \right] = \frac{Qv^2}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{Q}}.$$

Пользуясь этим выражением вместо

$$\frac{Qv^2}{2g} = Qh$$

в уравнении (b), получаем уравнение

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{\delta_{ст} v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{Q}}}. \quad (193)$$

в котором принято во внимание влияние массы балки на прогиб δ ²⁾.

¹⁾ См. Соx, цитир. на стр. 261.

²⁾ Несколько примеров на применение этого уравнения можно найти в статье Prof. Tschetsche, Z. Ver. deut. Ing., стр. 134, 1894. Более точная теория поперечного удара на балку основана на исследовании ее поперечных колебаний совместно с местными деформациями в точке удара. См. перевод St. Venant'a книги Clebsch'a, стр. 537, штирнано; также Compt. rend., т. 45, стр. 204, 1857 и статью автора в Z. Math u. Phys., т. 62, стр. 198, 1913. Силы с балками, подверженными удару, были произведены в Швейцарии и удовлетворительно согласуются с вышеприведенной приближенной теорией, см. M. R o s s, Tech. Komm. Verband. Schweiz, Bruckbau u. Eisenhohlabfabriken, март, 1922. См. также Z. T u z i and M. N i s i d a, Phil. Mag. (серия 7), т. 21, стр. 448; R. N. A t l o n d, Proc Inst. Mech. Engrs. (London), т. 137, стр. 217, 1937; E. H. L e e, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 129, 1940.

В случае консоли, если груз Q ударяет балку на конце, величина приведенной массы балки равняется $\frac{33}{140} (ql/g)$. Когда свободно лежащая на опорах балка ударяется в точке, расстояния которой от опор соответственно равны a и b , то приведенная масса ее равняется

$$\frac{1}{105} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{b^2}{ab} \right)^2 \right] \frac{ql}{g},$$

и уравнение (193) должно быть изменено согласно этому выражению.

ЗАДАЧИ

1. Груз в 20 кг, падающий с высоты $h=30$ см, ударяет посередине свободно лежащую на двух опорах деревянную балку прямоугольного сечения длиной 3 м. Определить необходимую площадь поперечного сечения, если допустимое напряжение $[\sigma]=70$ кг/см², $E=10^4$ кг/см². Пренебречь $\delta_{ст}$ сравнительно с h .

Решение. Пользуясь уравнением (е) стр. 273¹⁾, получаем

$$F = \frac{Qv^2}{2g} \frac{18E}{l(\sigma)^2} = \frac{20 \cdot 30 \cdot 18 \cdot 10^4}{300 \cdot 70^2} = 735 \text{ кв. см.}$$

2. В каком отношении изменится площадь в предыдущей задаче: 1) если пролет балки увеличится с 3 до 4 м; 2) если груз Q увеличится на 50%?

Ответ. 1) Площадь уменьшится в отношении 3 : 4; 2) площадь увеличится на 50%.

3. Груз $Q=40$ кг падает с высоты 30 см на середину свободно лежащей на двух опорах двутавровой балки длиной 3 м. Найти безопасные размеры, если $[\sigma]=2000$ кг/см².

Решение. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h (см. уравнение (с)), находим, что отношение между динамическим и статическим прогибами равняется

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}}$$

Если изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как и при статическом изгибе, то наибольшие напряжения будут относиться как прогибы. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}} \frac{Ql}{4W} = [\sigma],$$

откуда

$$\frac{W}{c} = \frac{6EQh}{(\sigma)^2 l},$$

где W — момент сопротивления, а c — расстояние наиболее удаленного волокна от нейтральной оси, которое в этом случае равняется половине высоты балки. Подставляя числовые данные, получаем

$$\frac{W}{c} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 40 \cdot 30}{2000^2 \cdot 300} = 12 \text{ см}^2.$$

Необходимая двутавровая балка будет № 16, $W=109$ см².

¹⁾ Местными деформациями на поверхности соприкосновения нагрузки с балкой при этом вычислении следует пренебречь.

4. Какие напряжения возникнут в балке предыдущей задачи от груза в 80 кг, падающего на середину балки с высоты 15 см?

Ответ. $\sigma_{\max} = 1989$ кг/см².

5. Груз $Q=40$ кг, падающий с высоты $h=30$ см, ударяет на конце деревянную консольную балку длиной 2 м и площадью поперечного сечения 30×30 см. Определить наибольшую прогиб, принимая во внимание потерю энергии благодаря влиянию массы балки.

Решение. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h , получим уравнение, аналогичное уравнению (193):

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{ст} v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \frac{ql}{Q}}}$$

Для $v=0,6$; $q=0,6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10=54$ кг/м; $ql=54 \cdot 2=108$ кг и

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{Q} \frac{60}{33 \cdot 108}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 6 \cdot 40 \cdot 200^2 \cdot 12}{3 \cdot 10^8 \cdot 30^4}} = 0,76 \text{ см.}$$

6. Груз Q , падающий вниз с высоты h , ударяет посередине балку, свободно лежащую на двух опорах. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h , найти величину отношения $\frac{ql}{Q}$, при которой влияние массы балки уменьшает динамический прогиб на 10%.

Ответ. $\frac{ql}{Q} = 0,483$.

71. Общее выражение энергии деформации

При рассмотрении задач на растяжение, сжатие, кручение и изгиб было показано, что энергия деформации может быть представлена в каждом случае функцией второй степени от внешних сил (уравнения (171), (180) и (187)) или функцией второй степени от перемещений (уравнения (172), (181) и (188)). Это положение также справедливо в самом общем случае деформации упругого тела при соблюдении следующих условий: 1) материал следует закону Гука, 2) перемещения вследствие деформации настолько малы, что не оказывают влияния на действие внешних сил, и ими можно пренебречь при вычислении напряжений¹⁾. При этих двух условиях перемещения упругой системы являются линейными функциями внешних сил. Если эти силы увеличиваются в некотором отношении, то все перемещения увеличиваются в том же отношении. Рассмотрим тело, которое подвергается действию внешних сил P_1, P_2, P_3, \dots (рис. 273) и опирается таким

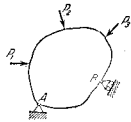


Рис. 273.

опирается таким

¹⁾ Такие задачи, как изгиб стержней поперечными силами с одновременным осевым растяжением или сжатием, не удовлетворяют вышеуказанным условиям и исключаются из этого рассмотрения. Относительно этих исключительных случаев см. § 76.

образом, что движение его в целом как твердого тела невозможно, а могут происходить лишь отдельные перемещения вследствие упругих деформаций. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ означают перемещения точек приложения сил, измеряемые по направлению соответствующей силы¹⁾. Если внешние силы увеличиваются постепенно, так что они всегда находятся в равновесии с внутренними силами упругости, то произведенная ими во время деформации работа будет равняться потенциальной энергии, накопленной в деформированном теле. Количество этой энергии не зависит от порядка, в котором приложены силы, но вполне определяется их конечными значениями. Положим, что внешние силы P_1, P_2, P_3, \dots увеличиваются одновременно в одном и том же отношении. Тогда зависимость между каждой силой и соответствующим ей перемещением может быть изображена диаграммой аналогично той, которая показана на рис. 262, и работа, произведенная всеми силами P_1, P_2, P_3, \dots , равная потенциальной энергии тела, будет

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3}{2} + \dots \quad (194)$$

т. е. полная энергия деформации равна полусумме произведений каждой внешней силы на соответствующее перемещение²⁾. На основании сделанных выше допущений, перемещения $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ являются однородными линейными функциями сил P_1, P_2, P_3, \dots . Подстановка этих функций в уравнение (194) дает общее выражение для потенциальной энергии упругого тела в форме однородной функции второй степени от внешних сил. Если силы представлены линейными функциями перемещений и эти функции подставлены в уравнение (194), то получается выражение для потенциальной энергии в форме однородной функции второй степени от перемещений.

В предыдущем рассуждении не были приняты в соображение реакции опор. Работа, произведенная этими реакциями во время деформации, равна нулю, так как перемещение неподвижной опоры A (рис. 273) равно нулю, а перемещение подвижной опоры B перпендикулярно к направлению реакции, трением же на опорах обычно пренебрегают. Следовательно, реакции ничего не добавляют к выражению для потенциальной энергии (194).

В качестве примера на применение уравнения (194) рассмотрим потенциальную энергию, накопленную телом, имеющим форму куба и испытывающим равномерное растяжение по трем перпендикулярным направлениям (см. рис. 54). Если ребро куба равняется единице длины, то растягивающие усилия на его гранях численно равны $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и соответствующие удлинения будут $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

¹⁾ Перемещения тех же точек по направлению, перпендикулярному к соответствующей силе, не рассматриваются в последующем изложении.

²⁾ Этот вывод впервые был получен Clapeyron'ом; см. L. a. m. e., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2 изд., стр. 79, 1866.

Тогда потенциальная энергия, накопленная в одном кубическом сантиметре, по формуле (194) будет

$$U' = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2}.$$

Подставляя вместо удлинений их значения из уравнения (43)¹⁾, получаем

$$U' = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z). \quad (195)$$

Это выражение может быть применено также в том случае, когда нормальные напряжения являются сжимающими; необходимо лишь эти напряжения взять с отрицательным знаком.

Если, кроме нормальных напряжений, действуют по граням элемента и касательные напряжения, то энергия сдвига может быть сложена с энергией растяжения или сжатия (см. стр. 270), пользуясь уравнением (182), находим, что полная энергия, накопленная в 1 см³, равняется

$$U' = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (196)$$

В качестве второго примера рассмотрим балку, свободно лежащую на двух опорах, нагруженную силой P посередине простого и парой сил M на опоре A . Прогиб посередине по формулам (90) и (103) равняется

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Ml^2}{16EJ}. \quad (a)$$

Угол поворота сечения на опоре A по формулам (88) и (104) равняется

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{Ml}{3EJ}. \quad (b)$$

Тогда потенциальная энергия балки, равная работе, совершенной силой P и парой сил M , будет

$$U = \frac{P\delta}{2} + \frac{M\theta}{2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^3}{96} + \frac{M^2 l}{6} + \frac{MPl^2}{16} \right). \quad (c)$$

Это выражение является однородной функцией второй степени от внешней силы и внешней пары. Определяя M и P из уравнений (a) и (b) и подставляя их в уравнение (c), получаем выражение для потенциальной энергии балки в виде однородной функции второй степени от перемещений. Необходимо заметить, что когда на тело действуют внешние пары сил, то соответствующими перемещениями будут углы поворота тех элементов, на которые действуют эти пары сил.

72. Теорема Кастилиано

Имея выражение для потенциальной энергии в разных случаях, мы можем установить очень простой метод для вычисления перемещений точек упругого тела при его деформации. Например, в случае простого растяжения (см. рис. 1) потенциальная энергия стержня по

¹⁾ В этом вычислении не имеют практического значения и изменения температуры, вызываемые деформацией. Для дальнейшего ознакомления см. T. We u g a c h, *Theorie elastischer Körper*, Leipzig, стр. 163, 1884. См. также *Architek. u. Ingenieurw.*, т. 54, стр. 91 и 277, 1908.

формула (171) равняется

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Взяв производную от этого выражения по P , получим

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{EF} = \delta.$$

Таким образом, производная от потенциальной энергии по силе дает перемещение, соответствующее силе, т. е. перемещение точки приложения силы по направлению силы. В случае консоли, нагруженной на конце, потенциальная энергия равняется (уравнение (с), стр. 268)

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

Производная от этого выражения по силе P дает известный прогиб $Pl^3/3EI$ на свободном конце.

При кручении круглого вала потенциальная энергия равняется (уравнение (185))

$$U = \frac{M^2 l}{2GI_p}.$$

Производная от этого выражения по крутящему моменту дает

$$\frac{dU}{dM} = \frac{Ml}{GI_p} = \varphi,$$

т. е. угол закручивания вала, и представляет перемещение, соответствующее крутящему моменту.

Когда на упругое тело действует несколько сил, то можно применить тот же метод вычисления перемещений. Например, выражение (с) предыдущего параграфа дает потенциальную энергию балки, изгибаемой силой P в середине и парой сил M на конце. Частная производная от этого выражения по силе P дает прогиб под силой и частная производная по моменту M дает угол поворота опорного сечения, на которое действует пара сил M .

Теорема Кастigliано является общим выражением этих результатов¹⁾. Если материал следует закону Гука и перемещения при деформации настолько малы, что ими можно пренебречь при рассмотрении действия сил, то потенциальная энергия такой системы может быть выражена однородной функцией второй степени от действующих сил (см. § 71). Тогда частная производная от потенциальной энергии по какой-либо силе дает перемещение, соответствующее этой силе

¹⁾ См. статью Castigliano, Nuova teoria intorno dell'equilibrio dei sistemi elastici, Atti acc. sci., Torino, 1875. См. также его Theorie de l'equilibre des systemes elastiques, Turin, 1879. Английский перевод работы Кастigliано см. E. S. A. n d r e w s, Elastic Stresses in Structures, London, 1919.

(исключительные случаи см. § 76). Термины «сила» и «перемещение» здесь могут иметь обобщенное значение, т. е. они включают соответственно «пару сил» и «угловое перемещение».

Рассмотрим общий случай, показанный на рис. 273. Положим, что потенциальная энергия представлена функцией сил P_1, P_2, P_3, \dots , так что

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots). \quad (a)$$

Если какой-либо внешней силе P_n дано небольшое приращение dP_n , то энергия деформации также увеличится, и ее новое значение будет

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (b)$$

Но количество потенциальной энергии не зависит от порядка, в котором силы приложены к телу, и зависит лишь от их конечных значений. Можно предположить, например, что сначала была приложена бесконечно малая сила dP_n , а затем силы P_1, P_2, P_3, \dots . Окончательное количество потенциальной энергии будет прежним. Сила dP_n , приложенная сначала, вызывает лишь бесконечно малое перемещение, так что соответствующая работа (равная произведению малой силы на соответствующее малое перемещение) является бесконечно малой величиной второго порядка и ею можно пренебречь.

Прикладывая теперь силы P_1, P_2, P_3, \dots , должны заметить, что действие их не изменится ранее приложенной силой (dP_n), и работа, совершенная этими силами, будет по-прежнему равняться U (уравнение (a)). Но тем не менее при приложении этих сил сила dP_n на перемещении δ_n в направлении P_n производит работу $(dP_n)\delta_n$. Эти два выражения для работы необходимо приравнять друг другу. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} U + \frac{\partial U}{\partial P_n} (dP_n) &= U + (dP_n)\delta_n, \\ \delta_n &= \frac{\partial U}{\partial P_n}, \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

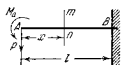


Рис. 274.

и теорема Кастigliано доказана.

В качестве приложения теоремы рассмотрим консольную балку, нагруженную силой P и парой сил M_0 на конце (рис. 274). Изгибающий момент в поперечном сечении mn равняется $M = -Px - M_0$, и потенциальная энергия из уравнения (187) равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}.$$

Чтобы получить прогиб δ на конце консоли, мы должны лишь взять

¹⁾ Это следует из условий, оговоренных на стр. 275, на основании которых потенциальная энергия была получена как однородная функция второй степени.

частную производную от U по P^1 , что дает

$$\delta \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Подставляя вместо M его выражение в зависимости от P и M_a , получаем

$$\delta \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l (Px + M_a) x dx = \frac{Pl^2}{3EJ} + \frac{M_a l^2}{2EJ}.$$

То же выражение можно получить при помощи одного из прежде изложенных методов, например графоаналитического метода или метода интегрирования дифференциального уравнения (79) упругой кривой.

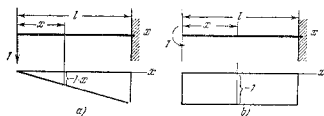


Рис. 275.

Чтобы получить угол поворота конечного сечения, найдем частную производную от потенциальной энергии по паре сил M_a , что дает

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (Px + M_a) dx = \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{M_a l}{EJ}.$$

Положительные знаки, полученные для δ и θ , указывают на то, что прогибы поворота конца имеют те же направления, соответственно, как сила и пара сил на рис. 274.

Необходимо заметить, что частная производная $\frac{\partial M}{\partial P}$ представляет скорость увеличения момента M с увеличением силы P и может быть наглядно изображена эпюрой изгибающих моментов для силы, равной единице, как показано на рис. 275, а. Частная производная $\frac{\partial M}{\partial M_a}$ может быть наглядно представлена, таким образом, эпюрой изгибающих моментов на рис. 275, б. Пользуясь обозначениями:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = M'_p \quad \text{и} \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = M'_a,$$

¹⁾ Проще будет сначала продифференцировать под знаком интеграла и затем интегрировать, нежели сначала вычислить интеграл и затем дифференцировать.

мы можем представить наши прежние результаты в следующем виде:

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M M'_p dx, \quad \theta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M M'_a dx. \quad (198)$$

Эти уравнения, выведенные для частного случая, показанного на рис. 274, также справедливы для общего случая балки с любой нагрузкой и любыми опорами. Они также могут быть применены в случае распределенных нагрузок.

Рассмотрим, например, случай балки, свободно лежащей на опорах и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 276), и вычислим прогиб в середине этой балки, пользуясь теоремой

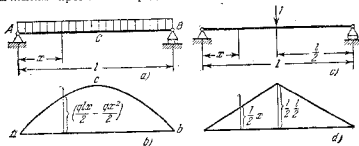


Рис. 276.

Кастилиано. В предыдущих случаях действовали сосредоточенные силы и пары сил, и частные производные по этим силам и парам сил давали соответствующие перемещения и углы поворота. Однако в случае равномерно распределенной нагрузки нет вертикальной силы, которая действует в середине балки и которая соответствовала бы искомого прогибу в середине. Таким образом, мы не можем поступить так же, как в предыдущей задаче. Однако это затруднение можно легко устранить, если предположить, что в середине балки имеется фиктивная нагрузка P бесконечно малой величины. Такая сила, очевидно, не окажет влияния на прогиб или эпюру изгибающих моментов, показанную на рис. 276, б. В то же самое время скорость увеличения изгибающего момента вследствие увеличения P , выраженная частной производной $\frac{\partial M}{\partial P}$, представлена на рис. 276, с и 276, д. При этих значениях M и $\frac{\partial M}{\partial P}$ величина прогиба будет

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Замечая, что M и $\frac{\partial M}{\partial P}$ симметричны относительно середины пролета,

получаем

$$\delta = \frac{2}{EJ_z} \int_0^{l/2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EJ_z} \int_0^{l/2} \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Если требуется вычислить угол поворота конца B балки на рис. 276, а при помощи теоремы Кастigliано, мы должны лишь предположить бесконечно малую пару сил M_b , приложенную в B . Такая пара не изменит эпюры изгибающих моментов на рис. 276, б. Тогда частная производная $\frac{\partial M}{\partial M_b}$ будет представлена на рис. 277, а и 277, б. Требуемый угол поворота конца B балки будет

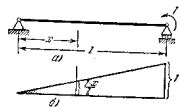


Рис. 277.

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{l} dx = \frac{ql^3}{24EJ_z}. \end{aligned}$$

Мы видим, что результаты, полученные при помощи теоремы Кастigliано, совпадают с ранее полученными результатами (стр. 126).

ЗАДАЧИ

1. Определить при помощи теоремы Кастigliано прогиб и угол поворота конца равномерно нагруженной консоли.
2. Определить прогиб конца B одноколонной балки, показанной на рис. 278.



Рис. 278.

3. Какое горизонтальное перемещение опоры B рамы, показанной на рис. 279, будет вызвано горизонтальными силами H ?

$$\text{Ответ. } \delta_h = \frac{2}{3} \frac{Hh^2}{EI_1} + \frac{Hh^2}{EI}.$$

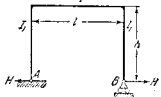


Рис. 279.

4. Определить увеличение расстояния AB , вызываемое силами H (рис. 280), если стержни AC и BC имеют одинаковые размеры, причем необходимо принять во

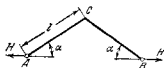


Рис. 280.

учетом лишь изгиб стержней. Угол α предполагается не очень малым, так что влиянием прогибов на величину изгибающего момента можно пренебречь.

$$\text{Ответ. } \delta = \frac{2}{3} \frac{Hl^3 \sin^2 \alpha}{EJ}.$$

5. Определить прогиб на расстоянии a от левого конца равномерно нагруженной балки, показанной на рис. 276, а.

Решение. Прикладывая бесконечно малую нагрузку P на расстоянии a от левого конца, находим частную производную $\frac{\partial M}{\partial P}$, которая изображена на рис. 281, а

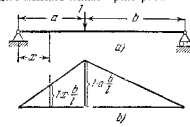


Рис. 281.

и 281, б. Пользуясь для M параболической эпюры, представленной на рис. 276, б, получаем требуемый прогиб

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^a \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{xb}{l} dx + \\ &+ \frac{1}{EJ} \int_a^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{a(l-x)}{l} dx = \frac{qab}{24EJ} (a^2 + b^2 + 3ab). \end{aligned}$$

Подставляя x вместо a и $l-x$ вместо b , мы можем этот результат привести к согласованию с ранее полученным уравнением вогнутой оси балки (стр. 126).

73. Деформация ферм

Теорема Кастigliано особенно полезна при определении деформаций в фермах. В качестве примера рассмотрим случай, показанный на рис. 282. Все стержни системы пронумерованы, и их длины и площади поперечных сечений даны в таблице 5. Усилия S_i , вызванное в каком-либо стержне i системы силами P_1, P_2, P_3 , можно вычислить из обычных уравнений статики. Эти усилия даны в 4-м столбце таблицы 5. Потенциальная энергия деформации какого-либо стержня, по формуле (171), равняется $S_i^2/2F_i E$. Тогда количество потенциальной энергии во всей системе будет

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2F_i E}, \quad (199)$$

где суммирование распространяется на все стержни системы, которых в нашем случае имеется $m=11$. Усилия S_i являются функциями нагрузок P и, следовательно, на основании уравнения (197), прогиб δ_n под какой-либо нагрузкой P_n равняется

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial P_n}, \quad (200)$$

Производная $\frac{\partial S_i}{\partial l_i}$ представляет скорость увеличения усилия S_i с увеличением нагрузки P_n . Численно она равняется усилию, вызываемому в стержне i нагрузкой, равной единице и приложенной в положении P_n , и мы будем пользоваться этим обстоятельством при нахождении указанной производной. В дальнейшем эти производные будем обозначать через S'_i . Тогда уравнение для вычисления деформации будет

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{S_i S'_i l_i}{F_i E}. \quad (201)$$

Рассмотрим, например, деформацию δ_1 , соответствующую силе P_1 в точке A на рис. 282, а. Значения S'_i , помещенные в 5-м столбце таблицы, получены при помощи статики при нагруженном состоянии, показанном на рис. 282, б, в котором отброшены все действующие силы и приложена в шарнире A вертикальная сила в 1 тонну. Значения, помещенные в 6-м

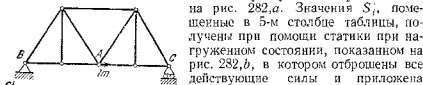


Рис. 282.

столбце таблицы, вычислены из значений, входящих в столбцы 2—5. Суммирование и деление на модуль упругости $E = (2/1000) \cdot 10^6 \text{ м/см}^2$

Данные для фермы, показанной на рис. 282

i	$l_i, \text{ см}$	$F_i, \text{ см}^2$	$S_i, \text{ т}$	S'_i	$\frac{S_i S'_i l_i}{F_i}$	S_i^*
1	2	3	4	5	6	7
1	500	30	-13,75	-0,625	143	0
2	300	15	+8,25	+0,375	82	1
3	400	10	+8,00	0	0	0
4	300	15	+8,25	-0,375	62	1
5	500	10	-3,75	-0,625	117	0
6	500	20	-10,50	-0,750	24	0
7	500	10	-6,25	+0,625	195	0
8	300	15	-6,75	-0,375	51	0
9	400	10	-4,00	0	0	0
10	500	30	-11,25	-0,625	117	0
11	300	15	+6,75	+0,375	51	0

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{S_i S'_i l_i}{F_i} = 822 \text{ м/см.}$$

дает деформацию в A (уравнение (201))

$$\delta_1 = \frac{822 \cdot 1000}{2 \cdot 10^6} = 0,411 \text{ см.}$$

Предыдущие рассуждения относились к вычислению перемещений $\delta_1, \delta_2, \dots$, соответствующих заданным внешним силам P_1, P_2, \dots . При исследовании деформации упругой системы бывает необходимо вычислить перемещение точки, в которой совсем нет нагрузки, или перемещение нагруженной точки в направлении, отличным от направления нагрузки. Метод Кастилиано можно применить также и здесь. Мы только приложим в этой точке дополнительную бесконечно малую *воображаемую нагрузку* Q в том направлении, в котором желательно получить перемещение и вычислить производную $\frac{\partial U}{\partial Q}$. В этой производной необходимо дополнительную нагрузку Q положить равной нулю и затем определить желаемое перемещение. Например, в ферме, показанной на рис. 282, а, определим перемещение точки A . В этой точке прикладываем горизонтальную силу Q и получаем соответствующее горизонтальное перемещение

$$\delta_A = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q}. \quad (a)$$

где суммирование распространено на все стержни системы. Усилия S_i в уравнении (a) имеют то же значение, что и прежде, так как дополнительная нагрузка Q равна нулю, а производные $\frac{\partial S_i}{\partial Q} = S'_i$ получаются как усилия в стержнях фермы, вызываемые нагрузкой, показанной на рис. 282, с. Эти значения помещены в 7-м столбце таблицы. Подставляя эти усилия в уравнение (a), мы находим, что горизонтальное перемещение A равно сумме удлинений 2 и 4 стержней, а именно:

$$\delta_A = \frac{1}{E} \left(\frac{S_2 S'_2 + S_4 S'_4}{F_2 + F_4} \right) = \frac{1000}{2 \cdot 10^6} \left(\frac{8,25 \cdot 300}{15} + \frac{8,25 \cdot 300}{15} \right) = 0,165 \text{ см.}$$

При исследовании деформации ферм иногда бывает необходимо знать изменение расстояния между двумя точками системы. Это можно получить при помощи метода Кастилиано. Определим, например, какое увеличение δ в расстоянии между узлами A и B (рис. 283, а) будет вызвано силами P_1, P_2, P_3 . Приложим в этих узлах две равные и противоположные воображаемые силы Q , как указано на рисунке. Из теоремы Кастилиано следует, что частная производная $\left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$ дает укорочение расстояния AB , вызываемое нагрузками P_1, P_2, P_3 . Пользуясь уравнением (197), находим, что это перемещение

равняется ¹⁾

$$\delta = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} S_i' \quad (202)$$

где S_i — усилия, вызываемые в стержнях системы действующими силами P_1, P_2, P_3, S_i' — величины, определяемые из нагруженного состояния, показанного на рис. 283, б, в котором отброшены все действующие силы, а в А и в В приложены две противоположные силы, равные единице, и m — число стержней.



Рис. 283.

Вертикальное перемещение А равняется

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl}{FE}.$$

2. Определить горизонтальное перемещение шарнира А в предыдущей задаче.

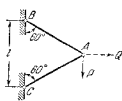


Рис. 284.

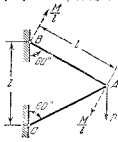


Рис. 285.

Решение. Прикладываем горизонтальную воображаемую нагрузку Q, как указано на рис. 284 пунктирной линией. Тогда потенциальная энергия системы будет

$$U = \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)^2 l}{2lE} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)^2 l}{2lE}.$$

¹⁾ Эта задача впервые была решена J. C. Maxwell'ом «On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames», Phil. Mag., т. 27, стр. 294, 1864, или Scientific Papers, Cambridge, т. 1, стр. 598, 1890.

Производная от этого выражения по Q при $Q=0$ дает горизонтальное перемещение

$$\delta_H = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \left(\frac{2Ql}{3FE} \right)_{Q=0} = 0.$$

3. Определить угловое перемещение стержня АВ, вызываемое нагрузкой P (рис. 286).

Решение. Приложим к системе воображаемую пару сил M, как показано на рисунке пунктирными линиями. Перемещение, соответствующее этой паре сил, есть угловое перемещение φ стержня АВ от нагрузки P. Усилия в стержнях

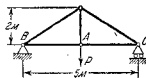


Рис. 286.

будут: $P + \frac{M}{\sqrt{3}l}$ в стержне АВ и $P - \frac{2M}{\sqrt{3}l}$ в стержне АС. Потенциальная энергия равняется

$$U = \frac{l}{2FE} \left[\left(P + \frac{M}{\sqrt{3}l} \right)^2 + \left(P - \frac{2M}{\sqrt{3}l} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \left(\frac{P\sqrt{3}}{FE} + \frac{5M}{3lFE} \right)_{M=0} = \frac{P\sqrt{3}}{FE}.$$

4. Определить вертикальное перемещение точки А и горизонтальное перемещение точки С стальной фермы, показанной на рис. 286, если $P=1000$ кг, площади поперечных сечений сжатых стержней равны 30 см^2 , а растянутых — 12 см^2 .

74. Приложение теоремы Кастилиано к решению статически неопределимых задач

Теорема Кастилиано весьма полезна также при решении статически неопределимых задач. Начнем с задач, в которых реакции опор рассматриваются как статически неопределимые величины. Обозначая через X, Y, Z, ... статически неопределимые реактивные силы, можем энергию деформации системы выразить в функции этих сил. Для неподвижных опор и для опор, движение которых перпендикулярно к направлению реакций, частные производные от энергии деформации по неизвестным реактивным силам должны быть, по теореме Кастилиано, равными нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \dots \quad (203)$$

Таким способом мы получаем столько уравнений, сколько имеется статически неопределимых реакций.

Можно показать, что уравнения (203) выражают условия для минимума функции U, откуда следует, что величины статически неопределимых реактивных сил таковы, что делают потенциальную

энергию системы минимумом. Это есть так называемый принцип наименьшей работы, применяемый к определению лишних реакций¹⁾.

В качестве примера на применение упомянутого принципа рассмотрим равномерно нагруженную балку, заделанную одним концом и свободно опертую другим (рис. 287). Это — задача с одной статически неопределимой реакцией. Принимая за статически неопределимую величину реакцию X правой опоры, найдем эту неизвестную силу из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (a)$$

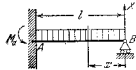


Рис. 287.

Потенциальная энергия балки, по формуле (190), равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI},$$

где

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}. \quad (b)$$

Подставляя в (a), получаем

$$\frac{dU}{dX} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{EI} \left(X \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{8} \right) = 0,$$

откуда

$$X = \frac{3}{8} ql.$$

Вместо реактивной силы X за статически неопределимую величину можно было бы принять реактивную пару M_a на левом конце балки. Тогда энергия деформации была бы функцией M_a . Уравнение (b) сохраняется, но изгибающий момент в каком-либо сечении будет

$$M = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2}.$$

Исходя из условия, что левый конец балки при ее изгибе не поворачивается, производная от энергии деформации по M_a должна

¹⁾ Принцип наименьшей работы впервые был установлен Ф. Менабрэ в его статье «Nouvel principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques», Compt. rend., т. 46, стр. 1056, 1858; см. там же, т. 98, стр. 714, 1884. Полное доказательство принципа было дано Кастилиано, который сделал этот принцип основным методом решения статически неопределимых систем. Примененный метод потенциальной энергии в технике было разработано О. Мохром (см. его Abhandlungen, шпуроз.), Н. Миллер-Весляу и в его книге «Die neuen Methoden der Festigkeitslehre» и Ф. Engesserом «Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme», Zentr. Bauverwalt., стр. 606, 1907. Очень полная библиография этого предмета приведена в статье М. Grüning «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften», том 4, стр. 419.

равняться нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dM_a} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} dx = -\frac{1}{EI} \int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx = \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{24} - \frac{M_a l^2}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем абсолютное значение момента

$$M_a = \frac{1}{8} ql^2.$$

Задачи, в которых за статически неопределимые величины мы принимаем усилия, действующие в лишних стержнях системы, также

можно решать при помощи теоремы Кастилиано. Возьмем, например, систему, представленную на рис. 18, которая была рассмотрена ранее (см. стр. 26). Принимая за статически неопределимую величину усилие X в вертикальном стержне, найдем, что усилия в наклонных стержнях OB и OD будут равны $\frac{P-X}{2 \cos \alpha}$.

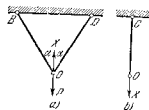


Рис. 288.

Обозначая через U_1 энергию деформации наклонных стержней (рис. 288, a) и через U_2 энергию деформации вертикального стержня (рис. 288, b), получим полную энергию деформации системы¹⁾

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{P-X}{2 \cos \alpha} \right)^2 \frac{l}{FE \cos \alpha} + \frac{X^2 l}{2FE}. \quad (c)$$

Если δ есть действительно перемещение вниз узла O на рис. 18, то производная по X от энергии U_1 системы, представленной на рис. 288, a, должна быть равна $-\delta$, так как усилие X системы имеет направление, противоположное направлению перемещения δ . Также производная $\frac{\partial U_2}{\partial X}$ будет равна δ , поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0. \quad (d)$$

Видно, что истинное значение усилия X в лишнем стержне таково, что делает полную энергию деформации системы минимумом. Подставляя в уравнение (d) вместо U его выражение (c), получаем

$$-\frac{P-X}{2 \cos^3 \alpha FE \cos \alpha} + \frac{Xl}{FE} = 0.$$

¹⁾ Предполагается, что все стержни имеют одну и ту же площадь поперечного сечения и один и тот же модуль упругости E .

откуда

$$X = \frac{P}{1+2 \cos^2 \alpha}.$$

Подобные рассуждения можно применить к любой статически неопределимой системе с одним лишним стержнем, и мы можем утверждать, что усилие в этом стержне таково, что обращает энергию деформации системы в минимум. Чтобы проиллюстрировать способ вычисления усилий в таких системах, рассмотрим раму, показанную на рис. 289, а. Реакции здесь статически определимы, но когда мы попробуем определить усилия в стержнях, то найдем, что имеется один лишний стержень. Примем стержень CD за лишний. Разрезаем этот

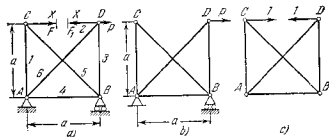


Рис. 289.

стержень в какой-либо точке и прикладываем к каждому концу F и F_1 силу X , равную усилию в стержне.

Таким образом, мы приходим к статически определимой системе, подверженной действию известной силы P и, кроме того, неизвестных сил X . Усилия в стержнях этой системы будут найдены в два этапа: 1) усилия, вызываемые внешней нагрузкой P , когда отсутствует X (рис. 289, б), и обозначаемые через S_i^0 , где i указывает номер стержня, 2) усилия, возникающие в том случае, когда внешняя сила P отброшена и силы, равные единице, заменяют силы X (рис. 289, в). Последние усилия обозначаются через S_i^1 . Тогда полное усилие в каком-либо стержне при одновременном действии силы P и сил X равняется

$$S_i = S_i^0 + S_i^1 X. \quad (е)$$

Полная потенциальная энергия системы по формуле (199) равняется

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0 T_i}{2F_i E} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i^1 X) T_i}{2F_i E}, \quad (f)$$

где суммирование распространяется на все стержни системы, вклю-

чая и разрезанный стержень CD ¹⁾. Применим теперь теорему Каспиано, согласно которой производная от U по X дает перемещение концов F и F_1 по направлению одного к другому. В действительности же стержень является неразрезанным, и это перемещение равняется нулю. Отсюда

$$\frac{dU}{dX} = 0, \quad (g)$$

т. е. усилие X в лишнем стержне таково, что обращает потенциальную энергию системы в минимум. Из уравнений (f) и (g) получаем

$$\frac{d}{dX} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i^1 X) T_i}{2F_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^1 T_i) T_i}{F_i E} = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} S_i^0 S_i^1 T_i}{\sum_{i=1}^{i=m} S_i^1 T_i}. \quad (204)$$

Этот способ можно распространить на систему, в которой имеется несколько лишних стержней.

Принцип наименьшей работы также можно применять в тех случаях, когда статически неизвестными величинами являются пары сил. Возьмем в качестве примера равномерно нагруженную балку на трех опорах (рис. 290). Если за статически неопределимой величиной принять изгибающий момент над средней опорой, то, разрезав балку в B , получаем две свободно лежащие на опорах балки (рис. 290, б), нагруженные неизвестными парами сил M_b , кроме известной равномерной нагрузки q . Так как в действительности изогнутая ось балки непрерывна, то никакого поворота конца B' балки $A'B'$ относительно конца B'' балки $B''C'$ нет. Отсюда

$$\frac{dU}{dM_b} = 0. \quad (205)$$

Опять значение статически неопределимой величины таково, что обращает потенциальную энергию системы в минимум.

¹⁾ Для этого стержня $S_i^0 = 0$ и $S_i^1 = 1$.

ЗАДАЧИ

1. Вертикальный груз P удерживается вертикальным стержнем DB длиной l и с площадью поперечного сечения F и двумя одинаково наклоненными стержнями длиной l и с площадью поперечного сечения F_1 (рис. 291). Определить усилия в стержнях, а также отношение F_1/F , при котором условия во всех трех стержнях будут численно равны между собой.

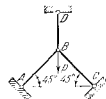


Рис. 291.

Решение. Система является статически неопределимой. Пусть X будет растягивающее усилие в вертикальном стержне. Тогда сжимающие усилия в наклонных будут $\frac{P-X}{\sqrt{2}}$ и потенциальная энергия системы равняется

$$U = \frac{X^2 l}{2FE} + \frac{(P-X)^2 l}{2F_1 E}.$$

Принцип наименьшей работы дает

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{FE} - \frac{(P-X)l}{F_1 E} = 0,$$

откуда

$$X = \frac{P}{1 + \frac{F}{F_1}}.$$

Подставляя это значение X в уравнение

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - X),$$

выражающее условие равенства сил во всех трех стержнях, получаем

$$F_1 = \sqrt{2}F.$$

2. Определить горизонтальную реакцию X в системе, показанной на рис. 292.

Решение. Неизвестная сила X войдет лишь в выражение для потенциальной энергии при изгибе части AB стержня. Для этой части $M = Pa - Xx$, и равенство наименьшей работы дает ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{d}{dX} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \\ &= -\frac{1}{EJ} \int_0^l (Pa - Xx) x dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Xl^2}{3} - \frac{PaFl}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$X = \frac{3}{2} P \frac{a}{l}.$$



Рис. 292.

3. Определить горизонтальные реакции X системы, показанной на рис. 293. Все размеры даны в таблице 6.

Решение. Из принципа наименьшей работы имеем

$$\frac{dU}{dX} = \frac{d}{dX} \sum \frac{S_i^2 l_i}{2F_i E} = \sum \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{dS_i}{dX} = 0. \quad (b)$$

¹⁾ В этом случае влиянием осевой силы на изгиб стержня AB пренебрегают.

Таблица 6

Данные для фермы, показанной на рис. 293

i	l_i , см	F_i , см ²	S_i^0	S_i^1	$\frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{F_i}$	$\frac{S_i^1 l_i}{F_i}$
1	360,6	25	-1,803P	+1,202	-31,21P	20,82
2	316,2	15	+1,581P	-2,108	-70,26P	93,68
3	100,0	10	+1,000P	-1,333	-13,34P	17,78
4	360,6	25	-1,803P	+1,202	-31,24P	20,82
5	316,2	15	+1,581P	-2,108	-70,26P	93,68
					$\Sigma = -216,34P$	$\Sigma = 246,78$

Пусть S_i^0 будет усилие в стержне i , вызываемое известной нагрузкой P , при $X=0$, и пусть S_i^1 будет усилие, вызываемое в том же стержне силами, равными единице, которые заменяют усилия X (рис. 293, б). Значения S_i^0 и S_i^1 определяются из статики. Они даны в столбцах 4 и 5 таблицы 6. Тогда полное усилие в каком-либо стержне будет

$$S_i = S_i^0 + S_i^1 X, \quad (a)$$

Подставляя в уравнение (b), находим

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(S_i^0 + S_i^1 X) l_i}{F_i E} - S_i^1 X = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{F_i}}{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i^1 l_i}{F_i}}.$$

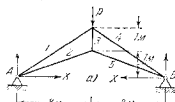


Рис. 293.

Необходимые числовые значения для вычисления X даны в столбцах 6 и 7 таблицы 6. Подставляя эти данные в уравнение (j), получаем

$$X = 0,877P.$$

4. Определить усилие в левом горизонтальном стержне системы, показанной на рис. 294, полагая, что длина этого стержня равна 6 м и площадь поперечного сечения равняется F_0 . Другие стержни имеют те же размеры, что и в задаче 3.

Решение. Усилие в горизонтальном стержне (стержень номер 0) вычисляется из уравнения (204). Это уравнение подобно уравнению (j) в задаче 3, за исключением того, что в системе, показанной на рис. 294, имеется дополнительный горизонтальный стержень 0. Усилие, возникающее в этом стержне только от одной силы P ($X=0$), равняется нулю, т. е. $S_0^0=0$. Усилие, вызываемое двумя силами, равными единице (рис. 294, б), равняется $S_0^1=1$. Дополнительный член в числителе уравнения (j) будет

$$\frac{S_0^0 S_0^1 l_0}{F_0} = 0.$$

Дополнительный член в знаменателе будет

$$\frac{S_1^2 l_0}{F_0} = \frac{11_0}{F_0} = 600$$

Тогда, пользуясь данными задачи 3, получаем

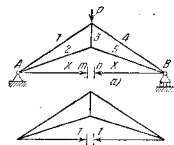


Рис. 294.

$$X = \frac{216,34P}{600 + 246,78}$$

Взяв, например $F_0 = 50 \text{ см}^2$, найдем

$$X = \frac{216,34P}{12 + 246,78} = 0,836P.$$

т. е. лишь на 4,7% меньше значения, полученного в задаче 3 для неподвижных опор¹⁾.

Взяв площадь поперечного сечения $F_0 = 5 \text{ см}^2$, получим

$$X = \frac{216,34P}{120 + 246,78} = 0,590P.$$

Отсюда видно, что в статически неопределимых системах усилия в стержнях зависят не только от приложенных нагрузок, но также и от площади поперечных сечений стержней.

5. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 23, пользуясь принципом наименьшей работы.

6. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 295, полагая, что все стержни одинаковых размеров и из одного материала.

Решение. Если один стержень отбросить, то усилия в оставшихся стержнях можно определить с помощью уравнений статики. Следовательно, система имеет один лишний стержень. Пусть таковым будет стержень l и X — действующее в нем усилие. Тогда все стержни на сторонах шестиугольника будут иметь растягивающие усилия X , стержни 8, 9, 11 и 12 будут иметь сжимающие усилия X и стержни 7 и 10 имеют усилия $P - X$. Потенциальная энергия системы будет

$$U = 10 \frac{X^2 l}{2FE} + 2 \frac{(P - X)^2 l}{2FE}.$$

Из уравнения $\frac{dU}{dX} = 0$ получаем

$$X = \frac{P}{6}.$$

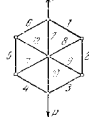


Рис. 295.

7. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рисунке 289, полагая площади поперечных сечений всех стержней равными между собой и приняв усилие X в диагонали AD за статически неопределимую величину.

Решение. Подставляя данные, помещенные в таблице 7, в уравнение (204), находим

$$X = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} P.$$

¹⁾ Взяв $F_0 = \infty$, мы получим те же условия, как для неподвижных опор.

Таблица 7

Данные для системы, показанной на рис. 289

i	l_i	S_i^0	S_i^1	$S_i^0 S_i^1 l_i$	$S_i^{12} l_i$
1	a	P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	a	P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	+1	$-2aP$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	0	+1	0	$a\sqrt{2}$

$$\sum S_i^0 S_i^1 l_i = -\frac{(3+2\sqrt{2})aP}{\sqrt{2}}; \quad \sum S_i^{12} l_i = 2a(1 + \sqrt{2})$$

8. Прямоугольная рама одинакового поперечного сечения (рис. 296) испытывает равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q , как показано на рисунке. Определить изгибающие моменты в углах.

Ответ. $M = \frac{(a^2 + b^2) q}{12(a+b)}$.

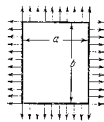


Рис. 296.

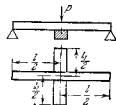


Рис. 297.

9. Нагрузка P поддерживается двумя балками одинакового поперечного сечения, пересекающимися одна другую, как показано на рис. 297. Определить давление X между балками.

Ответ. $X = \frac{Pl^2}{l^2 + l_1^2}$.

10. Найти статически неопределимую величину H в раме, показанной на рис. 170, стр. 168, пользуясь принципом наименьшей работы.

Решение. Энергия деформации изгиба рамы равняется

$$U = 2 \int_0^h \frac{H^2 x^2 dx}{2EJ_1} + \int_0^l \frac{(M_0 - Hh)^2 dx}{2EJ} \quad (к)$$

где M_0 означает изгибающий момент, изменяющийся по длине горизонтального стержня AB и найденный как для балки, свободно лежащей на опорах. Подставляя в уравнение

$$\frac{dU}{dH} = 0, \quad (л)$$

находим

$$\frac{2H}{EJ_1} \frac{h^3}{3} + \frac{HA^2}{EJ} = \frac{h}{EJ} \int_0^l M_0 dx. \quad (м)$$

Интеграл правой части представляет площадь треугольной эпюры моментов для балки, нагруженной силой P . Следовательно,

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{1}{2} Pl(c-l).$$

Подставляя в уравнение (м), мы получаем для H те же выражение, как в уравнении (114).

11. Найти статически неопределимые величины в рамах, показанных на рис. 169, 172 и 174, пользуясь принципом наименьшей работы.

12. Найти изгибающий момент M_b в балке, показанной на рис. 290, полагая $l_1 = 2l_2$.

75. Теорема о взаимности работ и перемещений

Начнем с задачи о балке, свободно лежащей на двух опорах и показанной на рис. 298,а, и определим прогиб в точке D , когда груза P действует в точке C . Этот прогиб получится подстановкой в уравнение (86) $x=d$, что дает

$$(y)_{x=d} = \frac{Pbd}{6l} (l^2 - b^2 - d^2).$$

Отсюда видно, что это выражение не изменится, если мы подставим d вместо b и b вместо d , что указывает на то, что для случая, показанного на рис. 298,б, прогиб в D , тот же, что прогиб в D на рис. 298,а. Из рис. 298,б мы получаем рис. 298,с простым поворотом балки на 180° ,

что приводит точку C , к совпадению с точкой D и точку D , к совпадению с точкой C . Следовательно, прогиб в C на рис. 298,с равен

прогибу в D на рис. 298,а. Это значит, что если груз P передвинется из точки C в точку D , то прогиб, измеренный в D в первом случае нагружения, получится такой же в точке C во втором случае. Это есть частный случай теоремы о взаимности перемещений.

Чтобы вывести теорему в общем виде¹⁾, рассмотрим упругое тело, показанное на рис. 299, нагруженное двумя различными способами и открытое таким образом, что его перемещение как твердого тела невозможно. В первом напряженном состоянии приложенные силы будут P_1 и P_2 , а во втором состоянии P_3 и P_4 . Перемещения точек приложения в направлении сил в первом состоянии будут δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 и во втором состоянии δ'_1 , δ'_2 , δ'_3 , δ'_4 . Теорема о взаимности работ формулируется так: работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равна работе, произведенной силами второго состояния на соответствующих перемещениях первого состояния. Символически это выразится так:

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 = P_3\delta_3 + P_4\delta_4. \quad (206)$$

Рис. 299.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим энергию деформации тела, когда все силы P_1, \dots, P_4 действуют одновременно, и воспользуемся тем обстоятельством, что количество энергии деформации не зависит от порядка, в каком были приложены силы, но зависит лишь от конечных значений сил. При первом способе нагружения предположим, что сначала были приложены силы P_1 и P_2 , а затем P_3 и P_4 . Потенциальная энергия, накопившаяся при приложении P_1 и P_2 , равняется

$$\frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2}. \quad (а)$$

Работа, произведенная силами P_3 и P_4 при их приложении, равняется

$$\frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2}. \quad (б)$$

Однако необходимо заметить, что при приложении P_1 и P_2 точки

¹⁾ Частный случай этой теоремы был получен J. C. Maxwell'ом (цитиров. на стр. 286). Теорема принадлежит E. Betti. Nuovo cimento, ser. 2, т. 7 и 8, 1872. В более общем виде теорема была дана Lord'ом Rayleigh'ем, Proc. London Math. Soc., т. 4, 1873; или Scientific Papers, т. I, стр. 179. Различные применения этой теоремы к решению технических задач были сделаны O. Mohr'ом и H. Muller-Breslau (цитиров. на стр. 288).

приложения ранее приложенных сил P_1 и P_2 переместятся на δ'_1 и δ'_2 . Тогда P_1 и P_2 совершат работу

$$P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 \quad (с)$$

Следовательно, суммируя (а), (б) и (с), найдем полную потенциальную энергию, накопленную в теле

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta'_1}{2} + \frac{P_4 \delta'_2}{2} + P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 \quad (д)$$

При втором способе нагружения приложим сначала силы P_3 и P_4 , а затем P_1 и P_2 . Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем:

$$U = \frac{P_3 \delta_1}{2} + \frac{P_4 \delta_2}{2} + \frac{P_1 \delta'_1}{2} + \frac{P_2 \delta'_2}{2} + P_3 \delta_1 + P_4 \delta_2 \quad (е)$$

Замечая, что выражения (д) и (е) должны представлять одно и то же количество потенциальной энергии, получаем уравнение (206), представляющее теорему о взаимности работ. Эта теорема может быть доказана для какого угодно числа сил, а также и для пар или для сил и пар. В случае пары за перемещение принимается соответствующий угол поворота.

Для того частного случая, когда в первом напряженном состоянии действует одна сила P_1 , а во втором состоянии одна сила P_2 , уравнение (206) становится ¹⁾

$$P_1 \delta'_1 = P_2 \delta_2 \quad (207)$$

Если $P_1 = P_2$, то $\delta'_1 = \delta_2$, т. е. перемещение точки приложения силы P_2 в направлении этой силы, вызываемое силой P_1 , равно перемещению точки приложения силы P_1 в направлении P_2 , вызываемое силой P_2 . Подтверждение этого заключения уже было дано для частного случая балки, показанной на рис. 298.

В качестве другого примера рассмотрим изгиб балки, свободно лежащей на двух опорах. Пусть в первом состоянии она изгибается силой P в середине, а во втором состоянии изгибается парой M на конце. Сила P вызовет угол наклона на конце $\theta = \frac{P l}{16 E J}$. Пара M , приложенная на конце, вызовет прогиб в середине $\delta = \frac{M l^2}{16 E J}$. Уравнение (207) принимает вид

$$P \frac{M l^2}{16 E J} = M \frac{P l^2}{16 E J}$$

¹⁾ Эти выражения не разделены на 2, так как силы P_1 и P_2 остаются постоянными: в то время, когда их точки приложения перемещаются на δ'_1 и δ'_2 .

²⁾ Это было доказано впервые J. C. Maxwell'ом и часто называется *теоремой Maxwell'a*.

Теорема о взаимности работ и перемещений весьма полезна в задачах о нахождении наиболее неблагоприятного положения подвижной нагрузки в статически неопределимых конструкциях. Примером является рис. 300, который изображает балку с одним заделанным концом и со свободно открытым другим и несущую сосредоточенный

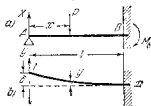


Рис. 300.

груз P . Задача заключается в том, чтобы найти изменение величины реакции X левой опоры при изменении расстояния x груза от этой опоры. Примем действительное состояние балки (рис. 300, а) за первое состояние нагружения. Второе, или фиктивное, состояние показано на рис. 300, б. Внешняя нагрузка и лишняя опора отброшены и вместо неизвестной реакции X приложена направленная вверх сила, равная единице. Это второе состояние нагружения является статически определенным, и соответствующая изогнутая ось балки может быть определена (см. уравнение (97), стр. 134). Если оси координат приняты, как показано на рис. 300, б, то

$$y = \frac{1}{6 E J} (l - x)^2 (2l + x) \quad (f)$$

Пусть δ означает прогиб на конце и y — прогиб на расстоянии x от левой опоры. Тогда, применяя теорему о взаимности работ, находим, что работа, совершенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равняется

$$X \delta - P y.$$

При вычислении же работы, совершенной силами второго состояния, заметим, что на конце имеется лишь сила, равная единице ¹⁾, а соответствующее перемещение точки A в первом состоянии равно нулю. Следовательно, эта работа равняется нулю и теорема о взаимности работ дает

$$X \delta - P y = 0,$$

откуда

$$X = P \frac{y}{\delta} \quad (g)$$

Видно, что при изменении грузом P своего положения на балке (рис. 300, а) реакция X пропорциональна соответствующим значениям y на рис. 300, б. Следовательно, изогнутая ось балки второго

¹⁾ Реакции в заделанном конце не рассматриваются ни в том, ни в другом случае, так как соответствующее перемещение равно нулю и соответствующая работа равна нулю.

состояния (уравнение (1)) дает полную картину того, как изменяется X в зависимости от x . Такая линия называется *инфлюэнтной линией* или *линией влияния* для реакции X (1).

Если на балку, показанную на рис. 300, а, одновременно действуют несколько грузов, то при помощи уравнения (3) совместно с принципом сложения действия сил находим

$$X = \frac{1}{\delta} \sum P_n y_n$$

где y_n есть ордината инфлюэнтной линии, соответствующая точке приложения груза P_n , и где суммирование распространено на все грузы.

ЗАДАЧИ

1. Построить линии влияния для опорных реакций балки, лежащей на трех опорах (рис. 301).

Решение. Чтобы получить линию влияния для реакции средней опоры, принимаем действительное состояние загрузки, показанное на рис. 301, а, за первое состояние. Второе состояние указано на рис. 301, б, в котором груз P отброшен и реакция X средней опоры заменена силой, равной единице и направленной вверх. Второе состояние является статически определимым, и изогнутая ось балки — известна (уравнение (86) и (87), стр. 129), следовательно прогибы δ и y могут быть вычислены. Тогда работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния равняется

$$X\delta - Py = 0.$$

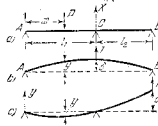


Рис. 301.

Работа сил второго состояния (сила, равная единице) на соответствующих перемещениях первого состояния (прогиб в C равен нулю) равна нулю. Отсюда

$$X\delta - Py = 0, \quad X = P \frac{y}{\delta}.$$

Следовательно, изогнутая ось балки второго состояния дает форму линии влияния для реакции X . Для того чтобы получить линию влияния для

реакции опоры B , необходимо за второе состояние загрузки принять состояние, показанное на рис. 301, в.

2. Пользуясь линией влияния предыдущей задачи, определить реакцию B , если груз P находится в середине первого пролета ($x=l_1/2$) (рис. 301, а).

Ответ. Реакция направлена вниз и равна

$$\frac{3P}{16} \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_2^2}.$$

3. Найти линию влияния для изгибающего момента над средней опорой C балки, лежащей на трех опорах (рис. 302). Пользуясь этой линией влияния, вычислить изгибающий момент M_C , когда груз P находится в середине второго пролета.

Решение. Первым состоянием загрузки является действительное состояние (рис. 302, а) с изгибающим моментом M_C , действующим в сечении C . Для получения

второго состояния груз P отброшен, балка разрезана в сечении C и две пары, равные единице и направленные в противоположные стороны, заменяют M_C (рис. 302, б). Этот случай является статически определимым. Углы θ_1 и θ_2 определяются уравнением (104) и прогиб y — уравнением (105). Сумма углов θ_1 и θ_2 представляет перемещение во втором состоянии, соответствующее изгибающему моменту M_C , действующему в первом состоянии. Работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равняется (1)

$$M_C (\theta_1 + \theta_2) - Py.$$

Работа, произведенная силами второго состояния на перемещениях первого состояния, равна нулю, так как в действительности никакого разреза на опоре C не существует и перемещение, соответствующее двум парам, равным единице, второго состояния, равно нулю. Отсюда

$$M_C (\theta_1 + \theta_2) - Py = 0$$

$$M_C = P \frac{y}{\theta_1 + \theta_2}.$$

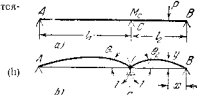


Рис. 302.

Таким образом, когда груз P изменяет свое положение, изгибающий момент M_C изменится в том же отношении, как и прогиб y . Следовательно, изогнутая ось балки второго состояния представляет форму линии влияния для M_C . Замечая, что

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{l_1 + l_2}{3EI},$$

и что прогиб в середине второго пролета равняется

$$(y)_{x=l_2} = \frac{l_2^2}{16EI}.$$

находим, что при приложении груза P в середине второго пролета изгибающий момент на основании уравнения (ii) равен

$$M_C = \frac{3}{16} \frac{Pl_2^2}{l_1 + l_2}.$$

Положительный знак, полученный для M_C , показывает, что момент имеет направление, указанное на рис. 302, б. Следуя нашему общему правилу для знаков моментов (рис. 63), мы в этом случае рассматриваем M_C как отрицательный момент.

4. Найти линию влияния для изгибающего момента в заданном конце B балки AB (рис. 300) и вычислить этот момент, когда груз находится на расстоянии $x=l/3$ от левой опоры.

$$\text{Ответ. } M_B = -\frac{4}{27} Pl.$$

5. Построить линию влияния для горизонтальных реакций H рамы, показанной на рис. 170, а, когда груз P движется по стержню AB .

Ответ. Линия влияния имеет тот же вид, что и изогнутая ось стержня AB в нагруженном состоянии, показанном на рис. 169, г.

¹⁾ Применение моделей при определении линий влияния было разработано Г. Е. В и г-ом, J. Franklin Inst., 1927.

¹⁾ Предполагается, что изгибающий момент M_C вызывает изгиб оси вокругностью вниз.

6. Построить линию влияния для усилия X в горизонтальной стержне CL (рис. 303, а), когда груз P движется по балке AB . Вычислить X , когда груз находится в середине. Перемещениями от удлинения и укорочения стержней пренебречь и принять во внимание лишь перемещение от изгиба балки AB .

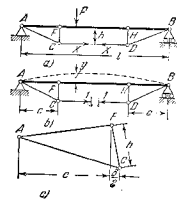


Рис. 303.

расположенными грузами разобрать в задаче 1, стр. 141. Подставляя $(1-h)$ с вместо P в полученные там формулы, находим, что прогибы балки в точке F и в середине соответственно будут равны

$$(y)_{x=c} = \frac{ch}{6EI} (3l - 4c)$$

и

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{h}{24EI} (3P - 4c^2).$$

Рассматривая теперь вращение треугольника AFC (рис. 303, с), как твердого тела, находим, что горизонтальное перемещение точки C равно вертикальному перемещению точки F , умноженному на h/c . Следовательно,

$$\delta = 2 \frac{h}{c} (y)_{x=c} = \frac{h^2}{3EI} (3l - 4c).$$

Подставляя это значение δ и прогиб в середине в уравнение (i), получаем

$$X = \frac{P}{8h} \frac{3l^2 - 4c^2}{3l - 4c}.$$

7. Найти линию влияния для усилия в стержне CD системы, показанной на рис. 304, пренебрегая перемещениями от укорочения и удлинения и рассматривая лишь изгиб балки AB .

Ответ. Линия будет та же, что и для средней реакции балки, лежащей на трех опорах (см. задачу 1, стр. 300).

8. Построить линию влияния для усилия в стержне BC , который поддерживает балку AB . Найти усилие в BC , когда P находится в середине (рис. 305).

Ответ. Пренебрегая перемещениями от удлинения стержня BC и укорочения балки AB , находим, что усилие в BC равно $\frac{5}{16} \frac{P}{\sin \alpha}$.

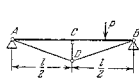


Рис. 304.

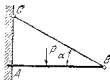


Рис. 305.

Решение. Действительное состояние (рис. 303, а) принято за первое состояние загрузки. Во втором состоянии груз P отброшен и усилия X заменены силами, равными единице (рис. 303, б). Возникающие от этих сил давления, направленные вверх и равные $(1-h)/c$, передаются балке AB в точках F и H , и балка прогибается, как указано пунктиром. Если y есть прогиб балки в точке, соответствующей грузу P , и δ есть перемещение точек C и D по направлению одна к другой во втором состоянии, то теорема о взаимности работ дает

$$X\delta - Py = 0 \quad \text{и} \quad X = P \frac{y}{\delta}. \quad (i)$$

Следовательно, изогнутая ось балки AB во втором состоянии является требуемой линией влияния. Изгиб балки двумя симметрично

76. Исключительные случаи

При выводе и теоремы Кастigliано и теоремы о взаимности работ и перемещений предполагалось, что перемещения, возникающие при деформации, пропорциональны силам, действующим на упругую систему. Имеются случаи, в которых перемещения не пропорциональны силам, хотя материал тела может подчиняться закону Гука. Это бывает всегда, когда перемещения при деформации могут иметь действие внешних сил. В таких случаях потенциальная энергия системы уже не является функцией второй степени, и теорема Кастigliано не имеет места.

Для того чтобы объяснить это обстоятельство, рассмотрим простой случай, в котором на упругую систему действует лишь одна сила P . Предположим сначала, что перемещение δ пропорционально соответствующей силе P , как изображено прямой линией OA на рис. 306, а. Тогда площадь треугольника OAB представляет энергию деформации, накопленную в системе при приложении силы P . При бесконечно малом увеличении перемещения на $d\delta$ потенциальная энергия увеличится на величину, показанную на рисунке заштрихованной площадью, и мы получаем

$$dU = P d\delta. \quad (a)$$

При линейной зависимости бесконечно малый треугольник ADC подобен треугольнику OAB , поэтому

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \quad \text{или} \quad d\delta = \frac{\delta dP}{P}. \quad (b)$$

Подставляя это в уравнение (а), получаем

$$dU = P \frac{\delta dP}{P},$$

откуда получается положение Кастigliано:

$$\frac{dU}{dP} = \delta. \quad (c)$$

Пример, в котором теорема Кастigliано не может быть применена, показан на рис. 307. Для одинаковых горизонтальных стержней AC и BC , прикрепленных шарнирами A , B и C , подвергается действию вертикальной силы P в точке C . Пусть α будет положение после деформации и α_0 — угол наклона каждого стержня в его деформированном состоянии. Относительное удлинение стержней из рис. 307, а, будет

$$e = \left(\frac{l}{\cos \alpha} - l \right) : l. \quad (d)$$

Если рассматриваются лишь малые перемещения, то угол α мал и $\frac{l}{\cos \alpha} = l + \frac{\alpha^2}{2}$ приблизительно. Тогда из (d) имеем

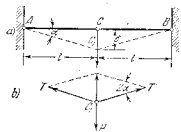
$$e = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Соответствующие условия в стержнях будут

$$T = TE\epsilon = \frac{FEa^2}{2}. \quad (e)$$

Из условия равновесия узла C_1 (рис. 307, б) следует

$$P = 2aT. \quad (f)$$



и, подставляя вместо T его значение из уравнения (e), получаем $P = FEa^3$, откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} \quad (g)$$

$$\delta = la = l \sqrt[3]{\frac{P}{FE}}. \quad (208)$$

Рис. 307.

В этом случае перемещение не пропорционально силе P , хотя материал стержней следует закону Гука. Зависимость между δ и P изображена на рис. 308, б кривой OA . Заштрихованная площадь OAB на этом рисунке представляет потенциальную энергию, накопленную в системе. Количество потенциальной энергии равняется

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta. \quad (h)$$

Подставляя из уравнения (208)

$$P = FE \frac{\delta^3}{l^3},$$

получаем

$$U = \frac{EF}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{FE\delta^4}{4l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{FE}}. \quad (i)$$

Это показывает, что потенциальная энергия системы уже не является функцией второй степени от силы P . Также она не равна половине, а лишь четверти произведения $P\delta$ (см. § 71). Теорема Кастильяно, здесь, конечно, не имеет места

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} \right) = \frac{1}{3} l \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} = \frac{1}{3} \delta.$$

Аналогичные результаты получаются во всех случаях, где перемещения не пропорциональны силам¹⁾.

¹⁾ Такие задачи были разобраны F. Engesser'ом, Z. Architekt. u. Ing.-Ver., т. 35, стр. 733, 1889; см. также H. M. Westergaard, Proc. Ann. Soc. Civil Engrs., февраль, 1911.

ГЛАВА XII

КРИВЫЕ БРУСЬЯ

77. Чистый изгиб кривых брусьев

При последующем изложении предполагается, что линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений бруса и называемая *осью бруса*, представляет собой плоскую кривую и что каждое поперечное сечение имеет ось симметрии, лежащую в плоскости этой кривой¹⁾. Брус подвергается действию сил, лежащих в указанной плоскости симметрии, так что изгиб имеет место в этой же плоскости.

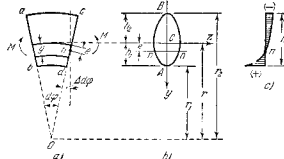


Рис. 308.

Рассмотрим сначала случай *чистого изгиба* кривого бруса постоянного поперечного сечения, т. е. случай, когда к концам бруса приложены пары сил M (рис. 308). Закон распределения напряжений для этого случая может быть получен на основании тех же предположений, которые были приняты ранее при рассмотрении изгиба призматических брусьев, а именно, что поперечные сечения бруса, первоначально плоские и нормальные к его оси, остаются такими же

¹⁾ Случай несимметричных поперечных сечений рассмотрен F. K. G. O'G'v'is't'ом, Publ. № 107, Inst. f. Festigkeitslehre Königl. Tech. Hochschule, Stockholm, 1953.

и при изгибе бруса¹⁾. Пусть ab и cd будут два бесконечно близких поперечных сечения бруса (рис. 308, а) и пусть $d\varphi$ будет угол между ними до изгиба. Вследствие изгиба поперечное сечение cd поворачивается относительно ab около нейтральной оси nn на малый угол $\Delta d\varphi$. Этот угол и соответствующий момент M принимаются положительными, если при изгибе первоначальная кривизна уменьшится. При этом повороте продольные волокна на выпуклой стороне бруса сжимаются, а волокна на вогнутой стороне растягиваются. Обозначая через y расстояние волокна от оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярной плоскости изгиба, принимая направление к центру кривизны оси бруса за положительное и обозначая через e расстояние нейтральной оси nn от центра тяжести s , мы находим, что удлинение какого-либо волокна при изгибе равно $(y-e)\Delta d\varphi$ и соответствующее относительное удлинение его равняется

$$\varepsilon = \frac{(y-e)\Delta d\varphi}{(r-y)d\varphi}. \quad (a)$$

В этом выражении r означает радиус кривизны оси бруса (рис. 308, б), а знаменатель в уравнении (а) представляет первоначальную длину волокна между рассматриваемыми поперечными сечениями ab и cd .

Предполагая, что между продольными волокнами не имеется бокового давления²⁾, получаем нормальное к поперечному сечению напряжение в расстоянии y от центральной оси, равное

$$\sigma = \frac{E(y-e)\Delta d\varphi}{(r-y)d\varphi}. \quad (b)$$

Из этого видно, что распределение напряжений происходит уже не по линейному закону, как в случае изгиба призматических брусьев, а по гиперболическому закону, как показано на рис. 308, с. Из того условия, что сумма нормальных усилий, распределенных по поперечному сечению, равняется нулю в случае чистого изгиба, можно заключить, что нейтральная ось здесь перемещается от центра тяжести поперечного сечения по направлению к центру кривизны оси бруса. В случае прямоугольного поперечного сечения бруса заштрихованная площадь (рис. 308, с), соответствующая растяжению, должна равняться заштрихованной площади, соответствующей сжатию,

¹⁾ Эта приближенная теория была разработана E. W i l k i e r o n, *Civilingenieur*, т. 4, стр. 232, 1858; см. также его книгу «Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit», Praha, т. 15, 1867. Подобная теория была также разработана H. R e s s a l o m, *Ann. mines*, стр. 617, 1862. Дальнейшее развитие теории было сделано F. G r a s h o f o m в его книге «Elastizität und Festigkeit», стр. 251, 1878; см. также T o d h u n t e r e P e a r s o n, *History of the Theory of Elasticity*, т. 2, стр. 422, 1893. Об опубликованных работах, относящихся к толщому решению задачи на кривые брусцы, см. «Theory of Elasticity» автора и J. N. G o o d i e r, стр. 63, 1931.

²⁾ Тошда теория локальвает, что существует некоторое радиальное давление, но оно не имеет существенного влияния на нормальные напряжения от изгиба о.

и мы сразу видим, что наибольшие напряжения возникают на вогнутой стороне. Для того чтобы напряжения в крайних растянутых и крайних сжатых волокнах были равны между собой, необходимо применять такие формы поперечных сечений, которые имеют центр тяжести ближе к вогнутой стороне бруса.

Уравнение (b) содержит две неизвестные величины: расстояние e нейтральной оси nn от центра тяжести S (рис. 308, б) и угол поворота $\Delta d\varphi$. Для определения этих величин воспользуемся двумя уравнениями статики, согласно которым сумма нормальных усилий, распределенных по поперечному сечению, равна нулю и момент этих усилий равен моменту M внешних пар. Эти уравнения представляются так:

$$\int \sigma dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{(y-e)dF}{r-y} = 0, \quad (c)$$

$$\int \sigma y dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{(y-e)y dF}{r-y} = M. \quad (d)$$

Из первого из этих уравнений следует, что

$$\int \frac{y dF}{r-y} - e \int \frac{dF}{r-y} = 0. \quad (e)$$

Первый интеграл в левой части этого уравнения имеет размерность площади и может быть выражен в таком виде:

$$\int \frac{y dF}{r-y} = mF, \quad (f)$$

где m — коэффициент, определяемый для каждой частной формы поперечного сечения путем выполнения указанного интегрирования. Величина mF называется *приведенной площадью* поперечного сечения. Второй интеграл может быть преобразован следующим образом:

$$\int \frac{dF}{r-y} = \int \frac{(y+r-y)dF}{r(r-y)} = \int \frac{y dF}{r(r-y)} + \int \frac{dF}{r} = (m+1) \frac{F}{r}$$

и уравнение (e) получается в таком виде:

$$mF - (m+1) \frac{Fe}{r} = 0,$$

откуда

$$e = r \frac{m}{m+1} \quad \text{или} \quad m = \frac{e}{r-e}. \quad (209)$$

Теперь из уравнения (d), пользуясь преобразованием

$$\int \frac{y^2 dF}{r-y} = - \int \left(y - \frac{ry}{r-y} \right) dF = - \int y dF + r \int \frac{y dF}{r-y} = m r F, \quad (g)$$

получаем

$$\frac{F \Delta d\varphi}{dq} (mrF - meF) = M$$

и

$$\frac{E \Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{m(r-e)F} = \frac{M}{Fe}. \quad (210)$$

Подставляя это значение в выражение (b), мы получаем следующую формулу для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{m(r-e)F(r-y)} = \frac{M(y-e)}{Fe(r-y)}. \quad (211)$$

Для определения напряжений в наиболее удаленных волокнах представляем для точек A и B (рис. 308, b) значения $y=h_1$ и $y=-h_2$, тогда получим

$$\sigma_A = \frac{M(h_1 - e)}{Fe r_1}, \quad \sigma_B = -\frac{M(h_2 + e)}{Fe r_2}, \quad (212)$$

где r_1 и r_2 означают радиусы внутренней и внешней поверхности кривого бруса. Определив из уравнений (i) и (209) величины m и e для данной формы поперечного сечения, мы можем легко вычислять нормальные напряжения при помощи уравнения (211).

Изменение $\Delta d\varphi$ угла $d\varphi$ между двумя последовательными поперечными сечениями получается из уравнения (210), которое дает

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{e r F E} = \frac{M ds}{e r F E}$$

и соответствующее изменение кривизны оси бруса будет

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{e r F E} = \frac{M(m+1)}{m^2 F E}. \quad (213)$$

Если радиальный размер h кривого бруса мал по сравнению с радиусом кривизны r оси бруса, мы можем пренебречь в уравнениях (i) и (g) величиной y по сравнению с r и заключаем, что когда радиус кривизны делается все большим и большим, число m приближается к нулю, и величина $m^2 F$ приближается к значению центрального момента инерции J_z поперечного сечения. Тогда выражение (213), представляющее изменение кривизны оси бруса, приближается к значению

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{E J_z}, \quad (214)$$

что совпадает с прежде полученным значением для кривизны первоначально прямых брусков (см. стр. 123).

78. Изгиб кривых брусков силами, действующими в плоскости симметрии

Рассмотрим теперь более общий случай изгиба кривого бруса, показанный на рис. 309, a. Предполагается, что силы P_1, \dots, P_n представляют систему сил, находящихся в равновесии и действующих в плоскости оси бруса, которая является плоскостью симметрии бруса. Очевидно, изгиб бруса происходит в этой плоскости. Для нахождения напряжений в каком-либо поперечном сечении mn бруса (рис. 309, a) мы предположим, что часть бруса справа от поперечного сечения mn отброшена и ее действие на левую часть бруса заменено силой, приложенной в центре тяжести C поперечного сечения,

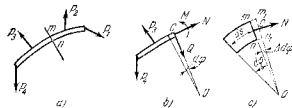


Рис. 309.

и парой сил M . Разлагая силу на две составляющие N и Q , одну нормальную к поперечному сечению и другую, направленную радиально, мы окончательно получаем: *изгибающий момент M , продольную силу N и поперечную силу Q* . Положительные направления этих сил показаны на рис. 309, b.

Напряжения и деформации, возникающие от пары сил, были исследованы в предыдущем параграфе при рассмотрении чистого изгиба кривого бруса. Напряжения, соответствующие продольной силе, равномерно распределяются по поперечному сечению и их величина будет равна N/F . Эти напряжения будут вызывать одинаковые относительные удлинения волокон, но полные удлинения, пропорциональные первоначальной длине волокон между какими-либо двумя смежными поперечными сечениями, будут пропорциональны расстоянию от центра кривизны O оси бруса (рис. 309, c). Таким образом, от действия продольной силы первоначальный угол $d\varphi$ увеличится на величину

$$\Delta d\varphi = \frac{N ds}{F E r}. \quad (215)$$

В то же самое время первоначальная длина ds элемента оси бруса увеличится на величину

$$\Delta ds = \frac{N ds}{F E}. \quad (216)$$

Поперечная сила Q вызывает касательные напряжения и некоторое искривление поперечного сечения. Обычно предполагают, что закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению кривого бруса такой же, как и для бруса с прямой осью (рис. 310). В таком случае относительное радиальное смещение двух смежных поперечных сечений будет такое же, как для прямых брусков, и будет равно

$$\frac{\alpha Q}{FG} ds. \quad (217)$$

Складывая нормальные напряжения, вызываемые парой сил M , с нормальными напряжениями, возникающими от силы N , получаем

$$\sigma = \frac{M(y - e)}{F_e(r - y)} + \frac{N}{F}. \quad (218)$$

Величину изменения $\Delta d\varphi$ угла между двумя смежными поперечными сечениями находим по формуле

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{EI E} - \frac{N ds}{FEr}. \quad (219)$$

При помощи формул (215) — (219) можно вычислить напряжения и деформации кривого бруса для любого рода нагрузки бруса, действующей в плоскости кривизны его оси.

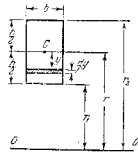


Рис. 310.

79. Частные случаи изгиба кривых брусков

В следующих примерах, для некоторых частных случаев, приведены вычисления величины m , определяемой из уравнения (6) § 77, и расстояние e нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения. Зная эти величины, мы можем вычислить напряжения в кривых брусках при помощи формул двух предыдущих параграфов.

Прямоугольное поперечное сечение. В этом случае ширина b поперечного сечения (рис. 310) постоянна, и мы получаем

$$mF = \int_F \frac{y dF}{r - y} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{y(r - r_1)}{r - y} dy = br \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dy}{r - y} = bh = br \ln \frac{r_2}{r_1} = bh,$$

¹⁾ Это допущение удовлетворительно согласуется с точным решением для узкого прямоугольного поперечного сечения, см. книгу автора «Theory of Elasticity», стр. 75, 1951.

так что

$$m = \frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \quad (a)$$

и

$$e = \frac{mr}{m+1} = \frac{r \left(\frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)}{\frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1}} = r - \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (b)$$

При малых значениях h/r расстояние e мало по сравнению с h и чтобы вычислить его из уравнения (b) с достаточной точностью, необходимо взять $\ln \frac{r_2}{r_1}$ с высокой степенью точности. Для того чтобы устранить это неудобство, мы можем воспользоваться известным рядом

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r + \frac{h}{2}}{r - \frac{h}{2}} = \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \right].$$

Тогда из уравнения (a) найдем

$$m = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \quad (c)$$

Таким образом, мы получаем быстро сходящийся ряд, из которого можно легко вычислить величины m и e с какой угодно точностью. Взяв только первый член ряда, мы получим

$$m \approx \frac{h^2}{12r^2} \quad \text{и} \quad e \approx \frac{h^2}{12r}.$$

Если взять два члена ряда, то найдем

$$m \approx \frac{h^2}{12r^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{h^2}{4r^2} \right) \quad \text{и} \quad e \approx \frac{h^2}{12r} \left(1 + \frac{4}{15} \frac{h^2}{4r^2} \right).$$

Видно, что при малых значениях h/r расстояние e очень мало. Тогда можно допустить с достаточной точностью линейный закон распределения напряжений вместо гиперболического. Для сравнения результатов, полученных для этих двух типов распределения напряжений в случае прямоугольного поперечного сечения, приведена таблица 8. В этой таблице для разных значений отношения r/h даны отношения

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{M} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sigma_{\min}}{M}.$$

Из этой таблицы видно, что при $r/h \geq 10$ можно принимать линейный закон распределения напряжений и для наибольшего напряжения можно с достаточной точностью пользоваться формулой, выведенной для бруса с прямолинейной осью.

Таблица 8

Сравнение гиперболического и линейного законов распределения напряжений

$\frac{r}{h}$	Гиперболический закон распределения напряжений		Линейный закон распределения напряжений		Погрешность в % макс.
	1	2	3	4	
1	9,2	-4,4	6	-6	35,0
2	14,4	-10,3	12	-12	17,0
3	20,2	-15,1	18	-18	10,9
4	26,2	-22,2	24	-24	9,2
10	62,0	-58,0	60	-60	3,2

Трапециoidalное поперечное сечение. Пользуясь опять уравнением

$$mF = \int_F \frac{y df}{r-y} \quad (d)$$

и вводя обозначение

$$v = r - y, \quad (e)$$

где v есть расстояние заштрихованного элемента (рис. 311) от оси OO , проходящей через центр кривизны оси бруса, мы получаем

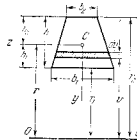


Рис. 311.

$$mF = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-v) df}{v} = r \int_{r_1}^{r_2} \frac{df}{v} - F. \quad (i)$$

Переменная ширина поперечного сечения (рис. 311) равняется

$$b = b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h}$$

и

$$dF = dv \left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h} \right].$$

Подставляя это в уравнение (i), получим

$$\begin{aligned} m &= \frac{r}{F} \int_{r_1}^{r_2} \left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h} \right] \frac{dv}{v} - 1 = \\ &= \frac{r}{F} \left\{ \left[b_2 + r_2 \frac{b_1 - b_2}{h} \right] \ln \frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2) \right\} - 1. \quad (g) \end{aligned}$$

Если $b_1 = b_2 = b$ то эта формула совпадает с формулой (a), которая была получена для прямоугольного поперечного сечения. Если мы примем $b_2 = 0$, то получим из формулы (g) значение m для *треугольного поперечного сечения*.

Тавровое поперечное сечение. Поступая так же, как в предыдущем случае, мы получим для поперечного сечения, изображенного на рис. 312

$$m = \frac{r}{F} \left(b_1 \ln \frac{r_1}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) - 1. \quad (h)$$

Двутавровое поперечное сечение. Тот же способ, что и в предыдущем случае, дает (рис. 313):

$$m = \frac{r}{F} \left(b_1 \ln \frac{r_1}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_3 \ln \frac{r_3}{r_1} \right) - 1. \quad (i)$$

Круговое поперечное сечение. Заменяя, что в этом случае (рис. 314) ширина поперечного сечения на расстоянии y от центра тяжести

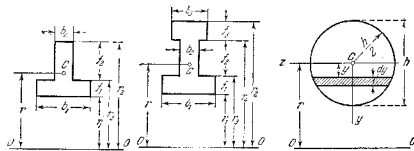


Рис. 312.

Рис. 313.

Рис. 314

сечения равняется $2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - y^2}$, получаем для определения m следующее уравнение:

$$\begin{aligned} mF &= \int_F \frac{y df}{r-y} = r \int_F \frac{df}{r-y} - F = 2r \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{4} - y^2}}{r-y} dy - F = \\ &= 2\pi r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} \right) - F. \quad (j) \end{aligned}$$

Пользуясь рядом

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{4r^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{4r^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^4 - \dots$$

мы получим

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \quad (220)$$

Это есть быстро сходящийся ряд, из которого величину m можно легко вычислить с какой угодно точностью.

Можно видеть, что при вычислении m из уравнения (d) величина не изменится, если все элементы dF умножить на некоторую постоянную величину, так как в этом случае интеграл уравнения (d) и площадь F того же уравнения увеличатся в одном и том же отношении. Из этого следует, что значение m , полученное для кругового поперечного сечения из уравнения (j), можно применить также для эллипса

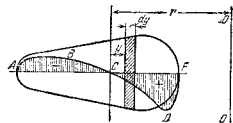


Рис. 315.

с осями h и h_1 , так как в этом случае каждая элементарная площадка, полученная для круга, должна быть умножена на постоянное отношение h_1/h .

Вычисление интеграла в уравнении (d) иногда можно упростить путем деления поперечного сечения на несколько частей, интегрирования каждой части и сложения результатов этих интегрирований. Взяв, например, поперечное сечение в виде кругового кольца с внешним диаметром h и внутренним диаметром h_1 , и пользуясь уравнением (j) для внешнего и внутреннего кругов, мы найдем для кольцевого поперечного сечения:

$$m = \frac{1}{h^2 - h_1^2} \left\{ h^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \right] - h_1^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h_1}{2r} \right)^4 + \dots \right] \right\}. \quad (k)$$

Таким же способом мы можем развернуть формулы для поперечных сечений, показанных на рисунках 312 и 313. Когда величина m вычислена, то из уравнения (209) мы найдем e , а из уравнения (212) — наибольшее напряжение.

Уравнение (d) является основой для графического определения величины m в тех случаях, когда форма поперечного сечения не может быть просто выражена аналитически. Из уравнения (d) видно, что при вычислении приведенной площади каждую элементарную площадку нужно уменьшить в отношении $\frac{y}{r-y}$. Это можно сделать, сохраняя ширину элементарных полосок, но уменьшая их длину в указанном отношении (рис. 315). Таким путем получится заштрихованная площадь на рисунке. Разность между площадями CD и ABC дает приведенную площадь mF . Зная это, можем легко вычислить величины m и e .

Так как значение mF получается как разность двух площадей, то точность результата оказывается низкой и метод дает лишь грубое приближение. Гораздо большая точность может быть получена путем деления поперечного сечения на полоски одинаковой ширины и затем применения правила Симпсона вместо вычисления интеграла уравнения (d) ¹⁾.

Теория кривых брусьев, изложенная выше, применяется при проектировании *подъемных крюков* ²⁾. На рис. 316 изображена рабочая часть крюка постоянного кругового поперечного сечения. Предполагается, что вертикальная сила P проходит через центр кривизны O оси крюка. Наибольшее нормальное напряжение от изгиба имеет место в поперечном сечении, перпендикулярном грузу P . Затем, поступая так, как изложено в § 78, мы найдем, что на горизонтальное поперечное сечение крюка действуют растягивающая сила P , приложенная в центре тяжести C поперечного сечения, и изгибающий момент $M = Pr$. Складывая напряжения от силы P и изгибающего момента M и пользуясь уравнением (218), получаем

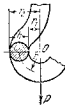


Рис. 316.

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{I_e(r-y)} + \frac{P}{F} = \frac{Py}{Fm(r-y)}.$$

Применяя эту формулу к наиболее удаленным точкам, для которых $y = \pm h/2$, мы найдем, что

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \frac{h}{2mr}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{P}{F} \frac{h}{2mr}. \quad (221)$$

Видно, что численно наибольшее напряжение есть растягивающее напряжение на внутренней поверхности, которое получается умножением напряжения P/F на коэффициент напряжения

$$k = \frac{h}{2mr}, \quad (222)$$

величина которого зависит от отношения $h/2r$. Пользуясь выражением (220) для m , найдем, что k изменяется от 13,5 до 15,4, в то время как $h/2r$ изменяется от 0,6 до 0,4³⁾. Вычисление напряжений в подъемных крюках неправильного сечения можно выполнить, если разделить m при помощи правила Симпсона ⁴⁾.

¹⁾ Примеры таких вычислений даны в статье: А. М. Уайлс, J. Appl. Mech., том 13, стр. 239, 1946.

²⁾ Теоретическое и экспериментальное исследование подъемных крюков было сделано Национальной физической лабораторией в Англии: см. Н. J. Gough, H. L. Cox и D. G. Sorwitt, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), дек. 1934. Для сравнения теоретических напряжений в крюках прямоугольного поперечного сечения с экспериментальными результатами см. К. Вётчелер, Forschungsab. № 337, 1931.

³⁾ При $h/2r = 0,6$ коэффициент k имеет наименьшее значение.

⁴⁾ Этот метод описан А. М. Уайлсом, цитирован на стр. 315.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношение численных значений σ_{\max} и σ_{\min} для кривого бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе, если $r=12$ см и $h=10$ см.

Ответ. $\left| \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right| = 1,81$.

2. Решить предыдущую задачу для кругового поперечного сечения.

Ответ. $e=0,54$ см, $\left| \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right| = \frac{4,46}{5,34} = 1,96$.

3. Определить размеры b_1 и b_2 двутаврового поперечного сечения (рис. 313), чтобы σ_{\max} и σ_{\min} при чистом изгибе были численно равны между собой. Даны следующие размеры: $r_1=3$ см, $r_2=4$ см, $r_3=6$ см, $r_4=7$ см, $b_1=1$ см, $b_1+b_2=5$ см.

Решение. Из уравнений (212) имеем

$$\frac{h_1 - e}{r_1} = \frac{h_2 + e}{r_2} \quad \text{или} \quad \frac{r - r_1 - e}{r_1} = \frac{r_2 - r + e}{r_2}$$

откуда

$$r - e = \frac{r}{m+1} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 4,2 \text{ см.}$$

Подставляя вместо m значение (i) и замечая, что $F=7$ см², получим

$$4,2 = \frac{7}{b_1 \ln \frac{2}{3} + 1 \cdot \ln \frac{6}{4} + (5 - b_1) \ln \frac{7}{6}}$$

откуда

$$b_1 \ln \frac{4}{3} + (5 - b_1) \ln \frac{7}{6} = \frac{7}{4,2} - 1 \cdot \ln \frac{6}{4}$$

или

$$0,288b_1 + 0,154(5 - b_1) = 1,667 - 0,406 = 1,261 \text{ см,}$$

$$b_1 = 3,67 \text{ см,} \quad b_2 = 5 - 3,67 = 1,33 \text{ см.}$$

4. Определить размер b_1 таврового сечения (рис. 312) так, чтобы σ_{\max} и σ_{\min} при чистом изгибе были численно равны между собой. Даны следующие размеры: $r_1=3$ см, $r_2=7$ см, $r_3=4$ см, $b_2=1$ см

Ответ. $b_1=3,09$ см.

5. Определить σ_{\max} и σ_{\min} для кривка трапециального поперечного сечения m , приведенного на рис. 317, если $P=2000$ кг, $b_1=4$ см, $b_2=1$ см, $r_1=3$ см, $r_2=12$ см.

Решение. Из уравнения (g) имеем

$$r - e = \frac{r}{m+1} = \frac{22,5}{4 \cdot 12 - 1 \cdot 3} \ln \frac{12}{3} = \frac{22,5}{9} \ln 4 = 5,72 \text{ см.}$$

Радиус оси бруса будет

$$r = r_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3} = 6,6 \text{ см.}$$

Поэтому $e=0,88$ см, $h_2 - e = r - e - r_1 = 5,72 - 3 = 2,72$ см, $h_2 + e = r_2 - r + e = 12 - 5,72 - 6,28$ см, $F = 22,5 \cdot 0,88 = 19,8$ см², $M = Pr = 13200$ кг см. Напряжения от изгиба из уравнений (212) равны

$$\sigma_{\max} = \frac{13200 \cdot 2,72}{19,8 \cdot 3} = 604 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{13200 \cdot 6,28}{19,8 \cdot 12} = -349 \text{ кг/см}^2.$$

К этим напряжениям от изгиба нужно прибавить равномерно распределенные напряжения от растягивающей силы P , равные $P/F = 2000/22,5 = 89$ кг/см². Тогда полные напряжения будут

$$\sigma_{\max} = 604 + 89 = 693 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -349 + 89 = -260 \text{ кг/см}^2.$$

6. Найти наибольшее напряжение в кривке кругового поперечного сечения, если диаметр поперечного сечения $h=2,5$ см, радиус оси $r=2,5$ см и $P=400$ кг.

Ответ. $\sigma_{\max} = 1148$ кг/см².

7. Найти σ_{\max} и σ_{\min} для кривого бруса кругового поперечного сечения, нагруженного как показано на рис. 318, если $h=10$ см, $r=10$ см, $a=10$ см и $P=2$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 695$ кг/см², $\sigma_{\min} = -265$ кг/см².

8. Решить предыдущую задачу, полагая, что поперечное сечение m имеет форму, показанную на рис. 312, со следующими размерами: $r_1=5$ см, $r_2=7,5$ см, $r_3=22,5$ см, $b_1=10$ см, $b_2=2,5$ см, $a=10$ см, $P=1,6$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 221$ кг/см², $\sigma_{\min} = -114$ кг/см².

9. Решить задачу 7, полагая, что поперечное сечение m является трапециальным, как на рис. 311, с размерами $r_1=5$ см, $r_2=10,6$ см, $b_1=5$ см, $b_2=2,5$ см, $a=0$ и $P=1,25$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 646$ кг/см², $\sigma_{\min} = -380$ кг/см².

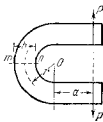


Рис. 318.

80. Деформация кривых брусьев

Деформации кривых брусьев обычно определяются при помощи теоремы Кастigliано¹⁾. Начнем с простейшего случая, когда размеры поперечного сечения бруса малы по сравнению с радиусом кривизны его оси²⁾. В этом случае изменение угла между двумя смежными поперечными сечениями определяется уравнением (214), аналогичным уравнению (a), стр. 123 для прямых брусьев, а энергия деформации при изгибе определяется уравнением

$$U = \int \frac{M^2 ds}{2EI_s}, \quad (223)$$

¹⁾ См. стр. 277.

²⁾ Случай, в котором размеры поперечного сечения не малы, рассмотрен в задаче 6, стр. 325.

в котором интегрирование распространяется на всю длину s бруса. Уравнение (223) аналогично уравнению (190) для прямых брусьев ¹⁾ и перемещение точки приложения какой-либо силы P в направлении силы равняется

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

В качестве примера возьмем кривой брус постоянного поперечного сечения, ось которого представляет четверть дуги окружности (рис. 319); причем этот брус нижним концом A , имеющим вертикальную касательную, заделан, а на другом конце нагружен вертикальной силой P . Изгибающий момент в каком-либо

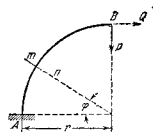


Рис. 319.

поперечном сечении m равняется $M = -Pr \cos \varphi$. Подставляя это в уравнение (223) и составляя выражение производной $\frac{\partial U}{\partial P}$, найдем вертикальное перемещение конца B :

$$\delta = \frac{d}{dP} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dP} r d\varphi = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Для определения горизонтального перемещения конца B нужно приложить фиктивную горизонтальную силу Q , показанную на рисунке пунктиром. Тогда

$$M = -[Pr \cos \varphi + Qr(1 - \sin \varphi)]$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -r(1 - \sin \varphi).$$

Горизонтальное перемещение равняется

$$\delta_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{\partial}{\partial Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial Q} r d\varphi.$$

Подставляя $Q=0$ в выражение для M , получим

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr^3 \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi = \frac{Pr^3}{2EJ_x}.$$

¹⁾ В случае тонких кривых стержней потенциальной энергией от продольных и поперечных сил можно пренебречь. См. стр. 322.

Тонкое кольцо. В качестве второго примера рассмотрим случай тонкого кругового кольца, растягиваемого двумя равными и противоположными силами P , приложенными по концам вертикального диаметра (рис. 320). Вследствие симметрии можно рассмот-

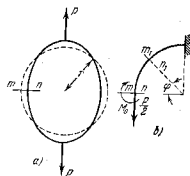


Рис. 320.

реть только один квадрант (рис. 320, б) и вывести заключение, что в поперечном сечении m касательные усилия отсутствуют, и действуют только растягивающая сила, равна $P/2$, и изгибающий момент M_0 . Величина этого момента является статически неопределимой и может быть найдена при помощи теоремы Кастigliано. Из условия симметрии можно заключить, что поперечное сечение m при изгибе кольца не поворачивается. Следовательно, перемещение, соответствующее изгибающему моменту на рис. 320, б, равно нулю и

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = 0, \quad (a)$$

где U есть потенциальная энергия рассматриваемого квадранта. Для какого-либо поперечного сечения m, n , наклоненного под углом φ к горизонтальному диаметру, изгибающий момент равняется ¹⁾

$$M = M_0 - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi) \quad (b)$$

и

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1.$$

Подставляя это в выражение (223) для потенциальной энергии и

¹⁾ Момент, который стремится уменьшить первоначальную кривизну бруса, считаем положительным.

пользуясь уравнением (а), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dM_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dM_0} r d\varphi = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_0 - \frac{Pr}{2} r (1 - \cos \varphi) \right] r d\varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,182 Pr, \quad (224)$$

Подставляя в уравнение (b), получаем

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right). \quad (c)$$

Из этого выражения можно определить изгибающий момент в любом поперечном сечении кольца. Наибольший изгибающий момент будет в точках приложения сил P . Подставляя $\varphi = \pi/2$ в уравнение (с), находим

$$M = -\frac{Pr}{\pi} = -0,318 Pr. \quad (225)$$

Знак минус указывает на то, что изгибающие моменты в точках приложения сил P стремятся увеличить кривизну кольца, в то время как момент M_0 в сечении mn стремится уменьшить эту кривизну, и кольцо будет иметь при изгибе форму, показанную на рис. 320, а пунктиром

Увеличение вертикального диаметра кольца также можно определить при помощи теоремы Кастиглиано. Полная энергия деформации, накопленная в кольце, равняется

$$U = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z},$$

причем значение M определяется по уравнению (с). Следовательно, увеличение вертикального диаметра кольца равно

$$\begin{aligned} \delta = \frac{dU}{dP} &= \frac{4}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dP} r d\varphi = \frac{Pr}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{Pr^3}{EJ_z} = 0,149 \frac{Pr^3}{EJ_z}. \quad (226) \end{aligned}$$

Для определения уменьшения горизонтального диаметра кольца, показанного на рис. 320, следует приложить к концам этого диаметра две равные и противоположно направленные фиктивные силы Q . Тогда, вычислив $\left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$, найдем, что уменьшение горизонтального диаметра будет равно ¹⁾

$$\delta_1 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{Pr^3}{EJ_z} = 0,137 \frac{Pr^3}{EJ_z}. \quad (227)$$

Тягловое кольцо. Если размеры поперечного сечения кривого бруса не малы по сравнению с радиусом кривизны его оси, то необходимо принять во внимание не только энергию деформации от изгибающего момента, но также и энергию деформации от продольных и поперечных сил. Изменение угла между двумя смежными сечениями (рис. 321) от действия пар M , на основании уравнения (213), равняется

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{FEe} - \frac{M ds}{FEer}.$$

при этом работа изгибающих пар M для элемента, заключенного между двумя смежными сечениями, равняется

$$dU_1 = \frac{1}{2} M \Delta d\varphi = \frac{M^2 ds}{2FEer}. \quad (d)$$

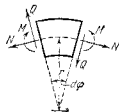


Рис. 321.

Продольная сила N вызывает удлинение элемента между двумя смежными сечениями в направлении оси бруса, равное $\frac{N ds}{FE}$ и увеличивает угол $d\varphi$ на величину $\frac{N ds}{FEr}$ (уравнение (219)). Работа, совершаемая силами N при этом перемещении, равняется $\frac{N^2 ds}{2FE}$. Кроме того, при перемещении от действия продольных сил N парами сил M будет совершена отрицательная работа: $-\frac{MN ds}{FEr}$. Следовательно, полная энергия, накопленная в элементе бруса при действии сил N , равняется

$$dU_2 = \frac{N^2 ds}{2FE} - \frac{MN ds}{FEr}. \quad (e)$$

Поперечная сила Q производит сдвиг одного поперечного сечения относительно другого на величину $\frac{\alpha Q ds}{FG}$, где α есть численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (см. уравнение (217)). Соответствующая потенциальная энергия равняется

$$dU_3 = \frac{\alpha Q^2 ds}{2FG}. \quad (f)$$

¹⁾ Весьма полное исследование круговых колец, находящихся под действием различного рода нагрузок, было сделано С. В. Визеном и его сотрудниками Л. Ж. Кошлом. Главные результаты их опубликованных работ помещены в книге: Визенко and R. G. G. and G. G. G., Technische Dynamik, 2-е изд., т. 1, стр. 362—395, 1953.

Складывая (d), (e) и (f) и интегрируя по всей длине бруса, получаем полную потенциальную энергию кривого бруса:

$$U = \int_0^L \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2AE} - \frac{MN}{TE} + \frac{\alpha Q^2}{2FG} \right) ds. \quad (228)$$

Вспользуемся этим уравнением для решения задачи, представленной на рис. 319. Принимая направление, указанное на рис. 321, за положительное, мы имеем

$$M = -Pr \cos \varphi, \quad N = -P \cos \varphi, \quad Q = P \sin \varphi,$$

где r — радиус оси бруса. Подставляя эти значения в уравнение (228) и применяя теорему Кастigliано, находим вертикальное перемещение точки B :

$$\delta \frac{dU}{dP} = \frac{Pr}{FE} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r \frac{\cos^2 \varphi}{e} - \cos^2 \varphi + \frac{\alpha E}{G} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi Pr}{4FE} \left(\frac{r}{e} + \frac{\alpha E}{G} - 1 \right).$$

Если поперечное сечение бруса представляет прямоугольник шириной b и высотой h , то, пользуясь для α приближенным значением $h^2/12r$ (см. стр. 311) и принимая $\alpha=1,2$ и $E/G=2,6$, находим

$$\delta = \frac{\pi Pr}{4FE} \left(\frac{12r^2}{h^2} + 2,12 \right).$$

Если h мало по сравнению с r , то вторым членом в скобках, представляющим влияние на перемещение сил N и Q , можно пренебречь, и тогда мы приходим к ранее полученному уравнению (см. стр. 318).

Изложенная выше теория расчета толстых кривых брусев часто применяется при вычислении напряжений в таких элементах машины, как звенья цепей и проушины (рис. 322). В этих случаях затруднение возникает при отыскании закона распределения давлений по поверхности бруса. Это распределение давлений зависит от величины зазора между болтом и кривым бруском. Удовлетворительное решение задачи можно получить, только пользуясь одновременно аналитическим и экспериментальными методами исследования¹⁾.

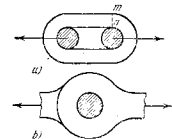


Рис. 322.

Частный случай проушины прямоугольного поперечного сечения (рис. 322) был весьма обстоятельно исследован²⁾. При этом исследовании предполагалось, что зазоров не существует и что болт — абсо-

лютно твердый. Наибольшие растягивающие напряжения имеют место на внутренней поверхности в поперечных сечениях, перпендикулярных оси бруса, их величина может быть представлена формулой

$$\sigma_{\max} = \alpha \frac{8P}{\pi^2 r_1^2}, \quad (g)$$

где P есть полная растягивающая сила, передаваемая бруском, α — численный коэффициент, зависящий от отношения r_1/r_2 , наружного радиуса r_1 к внутреннему радиусу проушины r_2 и t — толщина проушины, перпендикулярная плоскости рисунка. При r_1/r_2 , равном 2 и 4, значения α соответственно равны 4,30 и 4,39. Значения напряжений, получаемые по формуле (g), удовлетворительно согласуются с опытами³⁾.

Теория изгиба тонких колец нашла применение при расчете колец фюзеляжа в конструкциях аэропланов⁴⁾ и колец жесткости в подводных лодках⁵⁾.

При вычислении деформаций кривых брусев мы пользовались до сих пор теорией Кастigliано, но эта задача может быть решена, как в случае прямых брусев, путем введения фиктивных сил. Вычисления особенно упрощаются в случае тонких стержней, когда можно пренебречь влиянием деформации продольных и поперечных сил. Рассмотрим стержень AB (рис. 323), заделанный на конце A и нагруженный в его плоскости симметрии xu . Для определения перемещения конца B рассмотрим бесконечно малое перемещение BC этого конца вследствие изгиба элемента mn стержня. Пользуясь уравнением (214) для определения изменения угла между двумя смежными поперечными сечениями m и n , находим

$$\overline{BC} = \frac{M ds}{EJ_x} r. \quad (h)$$

Замечая, что бесконечно малый треугольник BCD подобен треугольнику $\pi B\pi_1$, находим две составляющие этого перемещения:

$$\overline{CD} = \frac{M ds}{EJ_x} (y_0 - y), \quad \overline{DB} = \frac{M ds}{EJ_x} (x_0 - x). \quad (i)$$

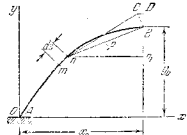


Рис. 323.

Чтобы получить две составляющие полного перемещения конца B , мы должны лишь просуммировать элементарные перемещения (i) для всех элементов стержня. Обозначая эти составляющие через u и v считая их положительными, если они

¹⁾ См. Cr. V i e r e t t, Mitt. deut. Materialprüfungsanstalt, Spec., № 15, 1931. Исследование проушин фюзеляжных методом было сделано К. Т а к е т у г а и У. Н о с о к а w a, Rep. Aeronaut. Inst. (Tokyo), т. 18, стр. 128, 1926, см. также М. М. F r o c h t и H. N. H i l l, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 5, 1940. В последней статье исследовано влияние зазора между болтом и отверстием.

²⁾ См. W. S t i e d a, Luftfahrt-Forsch., т. 18, стр. 214, 1941. Английский перевод см. Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1004, 1942, см. также D. A. D u P l a n t i e r, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 136, 1944; R. B e n j a m i n, Авиатехн., т. 19, стр. 585, 1952.

³⁾ Весьма полное исследование таких колец можно найти в книге П. Ф. П а п к о в и ч а, Строительная механика корабля, Москва, т. 2, стр. 1—816, 1947.

⁴⁾ О теоретическом исследовании зазоров см.: H. R e i s s n e r, Jahrb. wiss. Ges. f. Luftfahrt, 1928; также J. В e k e, Eisenbau, стр. 233, 1921; F. B l e i c h, Theorie und Berechnung der eisern Brücken, стр. 256, 1924; В l u m e n f e l d, Z. Ver. deut. Ing., 1907 и В а u a n n т а м же, стр. 337, 1908. Эксперименты были сделаны Dr. M a i t z b o m (Forschungsber. 306, 1928); см. также D. R ä h l, диссертация, Danzig, 1920; Preuss. Z. Ver. deut. Ing., т. 55, стр. 2173, 1911; М. В о р о н а е в, Известия Киевского политехнич. ин-та, 1910; E. G. C o k e r, Photoelasticity, J. Franklin Inst., 1925.

⁵⁾ H. R e i s s n e r and F. S t r a u c h, Ing. Arch., т. 4, стр. 481, 1933.

совпадают с положительными направлениями осей x и y , получаем

$$u = - \int_0^s \frac{M ds}{EJ_z} (y_0 - y), \quad v = \int_0^s \frac{M ds}{EJ_z} (x_0 - x) \quad (j)$$

Рассматривая, например, представленный на рис. 319 стержень, имеем

$$M = -Pr \cos \varphi, \quad y_0 - y = r(1 - \sin \varphi), \quad x_0 - x = r \cos \varphi$$

Подставляя в уравнение (j) и выполняя интегрирование, получаем результаты, совпадающие с результатами, полученными на стр. 319.

Из уравнений (j) видно, что если мы приложим к каждому элементу стержня фиктивную горизонтальную силу величиною $\frac{M ds}{EJ_z}$, то момент этих распределенных сил относительно конца B даст значение перемещения u . Если вместо горизонтальных сил возьмем вертикальные фиктивные силы той же интенсивности, то момент этих сил относительно конца B даст перемещение v .

ЗАДАЧИ

1. Определить вертикальное перемещение конца B тонкого кривого стержня, имеющего постоянное поперечное сечение и ось — дугу полуокруга (рис. 324). Решить. Энергия деформации изгиба равняется

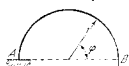


Рис. 324.

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \int_0^{\pi} \frac{P^2 r^2 (1 - \cos \varphi)^2 r d\varphi}{2EJ_z}$$

Прогиб на конце равняется

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{Pr^3}{EJ_z} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi Pr^3}{2EJ_z}$$

2. Определить горизонтальное перемещение конца B в предыдущей задаче.

Ответ. $\delta = \frac{2Pr^3}{EJ_z}$.

3. Определить увеличение расстояния между концами A и B тонкого стержня постоянного поперечного сечения, состоящего из дуги полуокруга CD и двух прямолинейных участков AC и BD (рис. 325).

Ответ. $\delta = \frac{2P}{EJ_z} \left[\frac{l^3}{3} + r \left(\frac{\pi}{4} r^2 + \frac{\pi}{4} r^2 + 2lr \right) \right]$.

4. Звено, состоящее из двух полуокругов и двух прямолинейных участков, растягивается двумя равными, но противоположными силами, направленными по вертикальной оси симметрии (рис. 326). Определить наибольший изгибающий момент, полагая, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом r .

Решение. Рассматривая одну четверть звена (рис. 326, б), найдем статически неопределяемый момент M_0 из того условия, что поперечное сечение, в котором действует этот момент, при деформации не поворачивается. Тогда

$$\frac{dU}{dM_0} = 0.$$

Замечая, что для прямолинейного участка $M = M_0$, а для криволинейного участка $M = M_0 - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi)$, и принимая во внимание только энергию деформации изгиба, находим

$$\frac{dU}{dM_0} = \frac{d}{dM_0} \left\{ \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l M_0^2 dx + \frac{1}{2EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_0 - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \right]^2 r d\varphi \right\} = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr^2}{2} \frac{\pi - 2}{2l + \pi r}.$$

При $l=0$ это выражение совпадает с уравнением (224), полученным ранее для

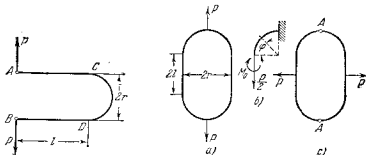


Рис. 325.

Рис. 326.

кругового кольца. Наибольший момент будет в точках приложения сил P и равняется

$$M_1 = M_0 - \frac{Pr}{2}.$$

5. Решить предыдущую задачу, полагая, что силы P приложены, как показано на рис. 326, с.

Ответ. Изгибающий момент в точках A равняется

$$M_1 = \frac{l^3}{2} \frac{r^2 (\pi - 2) + 2lr + r^2}{\pi r + 2l}.$$

При $l=0$ это уравнение совпадает с уравнением для кругового кольца. При $r=0$,

$M_1 = \frac{Pl}{4}$, как для балки с заделанными концами.

6. Определить изгибающий момент M_0 и увеличение вертикального диаметра кругового кольца, показанного на рис. 320, полагая, что поперечное сечение кольца есть прямоугольник шириной b и высотой h , причем эти размеры не малы по сравнению с радиусом r оси кольца.

Решение. Пользуясь уравнением (228) для потенциальной энергии и уравнением (b) для изгибающего момента, получаем для определения M_0 следующее уравнение:

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{rE\theta} - \frac{N}{FE} \right) \pi \theta = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi r} \right).$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (224), видим, что третий член в скобках представляет собой влияние продольной силы в нелинейном законе распределения напряжений. Величины погрешностей, получающихся при применении приближенной формулы (224) вместо предыдущего точного уравнения, приведены в ниже следующей таблице 9.

Таблица 9
Величины погрешностей приближенного расчета

$r/h =$ $e/r =$ Погрешность в %	1 0,090 15,8	1,5 0,638 6,7	2 0,021 3,7	3 0,009 1,6
---------------------------------------	--------------------	---------------------	-------------------	-------------------

Из этой таблицы видно, что в большинстве случаев для вычисления M_0 можно пользоваться приближенной формулой (224) и что ошибка имеет существенное значение лишь тогда, когда h приближается к r или делается больше r .

Увеличение вертикального диаметра кольца определяется из уравнения

$$\delta = \frac{dU}{dP}.$$

Пользуясь уравнением (228) для U и подставляя в это уравнение

$$M = M_0 - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi),$$

$$N = \frac{P}{2} \cos \varphi, \quad Q = -\frac{P}{2} \sin \varphi,$$

находим

$$\delta = \frac{Pr^2}{FEe} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{2e}{r} \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{e}{r} \right) - \frac{\pi}{8} \right] + \frac{\pi a}{4} \frac{E}{G} \frac{e}{r} \right\}$$

Сравнение с уравнением (226) показывает, что влияние продольных и поперечных сил на величину δ обычно очень мало¹⁾.

7. Определить изгибающие моменты в тонком кольце, имеющем две оси симметрии, при действии равномерно распределенного внутреннего давления p .

Решение. Рассмотрим один квадрант (рис. 327) с полуосями a и b . Если M_0 представляет статический неопределимый момент в сечении A , то изгибающий момент в каком-либо сечении C с координатами x и y будет

$$M = M_0 - pa(a-x) + \frac{p(a-x)^2}{2} + \frac{py^2}{2} = M_0 - \frac{pa^2}{2} + \frac{px^2}{2} + \frac{py^2}{2}. \quad (к)$$

¹⁾ Более точное решение задачи, показанной на рис. 320, дано автором, см *Известия Киевского политехнического ин-та*, 1910; см так же *Phil Mag*, т. 44, стр. 1014, 1922 в *Theory of Elasticity*, стр. 121, 1951. Это решение показывает, что изложенная теория, основанная на гипотезе плоских сечений, дает весьма удовлетворительные результаты.

Подставляя это в уравнение $\frac{dU}{dM_0} = 0$, находим

$$\left(M_0 - \frac{pa^2}{2} \right) s + \frac{p}{2} (J_x + J_y) = 0,$$

где s означает длину четверти кольца, а $J_x = \int_0^s y^2 ds$ и $J_y = \int_0^s x^2 ds$ — моменты инерции дуги ACB относительно осей x и y . Следовательно,

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2s} (J_x + J_y). \quad (л)$$

Если кольцо имеет форму валика, показанного на рис. 326, с размерами $a = r$ и $b = l + r$, то

$$s = b - a + \frac{\pi a}{2},$$

$$J_x = \frac{1}{3} (b-a)^2 + \frac{\pi a}{2} (b-a)^2 + \frac{\pi}{4} a^2 + 2a^2 (b-a),$$

$$J_y = (b-a) a^2 + \frac{\pi a^3}{4}.$$

Подставляя это в уравнение (л), получим

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2b + (\pi - 2)a} \left[\frac{1}{3} (b-a)^2 + \frac{\pi}{2} a^2 + 3a^2 (b-a) + \frac{\pi}{2} a(b-a)^2 \right].$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении теперь можно получить из уравнения (к).

Для эллиптического кольца вычисления более сложны⁴⁾. Обозначая $J_x + J_y = -aa^2b$, $M_0 = -\frac{pa^2}{2}$ и момент в сечении B (рис. 327) $M_1 = \gamma pa^2$, приводим ниже таблицу значений числовых коэффициентов α, β и γ для различных значений отношения a/b .

Таблица 10
Коэффициенты для расчета эллиптических колец

$\frac{a}{b}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
α	1,571	1,663	1,795	1,982	2,273	2,736	3,559	5,327
β	0	0,057	0,133	0,237	0,391	0,629	1,049	1,927
γ	0	0,060	0,148	0,283	0,498	0,870	1,576	3,128

8. Плоская спиральная пружина (рис. 328) прикреплена в центре к вертикальному стержню S . К этому стержню приложена пара сил M_0 , которая закручивает пружину. Эта пара уравновешивается горизонтальной силой P , приложенной на

⁴⁾ См. J. A. C. H. Bresse, *Cours de mecanique appliquee*, Paris, 3 изд., стр. 493, 1880. См. также H. R e s a l, *J. math.* (Liouville), т. 3, 1887; M. M a r t e s, *Bull. assoc. tech. maritime*, т. 19, 1908; M. G o u p i l, *Ann. ponts. et chaussées*, т. 2, стр. 366, 1912; M a y e r M i t a, *Z. Ver. deut. Ing.*, т. 58, стр. 649, 1914; W. F. U r k e, *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, 144, 1933.

другом конце пружины A , и реакции стержня. Установить зависимость между моментом M_0 и углом поворота стержня, если все размеры пружины известны. Предполагается, что угол закручивания не настолько велик, чтобы смежные витки соприкасались друг с другом.

Решение. Принимая начало координат в точке A , находим, что изгибающий момент в какой-либо точке пружины на расстоянии y от силы P равен $M = Py$. Изменение угла между двумя смежными сечениями i и $i+1$ рассматриваемой точки, согласно уравнению (214) равняется

$$\Delta \varphi = \frac{M ds}{EJ_z} = \frac{Py ds}{EJ_z}.$$

Полный угол поворота одного конца пружины относительно другого при закручивании будет

$$\varphi = \int_0^s \frac{Py ds}{EJ_z} = \frac{P}{EJ_z} \int_0^s y ds. \quad (m)$$

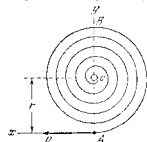


Рис. 328.

Интеграл в правой части этого уравнения представляет собой статический момент оси пружины относительно оси x . Этот момент получается умножением подной длины s спирали на расстояние ее центра тяжести от оси x . В обычном случае с достаточной точностью можно принять это расстояние равным r , т. е. расстоянию от оси стержня C до силы P . Тогда из уравнения (m) получим

$$\varphi = \frac{Prs}{EJ_z} = \frac{M_0 s}{EJ_z}. \quad (n)$$

Если конец A связан с каким-либо стержнем, то вращающий момент M_0 , приложенный в точке C , вызывает реактивную силу P у закрепленного конца A пружины. До тех пор, пока толщина пружины весьма мала, а число витков спирали велико и витки не соприкасаются между собой, принятое допущение о том, что сила P остается горизонтальной, можно считать достаточно точным. Следовательно, для этого случая уравнение (n) будет справедливым¹⁾.

9. Пружина, представленная на рис. 328, находится в неупругом состоянии и закреплена в точке A . Определить наибольшее напряжение и количество энергии, накапливаемой в пружине при трех полных оборотах стержня, приняв пружину изготовленной из стали в 1 см шириной, $0,5$ мм толщиной и 300 см длиной.

Решение. Подставляя данные значения в уравнение (n), получим

$$6\pi = M_0 \frac{300 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,05^3 \cdot 1}.$$

откуда

$$M_0 = 1,41 \text{ кг см.}$$

Количество потенциальной энергии

$$U = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^s y^2 ds = \frac{P^2}{2EJ} \left(sr^2 + \frac{s^3}{4} \right) = \frac{5}{8} \frac{M_0^2 s}{EJ} = 17 \text{ кг см.}$$

¹⁾ Более полный разбор этой задачи дан в книге А. Кастиляно, цитированной на стр. 183. См. также E. C. Wainlow, *Enginng.*, т. 150, стр. 474, 1930 и J. A. Van den Broek, *Trakt.*, А. S. M. E., т. 53, стр. 247, 1931.

Наибольшее напряжение будет в точке B , где изгибающий момент может быть принят равным $2Pr = 2M_0$, так что

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 1,41 \cdot 6}{1 \cdot 0,05^3} = 6912 \text{ кг/см}^2.$$

10. Поршневое кольцо внешнего очертания по кругу имеет прямоугольное поперечное сечение постоянной ширины b и переменной высоты h (рис. 329). Определить, какой должен быть закон изменения высоты h , чтобы кольцо, будучи установлено с поршнем в цилиндр, оказывало на стенки цилиндра равномерно распределенное давление.

Решение. Пусть r означает радиус цилиндра и $r + \delta$ — внешний радиус кольца в свободном состоянии. Приближенное решение задачи получится, если считать внешний радиус кольца вместо переменного радиуса кривизны его оси. Тогда, на основании уравнения (214), изменение кривизны вследствие изгиба будет

$$\frac{\Delta \varphi}{ds} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r + \delta} = \frac{M}{EJ}. \quad (o)$$

Изгибающий момент M в каком-либо сечении m кольца, вызываемый давлением p , равномерно распределенным по внешней поверхности кольца, равен

$$M = -2pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (p)$$

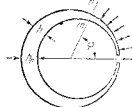


Рис. 329.

Подставив это выражение в (o) и приняв $M^2/12$ вместо J , а величину δ/r^2 вместо $\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \delta}$, так как δ мало, получим для определения h следующее уравнение:

$$\frac{\delta}{r^2} = \frac{p}{E} \frac{24r^2}{h^3} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (q)$$

откуда

$$h^3 = \frac{p}{E} \frac{24r^4}{\delta} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (r)$$

Полагая $\varphi = \pi$, найдем наибольшую величину h^3 , которую обозначим через h_0^3 ,

$$h_0^3 = \frac{p}{E} \frac{24r^4}{\delta}. \quad (s)$$

Наибольшие напряжения от изгиба в каком-либо сечении m равняются

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{12pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{h^3}. \quad (t)$$

Из выражений (t) и (r) можно видеть, что наибольшие напряжения от изгиба имеют место при $\varphi = \pi$, т. е. в поперечном сечении, противоположном прорезу кольца. Подставляя в уравнение (t) $h = h_0$ и $\varphi = \pi$, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{12pr^2}{h_0^3}. \quad (u)$$

Из этого уравнения можно вычислить h_0 , если заданы допустимое напряжение для кольца и давление p . Значение δ находится путем подстановки h_0 в уравнение (s),

Следует заметить, что если в месте прореза к концам кольца приложить по направлению касательной две равные и противоположные силы P , то они вызовут в каком-либо сечении mn кольца изгибающий момент

$$-Pr(1 - \cos \varphi) = -2Pr \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

т. е. этот изгибающий момент изменится в зависимости от φ точно таким же образом, как и момент M по уравнению (9). Поэтому, если концы разомкнутого кольца стянуть и в таком состоянии обработать его до внутреннего радиуса r цилиндра, то такое кольцо, будучи вставлено в цилиндр, окажет на стенки цилиндра равномерное распределенное давление¹⁾.

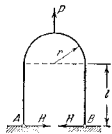


Рис. 330.

Для примера определим δ и h_0 для чугунного поршневого кольца, если $r=25$ см, $[\sigma]=300$ кг/см², $p=0,1$ кг/см² и $E=8 \cdot 10^5$ кг/см². Подставив эти значения в уравнение (10), найдем $h_0=1,6$ см. Из уравнения (8) получим $\delta=0,29$ см.

11. Вывести формулу (227), данную на стр. 321.

12. На раму, состоящую из двух вертикальных стержней и стержня в виде полуокружности (рис. 330), действует сила P , направленная по оси симметрии рамы. Найти горизонтальные реакции H и изгибающий момент M в точке приложения силы P , полагая, что рама имеет постоянное поперечное сечение и в опорах A и B

имеются шарниры. Влиянием продольной и поперечной силы на деформацию пренебречь.

Решение. Величина сил H получится из уравнения $\frac{dU}{dH}=0$.

Результаты можно представить в виде

$$H=k_1 P, \quad M=k_2 Pr, \quad (v)$$

где k_1 и k_2 — числовые коэффициенты, зависящие от величины отношения l/r . Несколько значений этих коэффициентов дано ниже, в таблице 11.

Таблица 11

Значения коэффициентов к уравнению (v)

$\frac{l}{r} =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,0984	0,0857	0,0754	0,0669	0,0598	0,0537	0,0486	0,0442	0,0403	0,0370
$k_2 =$	0,284	0,294	0,304	0,313	0,321	0,328	0,335	0,341	0,347	0,352

13. Решить предыдущую задачу, полагая, что в опорах A и B концы рамы заделаны.

Ответ. Значения H и M определяются по формулам (v). Числовые значения коэффициентов даны в таблице 12.

¹⁾Эта теория была разработана Н. R e s a Рem, Ann. mines, т. 5, стр. 38, 1874; Compt. rend., т. 73, стр. 542, 1871; см. также E. R e i n h a r d t, Z. Ver. deut. Ing., т. 45, стр. 232, 1901; H. F r i e d m a n n, Z. österr. Ing. Architekt.—Ver., т. 60, стр. 632, 1908; Z. Ver. deut. Ing., т. 68, стр. 254, 1924. Относительно распорных колец см. N. J. H o i l, Edge Reinforcements of Cutouts in Monocoques, J. Appl. Mech., т. 10, стр. 161, 1943.

Таблица 12

Значения коэффициентов к уравнению (v)

$\frac{l}{r} =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,1659	0,1450	0,1295	0,1157	0,1040	0,0941	0,0855	0,0781	0,0716	0,0659
$k_2 =$	0,2479	0,2500	0,2691	0,2784	0,2870	0,2948	0,3021	0,3067	0,03152	0,3211

Из этой таблицы видно, что при заделанных концах рамы наибольший изгибающий момент M несколько меньше, чем в предыдущей задаче.

Полученные результаты можно использовать для расчета напряжений в звезде цепи рис. 326 при условии, что в звено вставлена распорка для того, чтобы препятствовать какому-либо взаимному горизонтальному перемещению звена.

14. Найти изгибающий момент M_0 и растягивающее усилие H в поперечном сечении A симметрично нагруженного по оси симметрии рамы. Найти горизонтальные реакции H и изгибающий момент M в точке приложения силы P , полагая, что рама имеет постоянное поперечное сечение и в опорах A и B

$$H = P \frac{\pi - \alpha}{2\pi} \lg \alpha, \quad M_0 = -\frac{Pr}{2\pi} [1 + \sec \alpha - (\pi - \alpha) \lg \alpha].$$

81. Двухшарнирная арка

На рис. 332 показана несущая вертикальную нагрузку арка, концы которой шарнирно прикреплены к неподвижным опорам A и B , находящимся на одном уровне. Вертикальные составляющие реакций опор A и B можно определить из уравнений равновесия совершенно так же, как для балки, свободно лежащей на двух опорах. Го-

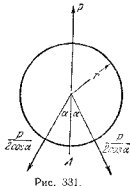


Рис. 331.

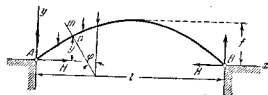


Рис. 332.

ризонтальные составляющие должны быть равны по величине и противоположны по направлению. Величина H этих составляющих называется *распором арки*. Эту величину нельзя получить из уравнений статики, но она может быть определена при помощи теоремы Кастиляно. В случае пологой арки двумя последними членами в общем выражении (228) для потенциальной энергии можно пренебречь и для обычных размеров арок произведе-

дене Fer можно заменить моментом инерции поперечного сечения J_z . Тогда уравнение для определения H будет так:

$$\frac{dU}{dH} = \frac{d}{dH} \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EJ_z} + \frac{N^2}{2TE} \right) ds = 0. \quad (a)$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении ml арки равен

$$M = M_0 - Hy, \quad (b)$$

где M_0 есть изгибающий момент в соответствующем сечении свободно лежащей балки, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и арка. Второй член под знаком интеграла уравнения (a) представляет собой потенциальную энергию от продольной силы N и имеет второстепенное значение. Для пологих арок можно, с достаточной точностью, допустить, что эта сила N равняется распору H . Подставляя выражение (b) и $N=H$ в уравнение (a), получаем

$$-\int_0^l \frac{(M_0 - Hy)y ds}{EJ_z} + \int_0^l \frac{H^2 ds}{TE} = 0,$$

откуда

$$H = \frac{\int_0^l \frac{M_0 y ds}{EJ_z}}{\int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ_z} + \int_0^l \frac{ds}{TE}}. \quad (229)$$

Для арки постоянного поперечного сечения при помощи обозначения $i^2 = J_z/F$ уравнение (229) можно представить в таком виде:

$$H = \frac{\int_0^l M_0 y ds}{\int_0^l y^2 ds + i^2 \int_0^l ds}. \quad (230)$$

Второй член в знаменателе представляет собой влияние укорочения оси арки вследствие продольного сжатия. Во многих случаях оно мало и им можно пренебречь. Тогда

$$H = \frac{\int_0^l M_0 y ds}{\int_0^l y^2 ds}. \quad (231)$$

Возьмем, например, случай параболической арки, несущей постоянную нагрузку, равномерно распределенную по длине пролета, с осью, определяемой уравнением

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \quad (c)$$

Тогда

$$M_0 = \frac{q}{2} x(l-x). \quad (d)$$

Подставляя (c) и (d) в уравнение (231), получаем

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (e)$$

Действительный распор H будет меньше определяемого из уравнения (e). Чтобы дать некоторое представление о возможной погрешности ΔH , в нижеследующей таблице 13 приведены отношения $\frac{\Delta H}{H}$ для различных арок¹⁾. При вычислении величин, входящих и эту таблицу, было применено полное выражение (228) для потенциальной энергии, а также было принято, что для какого-либо сечения арки

$$F = \frac{F_0}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad EJ_z = \frac{EJ_0}{\cos \varphi},$$

где F_0 и EJ_0 — соответственно площадь поперечного сечения и жесткость при изгибе сечения арки в ключе, угол φ — угол между поперечным сечением и осью y , а h — высота поперечного сечения в ключе арки. При вычислении величины H , входящей в отношение $\frac{\Delta H}{H}$, было применено уравнение (e).

Таблица 13

		Отношение $\frac{\Delta H}{H}$ для арок							
		1/12		1/8		1/6		1/4	
$\frac{h}{l} =$		1/10	1/20	1/30	1/10	1/20	1/30	1/10	1/30
$\frac{\Delta H}{H} =$		0,1771	0,0513	0,0235	0,0837	0,0221	0,0101	0,0175	0,0044
									0,0019

Эта таблица показывает, что погрешность от применения уравнения (e) имеет существенное значение лишь для пологих арок значительной толщины.

¹⁾ См. работу автора «Calcul des arcs élastiques», Paris, éd. Béranger, 1922.

Так как опоры арки неподвижны, то изменение температуры может вызвать значительные напряжения в сооружении. Чтобы вычислить распор от изменения температуры на t° , предположим, что одна из опор является подвижной. Тогда, вследствие температурного расширения, пролет арки увеличится на alt , где a есть коэффициент линейного расширения материала арки. Распор найдем из того условия, что он препятствует такому расширению арки, производя уменьшение пролета на величину, равную alt . Применяя теорему Кастigliано, получаем

$$\frac{dU}{dH} = \frac{d}{dH} \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EI_z} + \frac{N^2}{2FE} \right) ds = alt. \quad (1)$$

Принимая во внимание лишь влияние температуры и полагая $M_0 = 0$ и $N = H$, из уравнения (1) получаем

$$H = \frac{alt}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI_z} + \int_0^s \frac{ds}{FE}}. \quad (232)$$

Более подробное исследование усилий в арках может быть найдено в книгах по теории сооружений.

82. Напряжения в ободе махового колеса ¹⁾

Благодаря влиянию спиц обод вращающегося махового колеса испытывает не только растяжение, но также и изгиб. Выделим часть обода (рис. 333, б) двумя поперечными сечениями A и B , делящими пополам углы между смежными спицами, и рассмотрим ее как свободное тело.

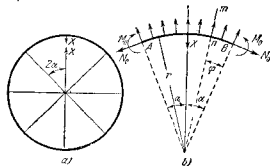


Рис. 333.

Пусть r — радиус оси обода, F — площадь поперечного сечения обода, F_1 — площадь поперечного сечения спицы, J — момент инерции поперечного

¹⁾ Весьма полное исследование изгиба круговых колец со спицами дано С. В. Визелем и Р. Гампелем, цитированным на стр. 321.

сечения обода, 2α — угол между двумя смежными спицами, q — вес единицы длины обода, q_1 — вес единицы длины спицы, ω — угловая скорость махового колеса.

Из условий симметрии заключаем, что по сечениям A и B не может быть касательных напряжений и что силы, действующие на эти сечения, приводятся к продольной силе N_0 и изгибающему моменту M_0 . Если X означает силу, растягивающую спицу, то уравнение равновесия части AB обода будет

$$2N_0 \sin \alpha + X - 2r^2 \frac{q}{g} \omega^2 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N_0 = \frac{q}{g} \omega^2 r^2 - \frac{X}{2 \sin \alpha}. \quad (a)$$

Продольная сила N в каком-либо сечении mn равняется

$$N = N_0 \cos \varphi + \frac{q\omega^2 r}{g} 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{q\omega^2 r^2}{g} - \frac{X \cos \varphi}{2 \sin \alpha}. \quad (b)$$

Изгибающий момент в том же сечении будет

$$M = M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) + \frac{q\omega^2 r^2}{g} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = M_0 + \frac{Xr}{\sin \alpha} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (c)$$

Сила X и момент M_0 не могут быть определены из уравнений статики, но могут быть найдены при помощи теоремы о наименьшей работе. Потенциальная энергия деформации выделенной части AB обода представится в таком виде ¹⁾:

$$U_1 = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M^2 r}{2EI} d\varphi + 2 \int_0^{\alpha} \frac{N^2 r}{2EF} d\varphi. \quad (d)$$

Растягивающая сила N_1 в каком-либо сечении спицы в расстоянии ρ от центра колеса равняется ²⁾

$$N_1 = X + \frac{q_1 \omega^2}{2g} (r^2 - \rho^2).$$

Следовательно, энергия деформации спицы будет

$$U_2 = \int_0^r \frac{N_1^2 d\rho}{2F_1 E}. \quad (e)$$

Уравнения для определения M_0 и X представляются в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial M_0} (U_1 + U_2) = 0, \quad (f)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_1 + U_2) = 0. \quad (g)$$

¹⁾ Предполагается, что толщина обода мала по сравнению с r и принимается во внимание только энергия изгиба и растяжения.

²⁾ Длина спицы принята равной r . В действительности она будет несколько меньше r .

Из уравнений (f) и (g), после подстановки в них (d) и (e), получим

$$M_0 = -\frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (233)$$

$$X = \frac{2}{3} \frac{q\omega^2 r^2}{K} \frac{1}{\frac{Fr^2}{J} f_2(\alpha) + J_1(\alpha) + \frac{Fr}{J_1}}, \quad (234)$$

где

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}.$$

В нижеследующей таблице 14 приведены значения функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ для различного числа спиц n .

Т а б л и ц а 14
Значения функций к уравнению (234)

$n=$	4	6	8
$f_1(\alpha)$	0,643	0,957	1,274
$f_2(\alpha)$	0,00608	0,00169	0,00076

Пользуясь этой таблицей, мы легко определяем натяжение спицы X по формуле (234) и изгибающий момент M_0 по формуле (233). После этого продольная сила и изгибающий момент в каком-либо сечении mn обода могут быть найдены из уравнений (a), (b) и (c) ².

В качестве примера возьмем стальное маховое колесо, делающее 600 оборотов в минуту, с радиусом $r=1,5$ м, с квадратным поперечным сечением обода 30×30 см² и с шестью спицами площадью поперечного сечения $F_1=150$ см² каждая. Обод рассматриваем как свободно вращающееся кольцо; тогда растягивающие напряжения, возникающие от центробежной силы, будут равняться (см. уравнение (15))

$$\sigma_0 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = \frac{0,0078}{981} \cdot 62,8^2 \cdot 150^2 = 765,5 \text{ кг/см}^2.$$

При шести спицах $\alpha=30^\circ$, $f_1(\alpha)=0,957$, $f_2(\alpha)=0,00169$. Следовательно, усилие, действующее в каждой спице, согласно уравнению (234), равно

$$X = \frac{2}{3} \frac{q\omega^2 r^2}{g} \frac{1}{300 \cdot 0,00169 + 0,957 + 6} = 0,6893 \frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

² Изложенная теория была разработана R. В e d'Гом, Z. Ver. dent. Ing., т. 45, стр. 267, 1901 и Н. В г а в е'гом, Dinglers Politech. J., стр. 353, 1908. См. также J. G. L o n g b o r t t o m, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), стр. 43, 1924 и K. R e i n h а r d t, Forschungsarb., 226, 1929. Подобная задача возникает при расчете напряжений в укрепляющих кольцах больших турбогенераторов, см. E. S c h w e r t h, Electrotech. Z., стр. 40, 1931.

Продольная сила для сечения, делящего пополам угол между спицами, по уравнению (a), будет:

$$N_0 = \frac{q\omega^2 r^2}{g} = 0,1893 \frac{q\omega^2 r^2}{g} = 0,9 \cdot 1 \frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

Изгибающий момент в том же сечении, по уравнению (233), будет:

$$M_0 = -0,605 \frac{q\omega^2 r^2}{g} \text{ кг см.}$$

Наибольшее напряжение в этом сечении равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{N_0}{F} - \frac{M_0}{W} = 644 + 85 = 729 \text{ кг/см}^2.$$

Для поперечного сечения обода, взятого по оси спицы, уравнения (b) и (c) дают

$$(N)_{\varphi=0} = 0,923 \frac{q\omega^2 r^2}{g}, \quad (M)_{\varphi=0} = 1,19 \frac{q\omega^2 r^2}{g} \text{ кг см.}$$

Наибольшее напряжение в этом сечении равняется

$$\sigma_{\max} = 632 + 167 = 819 \text{ кг/см}^2.$$

Видно, что в данном случае влияние изгиба обода на величину наибольшего напряжения незначительно и расчет напряжений в обode, как в свободно вращающемся кольце, дает удовлетворительные результаты.

83. Уравнение изогнутой оси для бруса с круговой осью

Для тонкого кривого бруса с круговой осью дифференциальное уравнение изогнутой оси будет аналогично уравнению для прямого бруса (уравнение (79) стр. 124). Пусть $ABCD$ (рис. 334) представляет ось кругового кольца после деформации и u означает малые радиальные перемещения отдельных точек этой оси. Изменение кривизны оси стержня при изгибе можно исследовать, рассматривая элемент mn кольца по деформации и соответствующий, заключенный между теми же радиусами, элемент $m'n'$ деформированного кольца (рис. 334, б). Первоначальная длина элемента mn и его первоначальная кривизна будут:

$$ds = r d\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{r d\varphi} = \frac{1}{r}. \quad (a)$$

При малых деформациях кривизна того же элемента после деформации может быть принята равной кривизне элемента $m'n'$. Последняя определяется уравнением

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi - \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds}, \quad (b)$$

в котором $d\varphi + \Delta d\varphi$ означает угол между поперечными сечениями m_1 и n_1 деформированного стержня, а $ds + \Delta ds$ — длину элемента $m_1 n_1$. Перемещения u считаем положительными, если они направлены к центру кольца, и очень малыми по сравнению с радиусом кольца.

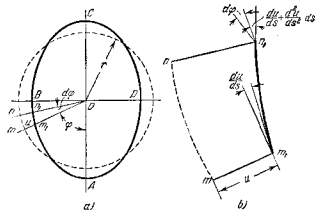


Рис. 334.

Тогда угол между касательной к оси стержня в m_1 и нормалью к радиусу $m_1 O$ будет $\frac{du}{ds}$. Соответствующий угол в сечении n_1 будет

$$\frac{du}{ds} + \frac{d^2 u}{ds^2} ds.$$

Тогда

$$\Delta d\varphi = \frac{d^2 u}{ds^2} ds. \quad (c)$$

При сравнении длины элемента $m_1 n_1$ с длиной элемента $m n$ малым углом $\frac{du}{ds}$ можно пренебречь и длину $m_1 n_1$ принять равной $(r-u)d\varphi$.

Тогда

$$\Delta ds = -u d\varphi = -\frac{u ds}{r}. \quad (d)$$

Подставляя (c) и (d) в уравнение (b), получаем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi + \frac{d^2 u}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{u}{r}\right)},$$

или, пренебрегая бесконечно малыми величинами высшего порядка, находим

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{ds} \left(1 + \frac{u}{r}\right) + \frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) + \frac{d^2 u}{ds^2}.$$

откуда

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{u}{r^2} + \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (e)$$

Зависимость между приращением кривизны и величиной изгибающего момента для тонких стержней, на основании уравнения (214), выразится в следующем виде:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{M}{EJ}. \quad (f)$$

Знак минус в правой части этого уравнения зависит от знака изгибающего момента, который считается положительным, если он вызывает уменьшение первоначальной кривизны стержня (рис. 308). Из уравнений (e) и (f) следует, что

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (235)$$

Это и есть дифференциальное уравнение изогнутой оси тонкого стержня с круговой осью. Для бесконечно большого r это уравнение совпадает с уравнением (79) для прямого бруса.

В качестве примера на применение уравнения (235) рассмотрим задачу, представленную на рис. 320. Изгибающий момент в каком-либо сечении $m_1 n_1$, согласно уравнению (c), стр. 320 будет:

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right),$$

и уравнение (235) представится в таком виде:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{Pr}{2EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right)$$

или

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + u = \frac{Pr^2}{2EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right).$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{Pr^2}{EJ\pi} - \frac{Pr^2}{4EJ} \varphi \sin \varphi.$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из условий симметрии:

$$\frac{du}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

что дает

$$B = 0, \quad A = -\frac{Pr^2}{4EJ}.$$

Тогда

$$u = \frac{Pr^2}{EJ\pi} - \frac{Pr^2}{4EJ} \varphi \sin \varphi - \frac{Pr^2}{4EJ} \cos \varphi.$$

При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$ получаем

$$(u)_{\varphi=0} = \frac{Pr^2}{EJ} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right),$$

$$(u)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr^2}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8} \right).$$

Эти результаты полностью совпадают с уравнениями (227) и (226), полученными ранее при помощи теоремы Кастилиано¹⁾.

84. Изгиб кривых труб

При выводе закона распределения напряжения от изгиба в кривых брусьях (§ 77) предполагалось, что форма поперечного сечения остается без изменения. Это предположение справедливо до тех пор, пока имеется сплошной брус, так как весьма малые перемещения в плоскости поперечного сечения вследствие поперечного сжатия или расширения не имеют существенного влияния на распределение напряжений. Однако условия совершенно меняются при изгибе тонких кривых труб. Известно, что кривые трубы со сравнительно тонкими стенками проявляют при изгибе меньшую жесткость, чем то следовало бы ожидать согласно обычной теории кривых брусьев²⁾. Поэтому в таких случаях необходимо принимать во внимание искажение поперечного сечения при изгибе³⁾.

¹⁾ Дифференциальное уравнение изогнутой оси круглого кольца было выведено Н. Ро́са Рем, См. его «Traité du mecanique general», т. 5, стр. 78, 1880. См. также J. Bousinesq, Compt. rend., т. 97, стр. 843, 1883; H. L. a m b, Proc. London Math. Soc., т. 19, стр. 365, 1888. Различные примеры применения этого уравнения даны в статье Р. Мауегга, Z. angew. Math. u. Phys., т. 61, стр. 245, 1913; см. также K. Federhofer, Wasseerkraft u. Wasscrwirtsch., т. 38, стр. 237, 1943.

²⁾ Важная экспериментальная работа по изгибу кривых труб была произведена А. Ван Флином, Z. Ver. deut. Ing., т. 54, стр. 45, 1910; Forschungsarb., 96; см. также W. Новгард, J. Math. and Phys., т. 7, 1928 и А. М. Уайли, Таль А. S. M. E., т. 49, 1927. Вопрос об изгибе кривых труб имеет практическое значение при расчете напряжений в трубопроводах. Новейшая литература по этому предмету дана в статье J. E. Вгоск, J. Appl. Mech., т. 19, стр. 501, 1952. См. также статью N. Goss'a, представленную собранию общества Инженеров механиков, London, декабрь 1952.

³⁾ Этот вопрос для труб круглого поперечного сечения рассмотрел Th. Кэ́тн и п. Z. Ver. deut. Ing., т. 53, стр. 1889, 1911. Изгиб труб эллиптического поперечного сечения был исследован М. Т. Н и в е г о м, см. Proc. 7-th Internat. Congr. Appl. Math. Mech., том 1, стр. 322, 1918. Случай кривых труб произвольного поперечного сечения был исследован автором; см. Траль А. S. M. E., т. 45, стр. 135, 1923.

Рассмотрим заключенный между двумя смежными поперечными сечениями элемент кривой круглой трубы (рис. 335), которая изгибается парами сил в указанном направлении. Так как при изгибе растягивающие усилия на выпуклой стороне трубы и сжимающие усилия на вогнутой стороне дают равнодействующую, направленные к нейтральной оси, то первоначально круговые поперечные сечения трубы сплюсциваются, превращаясь в эллиптические. Это сплюсцивание поперечного сечения оказывает в свою очередь влияние на деформацию продольных волокон трубы. Допустим, что вписанное волокно ab после изгиба занимает положение a_1b_1 ; обозначим его перемещение по направлению к нейтральной оси через δ . Тогда полное удлинение этого волокна будет

$$a_1b_1 - ab = a_1b_1 - a_1e_1 - (ab - a_1e_1). \quad (a)$$

Обозначим через $d\varphi$ угол между двумя смежными сечениями ac и bd до деформации, $\Delta d\varphi$ — изменение этого угла при изгибе, r — радиус оси трубы и a — радиус поперечного сечения трубы. Предположим, что отношение a/r настолько мало, что можно считать нейтральную ось проходящей через центр тяжести поперечного сечения. Тогда из рисунка получаем

$$a_1b_1 - a_1e_1 = (a - \delta) \Delta d\varphi \approx a \Delta d\varphi^1).$$

Полное удлинение волокна ab , определяемое уравнением (a), равняется

$$a \Delta d\varphi - \delta d\varphi$$

и относительное удлинение этого волокна будет:

$$\varepsilon = \frac{a \Delta d\varphi - \delta d\varphi}{(r+a) d\varphi} = \frac{a}{r+a} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\delta}{r+a}. \quad (b)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет собой деформацию волокна вследствие поворота сечения bd относительно сечения ac . Это есть удлинение, которое рассматривалось при изгибе сплошных кривых брусьев. Второй член в правой части уравнения (b) представляет собой влияние сплюсцивания поперечного

¹⁾ Перемещение δ считается здесь малым по сравнению с радиусом a .

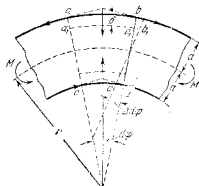


Рис. 335.

сечения. Очевидно, что это влияние может быть весьма значительным. Возьмем, например, $r+a=150$ см и $\delta=0,05$ см. Тогда величина $\frac{\delta}{r+a}=1/3000$ и соответствующее ей напряжение для стальной трубы будет равно $\frac{E\delta}{r+a}=2,1 \cdot 10^8 \cdot 1/3000=700$ кг/см². Следовательно, весьма малое сплющивание поперечного сечения вызывает значительное уменьшение напряжения в крайнем волокне ab . Подобное же заключение можно вывести и для волокна cd , расположенного на вогнутой поверхности трубы.

Изменение направления изгибающего момента влечет за собой изменение знака нормальных напряжений; в результате это вместо сплющивания трубы в радиальном направлении, произойдет сплющивание в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, и благодаря этому сплющиванию волокно ab будет перемещаться наружу. Путем таких же рассуждений, как и выше, можно показать, что и в этом случае сплющивание поперечного сечения вызывает уменьшение напряжений в наиболее удаленных волокнах. Поэтому, можно заключить, что волокна трубы, наиболее удаленные от нейтральной оси, не принимают того участия в распределении напряжений, которое предусматривается обычной теорией изгиба. Это влияние на изгиб трубы точно таким же образом, как и уменьшение ее момента инерции. Поэтому вместо уравнения (214), которое было выведено для сплошных кривых брусев, нужно при определении деформаций тонких кривых труб пользоваться следующим уравнением:

$$\Delta d\varphi = \frac{Mr d\varphi}{kEJ_z}, \quad (236)$$

в котором k есть численный коэффициент, меньший единицы и учитывающий влияние сплющивания. Этот коэффициент зависит от размеров трубы и может быть вычислен по следующей приближенной формуле ¹⁾:

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12 \left(\frac{tr}{a^2} \right)^2}, \quad (237)$$

где t —толщина стенок трубы. Эта формула показывает, что влияние сплющивания зависит лишь от величины отношения tr/a^2 .

Что же касается влияния сплющивания на распределение напряжения, то Карман показал, что вместо обычной формулы для нормальных напряжений при изгибе $\sigma = \frac{My}{J_z}$, где y означает расстояние

¹⁾ См. статью Th. К а г т а н'а, цитированную на стр. 340.

²⁾ Предполагается, что r велико по сравнению с a и что гипотеза линейного распределения напряжений достаточно точна.

от нейтральной оси, нужно пользоваться следующей, более сложной, формулой

$$\sigma = \frac{My}{kJ_z} \left(1 - \beta \frac{y^2}{a^2} \right), \quad (c)$$

где

$$\beta = \frac{6}{5-6 \left(\frac{tr}{a^2} \right)^2}.$$

Наибольшее напряжение, определяемое из уравнения (c), равняется

$$\sigma_{\max} = k_1 \frac{Md}{J_z}, \quad (238)$$

где d есть внешний диаметр трубы, а

$$k_1 = \frac{2}{3k \sqrt{3\beta}}$$

—численный коэффициент, зависящий от размеров трубы. В следующей таблице 15 приведено несколько значений k_1 :

Таблица 15
Значение k_1 к формуле (238)

$\frac{tr}{a^2}$	0,3	0,5	1,0
k_1	1,98	1,30	0,88

Отсюда видно, что когда отношение tr/a^2 мало, действительные наибольшие напряжения значительно выше напряжений, определяемых на основании обычной теории, в которой пренебрегается влиянием сплющивания поперечного сечения.

Выводы, аналогичные предыдущим, можно сделать также и для трубы прямоугольного поперечного сечения ¹⁾. Например, найдено, что для тонкой трубы квадратного поперечного сечения коэффициент k в уравнении (236) зависит от величины отношения

$$n = \frac{b^4}{r^4 t^2},$$

где t —толщина стенок трубы, r —радиус оси трубы, b —длина стороны квадрата, и определяется из следующего уравнения:

$$k = \frac{1+0,0270n}{1-0,0656n}. \quad (239)$$

¹⁾ Такая задача встречается, например, при проектировании крана Фейрбайрн, см. справку 3, стр. 340.

Например, при $b/r=0,1$ и $b/t=50$ получим $n=25$ и $k=0,63$. Наибольшие напряжения в трубах прямоугольного поперечного сечения увеличиваются обратно пропорционально жесткости, т. е. в приведенном выше примере искажение поперечного сечения увеличивает наибольшие напряжения приблизительно на 60%¹⁾.

Если поперечное сечение кривого бруса имеет полки значительной ширины, то вопрос об искажении поперечного сечения опять-таки имеет практическое значение. Такую задачу, например, мы имеем при исследовании напряжений от изгиба в узле жесткой рамы двутаврового поперечного сечения (рис. 336). Рассматривая элемент рамы, заключенный между двумя смежными поперечными сечениями m и n , мы видим, что продольные напряжения от изгиба σ в полках имеют составляющие в радиальном направлении, которые стремятся вызвать изгиб полки (рис. 336, б). В результате этого изгиба получается некоторое уменьшение продольных напряжений от изгиба σ в частях полки, расположенных на значительном расстоянии от стенки. Чтобы принять во внимание это обстоятельство, нужно в формулу (i), на стр. 313, для двутаврового сечения вместо действительной ширины подставить полезную ширину ab полки. Естественно, что величина коэффициента α , определяющего полезную ширину полки, зависит от гибкости полки, которая выражается величиной

$$\beta = 1,32 \frac{b}{\sqrt{rt}}, \quad (d)$$

где t — толщина полки и r — радиус кривизны полки. Для внутренней полки $r=r_i$, а для наружной полки $r=r_o$. Вычисления показывают, что если $\beta < 0,65$, то изгибом полки можно пренебречь, и мы можем непосредственно применять теорию, изложенную в § 79. При больших значениях β для вычисления полезной ширины полки можно пользоваться формулой²⁾

$$ab = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\beta^2} \right) b. \quad (e)$$

¹⁾ О дальнейшем развитии теории изгиба кривых труб см. L. Beskin, J. Appl. Mech., т. 12, 1945; E. Reissner, Proc. Nat. Acad. Sci., т. 35, стр. 204, 1949; R. A. Clark, G. T. Gilroy and E. Reissner, J. Appl. Mech., т. 19, 1952.

²⁾ Вывод этой формулы см. в докторской диссертации Otto Steinhardt's, Darmstadt, 1938. Результаты опытов проделанных Steinhardt'ом, удовлетворительно согласуются с формулой.

Предположим, например, что мы имеем ширину полки $b=15$ см, соответствующий радиус $r=20$ см и толщину $t=2,5$ см. Тогда по формуле (d) получим $\beta=2,80$ и полезная ширина полки равняется $0,35 \cdot 15=5,25$ см.

85. Изгиб кривого бруса не в плоскости его начальной кривизны

Выше мы излагали вопрос об изгибе кривых брусьев в плоскости их начальной кривизны. Однако имеются случаи, когда силы, действующие на кривой брус, не лежат в плоскости оси бруса¹⁾. В таких случаях необходимо рассматривать изгиб бруса в двух перпендикулярных плоскостях и кручение бруса. Простая задача такого рода показана на рис. 337, а, в которой часть горизонтального кругового кольца, заделанная в сечении А, нагружена вертикальной нагрузкой Р, приложенной на конце В²⁾. Рассматривая поперечное сечение D бруса и принимая координатные оси, как показано на рисунках 337, б и 337, в³⁾, находим, что моменты внешней силы Р относительно этих осей равняются

$$M_x = -Pr \sin(\alpha - \varphi), \quad M_y = 0,$$

$$M_z = Pr [1 - \cos(\alpha - \varphi)]. \quad (a)$$

При помощи этих выражений можно вычислить в любом поперечном сечении напряжения от изгиба и кручения. При вычислениях

¹⁾ Несколько задач такого рода были рассмотрены I. Stutz'om, Z. österr. Architekt. u. Ing. Ver., стр. 682, 1904; H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 2 изд., стр. 258, 1913 и 4 изд., стр. 265; В. Г. Капелле, г. Eisenbau, стр. 329, 1913. Случай кругового кольца, опертого в нескольких точках и нагруженного силами, перпендикулярными плоскости кольца, был рассмотрен F. Distel'ом, Eisenbau, стр. 73, 1920 и G. Ubold, Forschungsarb., № 225, 1922. Та же задача была рассмотрена С. В. Виезено при помощи теории о наименьшей работе, Ingenieur (Utsch), 1927 и Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 237, 1928. Применение тригонометрических рядов к той же задаче показано Виезено и J. J. Коул'ом; там же, т. 16, стр. 321, 1936. Эта задача имеет практическое значение при проектировании паропроводов. Соответствующая библиография дана в статье H. E. Маурозе, J. Appl. Mech., т. 4, стр. 89, 1937. См. также A. H. Gibson and E. G. Ritchie, A Study of the Circular — Arc Bow — Girder, London, 1914. Полное исследование вопроса можно найти в книге Виезено и R. Grum'ом, цитированной на стр. 321; см. также опубликованные работы: M. B. Hogan, Bull. Univ. of Utah, т. 34, 1943—1944; т. 35, 1945 и 1947; т. 36, 1947; т. 38, 1948. В последнем бюллетене дан список многочисленных служебных работ, относящихся к расчету круговых колец.

²⁾ Эта задача была рассмотрена St. Venant'ом, см. его статьи в Compt. rend., т. 17, 1843.

³⁾ Предполагается, что горизонтальная ось x и вертикальная ось y являются осями симметрии поперечного сечения и что ось z — касательная к оси кольца в точке D.

перемещения конца B применяется теорема Кастиллиано, для чего необходимо иметь выражение для потенциальной энергии бруса.

Полагая, что размеры поперечного сечения бруса малы по сравнению с радиусом r , применим здесь те же формулы, которые ранее были выведены для прямого бруса (см. уравнения (186) и (190)). Поэтому выражение для потенциальной энергии бруса представится в таком виде:

$$U = \int_0^{\alpha} \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_z^2}{2C} \right) r d\varphi, \quad (b)$$

где C означает жесткость при кручении бруса¹⁾. Тогда искомое перемещение δ получится из уравнения

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

Подставляя вместо U выражение (b) и замечая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -r \sin(\alpha - \varphi) \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_z}{\partial P} = r [1 - \cos(\alpha - \varphi)],$$

получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \int_0^{\alpha} \left\{ \sin^2(\alpha - \varphi) + \frac{EJ_x}{C} [1 - \cos(\alpha - \varphi)]^2 \right\} d\varphi. \quad (240)$$

В частном случае при $\alpha = \pi/2$ имеем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{EJ_x}{C} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \right]. \quad (c)$$

Если поперечное сечение кольца является круговым, то $C = GJ_0 = 2GJ_x$, полагая $E = 2,6G$, получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \left[\frac{\pi}{4} + 1,3 \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \right] = 1,248 \frac{Pr^3}{EJ_x}. \quad (241)$$

В качестве примера статически неопределимой задачи рассмотрим горизонтальный брус в виде полуокруга с заделанными концами и нагруженный посередине (рис. 338, а). Рассматривая

¹⁾ Вычисление C для различных форм поперечного сечения рассмотрено в главе VII, часть II. О более строгом изложении вопроса о напряжениях в части кольца см. Theory of Elasticity, стр. 391, 1951.

только малые вертикальные перемещения бруса, мы можем вполне пренебречь перемещениями в горизонтальной плоскости, как малыми величинами высшего порядка. Следовательно, не будет ни изгиба кольца в его плоскости, ни сил или моментов в этой плоскости на концах A и B . Рассматривая заделанный конец B , мы заключаем из условий равновесия, что там будут действовать вертикальная реакция $P/2$ и момент $M_z = Pr/2$. Момент M_x , также будет действовать, препятствуя конечному сечению B поворачиваться относительно оси z_0 . Величина этого момента не может быть определена из уравнений статики. Мы найдем ее при помощи теоремы о наименьшей работе, согласно которой имеем

$$\frac{\partial U}{\partial M_{z_0}} = 0. \quad (d)$$

При выводе выражения для потенциальной энергии бруса мы изображаем моменты, приложенные к концу B , векторами $Pr/2$ и M_{z_0} , как показано на рис. 338, б. Тогда моменты M_x и M_z в каком-либо поперечном сечении D будут

$$M_x = \frac{Pr}{2} \cos \varphi - M_{z_0} \sin \varphi - \frac{Pr}{2} \sin \varphi, \quad (e)$$

$$M_z = \frac{Pr}{2} \sin \varphi + M_{z_0} \cos \varphi - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi), \quad (f)$$

и выражение для потенциальной энергии представится в таком виде:

$$U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_z^2}{2C} \right) r d\varphi. \quad (g)$$

Подставляя это выражение в уравнение (d) и замечая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_{z_0}} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial M_z}{\partial M_{z_0}} = \cos \varphi,$$

получаем

$$\frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{Pr}{2} \sin^2 \varphi + M_{z_0} \sin^2 \varphi - \frac{Pr}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{Pr}{2} \sin \varphi \cos \varphi + M_{z_0} \cos^2 \varphi - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \cos \varphi \right] d\varphi = 0,$$

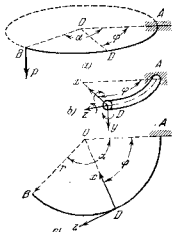


рис. 337.

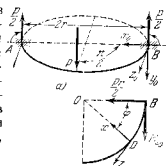


рис. 338.

откуда

$$M_z = \frac{Pr}{2} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) = -0,182Pr. \quad (242)$$

Знак минус указывает на то, что направление M_z противоположно тому, что показано на рис. 338, а. Зная M_{z_0} , мы можем из выражений (е) и (i) получить изгибающий и крутящий моменты в любом поперечном сечении.

Наибольший прогиб, очевидно, будет под нагрузкой, и мы легко получим его из уравнения Кастильяно:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (h)$$

Подставляя выражение (g) для U и замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial P} &= \frac{r}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi), \\ \frac{\partial M_z}{\partial P} &= \frac{r}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi - 1), \end{aligned} \quad (i)$$

получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{2EJ_x} \left\{ (2 - 0,363) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{EJ_z}{C} \left[(2 - 0,363) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - 4 + 0,363 \right] \right\} = 0,514 \frac{Pr^3}{2EJ_x}. \quad (j)$$

При нахождении частных производных (i) мы пренебрегли тем обстоятельством, что крутящий момент M_z не является независимой величиной, но представляет функцию от P , определяемую выражением (242). Если мы примем это во внимание, то правая часть уравнения (h) будет написана в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M_z} \frac{dM_z}{dP} \quad (k)$$

Но второй член в этом выражении отпадает, согласно уравнению (d). Следовательно, наш предыдущий способ определения прогиба δ является обоснованным.

Иногда мы должны рассматривать кривые брусья, ось которых не является плоской кривой и в этом случае мы будем иметь пространственную задачу. Задачи такого рода встречаются например при расчете укрепляющего ребра в грубчатых фюзеляжах. Здесь опять может быть применен с пользой метод Кастильяно⁴⁾.

⁴⁾ См. статью K. Marguerite, Luftfahrt Forsch., 18 стр. 253-61, 1941, Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Mem. No 1005, 1942, См. также N. J. Hoff, цитированн. на стр. 330.

ЗАДАЧИ

1. Кривой брус с круговой осью и с $\alpha = \pi/2$ (рис. 337) нагружен из конца скручивающей парой $M_z = T$. Найти перемещение конца B в вертикальном направлении.

Ответ. Полагая $EJ_x/C = 1,3$, находим $\sigma = 0,506 \frac{T r^2}{EJ_x}$.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что к концу B приложена изгибающая пара $M_z = M_0$ в вертикальной плоскости, касательной к оси в точке B .

Ответ. $\sigma = 1,150 \frac{M_0 r^2}{EJ_x}$.

3. Брус в виде полукруга с осью в горизонтальной плоскости заделан в сечениях A и B и нагружен симметрично двумя вертикальными грузами P в сечениях C и D (рис. 339). Найти крутящие моменты M_{z_0} в заделанных концах.

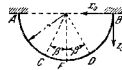


Рис. 339.

Ответ. $M_{z_0} = -\frac{2}{\pi} Pr \left(\frac{\pi}{2} - \cos \beta - \beta \sin \beta \right)$.

4. Решить предыдущую задачу для случая равномерной вертикальной нагрузки интенсивностью q , распределенной по всей длине бруса.

Ответ. $M_{z_0} = -qr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = -0,32qr^2$.

5. Горизонтальный брус в виде полукруга, показанный на рис. 339 и равномерно нагруженный, как в предыдущей задаче, опирается в среднем поперечном сечении F . Найти вертикальную реакцию N опоры F .

Ответ. $N = 2qr$.

ПРИЛОЖЕНИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

I. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в ее плоскости

При исследовании изгиба балок мы встречались с интегралами такого типа:

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad (243)$$

в котором каждая элементарная площадь dF умножается на квадрат ее расстояния от оси z и интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения балки (рис. 340). Такой ин-

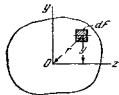


Рис. 340.

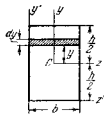


Рис. 341.

теграл называется *моментом инерции* площади F относительно оси z . В простых случаях моменты инерции могут быть легко вычислены аналитически. Возьмем, например, прямоугольник (рис. 341). При вычислении момента инерции этого прямоугольника относительно горизонтальной оси симметрии z мы можем разбить прямоугольник на бесконечно малые элементы, как показано на фигуре заштрихованной площадью. Тогда

$$J_z = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (244)$$

Таким же образом момент инерции прямоугольника относительно оси y будет

$$J_y = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = \frac{hb^3}{12}.$$

Уравнение (244) можно применять также к вычислению J_z для параллелограмма, показанного на рис. 342, так как этот параллелограмм можно получить из прямоугольника, показанного пунктиром, перемещением параллельно оси z элементов, из которых один изображен на фигуре. Площади элементов и их расстояния от оси z остаются неизменными при таком перемещении, так что J_z является таким же, как и для прямоугольника.

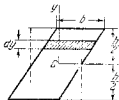


Рис. 342.

При вычислении момента инерции треугольника относительно основания (рис. 343) площадь элемента, показанного на рисунке, равняется

$$dF = b \frac{h-y}{h} dy$$

и уравнение (243) дает

$$J_z = \int_0^h b \frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Метод вычисления, иллюстрированный предыдущими примерами может быть применен в самом общем случае. Момент инерции получается делением фигуры на бесконечно малые полоски, параллельные оси, и затем интегрированием как в уравнении (243).

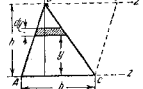


Рис. 343.

Вычисление часто можно упростить, если фигура может быть разбита на части, моменты инерции которых относительно оси известны. В таком случае полный момент инерции равен сумме моментов инерции всех частей.

Из определения (уравнение (243)) следует, что момент инерции площади относительно оси имеет размеры длины возведенной в четвертую степень. Следовательно, делением момента инерции относительно некоторой оси на площадь фигуры получается квадрат некоторой длины. Эта длина i называется *радиусом инерции* относительно этой оси. Для осей y и z радиус инерции будут

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (245)$$

ЗАДАЧИ

1. Найти момент инерции прямоугольника на рис. 341 относительно основания.

$$\text{Ответ. } J_z = \frac{bh^3}{3}.$$

2. Найти момент инерции треугольника ABC относительно оси z' (рис. 343).

Решение. Этот момент инерции представляет разность моментов инерции параллелограмма $ABDC$ и треугольника BDC . Следовательно,

$$J_{z'} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}.$$

3. Найти J_x для поперечных сечений, показанных на рис. 344.

$$\text{Ответ. Для (а) } J_x = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2h)^4}{12}; \text{ для (б) и (в) } J_x = \frac{ba^3}{12} - \frac{(b-h_1)(a-2h)^3}{12}.$$

4. Найти момент инерции квадрата со сторонами a относительно диагонали.

$$\text{Ответ. } J = \frac{a^4}{12}.$$

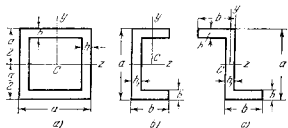


Рис. 344.

5. Найти i_y и i_z для прямоугольника, показанного на рис. 341.

$$\text{Ответ. } i_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}, \quad i_z = \frac{h}{2\sqrt{3}}.$$

6. Найти i_z для фигур 344, а и 344 б.

III. Полярный момент инерции плоской фигуры

Момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, называется *полярным моментом инерции* относительно точки, где ось пересекает плоскость (точка O на рис. 340), и определяется интегралом

$$J_p = \int_F r^2 dF, \quad (246)$$

в котором каждая элементарная площадка dF умножается на квад-

рат ее расстояния до оси. При этом интегрирование распространяется по всей площади фигуры.

Из рис. 340 мы имеем $r^2 = y^2 + z^2$, и тогда из уравнения (246) получим

$$J_p = \int (y^2 + z^2) dF = J_x + J_y, \quad (247)$$

т. е. полярный момент инерции относительно какой-либо точки O равен сумме моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей y и z , проходящих через ту же точку.

Рассмотрим *круговое поперечное сечение*. Мы встречали полярный момент инерции круга относительно его центра при исследовании кручения круглого вала (см. § 61). Если мы разобьем

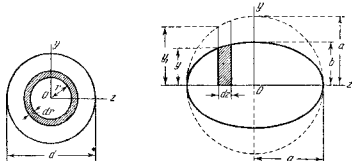


Рис. 345.

Рис. 346.

площадь круга на тонкие элементарные кольца, как показано на рис. 345, то мы будем иметь $dF = 2\pi r dr$ и из уравнения (246) получим

$$J_p = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (248)$$

Мы знаем, что в этом случае вследствие симметрии $J_y = J_z$, поэтому из уравнений (247) и (248) получаем

$$J_y = J_z = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (249)$$

Момент инерции эллипса относительно главной оси z (рис. 346) может быть получен путем сравнения эллипса с кругом, показанным на рисунке пунктиром. Высота y какого-либо элемента эллипса, например, показанного штриховкой, может быть получена уменьшением высоты y_1 соответствующего элемента круга в отношении b/a . Из уравнения (244) следует, что моменты инерции этих двух

элементов относительно оси z будут находиться в отношении b^3/a^3 . Моменты инерции эллипса и круга, очевидно, будут находиться в том же отношении; следовательно, момент инерции эллипса равняется

$$J_z = \frac{\pi (2a)^4 b^3}{64 a^3} = \frac{\pi a b^3}{4}. \quad (250)$$

Таким же образом находим для вертикальной оси

$$J_y = \frac{\pi b a^3}{4},$$

тогда полярный момент инерции эллипса, на основании уравнения (247), будет

$$J_p = J_y + J_z = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi b a^3}{4}. \quad (251)$$

ЗАДАЧИ

1. Найти полярный момент инерции прямоугольника относительно центра тяжести (рис. 341).

$$\text{Ответ. } J_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}.$$

2. Найти полярный момент инерции площадей, показанных на рис. 344, относительно центров тяжести.

III. Теорема о параллельном переносе осей

Если известен момент инерции площади относительно оси, проходящей через центр тяжести (рис. 347), то момент инерции относительно какой-либо параллельной оси может быть вычислен из следующего уравнения, выражающего теорему о моментах инерции относительно параллельных осей:

$$J_z' = J_z + Fd^2, \quad (252)$$

в котором F есть площадь фигуры и d — расстояние между осями.

Теорема легко доказывается на основании уравнения (243):

$$J_z' = \int_F (y + d)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2 \int_F yd dF + \int_F d^2 dF.$$

Первый интеграл в правой части равен J_z , третий интеграл равен Fd^2 , а второй интеграл обращается в нуль вследствие того, что ось z' проходит через центр тяжести площади. Поэтому это

уравнение сводится к уравнению (252). Уравнение (252) особенно полезно при вычислении моментов инерции поперечных сечений составных балок (рис. 348). Положение центров тяжести стандартных уголков и моменты инерции их поперечных сечений относительно осей, проходящих через их центры тяжести, даны в справочниках. При помощи теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей момент инерции такого составного сечения относительно оси z может быть легко вычислен.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей, найти момент инерции треугольника (рис. 343) относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной основанию.

$$\text{Ответ. } J = \frac{bh^3}{36}.$$

2. Найти момент инерции J_z сечения, показанного на рис. 348, если $h=50$ см, $b=1,2$ см и уголки имеют размеры $10 \times 10 \times 1,2$ см.

$$\text{Решение. } J_z = 1,2 \cdot 50^3 / 12 + 4[209 + 22,8(25 - 2,91)^2] = 57\,880 \text{ см}^4.$$

3. Найти момент инерции относительно нейтральной оси площади швеллера в задаче 2, стр. 95.

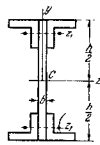


Рис. 348.

IV. Центробежный момент инерции. Главные оси

Интеграл

$$J_{yz} = \int_F yz dF, \quad (253)$$

в котором каждая элементарная площадка dF умножается на произведение ее координат и интегрирование распространяется на всю площадь F плоской фигуры, называется *центробежным моментом инерции* фигуры. Если фигура имеет ось симметрии, которая принята за ось y или z (рис. 349), то центробежный момент инерции равен нулю. Это следует из того, что в этом случае для какого-либо элемента, например, dF с положительным z существует равный и симметрично расположенный элемент dF' с отрицательным yz уничтожающий друг друга, поэтому интеграл (253) обращается в нуль.

В общем случае для какой-либо точки любой плоской фигуры мы можем всегда найти две перпендикулярные оси так, чтобы центробежный момент инерции для этих осей равнялся нулю. Возьмем, например, оси y и z рис. 350. Если ось повернуть около точки O на 90° в направлении часовой стрелки, то новое положение осей будет y' и z' , как показано на рисунке. Тогда получается

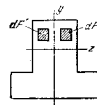


Рис. 349.

следующее соотношение между старыми координатами элемента dF и его новыми координатами:

$$y' = z, \quad z' = -y.$$

Следовательно, центробежный момент инерции для новых координат равен

$$J_{y'z'} = \int_F y'z' dF = - \int_F yz dF = -J_{yz}.$$

Таким образом, при этом повороте центробежный момент инерции изменяет свой знак. Так как центробежный момент инерции изменяется непрерывно вместе с углом поворота, то должны быть такие направления, для которых эта величина становится нулем. Оси в

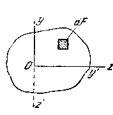


Рис. 350.

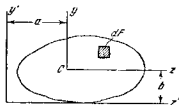


Рис. 351.

этих направлениях называются *главными осями*. Обычно центр тяжести принимается за начало координат, и тогда соответствующие главные оси называются *главными центральными осями*. Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось и ось, ей перпендикулярная, будут главными осями фигуры, так как центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю, как выяснено выше.

Если известен центробежный момент инерции фигуры для осей y и z (рис. 351), проходящих через центр тяжести площади, то центробежный момент инерции для параллельных осей y' и z' может быть найден из уравнения:

$$J_{y'z'} = J_{yz} + Fab. \quad (254)$$

Это выражает теорему о параллельных осях для центробежных моментов инерции и доказывается на основании того, что координаты элемента dF для новых осей будут $y' = y + b, z' = z + a$. Следовательно,

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \int_F y'z' dF = \int_F (y+b)(z+a) dF = \\ &= \int_F yz dF + \int_F ab dF + \int_F ya dF + \int_F bz dF. \end{aligned}$$

Последние два интеграла обращаются в нуль, потому что C есть центр тяжести площади, и уравнение сводится к (254).

ЗАДАЧИ

1. Найти $J_{y'z'}$ для прямоугольника на рис. 341.

$$\text{Ответ. } J_{y'z'} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

2. Найти центробежный момент инерции уголка (рис. 352) относительно осей y и z , а также для осей y_1 и z_1 .

Решение. Ровбиная фигура на два прямоугольника и применяя уравнение (254) для каждого из этих прямоугольников, мы находим

$$J_{yz} = \frac{a^2 h^2}{4} + \frac{h^2 (a^2 - h^2)}{4}.$$

Из условий симметрии $J_{y_1 z_1} = 0$.

3. Определить центробежный момент инерции J_{yz} для сечений, показанных на рис. 344, если C есть центр тяжести.

Решение. Для рисунков 344, а и 344, б $J_{yz} = 0$ вследствие симметрии. В случае рис. 344, в, разбивая сечение на три прямоугольника и пользуясь уравнением (254), мы находим

$$J_{yz} = -2(b-h_1)h \left(\frac{a-h}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right).$$

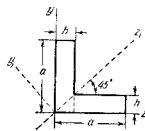


Рис. 352.

V. Изменение направления осей. Определение главных осей

Предположим, что известны моменты инерции

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F z^2 dF \quad (а)$$

и центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \int_F yz dF \quad (б)$$

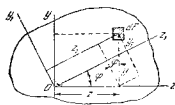


Рис. 353.

и требуется найти те же величины для новых осей y_1 и z_1 (рис. 353). Рассматривая элементарную площадку dF , найдем из чертежа новые координаты

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y_1 &= y \cos \varphi - z \sin \varphi, \end{aligned} \quad (с)$$

где φ есть угол между z и z_1 . Тогда

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 dF = \\ &= \int_F y^2 \cos^2 \varphi dF - \int_F z^2 \sin^2 \varphi dF - \int_F 2yz \sin \varphi \cos \varphi dF. \end{aligned}$$

или, пользуясь (а) и (б), получаем

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (255)$$

Таким же образом

$$J_{y_1} = J_z \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi + J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (255')$$

Взяв сумму и разность уравнений (255) и (255'), мы найдем

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y, \quad (256)$$

$$J_{z_1} - J_{y_1} = (J_z - J_y) \cos 2\varphi - 2J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (257)$$

Эти уравнения весьма полезны для вычисления J_{z_1} и J_{y_1} . Для вычисления $J_{y_1 z_1}$ мы находим

$$\begin{aligned} J_{y_1 z_1} &= \int_F y_1 z_1 dF = \int_F (y \cos \varphi - z \sin \varphi)(z \cos \varphi + y \sin \varphi) dF = \\ &= \int_F y^2 \sin \varphi \cos \varphi dF - \int_F z^2 \sin \varphi \cos \varphi dF + \int_F yz (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) dF, \end{aligned}$$

или, пользуясь уравнениями (а) и (б), получаем

$$J_{y_1 z_1} = (J_z - J_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + J_{yz} \cos 2\varphi. \quad (258)$$

Центробежный момент инерции равняется нулю для главных осей. Следовательно, оси y_1 и z_1 на рис. 353 будут главными осями, если правая часть уравнения (258) обращается в нуль, т. е.

$$(J_z - J_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + J_{yz} \cos 2\varphi = 0.$$

Это дает

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}. \quad (259)$$

Уравнение (259) может быть получено путем дифференцирования уравнения (255) по φ и последующего приравнения нулю результата этого дифференцирования. Это показывает, что моменты инерции относительно главных осей являются один наибольшим, а другой наименьшим.

Определим, например, направления главных осей прямоугольника, проходящих через вершину прямоугольника (рис. 341). В этом случае

$$J_z = \frac{bh^3}{3}, \quad J_y = \frac{hb^3}{3}, \quad J_{yz} = \frac{b^2h^2}{4},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b^2h^2}{2 \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{bh^3}{3} \right)} = \frac{3bh}{2(b^2 - h^2)}. \quad (d)$$

Направление φ определяется тем, что при выводе уравнения (259) угол φ был принят положительным в направлении против часовой стрелки (рис. 353). Уравнение (d) даст два разных значения для φ , отличающихся на 90° . Это будут два перпендикулярных направления главных осей. Зная направления главных осей, можем найти соответствующие моменты инерции из уравнений (256) и (257).

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются *главными радиусами инерции*.

Если y_1 и z_1 являются главными осями инерции (рис. 354) и i_{y_1} и i_{z_1} — главные радиусы инерции, то эллипс с полуосями i_{y_1} и i_{z_1} , как показано на рисунке, называется *эллипсом инерции*. Имея этот эллипс, можем получить радиус инерции i_z для какой-либо оси графически, путем проведения касательной к эллипсу параллельно оси z . Расстояние начала координат O от этой касательной равно длине i_z . Эллипс инерции дает картину изменения момента инерции, когда ось z поворачивается в плоскости фигуры около точки O и показывает, что наибольший и наименьший моменты инерции являются главными моментами инерции.

Для нахождения моментов инерции относительно наклонных осей также можно воспользоваться построением круга Мора. Графический способ вполне аналогичен способу, рассмотренному в главе II для напряжений. Необходимо лишь заменить σ_x , σ_y и τ соответственно J_z , J_y и J_{yz} .

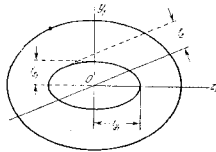


Рис. 354.

ЗАДАЧИ

1. Определить направления главных центральных осей зетового сечения (рис. 344, с), если $h = h_1 = 2,5$ см, $b = 12,5$ см, $a = 25$ см.
2. Найти направления главных центральных осей и соответствующие главные моменты инерции для углового сечения $10 \times 5 \times 1$ см.
Ответ. $\operatorname{tg} 2\varphi = 0,541$; $J_{\max} = 149,84$ см⁴; $J_{\min} = 16,02$ см⁴.
3. Определить полуоси эллипса инерции для эллиптического поперечного сечения (рис. 346).
Ответ. $i_z = \frac{b}{2}$, $i_y = \frac{a}{2}$.
4. При каких условиях эллипс инерции становится кругом?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому американскому изданию	6
Предисловие ко второму американскому изданию	8
Предисловие к третьему американскому изданию	9
Глава I. Балки на упругом основании	11
1. Балки неограниченной длины	11
2. Полубесконечные балки	20
3. Балки конечной длины на упругом основании	23
Глава II. Балки, подверженные одновременному действию осевых и поперечных нагрузок	30
4. Одновременное действие осевых сжимающих и поперечных нагрузок	30
5. Неразрезные сжатые стержни	38
6. Растянутый стержень с поперечной нагрузкой	41
7. Представление кривой изгиба тригонометрическим рядом	45
8. Прогиб брусьев с малой начальной кривизной	51
Глава III. Особые задачи при изгибе балок	54
9. Местные напряжения при изгибе балок	54
10. Касательные напряжения в балках переменного поперечного сечения	58
11. Полезная ширина тонких полок	60
12. Ограничения метода наложения	64
Глава IV. Тонкие пластинки и оболочки	69
13. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности	69
14. Изгиб длинной, равномерно нагруженной прямоугольной пластинки	71
15. Изгиб длинных прямоугольных пластинок, имеющих первоначальную малую цилиндрическую кривизну	76
16. Чистый изгиб в двух перпендикулярных направлениях	77
17. Температурные напряжения в пластинках	81
18. Изгиб круглых пластинок, нагруженных симметрично относительно центра	82
19. Изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки	85
20. Изгиб круглых пластинок переменной толщины	90
21. Изгиб круглой пластинки, нагруженной в центре	92
22. Изгиб круглой пластинки, нагруженной концентрически	94
23. Изгиб симметрично нагруженной круглой пластинки с круглым отверстием в центре	96

24. Изгиб прямоугольных пластинок	100
25. Тонкостенные сосуды, подверженные внутреннему давлению	103
26. Местные напряжения изгиба в тонкостенных сосудах	108
27. Температурные напряжения в цилиндрических оболочках	115
28. Кручение круглого кольца под действием моментов, равномерно распределенных по его оси	117
Глава V. Потеря устойчивости стержней, пластинок и оболочек	124
29. Продольный изгиб призматических стержней (простые случаи)	124
30. Продольный изгиб призматических стержней (более сложные случаи)	131
31. Энергетический метод определения критических сжимающих нагрузок	137
32. Продольный изгиб призматических стержней под действием равномерно распределенных осевых сил	141
33. Продольный изгиб стержней переменного поперечного сечения	143
34. Влияние поперечной силы на величину критической нагрузки	145
35. Продольный изгиб составных стержней	146
36. Неупругий продольный изгиб прямолинейных колонн	150
37. Устойчивость круглых колец и труб под действием внешнего давления	156
38. Устойчивость прямоугольных пластинок	162
39. Выпучивание балок, не имеющих боковых опор	167
Глава VI. Деформации, симметричные относительно оси	173
40. Толстостенный цилиндр	173
41. Напряжения, вызываемые горячей посадкой	177
42. Вращающийся диск постоянной толщины	180
43. Вращающийся диск переменной толщины	187
44. Температурные напряжения в длинном полой цилиндре	191
Глава VII. Кручение	196
45. Вазы некругового поперечного сечения	196
46. Мембранная аналогия	198
47. Кручение прокатных профилей	204
48. Кручение тонкостенных трубчатых стержней	206
49. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля, в которых пренебрежимо искажение некоторых поперечных сечений	212
50. Совместный изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля	222
51. Крутильная форма потери устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля	227
52. Потеря устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля от одновременного действия изгиба и кручения	231
53. Продольные нормальные напряжения в скручиваемых стержнях	237
54. Цилиндрическая пружина с большим шагом витка	241
Глава VIII. Концентрация напряжений	248
55. Концентрация напряжений в растянутых или сжатых элементах	248
56. Напряжения в пластинке с круглым отверстием	249
57. Другие случаи концентрации напряжений в растянутых элементах	253
58. Концентрация напряжений при кручении	258
59. Круглые вазы переменного диаметра	262
60. Концентрация напряжений при изгибе	268
61. Исследования концентрации напряжений с помощью моделей	273
62. Оптический метод измерения напряжений	276
63. Напряжения при касании шаров и цилиндров	281

Глава IX. Деформации за пределом упругости	287
64. Системы из идеально пластических материалов	287
65. Предельное сопротивление систем	294
66. Чистый изгиб балок, материал которых не следует закону Гука	304
67. Изгиб балок поперечной нагрузкой за пределом упругости	310
68. Остаточные напряжения, вызываемые неупругим изгибом	312
69. Кручение за пределом упругости	316
70. Пластические деформации толстостенных цилиндров под действием внутреннего давления	320
Глава X. Механические свойства материалов	326
71. Общие соображения	326
72. Испытания на растяжение хрупких материалов	328
73. Испытания на растяжение пластических материалов	332
74. Испытания образцов из монокристалла в упругой области	335
75. Пластическое растяжение образцов из монокристалла	338
76. Испытания на растяжение мягкого стали в упругой области	341
77. Предел текучести	346
78. Растяжение стали за пределом текучести	349
79. Типы разрушений при растяжении	358
80. Испытания на сжатие	362
81. Испытания материалов при сложном напряженном состоянии	365
82. Теории прочности	370
83. Испытания на удар	384
84. Усталость металлов	391
85. Усталость металлов при сложном напряженном состоянии	399
86. Факторы, влияющие на предел выносливости	403
87. Усталость и концентрация напряжений	408
88. Уменьшение влияния концентрации напряжений на усталость	415
89. Разрушение поверхности при усталости	422
90. Причины усталости	425
91. Механические свойства металлов при высоких температурах	431
92. Изгиб балок при высоких температурах	441
93. Релаксация напряжений	444
94. Ползучесть при сложном напряженном состоянии	447
95. Частные случаи двумерной ползучести	450
96. Рабочие напряжения	456
Обозначения	470
Именной указатель	472
Предметный указатель	476

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Второй том сопротивления материалов написан главным образом для аспирантов, инженеров-исследователей и проектировщиков. Автор стремился написать книгу, которая содержала бы новейшие достижения практической важности в области сопротивления материалов и теории упругости. В большинстве случаев дан полный разбор задач, представляющих практический интерес. Только в сравнительно немногих случаях даны лишь окончательные результаты более сложных задач, решение которых нельзя получить, не выходя за пределы обычного для инженеров объема знаний по математике. При этом разобраны практические приложения результатов и в то же время даны ссылки на литературу, в которой можно найти полный вывод решения.

В первой главе рассмотрены более сложные задачи изгиба призматических стержней. Подробно разобраны важные задачи изгиба стержней, лежащих на упругом основании, и даны приложения теории по исследованию напряжений в рельсах и трубах. Также разобрано приложение тригонометрических рядов к исследованию задач изгиба и выведены важные приближенные формулы для случаев одновременного действия продольных и поперечных нагрузок.

Во второй главе подробно развита теория кривых брусьев. Приложение этой теории к проектированию машин иллюстрировано анализом напряжений в крюках, маховых колесах, звеньях цепей, поршневых колесах и кривых трубах.

Третья глава содержит теорию изгиба пластинок. В ней подробно рассмотрены случаи изгиба пластинок по цилиндрической поверхности и симметричный изгиб круглых пластинок; даны практические приложения. Приведены также некоторые данные относительно изгиба прямоугольных пластинок под действием равномерной нагрузки.

В четвертой главе разобраны задачи о распределении напряжений в элементах, имеющих форму тела вращения и нагруженных симметрично. Эти задачи особенно важны при проектировании сосудов, подверженных внутреннему давлению, и вращающихся машинных частей. Уделено внимание напряжениям растяжения и изгиба в тонкостенных сосудах, напряжениям в толстостенных цилиндрах, напряжениям ластования элементов, а также динамическим напряжениям, возникающим в роторах и во вращающихся дисках под действием сил инерции, и напряжениям от неравномерного нагревания.

Пятая глава содержит теорию потери устойчивости сжатых стержней и тонких пластинок вследствие упругой неустойчивости. Эти задачи являются чрезвычайно важными во многих новейших сооружениях, где размеры поперечных сечений сведены к минимуму, благодаря применению более прочных материалов и желанию уменьшить вес. Во многих случаях разрушение инженерных сооружений объясняется упругой неустойчивостью, а не недостаточной прочностью самого материала.

В шестой главе рассмотрена неправильность в распределении напряжений, вызываемая резкими изменениями поперечных сечений вследствие наличия отверстий и вырезов, и рассмотрено практическое значение концентрации напряжений. Описан также оптический метод, который оказался весьма полезным при исследовании концентрации напряжений. Объяснена мембранная аналогия в задачах кручения и ее приложение к исследованию концентрации напряжений во входящих углах, а также в прокатных и трубчатых сечениях. Рассмотрены также валы переменного диаметра, и при объяснении местных напряжений у выкружек таких валов использована электрическая аналогия.

В последней главе рассмотрены механические свойства материалов. Здесь внимание направлено скорее на общие принципы, чем на описание стандартных методов испытаний материалов. Изложены результаты новейших исследований механических свойств монокристаллов и указано их практическое значение. Такие вопросы, как усталость металлов и их прочность при высокой температуре, представляют значительный практический интерес при проектировании современных машин. Эти вопросы трактуются главным образом со ссылками на новейшие достижения в этих областях.

В заключение рассмотрены различные теории прочности. Разработан важный вопрос о связи между этими теориями и методом

установления допустимых напряжений при различных напряженных состояниях.

Уже было упомянуто, что книга написана отчасти для учебных целей, но она также может быть использована для более углубленного изучения. Автор, на основании своего опыта, разделил книгу на три таких курса: 1) курс, заключающий в себе главы I, III и V, предназначен главным образом для аспирантов, интересующихся инженерно-строительным делом; 2) курс, содержащий главы II, III, IV и VI, — для аспирантов, главный интерес которых представляет машиностроение; 3) курс, использующий главу VII как основу и сопровождаемый демонстрированными опытами в лаборатории по испытанию материалов. Автор полагает, что такой курс, в котором рассматриваются основные механические свойства материалов и устанавливается зависимость между этими свойствами и допустимыми напряжениями, применимыми при различных условиях проектирования, имеет первостепенное практическое значение, и изучению такого курса должно быть уделено большое внимание в нашем инженерном образовании.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к новому изданию этого тома общий характер книги оставлен неизменным, были лишь приложены усилия к тому, чтобы сделать ее более полной и современной путем включения нового теоретического и экспериментального материала, отражающего новейшие достижения в области анализа напряжений, и экспериментального исследования механических свойств строительных материалов.

Наиболее важные изменения, внесенные во второе издание, сводятся к следующему:

1. Более полно рассмотрены задачи, относящиеся к изгибу, сжатию и кручению глубоких и тонкостенных конструкций. Такого рода конструкции находят в настоящее время широкое применение в аэропланах, и было сочтено нужным включить в новое издание больше задач из этой области.

2. Добавлена глава о пластических деформациях, трактующая изгиб и кручение балок и валов за пределом упругости, а также пластическое течение материала в толстостенных цилиндрах, подверженных действию высоких внутренних давлений.

3. Внесено значительное количество нового материала экспериментального характера, относящегося к поведению строительных материалов при высоких температурах и к усталости металлов под действием знакопеременных напряжений, особенно в тех случаях, где усталость металлов сочетается с высокой концентрацией напряжений.

4. Сделаны важные дополнения в части книги, посвященной балкам на упругом основании; к главам по теории кривых брусков и теории пластинок и оболочек; и к главе о концентрации напряжений, в которую были включены некоторые позднейшие результаты оптических испытаний.

Со времени появления первого издания этой книги были опубликованы три книги более углубленного характера: «Теория упругости», «Теория устойчивости систем» и «Теория пластинок и оболочек». Ссылки на эти книги сделаны в различных местах этого тома, особенно в тех случаях, когда даются лишь конечные результаты без полного математического вывода.

Можно надеяться, что с упомянутыми выше добавлениями книга будет давать представление о современном состоянии учения о сопротивлении материалов и может быть полезна как для аспирантов, интересующихся строительной механикой, так и для практиков-инженеров, имеющих дело со сложными задачами исследования напряжений.

С. П. Тимошенко

Пало-Альто, Калифорния

12 июня 1941 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке нового издания этой книги было добавлено значительное количество материала. Включены ссылки на новейшую литературу, внесены новые задачи для самостоятельного решения и дополнительные иллюстрации. Большинство изменений внесено в главы о кручении, пластических деформациях и механических свойствах материалов.

Что касается кручения, то была рассмотрена задача о скручивании трубчатых стержней с несколькими контурами, а также продольный изгиб при кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Каждый

из этих вопросов является важным при проектировании тонкостенных конструкций, которые являются составляющими частями самолетов. В главе о пластических деформациях рассмотрены основные принципы проектирования по предельному состоянию. Представлено несколько примеров применения метода к проектированию строительных конструкций.

Много дополнений было сделано в главе о механических свойствах материалов, и одна эта глава теперь содержит свыше 160 страниц. Цель такого расширения главы заключается в сосредоточении внимания на новейших достижениях в области экспериментального изучения свойств строительных материалов. Рассмотрены следующие вопросы: 1) влияние несовершенств на предел прочности хрупких материалов и «масштабный эффект»; 2) сравнение результатов испытаний образцов из монокристаллов и поликристаллов; 3) испытание материалов в условиях плоской и пространственной задачи и различные теории прочности; 4) сопротивление удару; 5) усталость металлов при различных напряженных состояниях и методы повышения сопротивления усталости частей машин; 6) сопротивление материалов при высоких температурах, явление ползучести и использование данных испытаний ползучести при проектировании. Для читателя, который желает расширить в дальнейшем свои познания в этих вопросах, будут полезны многочисленные ссылки на новейшую литературу. Наконец, в заключительном параграфе книги приводятся достаточно подробные сведения для надлежащего выбора рабочих напряжений.

Автор надеется, что с этими добавлениями книга будет более полной для изучения расширенных курсов по механике материалов, а также более полезной для инженеров-исследователей и конструкторов при проектировании машин и сооружений.

В заключение автор выражает благодарность профессору Стэнфордского университета Джемсу М. Гиру за его помощь и многочисленные советы при просмотре книги и при чтении корректур.

С. Тимошенко

Стэнфордский университет
10 февраля 1956 г.

ГЛАВА I

БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. Балки неограниченной длины

Рассмотрим призматическую балку, опирающуюся по всей своей длине на сплошное упругое основание таким образом, что, когда балка изгибается, интенсивность равномерно распределенной реакции в каждой точке пропорциональна прогибу в этой точке¹⁾. При таких условиях реакция, приходящаяся на единицу длины балки, может быть представлена выражением $k u$, в котором u есть прогиб, а k — постоянное число, обычно называемое коэффициентом основания²⁾. Этот коэффициент представляет собой реакцию на единицу длины балки при ее прогибе, равном единице. Простое предположение, что непрерывная реакция основания пропорциональна прогибу, дает удовлетворительные результаты во многих случаях практики. Например, в случае железнодорожного пути полученные при этом предположении решения хорошо согласуются с действительностью³⁾. При исследовании

¹⁾ Балка уложена на постель из материала, способного сопротивляться как силам, действующим вниз, так и силам, действующим вверх.

²⁾ По предположению И. И. Фусса, k называется коэффициентом постели (прим. перев.).

³⁾ См. S. Timoshenko и W. P. Langer, Trans. A. S. M. E., т. 54, стр. 277, 1932. Теория изгиба балок на упругом основании разработана E. Winklerom, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague, стр. 182, 1867. См. также H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahn — Oberbaues, Berlin, 1888. Дальнейшее развитие теории можно найти в следующих источниках: H. A. u. a. s. h. i., Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin, 1921 (русский перевод: Теория расчета балок на упругом основании, ГИИ, 1930. Прим. ред.); Wieghardt, Z. angew. Math. u. Mech., т. 2, 1922; K. V. Sander und Schleicher, Beton u. Eisen, тетрадь 3, 1926; Pastermak, Beton u. Eisen, тетради 9 и 10, 1926; W. Prager, Z. angew. Math. u. Mech., т. 7, стр. 354, 1927; M. A. Biot, J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-1, 1937; M. Hetenyi, Beams on Elastic Foundation, Ann. Arbor, 1946. (Ита русск. яз. в 1890 г. вышла книга: А. Н. Крылов, О расчете балок на упругом основании. — Прим. ред.)

изогнутой оси балки мы пользуемся дифференциальным уравнением¹⁾

$$FJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q, \quad (a)$$

где q означает интенсивность нагрузки, действующей на балку. Для ненагруженной части балки нагрузкой является лишь непрерывно распределенная реакция со стороны основания интенсивностью ky . Следовательно, $q = -ky$, и уравнение (a) получается в таком виде:

$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky. \quad (1)$$

Используя обозначение

$$\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_z}} = \beta, \quad (2)$$

общее решение уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (b)$$

Это можно легко проверить подстановкой уравнения (b) в уравнение (1). В частных случаях постоянные интегрирования A , B , C и D должны быть определены из известных условий для некоторых точек.

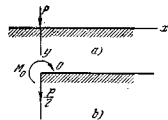


Рис. 1.

В качестве примера рассмотрим случай одного сосредоточенного груза, действующего на бесконечно длинную балку (рис. 1, a), взяв начало координат в точке приложения силы. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть лишь часть балки справа от груза (рис. 1, b). Для применения к этому случаю общего решения уравнения (b) необходимо сначала найти произвольные постоянные.

Логично предположить, что в точках, бесконечно удаленных от силы P , прогиб и кривизна оси балки обращаются в нуль. Это условие может быть выполнено лишь в том случае, если постоянные A и B в уравнении (b) принять равными нулю. Следовательно, уравнение изогнутой оси для правой части балки получается в таком виде:

$$y = e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (c)$$

Остальные две постоянные интегрирования C и D найдутся из условий в начале координат при $x=0$. В этой точке изогнутая ось балки

должна иметь горизонтальную касательную, поэтому

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

или, подставляя значение y из уравнения (c), получаем

$$e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x + C \sin \beta x - D \cos \beta x)_{x=0} = 0,$$

откуда $C = D$.

Поэтому уравнение (c) получается в таком виде:

$$y = C e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x). \quad (d)$$

Последовательные производные этого уравнения будут:

$$\frac{dy}{dx} = -2\beta C e^{-\beta x} \sin \beta x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\beta^2 C e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \quad (e)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4\beta^3 C e^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (f)$$

Постоянная C теперь может быть определена из условия, что при $x=0$ поперечная сила для правой части балки (рис. 1, b) равна $-P/2$. Знак минус вытекает из принятого нами условия относительно знаков для поперечных сил (см. т. I, стр. 71). Тогда

$$(Q)_{x=0} = \left(\frac{dM}{dx}\right)_{x=0} = -EJ_z \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=0} = -\frac{P}{2},$$

или, пользуясь уравнением (f), получаем

$$EJ_z 4\beta^3 C = \frac{P}{2},$$

откуда

$$C = \frac{P}{8\beta^3 EJ_z}.$$

Подставляя это значение C в уравнения (d) и (e), получаем следующие уравнения для прогиба и изгибающего момента:

$$y = \frac{P}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad (3)$$

$$M = -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x). \quad (4)$$

График каждого из выражений (3) и (4) представляет собой волнообразную кривую с постепенно уменьшающейся амплитудой. Длина a этих волн определяется периодом функций $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$, т. е.

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ_z}{k}}. \quad (5)$$

¹⁾ См. С. Тимошенко, Сопротивление материалов, т. I, уравнение (80), стр. 125.

Чтобы упростить вычисление прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил, приведена таблица (табл. 1), в которой приняты следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \\ \psi &= -e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \\ \theta &= e^{-\beta x} \cos \beta x, \quad \zeta = e^{-\beta x} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} (6)$$

На рис. 2 показаны графики функций φ и ψ .

Пользуясь обозначениями (6) и уравнениями (d) — (f), получим:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \zeta(\beta x), \\ M &= -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x), \\ Q &= -EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} \theta(\beta x). \end{aligned} \right\} (7)$$

По этим уравнениям и табл. 1 можно вычислить прогиб, угол наклона касательной, изгибающий момент и поперечную силу для любого

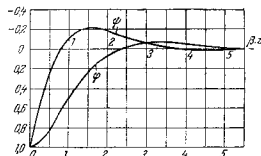


Рис. 2.

поперечного сечения балки. Наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент имеют место в начале координат и соответственно равняются

$$y_0 = (y)_{x=0} = \frac{P\beta}{2k}, \quad (8)$$

$$M_0 = (M)_{x=0} = \frac{P}{4\beta}. \quad (9)$$

Пользуясь решением (3) для одиночного груза и принципом сложения действия сил, можно легко получить прогиб, вызываемый в бесконечно длинной балке на упругом основании любым другим видом нагрузки.

Таблица 1

βx	φ	ψ	θ	ζ	βx	φ	ψ	θ	ζ
0	1,0000	0,0000	1,0000	0	3,6	-0,0966	0,0124	-0,00245	-0,0121
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903	3,7	-0,0941	-0,0079	-0,0210	0,0181
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627	3,8	-0,0914	-0,0040	-0,0177	-0,0137
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189	3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	0,0140
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610	4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	0,0139
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908	4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3089	4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	0,0131
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199	4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0125
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223	4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185	4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0108
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096	4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967	4,7	-0,0092	0,0090	0,0001	-0,0090
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807	4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626	4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430	5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226	5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0057
1,6	0,1959	-0,2077	0,0059	0,2018	5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
1,7	0,1576	-0,2047	0,0023	0,1812	5,3	0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042

Таблица I (продолжение)

βx	ψ	ϕ	θ	ζ	βy	Ψ	Φ	Θ	Ψ
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1010	5,4	-0,0066	0,0064	0,0020	-0,0035
1,9	0,0982	-0,1899	-0,0484	0,1415	5,5	-0,0000	0,0058	0,0029	-0,0020
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1290	5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
2,1	0,0439	-0,1775	-0,0618	0,1057	5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0895	5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
2,3	0,0098	-0,1416	-0,0668	0,0748	5,9	0,0015	0,0036	0,0026	-0,0010
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613	6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0492	6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383	6,2	0,0019	0,0022	0,0020	-0,0002
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287	6,3	0,0019	0,0018	0,0018	+0,0001
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204	6,4	0,0018	0,0015	0,0017	0,0003
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132	6,5	0,0018	0,0012	0,0015	0,0004
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070	6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0005
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019	6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0006
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024	6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058	6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085	7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106					

Для примера рассмотрим случай равномерной нагрузки, определенной по длине l бесконечно длинной балки (рис. 3). Возьмем какую-либо точку A , и пусть c и b представляют расстояния от этой точки до конца нагруженного участка балки. Прогиб в точке A , вызываемый элементарной нагрузкой $q dx$, получится из уравнения (3) путем подстановки в него $q dx$ вместо P , что дает

$$\frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x).$$

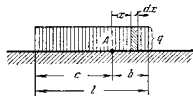


Рис. 3.

Следовательно, прогиб в точке A , вызываемый нагрузкой, распределенной по всей длине l , будет

$$y = \int_0^b \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \int_0^c \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{q}{2k} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c). \quad (8)$$

Если c и b велики, то значения $e^{-\beta b}$ и $e^{-\beta c}$ будут малыми, и прогиб (уравнение 8) будет приблизительно равен q/k , т. е. в точках, удаленных от конца нагруженного участка балки, изгибом балки можно пренебречь и можно предположить, что равномерная нагрузка q непосредственно передается упругому основанию. Взяв точку A в конце нагруженного участка балки, мы будем иметь $c=0$, $b=l$, $e^{-\beta c} \cos \beta c=1$. Предполагая, что l велико, мы имеем также $e^{-\beta b} \cos \beta b \approx 0$. Тогда $y = q/2k$, т. е. в этом случае прогиб составляет лишь половину полученного выше значения.

Подобным же образом при помощи уравнения (4) можно вывести выражение для изгибающего момента в точке A .

Если точка A взята вне нагруженного участка балки и если величины b и c представляют соответственно большее и меньшее расстояние от этой точки до концов нагруженного участка балки, то прогиб в точке A будет равняться

$$y = \int_0^b \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) - \int_0^c \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{q}{2k} (e^{-\beta c} \cos \beta c - e^{-\beta b} \cos \beta b). \quad (9)$$

Когда $c=0$, а $b=l$ является большой величиной, мы получаем для прогиба значение $q/2k$, что совпадает с нашим предыдущим заключением. Когда расстояния b и c увеличиваются, то прогиб, согласно уравнению (9), уменьшается, приближаясь к нулю, если b и c весьма велики.

Случай пары сил, действующей на бесконечно длинную балку (рис. 4, а) может быть также разобран при помощи решения (3) для одиночного груза. Действие момента пары эквивалентно действию двух сил P , показанных на рис. 4, б, если Pe приближается к M_0 в то время как e стремится к нулю. Пользуясь

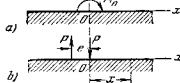


Рис. 4.

первым из уравнений (7), находим прогиб в расстоянии x от начала координат:

$$y = \frac{P\beta}{2k} [\varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x + \epsilon)]] = \frac{M_0\beta}{2k} \varphi(\beta x) - \frac{c[\beta(x + \epsilon)]}{\epsilon} = -\frac{M_0\beta}{2k} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Из уравнений (7) имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\beta\zeta(\beta x),$$

и уравнение кривой прогибов от действия пары M_0 получается в виде

$$y = \frac{M_0\beta^2}{k} \zeta(\beta x). \quad (10)$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0\beta^2}{k} \psi(\beta x),$$

$$M = -EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0}{2} \zeta(\beta x), \quad (10')$$

$$Q = -EJ_z \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{M_0\beta}{2} \varphi(\beta x).$$

Пользуясь этими уравнениями и таблицей 1, мы можем легко вычислить прогиб, угол наклона касательной, изгибающий момент и поперечную силу для любого поперечного сечения балки.

Рассмотрим теперь случай нескольких грузов, действующих на бесконечно длинную балку. В качестве примера разберем изгиб рельса, вызываемый давлением колес паровоза. Излагаемый здесь метод определения напряжений в рельсах основан на допущении, что под рельсом имеется сплошное упругое основание. Это допущение дает довольно хорошее приближение¹⁾, так как расстояние между шпалами мало по сравнению с длиной волны a изогнутой оси, определенной по уравнению (5). Чтобы получить значение k коэффициента основания, нужно нагрузку, необходимую для того, чтобы вызвать осадку шпала, равную единице, разделить на расстояние между шпалами. Предналагается, что шпала симметрично нагружена двумя грузами, соответствующими давлениям рельсов. Допустим, например, что шпала получила осадку в 0,75 см под каждым из двух грузов по 4000 кг и что расстояние между шпалами равно 55 см; тогда

$$k = \frac{4000}{0,75 \times 55} = 97 \text{ кг/см}^2.$$

В случае расположения на рельсе одного колеса, вызывающего давление P , для определения наибольшего прогиба и наибольшего изгибающего момента воспользуемся уравнениями (8) и (9). Наибольшее напряжение в рельсе от изгиба будет

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P}{4\beta W} = \frac{P}{4W} \sqrt{\frac{4EJ_z}{k}}, \quad (1)$$

где W — момент сопротивления рельса²⁾.

¹⁾ См. статью автора «Прочность рельсов», Вестник Института инженеров путей сообщения (Петербург), 1915 г. и статью автора в Proc. 2-nd Internat. Cong. Appl. Mech., Zürich, 1926. См. также сноску на стр. 11.

²⁾ При написании выражения (1) предполагалось, что элементарная формула при изгибе балки может быть применена к поперечному сечению, где изгиблен груз P . Более детальные исследования показывают, что вследствие местных напряжений следует ожидать значительного отклонения от элементарной формулы (1).

Для возможности сравнивать напряжения в рельсах, поперечные сечения которых геометрически подобны, уравнение (1) представим в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \sqrt{\frac{J_z}{4W}} \sqrt{\frac{4E}{k}}, \quad (1')$$

где F — площадь поперечного сечения рельса. Так как второй множитель правой части уравнения (1') остается постоянным для геометрически подобных поперечных сечений и так как третий множитель не зависит от размеров рельса, то наибольшее напряжение обратно пропорционально площади поперечного сечения, т. е. обратно пропорционально весу рельса, приходящемуся на единицу его длины.

Приближенное значение наибольшего давления R_{\max} на шпалу получится путем умножения наибольшей осадки на расстояние между шпалами и на коэффициент основания. Таким образом, пользуясь уравнением (8), получаем

$$R_{\max} = \frac{P\beta}{2k} ik = \frac{P\beta i}{2} = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{4EJ_z}{k}}. \quad (k')$$

Отсюда видно, что давление на шпалу зависит главным образом от расстояния i между шпалами. Надо также заметить, что величины k в обоих выражениях (1) и (k') находится под корнем четвертой степени. Поэтому ошибка в определении величин k повлечет за собой значительно меньшую ошибку в величинах σ_{\max} и R_{\max} .

Когда на рельс действует несколько грузов, следует пользоваться принципом сложения действия сил. Для иллюстрации метода расчета разберем численный пример. Возьмем рельс, момент инерции сечения которого $J_z = 1830 \text{ см}^4$, а расстояние между шпалами такое, что $k = 100 \text{ кг/см}^2$; тогда по формуле (2) находим

$$\beta = \sqrt{\frac{4k}{4EJ_z}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1830}} = \frac{1}{110} \text{ см}^{-1},$$

а по формуле (5)

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 690 \text{ см.}$$

Возьмем для примера систему четырех колес равных давлений, находящихся на расстоянии 165 см одно от другого. Если мы примем начало координат в точке контакта первого колеса, то значения βx для других колес будут те, которые даны в табл. 2. Там же приведены соответствующие значения функций φ и ψ , взятые из табл. 1.

Таблица 2

Грузы	1	2	3	4
βx	0	1,5	3,0	4,5
φ	1	-0,207	-0,056	0,008
ψ	1	0,238	-0,042	-0,013

Складывая влияние всех четырех грузов, находящихся на рельсе, изгибающий момент под первым колесом определяем по уравнению (4):

$$M_1 = \frac{P}{4\beta} (1 - 0,207 - 0,056 + 0,008) = 0,745 \frac{P}{4\beta},$$

т. е. изгибающий момент в этом случае на 25,5% меньше, чем в случае одного груза. Поступая таким же образом, для точки контакта второго колеса получаем

$$M_2 = \frac{P}{4\beta} (1 - 2 \cdot 0,207 - 0,036) = 0,530 \frac{P}{4\beta}.$$

Видно, что благодаря действию смежных колес изгибающий момент под вторым колесом гораздо меньше, чем под первым. Это обстоятельство подтверждается многочисленными опытными данными, полученными при измерении напряжений в железнодорожных рельсах.

Пользуясь уравнением (3) и значениями, приведенными в последней строчке таблицы 2, находим следующий прогиб под первым колесом:

$$f_1 = \frac{P\beta}{2k} (1 + 0,238 - 0,042 - 0,013) = 1,183 \frac{P\beta}{2k}.$$

Подобным образом определяются прогибы и в других точках. Отсюда следует, что метод наложения может быть легко применен к исследованию изгиба рельса, вызываемого любой системой грузов, как угодно расположенных.

Выполненный расчет основан на предположении, что опоры рельса могут развивать отрицательные реакции. Так как обычно между рельсом и костылями имеется зазор, то при перемещении рельса вверх возникает небольшое сопротивление, что приводит к увеличению изгибающего момента в рельсе под первым и последним колесами. Тем не менее, в общем, изложенная теория изгиба рельса, вызываемого статической нагрузкой, вполне удовлетворительно согласуется с результатами проведенных опытов.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь данными таблицы 2, построить эпюру изгибающих моментов для рельса, полагая, что дальняя колесная пара равна 16 м. Такая эпюра должна показать, что в сечениях посередине между колесами моменты отрицательны; это указывает на то, что при движении паровоза рельс подвергается действию знакопеременных напряжений от изгиба, которое в конечном результате может вызвать трещины усталости.

2. Найти изгибающий момент посередине нагруженного участка балки, показанной на рис. 3, и угол наклона изогнутой оси на левом конце этого участка.

3. Найти прогиб в произвольной точке A на участке треугольной нагрузки, приложенной к бесконечно длинной балке на упругом основании (рис. 3).

Ответ. Поступая так же, как при выводе уравнения (g), стр. 17, мы получаем

$$y = \frac{q_0}{4\beta k} \frac{1}{l} [\psi(\beta c) - \psi(\beta b) - 2\beta l \psi(\beta b) + 4\beta c].$$

2. Полубесконечные балки

Если длинная балка на упругом основании возбуждается силой P и моментом M_0 , приложенными на конце балки, как показано на рис. 6, мы опять можем использовать общее решение (b) предыдущего параграфа. Так как прогиб и изгибающий момент приближаются к нулю, если расстояние x от нагруженного конца увеличивается, мы должны в решении положить

$A = B = 0$; получим

$$y = e^{\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (a)$$

Для определения постоянных интегрирования C и D имеем условия в начале координат, т. е. под грузом P :

$$EJ_z \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = -M_0, \quad EJ_z \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -Q = P.$$

Подставляя в эти уравнения значение y из уравнения (a), получаем два линейных уравнения относительно C и D , из которых находим

$$C = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (P - \beta M_0); \quad D = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (a), получаем

$$y = \frac{e^{\beta x}}{2\beta^2 EJ_z} [P \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \quad (1)$$

или, пользуясь обозначениями (6),

$$y = \frac{2\beta}{k} \{ P\theta(\beta x) - \beta M_0 [\theta(\beta x) - \zeta(\beta x)] \}.$$

Чтобы найти прогиб под грузом, мы должны в уравнение (1) подставить $x = 0$. Тогда

$$f = (y)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (P - \beta M_0). \quad (1')$$

Выражение для угла наклона касательной получится путем дифференцирования уравнения (1). Для конца, т. е. при $x = 0$, это будет

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta EJ_z} (P - 2\beta M_0). \quad (1'')$$

При помощи уравнений (1') и (1'') на основе принципа наложения можно решать и более сложные задачи. Возьмем, например, равномерно нагруженную бесконечно длинную балку на упругом основании, имеющую свободно опертый конец (рис. 7, a). Реакция R на конце найдется из того условия, что прогиб на опоре равен нулю. Замечая, что на большом расстоянии от опоры изгиб балки является незначительным и что ее осадка может быть принята равной q/k , мы можем вычислить значение R путем подстановки в уравнение (1') $M_0 = 0$ и $f = q/k$. В результате найдем

$$R = 2\beta^2 EJ_z \frac{q}{k} = \frac{q}{2\beta}. \quad (13)$$

Уравнение изогнутой оси в этом случае получится путем вычитания прогиба, определяемых из уравнения (1) для $P = R$, $M_0 = 0$, из равномерной осадки q/k балки, что дает

$$y = \frac{q}{k} - \frac{e^{\beta x}}{2\beta^2 EJ_z} R \cos \beta x = \frac{q}{k} (1 - e^{\beta x} \cos \beta x). \quad (14)$$

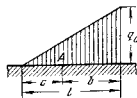


Рис. 5.

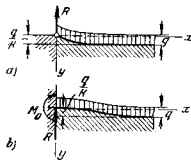


Рис. 7.

В случае балки с заделанным концом (рис. 7, б) величинами реакции R и момента M_0 получаются из условий, что на опоре прогиб и угол наклона касательной равны нулю. Замечая, что на большом расстоянии от опоры прогиб равен q/k и пользуясь уравнениями (11') и (12), мы получаем следующие уравнения¹⁾ для вычисления R и M_0 :

$$-\frac{q}{k} = -\frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (R + \beta M_0)$$

$$0 = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (R + 2\beta M_0),$$

$$M_0 = -2\beta^2 EJ_z \frac{q}{k}, \quad R = 4\beta^2 EJ_z \frac{q}{k} = \frac{q}{\beta}. \quad (15)$$

Минус в выражении для M_0 указывает на то, что момент имеет направление, обратное показанному стрелкой слева на рис. 7, б.

ЗАДАЧИ

1. Получить уравнение изогнутой оси полубесконечной балки на упругом основании, шарнирно закрепленной на конце, при действии момента M_0 (рис. 8).

Решение. Реакция в шарнире получается из уравнения (11') путем подстановки $f=0$, что дает $P = \beta M_0$. Подставляя это значение P в уравнение (11), получаем

$$y = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z} e^{-\beta x} \sin \beta x = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z} \zeta(\beta x). \quad (16)$$

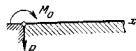


Рис. 8.

Последовательным дифференцированием находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2\beta^2 M_0}{k} \psi(\beta x), \\ M &= -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 \theta(\beta x), \\ Q &= -EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\beta M_0 \varphi(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

2. Найти изгибающий момент M_0 и силу P , действующие на конце полубесконечной балки на упругом основании (рис. 9), если прогиб f и угол наклона касательной на этом конце даны.

Решение. Значение M_0 и P получаются из уравнений (11') и (12) путем подстановки заданных величин f и $(dy/dx)_{x=0} = \alpha$.

3. Вывести уравнение изогнутой оси полубесконечной балки на упругом основании, если на балку действует груз P , приложенный на расстоянии c от ее свободного конца A (рис. 10).

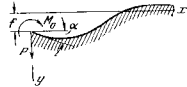


Рис. 9.

Решение. Предположим, что балка продолжена влево от конца A , как показано штрихами. В таком случае уравнение (3) дает изогнутую ось для $x > 0$, и в поперечном сечении A фиктивной бесконечной балки мы имеем из уравнений (7) и используя условия симметрии:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\beta} \zeta(\beta c), \\ Q &= \frac{P}{2} \theta(\beta c). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

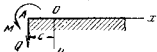
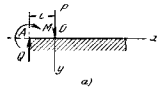


Рис. 10.

Чтобы получить требуемое уравнение изогнутой оси полубесконечной балки, свободной на конце A , мы, очевидно, должны наложить прогиб полубесконечной балки, вызываемый силой, показанными на рис. 10, б, на прогиб фиктивной бесконечной балки. При помощи уравнений (8), (11) и (с) таким путем получаем для $x > 0$

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) + \frac{2\beta}{k} \{ Q\theta[\beta(x+c)] + \beta M\theta[\beta(x+c)] - \beta M\zeta[\beta(x+c)] \} = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) + \frac{\beta P}{k} \left\{ \theta(\beta c) \theta[\beta(x+c)] + \frac{1}{2} \psi(\beta c) \theta[\beta(x+c)] - \frac{1}{2} \psi(\beta c) \zeta[\beta(x+c)] \right\}. \quad (d)$$

Это уравнение может быть также использовано при $-c < x < 0$; в этом случае мы должны x подставлять в $\varphi(\beta x)$ в ее абсолютном значении.

3. Балки конечной длины на упругом основании

Изгиб балки конечной длины на упругом основании может быть также исследован при помощи решения (3) для бесконечно длинной балки с использованием и принципа наложения¹⁾. Чтобы иллюстрировать метод решения, рассмотрим случай балки конечной длины со свободными концами, которая нагружена двумя симметрично приложенными силами P (рис. 11, а). В подобных условиях находится вила под действием давления от рельсов. К каждому из трех участков балки может быть приложено общее решение (b) п. 1, а постоянные интегрирования могут быть найдены из условия на концах и в точках приложения грузов. Однако требуемое решение может быть получено значительно легче путем наложения решений для двух родов нагружения бесконечно длинной балки, показанных на рис. 11, б и в. На рис. 11, б две силы P действуют на бесконечно длинную балку. На рис. 11, в бесконечно длинная балка нагружена внешними силами Q_0 и моментами M_0 , непосредственно в точках A и B , которые соответствуют свободным концам

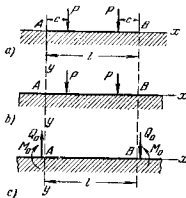


Рис. 11.

¹⁾ В уравнениях (11') и (12) подставлено $P = -R$, так как положительное направление для реакции принято вверх.

¹⁾ Этот метод расчета был разработан М. Hetényi, Final Report 2. Cong. Internat. Assoc. Bridge and Struct. Eng. Berlin, 1938. См. также «Beams on Elastic Foundations», стр. 38.

данной балки (рис. 11, а). Легко видеть, что при надлежащем выборе сил Q_0 и моментов M_0 , изгибающий момент и поперечная сила, вызываемые силами P в поперечных сечениях A и B бесконечной балки, показанной на рис. 11, б, могут стать равными нулю. Тогда средний участок бесконечной балки будет находиться в тех же условиях, что и конечная балка, представленная на рис. 11, а, и все необходимые величины, относящиеся к изгибу последней балки, будут получены путем наложения решений, найденных по рис. 11, б и 11, с.

Чтобы вывести уравнения для определения надлежащих значений M_0 и Q_0 , рассмотрим сечение A бесконечно длинной балки. Принимая начало координат в этой точке и пользуясь уравнением (7), найдем, что изгибающий момент M' и поперечная сила Q' , вызываемые в этой точке двумя силами P (рис. 11, б), будут

$$M' = \frac{P}{4\beta} \{ \psi [\beta (l-c)] + \psi (\beta c) \}, \quad Q' = \frac{P}{2} \{ \theta [\beta (l-c)] + \theta (\beta c) \}. \quad (а)$$

Момент M' и поперечная сила Q' , вызванные в той же точке силами, показанными на рис. 11, с, получаются при помощи уравнений (7) совместно с уравнениями (10'), что даст

$$\left. \begin{aligned} M'' &= \frac{Q_0}{4\beta} [1 + \psi (\beta l)] + \frac{M_0}{2} [1 + \theta (\beta l)], \\ Q'' &= -\frac{Q_0}{2} [1 - \theta (\beta l)] - \frac{M_0 \beta}{2} [1 - \varphi (\beta l)]. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Надлежащие значения M_0 и Q_0 теперь получатся из уравнений

$$M' + M'' = 0, \quad Q' + Q'' = 0, \quad (с)$$

которые могут быть решены в каждом частном случае при помощи таблицы 1. После того как M_0 и Q_0 будут найдены, прогиб и изгибающий момент в любом поперечном сечении действительной балки (рис. 11, а) могут быть получены при помощи уравнений (7), (10) и (10') методом наложения.

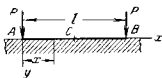


Рис. 12.

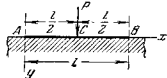


Рис. 13.

Частный случай, показанный на рис. 12, решается на основе этих же соображений, если принять $c=0$. Поступая, как объяснено выше, получаем для прогибов на концах и посередине следующие выражения:

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (д)$$

$$y_c = \frac{4P\beta}{k} \frac{\text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \frac{\beta l}{2} + \sin \frac{\beta l}{2}}. \quad (е)$$

Изгибающий момент посередине равен

$$M_c = -\frac{2P}{\beta} \frac{\text{sh } \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (ф)$$

Случай одного груза посередине (рис. 13) может быть также получен из предыдущего, показанного на рис. 11, а. Необходимо лишь принять $c=l/2$ и подставить P вместо $2P$. Таким путем мы получим для прогибов посередине и на концах следующие выражения:

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k} \frac{\text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (г)$$

$$y_c = \frac{P\beta}{2k} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (д)$$

Для изгибающего момента под грузом находим

$$M_c = \frac{P}{4\beta} \frac{\text{ch } \beta l - \cos \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (и)$$

Метод, примененный для симметричной задачи, приведенной на рис. 11, а, может быть также использован в антисимметричной, показанной на рис. 14, а. В этом случае Q_0 и M_0 будут представлять также антисимметричную систему, как показано на рис. 14, с. Для определения надлежащих значений Q_0 и M_0 можно написать систему уравнений, подобных уравнениям (а), (б) и (с). Как только Q_0 и M_0 будут вычислены, все необходимые параметры, касающиеся изгиба балки, показанной на рис. 14, а, могут быть легко получены наложением случаев, представленных на рис. 14, б и 14, с.

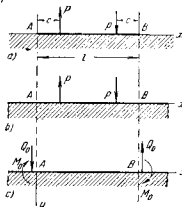


Рис. 14.

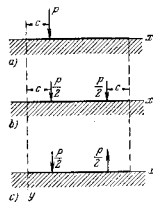


Рис. 15.

Имея решение для симметричного и антисимметричного нагружений балки, мы можем легко получить решение для любого рода нагружения, используя принцип наложения. Например, решение для несимметричного случая, показанного на рис. 15, а, получается наложением решений симметричного и антисимметричного случаев, показанных на рис. 15, б и 15, с. Задача, показанная на рис. 15, может быть решена таким же способом. В каждом случае задача сводится к определению надлежащих значений сил Q_0 и моментов M_0 из двух уравнений (с).

При исследовании изгиба балок конечной длины мы заметим, что действия сил, приложенных к одному концу балки, на прогиб другого конца

зависит от значения величины βl . Эта величина возрастает с увеличением длины балки. В то же время, как можно видеть из таблицы I, функции φ , ψ и θ быстро убывают, и при βl , превышающем некоторое значение, мы можем предположить, что сила, действующая на одном конце балки, имеет лишь незначительное влияние на другом конце. Это дает нам право рассматривать балку как бесконечно длинную. В таком случае в уравнениях (8) можно пренебречь величинами $\varphi(\beta l)$, $\psi(\beta l)$ и $\theta(\beta l)$ по сравнению с единицей; тогда уравнения (8) значительно упрощаются.

Вобщем рассмотрение изгиба балок конечной длины приводит нас, естественно, к разделению их на три группы:

- I. Короткие балки, $\beta l < 0,60$.
- II. Балки средней длины, $0,60 < \beta l < 5$.
- III. Длинные балки, $\beta l > 5$.

При рассмотрении балок группы I мы можем совершенно пренебречь изгибом и принимать эти балки абсолютно жесткими, так как прогиб от изгиба обычно ничтожно мал по сравнению с осадкой основания. Взяв, например, случай груза посередине (рис. 13) и положив $\beta l = 0,60$, мы найдем по

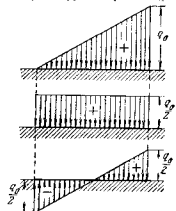


Рис. 16.

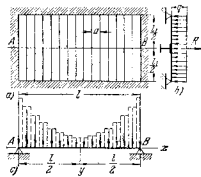


Рис. 17.

приведенным ранее формулам для u_0 и u_1 , что разница между прогибом посередине и прогибом на конце составляет лишь около половины процента от полной осадки. Это указывает на то, что осадка основания получается с очень хорошей точностью, если рассматривать балку бесконечно жесткой и пользоваться для определения осадки формулой

$$u = \frac{P}{kl}.$$

Характеристикой балок группы II является то обстоятельство, что сила, действующая на одном конце балки, оказывает значительное влияние на другом конце. Следовательно, такие балки нужно рассматривать как балки конечной длины.

В балках группы III мы можем допустить при исследовании одного конца балки, что другой ее конец бесконечно удален. Поэтому балку можно принимать за бесконечно длинную.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что балка опирается на сплошное упругое основание, но полученные результаты можно также при-

менить и в том случае, когда балка опирается на большое число равностоящих упругих опор. В качестве примера такого рода рассмотрим горизонтальную балку AB (рис. 17), поддерживаемую системой равностоящих вертикальных балок, которые несут равномерно распределенную нагрузку q_1 . Все балки являются свободно опертыми на концах. Обозначая через EJ_1 и I_1 соответственно жесткость при изгибе и длину вертикальных балок, мы находим, что прогиб их посередине

$$y = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EJ_1} - \frac{Rl_1^3}{48EJ_1}, \quad (1)$$

где R есть давление произвольной вертикальной балки на горизонтальную балку. Решая уравнение (1) относительно R , мы находим, что горизонтальная балка AB находится под действием сосредоточенной силы (рис. 17, e), величина которой равняется

$$R = \frac{5}{8} q_1 l - \frac{48EJ_1}{l_1^3} y. \quad (k)$$

Пологая, что расстояние a между вертикальными балками мало по сравнению с длиной l горизонтальной балки и заменив сосредоточенные силы равномерной нагрузкой, как показано на рис. 17, e, заменим также ступенчатое распределение нагрузки (указанное на рисунке прерывистой линией) непрерывной распределенной нагрузкой интенсивностью

$$q_1 - ky,$$

где

$$q_1 = \frac{5}{8} \frac{q_1 l}{a}; \quad k = \frac{48EJ_1}{a l_1^3}. \quad (l)$$

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси для балки AB будет

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q_1 - ky. \quad (m)$$

Отсюда видно, что горизонтальная балка находится в условиях равномерно нагруженной балки на упругом основании. Интенсивность нагрузки и коэффициент основания даны выражениями (l).

Для определения прогиба балки мы можем применить ранее поясненный метод наложения или непосредственно проинтегрировать уравнение (m). Пользуясь последним способом, мы можем написать общий интеграл уравнения (m) в следующем виде:

$$y = \frac{q_1}{k} + C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x. \quad (n)$$

Взяв начало координат посередине (рис. 17, e), мы заключаем по условию симметрии, что

$$C_2 = C_3 = 0.$$

Подставляя это в уравнение (n) и используя условия для свободно опертых концов

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = 0,$$

¹⁾ Различные задачи такого рода встречаются в корабельных конструкциях. Довольно полное изложение таких задач дано И. Г. Вульфовым в его книге «Строительная механика корабля», Петербург, т. 2, 1914. См. также Н. Ф. Понкович, Строительная механика корабля, Москва, т. 2, ч. 1, стр. 318—814, 1946.

получаем

$$C_1 = -\frac{q_1}{k} \frac{2 \sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l},$$

$$C_4 = -\frac{q_1}{k} \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l}.$$

Тогда уравнение изогнутой оси будет

$$y = \frac{q_1}{k} \left(1 - \frac{2 \sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \right). \quad (a)$$

Прогиб посередине получим, положив $x=0$, что дает

$$(y)_{x=0} = \frac{q_1}{k} \left(1 - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \right). \quad (b)$$

Подставляя это значение в уравнение (к), находим реакцию средней опоры вертикальной балки, которая пересекает балку AB в ее середине. Интересно отметить, что эта реакция может получиться отрицательной; это указывает на то, что горизонтальная балка действительно поддерживает вертикальные балки, если она достаточно жестка. В противном случае прогиб некоторых вертикальных балок может увеличиться.

ЗАДАЧИ

1. Найти общее выражение для изогнутой оси балки, представленной на рис. 12.

Ответ.

$$y = \frac{2P\beta}{k} \frac{\operatorname{ch} \beta x \cos \beta(l-x) + \operatorname{ch} \beta(l-x) \cos \beta x}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

2. Найти прогибы на концах и изгибающий момент посередине балки, изгибаемой двумя равными и противоположными парами сил M_0 (рис. 18).

Ответ.

$$y_a = y_b = -\frac{2M_0\beta^2}{k} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}, \quad M_c = 2M_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2} + \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

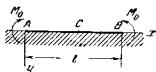


Рис. 18.

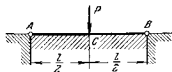


Рис. 19.

3. Найти прогиб и изгибающий момент посередине балки с шарнирными концами (рис. 19). Нагрузка приложена посередине балки.

Ответ.

$$y_c = \frac{P\beta}{2k} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}, \quad M_c = \frac{P}{4\beta} \frac{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}.$$

4. Найти прогиб и изгибающий момент посередине равномерно нагруженной балки с шарнирными концами (рис. 20).

Ответ.

$$y_c = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l} \right), \quad M_c = \frac{q}{4\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}.$$

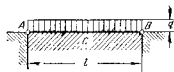


Рис. 20.

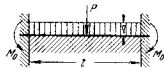


Рис. 21.

5. Найти изгибающие моменты на концах балки с защемленными концами; балка несет равномерно распределенную нагрузку и груз посередине (рис. 21).

Ответ.

$$M_0 = -\frac{P}{\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l} - \frac{q}{2\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

6. Найти уравнение изогнутой оси балки на упругом основании с грузом на одном конце (рис. 22).

Ответ.

$$y = \frac{2P\beta}{k} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l} [\operatorname{sh} \beta x \operatorname{ch} \beta(l-x) - \sin \beta x \operatorname{ch} \beta(l-x)].$$

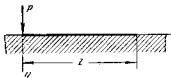


Рис. 22.

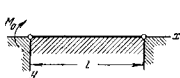


Рис. 23.

7. Балка на упругом основании с шарнирными концами изгибается парой сил M_0 , приложенной на конце (рис. 23). Найти уравнение изогнутой оси балки.

Ответ.

$$y = \frac{2M_0\beta^2}{k(\operatorname{ch}^2 \beta l - \cos^2 \beta l)} [\operatorname{ch} \beta l \sin \beta x \operatorname{sh} \beta(l-x) - \cos \beta l \operatorname{sh} \beta x \sin \beta(l-x)].$$

получаем

$$C_2 \sin p(l-c) = C_1 [\sin p(l-c) - \operatorname{tg} pl \cos p(l-c)],$$

$$C_1 p \cos(l-c) = C_4 p [\cos p(l-c) - \operatorname{tg} pl \sin p(l-c)] + \frac{P}{S},$$

откуда

$$C_4 = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl}, \quad C_1 = -\frac{P \sin p(l-c)}{Sp \operatorname{tg} pl}.$$

Подставляя C_2 в уравнение (с), получаем для левого участка стержня

$$y = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl} \sin px - \frac{Pc}{Sl} x, \quad (18)$$

и дифференцированием находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P \sin pc}{S \sin pl} \cos px - \frac{Pc}{Sl}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{Pp \sin pc}{S \sin pl} \sin px. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Соответствующие выражения для правого участка стержня получаются подстановкой $(l-x)$ вместо x и $(l-c)$ вместо c и изменением знака dy/dx в уравнениях (18) и (19). Эти подстановки дают

$$y = \frac{P \sin p(l-c)}{Sp \sin pl} \sin p(l-x) - \frac{P(l-c)}{Sl} (l-x), \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \sin p(l-c)}{S \sin pl} \cos p(l-x) + \frac{P(l-c)}{Sl}, \quad (21)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pp \sin p(l-c)}{S \sin pl} \sin p(l-x). \quad (22)$$

В частном случае, когда груз P приложен посредине, имеем $c=l/2$, и вводим обозначение

$$\frac{Sl^2}{4EJ} = \frac{p^2 l^2}{4} = u^2, \quad (23)$$

получаем из уравнения (18)

$$(y)_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{P}{2Sp} \left(\operatorname{tg} \frac{pl}{2} - \frac{pl}{2} \right) = \frac{Pl^2}{48EJ} \operatorname{tg} u - \frac{u}{3} u^2. \quad (24)$$

Первый множитель в уравнении (24) представляет прогиб, вызванный действием одной лишь поперечной нагрузки. Второй множитель указывает, в какой пропорции прогиб, вызванный силой P , увеличивается от действия осевых сжимающих сил S . Когда S мало по сравнению с эйлеровой нагрузкой ($S_0 = EJ\pi^2/l^2$), величина u мала и второй множитель в уравнении (24) приближается к единице; это указывает на то, что при этом условии влияние на прогиб осевых сжимающих сил незначительно. Когда S приближается к эйлерову значению, величина u

ГЛАВА II

БАЛКИ, ПОДВЕРЖЕННЫЕ ОДНОВРЕМЕННОМУ ДЕЙСТВИЮ ОСЕВЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

4. Одновременное действие осевых сжимающих и поперечных нагрузок

Начнем с простой задачи о стержне с шарнирными концами, нагруженном одной поперечной силой и центрально сжатом двумя равными и противоположными силами S (рис. 24). Предполагая, что стержень имеет плоскость симметрии, в которой действует сила P , мы принимаем, что изгиб происходит в этой же плоскости. Дифференциальные уравнения изогнутой оси для двух участков стержня будут

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{Pc}{l} x, \quad (a)$$

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Sy - \frac{P(l-c)}{l} (l-x). \quad (b)$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{S}{EJ} = p^2, \quad (17)$$

представим решения уравнений (a) и (b) в следующем виде:

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px - \frac{Pc}{Sl} x, \quad (c)$$

$$y = C_3 \cos px + C_4 \sin px - \frac{P(l-c)}{Sl} (l-x). \quad (d)$$

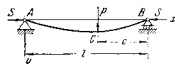


Рис. 24.

Так как прогибы на концах стержня обращаются в нуль, заключаем, что $C_1 = 0$, $C_3 = -C_4 \operatorname{tg} pl$.

Остальные две постоянные интегрирования найдутся из условий неразрывности деформаций в точке приложения груза P , которые требуют, чтобы уравнения (c) и (d) давали один и тот же прогиб и один и тот же угол наклона касательной при $x=l-c$. Таким путем

приближается к значению $\pi/2$ (см. формулу (23)) и второй множитель в уравнении (24) неограниченно увеличивается, как и нужно было ожидать из нашего прежнего изучения вопроса о критической силе (см. т. I, стр. 223).

Наибольшее значение изгибающего момента имеет место под силой P ; это значение получается из второго уравнения (19), которое даст

$$M_{\max} = -EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=l/2} = EJ \frac{Pp}{2S} \operatorname{tg} \frac{pl}{2} = \frac{Pl \operatorname{tg} u}{4} \mu. \quad (25)$$

Опять видим, что первый множитель в уравнении (25) представляет изгибающий момент, вызываемый действием только лишь силы P , в то время как второй множитель является коэффициентом увеличения, оценивающим влияние осевой силы S на наибольший изгибающий момент.

Имея решение задачи для одной поперечной силы P (рис. 24), можем легко получить решение для случая сжатого стержня, изгибаемого парой сил, приложенной на конце (рис. 25).

Необходимо только предположить, что в нашем предыдущем изложении расстояние c бесконечно уменьшается и приближается к нулю, в то время как pc остается постоянным и равным M_0 . Подставляя $pc = M_0$ и $\sin pc = pc$ в уравнение (18), мы получаем уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{\sin px}{\sin pl} - \frac{x}{l} \right), \quad (26)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p \cos px}{\sin pl} - \frac{1}{l} \right).$$

Углы наклона касательных к оси балки на концах будут

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p}{\sin pl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{M_0}{6EJ} 6 \left(\frac{1}{2u \sin 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right), \quad (27)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p}{\operatorname{tg} pl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{M_0}{3EJ} 3 \left(\frac{1}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right). \quad (28)$$

Снова первые множители в уравнениях (27) и (28), взятые с надлежащими знаками, представляют углы наклона касательных, вызываемые действием только одной пары сил M_0 (см. т. I, стр. 141), а вторые множители представляют влияние осевой силы S .

Рассматривая уравнения (18) и (26), видим, что поперечная сила P и пара сил M_0 входят в эти выражения линейно, в то время как осевая сила входит в те же выражения в более сложном виде, так как p также содержит S (см. уравнение (17)). Из этого заключаем, что если в точке C (рис. 24) приложены две силы P и Q , прои-



Рис. 25.

в какой-либо точке можно получить наложением прогибов, вызываемых грузом Q и осевыми силами S , на прогиб, вызываемый грузом P и теми же осевыми силами. Подобное заключение можно применить и в случае пар сил, приложенных на одном конце балки.

Это заключение относительно применения принципа наложения можно легко обобщить и распространить на случай нескольких грузов (рис. 26). Для каждого участка сжатого стержня можно написать уравнение, подобное уравнениям (а) и (б), и можно получить решение, подобное решениям (с) и (д). Постоянные интегрирования можно найти из условий непрерывности в точках приложения грузов и из условий на концах сжатого стержня. Таким путем можно показать, что прогиб в какой-либо точке сжатого стержня является линейной функцией грузов P_1, P_2, \dots и что прогиб в какой-либо точке можно получить наложением прогибов, вызываемых в этой точке каждым из поперечных грузов, действующим совместно с осевой силой S .

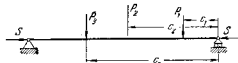


Рис. 26.

Рассмотрим общий случай, когда действуют n сил и m из этих сил приложены справа от поперечного сечения, для которого вычисляется прогиб. Выражение для этого прогиба получается при помощи уравнения (18) для сил P_1, P_2, \dots, P_m и уравнения (20) для сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_n$. Таким путем находим требуемый прогиб:

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i \sin pc_i - \frac{x}{Sl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i c_i + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i \sin p(l-c_i) - \frac{l-x}{Sl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l-c_i). \quad (29)$$

Если вместо сосредоточенных сил имеется равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , действующая на сжатый стержень, то каждый элемент $q dc$ этой нагрузки, взятый на расстоянии c от правого конца, можно рассматривать как сосредоточенную силу. Подставляя его вместо P_i в уравнение (29) и заменяя суммирование интегрированием, получаем следующее уравнение для изогнутой оси:

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \int_0^{l-x} q \sin pc \, dc - \frac{x}{Sl} \int_0^{l-x} qc \, dc + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \int_{l-x}^l q \sin p(l-c) \, dc - \frac{l-x}{Sl} \int_{l-x}^l q(l-c) \, dc.$$

Выполняя интегрирование, находим

$$y = \frac{q}{Sp^2} \left[-\frac{\cos \left(\frac{pl}{2} - px \right)}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x(l-x), \quad (30)$$

$$y_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{q}{Sp^2} \left(\frac{1}{\cos u} - 1 - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{ql^3}{EJ} \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24} u^4}. \quad (31)$$

Дифференцированием уравнения (30) легко получить выражения для угла наклона касательной и для изгибающего момента. Угол наклона касательной на левом конце стержня равен

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{ql}{2S} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{pl}{2}}{\frac{pl}{2}} - 1 \right) = \frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}. \quad (32)$$

Наибольший изгибающий момент будет посредине и равен

$$M_{\max} = -EJ \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}} = EJ \frac{q \left(1 - \cos \frac{pl}{2} \right)}{S \cos \frac{pl}{2}} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (33)$$

Пользуясь решением для случая пары сил совместно с решениями для поперечных нагрузок и применяя метод наложения, мы можем легко решить различные статически неопределимые случаи изгиба сжатых стержней. Взяв в качестве примера случай равномерно нагруженного сжатого стержня с одним заделанным концом (рис. 27), найдем изгибающий момент M_0 в заделанном конце из того условия, что этот конец не поворачивается при изгибе. Пользуясь уравнениями (28) и (32), это условие представляем в следующем виде:



Рис. 27.

$$-\frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3} + \frac{M_0 l}{3EJ} \left(\frac{3}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{3}{(2u)^2} \right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8} \frac{4 \operatorname{tg} 2u (\operatorname{tg} u - u)}{u (\operatorname{tg} 2u - 2u)}. \quad (34)$$

В случае равномерно нагруженного сжатого стержня с обоими заделанными концами моменты M_0 на концах получаются из уравнения

$$-\frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3} + \frac{M_0 l}{3EJ} \left(\frac{3}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{3}{(2u)^2} \right) - \frac{M_0 l}{6EJ} \left(\frac{6}{2u \sin 2u} - \frac{6}{(2u)^2} \right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{tg} u}. \quad (35)$$

Из уравнений (34) и (35) видно, что значения статически неопределимых моментов получаются умножением соответствующих моментов, возникающих от действия только одной поперечной нагрузки, на некоторые коэффициенты увеличения.

Необходимые вычисления можно значительно упростить при помощи готовых численных таблиц, содержащих коэффициенты увеличения¹⁾. В табл. 3 даны коэффициенты увеличения для равномерно нагруженного сжатого стержня при следующих обозначениях:

$$\varphi_0(u) = \frac{1}{\cos u} \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24} u^4}; \quad \psi_0(u) = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}.$$

Когда наибольший изгибающий момент для сжатого стержня найден, численно наибольшее напряжение получится сложением сжи-

Таблица 3

Коэффициенты увеличения моментов для равномерно нагруженных сжатых стержней

$u =$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$\varphi_0(u) = \dots$	1,000	1,004	1,016	1,037	1,070	1,114	1,173	1,250	1,354
$\psi_0(u) = \dots$	1,000	1,004	1,016	1,038	1,073	1,117	1,176	1,255	1,361
$u =$	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,45	1,50	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi_0(u) = \dots$	1,494	1,690	1,962	2,400	3,181	4,822	6,790	11,480	∞
$\psi_0(u) = \dots$	1,504	1,704	1,989	2,441	3,240	4,938	6,940	11,670	∞

мающего напряжения от силы S с наибольшим напряжением от изгиба, что дает

$$|\sigma|_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{\max}}{W}, \quad (e)$$

где F и W — соответственно площадь поперечного сечения стержня и момент сопротивления площади. Взяв в качестве примера равномерно

¹⁾ Различные частные случаи поперечно нагруженных сжатых стержней были рассмотрены А. П. Ван-дер-Флитом, Известия Собрания инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1900—1903 гг. Численные таблицы коэффициентов увеличения даны в этой работе.

нагруженный стержень с шарнирными концами, получим из формулы (33)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{q l^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (f)$$

При подборе надлежащих размеров поперечного сечения сжатого стержня необходимо сначала установить зависимость между продольной и поперечной нагрузками. Если условия таковы, что осевая сила S остается постоянной, а может изменяться только поперечная нагрузка q , то наибольшее напряжение по уравнению (f) пропорционально нагрузке q . Тогда требуемые размеры поперечного сечения получатся подстановкой в это уравнение σ_1/k вместо σ_{\max} , где k — коэффициент безопасности по отношению к пределу текучести материала¹⁾.

Если условия такие, какие показаны для стержня AB на рис. 28, т. е. осевая сила S изменяется в том же отношении, что и поперечная нагрузка q , вопрос о выборе безопасных размеров становится более сложным. Правая часть уравнения (f) уже не является линейной относительно q , так как величина u , определяемая по уравнению (23), также зависит от величины q . Благодаря этому обстоятельству наибольшее напряжение по уравнению (f) увеличивается

в большей степени, чем нагрузка q , и если мы поступим, как в предыдущем случае, и подставим в это уравнение σ_1/k вместо действительный коэффициент безопасности конструкции будет меньше чем k и нагрузка, при которой начнется текучесть, будет меньше чем kq . Чтобы удовлетворить условиям безопасности, воспользуемся уравнением (f) для определения условий начала текучести и запишем

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F} + \frac{q_1 l^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u_1)}{u_1^2 \cos u_1}. \quad (g)$$

Так как S_1 в каждом частном случае (например, как на рис. 28) является некоторой функцией q_1 , а u определяется по уравнению (23), то правая часть уравнения (g) для любых принятых значений F и W является функцией предельного значения нагрузки q_1 , а это значение можно найти из уравнения путем последовательных попыток. Зная q_1 , мы определим безопасную нагрузку q_1/k для принятых размеров

поперечного сечения сжатого стержня. Повторяя эти вычисления несколько раз, мы можем окончательно найти размеры поперечного сечения¹⁾, которые будут соответствовать требуемому коэффициенту безопасности k . Подобный метод был применен ранее в п. 59 т. I. (Расчет колонн на основании предполагаемых неточностей, стр. 232.)

ЗАДАЧИ

1. Размеры сжатого стержня AB на рис. 28 таковы, что его эйлерова нагрузка равна 1000 кг. Пользуясь таблицей 3, найти коэффициенты увеличения $\varphi_0(u)$ и $\psi_0(u)$, если $\alpha = 45^\circ$ и $ql = 1000$ кг.

Ответ. $\varphi_0(u) = 2,01$; $\psi_0(u) = 2,03$.

2. Найти угол наклона касательной на левом конце сжатого стержня с шарнирными концами, который нагружен в середине грузом P и осевыми силами S .

$$\text{Ответ. } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P}{2S} \frac{1 - \cos u}{\cos u} = \frac{P^2}{16EJ} \frac{1 - \cos u}{u^2 \cos u}.$$

3. Найти углы наклона касательных на концах сжатого стержня, несущего треугольную нагрузку (рис. 29).

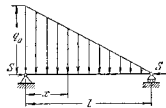


Рис. 29.

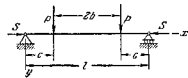


Рис. 30.

Решение. Подставляя в уравнение (29) $q_0 c \, dc/l$ вместо P_l и заменяя суммирование интегрированием, находим

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \int_0^{l-x} \frac{q_0 c}{l} \sin pc \, dc - \frac{x}{Sl} \int_0^{l-x} \frac{q_0 c}{l} \, dc + \\ + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \int_{l-x}^l \frac{q_0 c}{l} \sin p(l-c) \, dc - \frac{l-x}{Sl} \int_{l-x}^l \frac{q_0 c}{l} (l-c) \, dc.$$

Дифференцируя это по x , находим, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2q_0 l}{6p^2 EJ} (\beta - 1), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{q_0 l}{6p^2 EJ} (\alpha - 1),$$

где α и β являются функциями, определяемыми по уравнениям (36) (см. ниже п. 5).

¹⁾ Этот метод расчета сжатых стержней был разработан К. С. Завриным; см. Известия Института инженеров путей сообщения (С.-Петербург), 1913 г.

¹⁾ Предполагается, что материал стержня имеет ясно выраженный предел текучести σ_1 .

4. Найти углы наклона касательных на концах сжатого стержня, симметрично нагруженного двумя грузами P , как показано на рис. 30.

$$\text{Ответ. } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{P}{S} \left(\frac{\cos pb}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right).$$

5. Сжатый стержень с заделанными концами нагружен, как показано на рис. 30. Найти изгибающие моменты M_0 на концах.

Решение. Моменты M_0 найдутся из условий, что концы стержня не вращиваются. Пользуясь ответом предыдущей задачи, а также уравнениями (27) и (28), получаем для вычисления M_0 следующее уравнение:

$$\frac{M_0 l}{6EJ} \alpha + \frac{M_0 l}{3EJ} + \frac{P}{S} \left(\frac{\cos pb}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = - \frac{2PEJ}{Sl} \frac{u}{\lg u} \left(\frac{\cos pb}{\cos u} - 1 \right).$$

Если $b=0$, получим случай стержня, нагруженного грузом $2P$, сосредоточенным в середине.

5. Неразрезные сжатые стержни

В случае неразрезного сжатого стержня мы поступим так же, как и в случае неразрезных балок (см. т. I, стр. 173), и рассмотрим два смежных пролета (рис. 31)¹⁾. Пользуясь уравнениями (23), (27) и (28) и вводя следующие обозначения для n -го пролета при $u_n^2 = \frac{S_n l_n^2}{4EJ_n}$:

$$\alpha_n = 6 \left[\frac{1}{2u_n \sin 2u_n} - \frac{1}{(2u_n)^2} \right], \quad \beta_n = 3 \left[\frac{1}{(2u_n)^2} - \frac{1}{2u_n \lg 2u_n} \right], \quad \gamma_n = \frac{\lg u_n - u_n}{\frac{1}{3} u_n^2}, \quad (36)$$

$$\gamma_n = \frac{\lg u_n - u_n}{\frac{1}{3} u_n^2}, \quad (37)$$

мы заключаем, что угол наклона касательной на правом конце n -го пролета (рис. 31, а), вызываемый конечными моментами M_{n-1} и M_n , равняется

$$- \beta_n \frac{M_n l_n}{3EJ_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_n}. \quad (а)$$

Угол наклона касательной, вызываемый на левом конце $(n+1)$ -го пролета моментами M_n и M_{n+1} , равняется

$$\alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}. \quad (б)$$

Если нет поперечной нагрузки, действующей на двух рассматриваемых пролетах, то выражения (а) и (б) должны быть равны между собой, поэтому получаем

$$\frac{\alpha_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2 \left(\beta_n \frac{l_n}{J_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = 0. \quad (38)$$

Такое уравнение трех моментов для неразрезного сжатого стержня, если не рисется поперечной нагрузки на двух рассматриваемых пролетах.

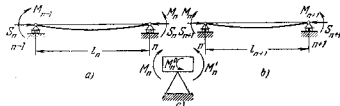


Рис. 31.

Если же действует поперечная нагрузка, то соответствующие углы наклона касательных, вызываемые этой нагрузкой, должны быть добавлены к выражениям (а) и (б). Взяв, например, случай равномерной нагрузки q_n и q_{n+1} , действующей на пролетах n и $n+1$ в направлении сверху вниз, мы найдем соответствующие углы наклона касательных из уравнения (32) и вместо выражений (а) и (б) получим

$$- \beta_n \frac{M_n l_n}{3EJ_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_n} - \gamma_n \frac{q_n l_n^2}{24EJ_n}, \quad (с)$$

$$+ \alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} + \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2 + q_n l_{n+1}^2}{24EJ_{n+1}}. \quad (д)$$

Приравняв эти два выражения, мы находим

$$\frac{\alpha_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2 \left(\beta_n \frac{l_n}{J_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = \\ = - \gamma_n \frac{q_n l_n^2}{4J_n} - \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2 + q_n l_{n+1}^2}{4J_{n+1}}. \quad (39)$$

Это уравнение трех моментов для сжатого стержня с равномерной нагрузкой в каждом пролете. Оно подобно уравнению трех моментов для неразрезной балки и совпадает с ним, когда $S=0$ и функции α , β , γ становятся равными единице.

Для любого иного вида поперечной нагрузки мы должны изменить только правую часть уравнения (39), которая зависит от оборота смежных концов двух пролетов, вызываемого поперечной нагрузкой. Взяв, например, случай трапециевидальной нагрузки, показанной на рис. 32, и разделив нагрузку на две части: равномерно распределенную нагрузку и нагрузку по треугольнику, мы воспользуемся для равномерных нагрузок часнами, уже написанными в правой

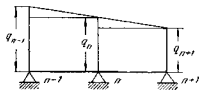


Рис. 32.

¹⁾ Теория принадлежит Н. Zimmernannу, Sitzungsber. Akad. Wissensch., Berlin, 1907 и 1909.

части уравнения (39). К этим членам мы должны добавить члены, соответствующие треугольным нагрузкам. Пользуясь выражениями для углов наклона касательных в задаче 3 предыдущего параграфа, мы находим, что два члена, которые мы должны добавить к правой части уравнения (39) в случае нагрузки, показанной на рис. 32, будут

$$-\frac{(q_{n-1} - q_n) l_n}{p^2 J_n} (\alpha_n - 1) - \frac{2(q_n - q_{n+1}) l_{n+1}}{p^2 J_{n+1}} (\beta_{n+1} - 1), \quad (e)$$

где α_n и β_{n+1} определяются выражениями (36). Если на рассматриваемых пролетах действуют сосредоточенные силы, то требуемые выражения для поворотов легко получаются из общего уравнения изогнутой оси (29).

Вычисление моментов из уравнения трех моментов (39) можно значительно упростить при помощи числовых таблиц функций α , β и γ ¹⁾. При выводе уравнения (39) предполагалось, что момент M_n на n -й опоре имеет одно и то же значение для обоих смежных пролетов. Однако встречается случай, когда на опоре приложен внешний момент M_n^0 , как показано на рис. 31, с; тогда следует иметь в виду различие между значениями этизирующих моментов слева и справа от опоры. Соотношение между этими двумя моментами дается уравнением статики²⁾: $M_n - M_n^0 - M_n' = 0$, откуда

$$M_n' = M_n - M_n^0. \quad (f)$$

Уравнение (39) в таком случае заменяется следующим уравнением:

$$\frac{a_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2\beta_n \frac{l_n}{J_n} M_n + 2\beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_n' + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = -\gamma_n \frac{q_n l_n^3}{4J_n} - \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{4J_{n+1}}. \quad (40)$$

Если опоры неразрезного сжатого прямого стержня не находятся на одной прямой, то в правую часть уравнения (39) или (40) должны быть внесены дополнительные члены, зависящие от разностей в уровнях трех последовательных опор. Наличие осевых сил не влияет на эти члены, и они будут такими же, как и в случае балки без осевой нагрузки (см. т. I, стр. 177).

ЗАДАЧИ

1. Написать правую часть уравнения трех моментов, если имеется сосредоточенная сила P в $(n+1)$ -м пролете на расстоянии c_{n+1} от опоры $n+1$.

$$\text{Ответ.} - \frac{6P}{p_n^2 J_{n+1}} \left(\frac{\sin p_{n+1} c_{n+1}}{\sin p_{n+1} l_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

2. Написать правую часть уравнения трех моментов, если n -й пролет нагружен так, как показано на рис. 30, стр. 37, и если на $n+1$ -м пролете не имеется нагрузки.

¹⁾ Такие таблицы можно найти в книге A. S. Niles and J. S. Newell, *Airplane Structures*, New York, т. 2, 1943; см. также книгу автора «Theory of Elastic Stability», New York, 1936; русский перевод: Устойчивость упругих систем, 1955, Госстехиздат, Москва.

²⁾ Направление M_n^0 , указанное на рис. 31, с, принято за положительное направление внешнего момента.

Ответ. Пользуясь решением задачи 4 стр. 38, мы получим следующее выражение:

$$-\frac{6P}{p_n^2 J_n} \left(\frac{\cos p_n b_n}{\cos \frac{p_n l_n}{2}} - 1 \right).$$

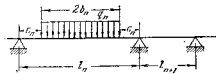


Рис. 33.

3. Найти правую часть уравнения трех моментов, если нагрузка такая, как показано на рис. 33.

$$\text{Ответ.} - \frac{6q_n}{p_n^2 J_n} \left(\frac{\cos p_n b_n}{p_n \cos \frac{p_n l_n}{2}} - b_n \right).$$

6. Растянутый стержень с поперечной нагрузкой

Если растянутый стержень подвергается действию растягивающих сил S и поперечной нагрузки P (рис. 34), то мы можем написать дифференциальное уравнение изогнутой оси для каждого участка стержня точно таким же образом, как это сделано для сжатого стержня в п. 4. Необходимо лишь изменить знак при S . В таком случае вместо величин p^2 и u^2 , определяемых соответственно уравнениями (17) и (23), мы будем иметь $-p^2$ и $-u^2$, а вместо p и u мы будем иметь $p\sqrt{-1} = pi$ и $u\sqrt{-1} = ui$. Подставляя $-S$, pi и ui вместо S , p и u в формулы, полученные для сжатого стержня (рис. 24), мы получим необходимые формулы для растянутого стержня, показанного на рис. 34. При выполнении этой подстановки мы воспользуемся известными зависимостями:

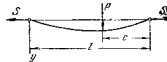


Рис. 34.

$$\sin ui = l \operatorname{sh} u, \quad \cos ui = \operatorname{ch} u, \quad \operatorname{tg} ui = l \operatorname{th} u.$$

Таким путем мы получим для левого участка растянутого стержня (рис. 34) из уравнений (18) и (19):

$$y = -\frac{P \operatorname{sh} pc}{S p \operatorname{sh} pl} \operatorname{sh} px + \frac{Pc}{Sl} x, \quad (41)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \operatorname{sh} pc}{S \operatorname{sh} pl} \operatorname{ch} px + \frac{Pc}{Sl}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P p \operatorname{sh} pc}{S \operatorname{sh} pl} \operatorname{sh} px. \quad (42)$$

Подобные формулы можно также получить для правого участка при помощи уравнений (20)–(22). Имея уравнение изогнутой оси

для случая одного груза P , действующего на растянутый стержень, мы можем легко получить уравнение изогнутой оси для любого рода нагрузки, используя метод наложения.

Рассматривая, например, равномерно нагруженный растянутый стержень и пользуясь уравнениями (30) и (31), мы получаем

$$y = \frac{q}{8p^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{pl}{2} - px \right)}{\operatorname{ch} \frac{pl}{2}} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x);$$

наибольший же прогиб будет

$$y_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384 EJ} \frac{q l^2}{\operatorname{ch} u} \frac{1}{5} \frac{1}{24} \frac{1}{u^4} - 1 + \frac{u^2}{2} = \frac{5}{384 EJ} \varphi_1(u), \quad (43)$$

где

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \frac{1}{5} \frac{1}{24} \frac{1}{u^4} - 1 + \frac{u^2}{2}.$$

Угол наклона касательной к изогнутой оси на левом конце по уравнению (32) равен

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{q l^2}{24 EJ} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2}, \quad (44)$$

Наибольший изгибающий момент, который в этом случае будет в середине пролета, получится из уравнения (33):

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \frac{(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u} = \frac{q l^2}{8} \psi_1(u), \quad (45)$$

где

$$\psi_1(u) = \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u}.$$

Отсюда видно, что наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент получаются умножением соответствующих выражений для свободно опертой балки без осевой нагрузки на множители $\varphi_1(u)$ и $\psi_1(u)$, которые зависят от величины осевой растягивающей силы S . Числовые значения этих множителей даны в табл. 4¹⁾.

В случае изгиба растянутого стержня парой сил, приложенной на правом конце, уравнение изогнутой оси получается из уравнения (26),

¹⁾ Различные случаи изгиба растянутых стержней исследованы в статьях А. П. Ван-дер-Флига, цит. на стр. 35, а также И. Г. Бубнова, цит. на стр. 27. Табл. 4 взята из последней книги.

Таблица 4

Множители для определения прогибов и наибольших изгибающих моментов поперечно нагруженных растянутых стержней

u	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	u	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	6,5	0,054	0,197	0,047	0,391	0,139
0,5	0,908	0,976	0,905	0,984	0,972	7,0	0,047	0,175	0,041	0,367	0,121
1,0	0,711	0,909	0,704	0,939	0,894	7,5	0,041	0,156	0,036	0,347	0,106
1,5	0,523	0,817	0,511	0,876	0,788	8,0	0,036	0,141	0,031	0,328	0,093
2,0	0,380	0,715	0,367	0,806	0,673	8,5	0,032	0,127	0,028	0,311	0,083
2,5	0,281	0,617	0,268	0,736	0,563	9,0	0,029	0,115	0,025	0,296	0,074
3,0	0,213	0,529	0,200	0,672	0,467	9,5	0,026	0,105	0,022	0,283	0,066
3,5	0,166	0,453	0,153	0,614	0,386	10,0	0,024	0,096	0,020	0,270	0,060
4,0	0,132	0,388	0,120	0,563	0,320	10,5	0,021	0,088	0,018	0,259	0,054
4,5	0,107	0,335	0,097	0,519	0,267	11,0	0,020	0,081	0,017	0,248	0,050
5,0	0,088	0,291	0,079	0,480	0,224	11,5	0,018	0,075	0,015	0,238	0,045
5,5	0,074	0,254	0,066	0,446	0,189	12,0	0,016	0,069	0,014	0,229	0,042
6,0	0,063	0,223	0,055	0,417	0,162						

которое запишется так:

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{x}{l} - \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl} \right). \quad (46)$$

Если имеются две равные и противоположные пары сил, приложенные к концам растянутого стержня, уравнение изогнутой оси получится с помощью метода наложения:

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{x}{l} - \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl} \right) - \frac{M_0}{S} \left[\frac{l-x}{l} - \frac{\operatorname{sh} p(l-x)}{\operatorname{sh} pl} \right] = \frac{M_0}{S} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} p \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{pl}{2}} \right]. \quad (47)$$

Из этого уравнения мы находим прогиб посредине и угол наклона касательной на левом конце растянутого стержня:

$$\left. \begin{aligned} (y)_{x=\frac{l}{2}} &= \frac{M_0 \operatorname{ch} u - 1}{S} = \frac{M_0 l^2}{8 EJ} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\frac{1}{2} u^2 \operatorname{ch} u}, \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} &= \frac{M_0}{S} p \operatorname{th} u = \frac{M_0 l}{2 EJ} \frac{\operatorname{th} u}{u}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Изгибающий момент посредине равен

$$(M)_{x=\frac{l}{2}} = -EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}} = M_0 \frac{1}{\operatorname{ch} u}. \quad (49)$$

Имея уравнение изогнутой оси для растянутого стержня с шарнирными концами, изгибаемого поперечной нагрузкой и парами сил на концах, мы можем легко получить различные статически неопределяемые случаи изгиба растянутых стержней по методу наложения. Взяв, например, случай равномерно нагруженного растянутого стержня с заделанными концами и воспользовавшись уравнениями (44) и (48), мы получим изгибающие моменты M_0 на концах из уравнения

$$\frac{q l^2}{24 E J} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^3} + \frac{M_0 l}{2 E J} \frac{\operatorname{th} u}{u} = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{q l^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u} = -\frac{q l^2}{12} \psi_2(u), \quad (45)$$

где

$$\psi_2(u) = \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u}.$$

Числовые значения функции $\psi_2(u)$ даны в таблице 4. При помощи уравнений (45) и (49) изгибающий момент посредине получится равным

$$M_1 = \frac{q l^2}{8} \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u} - \frac{q l^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{sh} u} = \frac{q l^2}{24} \frac{6(\operatorname{sh} u - u)}{u^2 \operatorname{sh} u} = \frac{q l^2}{24} \psi_2(u). \quad (51)$$

Прогиб посредине определяется уравнениями (43) и (48), которые дают

$$u_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384 E J} \frac{1}{\frac{5}{24} u^4} - 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{q l^4}{16 E J} \frac{(u - \operatorname{th} u)(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{sh} u} = \frac{q l^4}{384 E J} \varphi_2(u), \quad (52)$$

где

$$\varphi_2(u) = \frac{24}{u^4} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u \operatorname{ch} u - u}{\operatorname{sh} u} \right).$$

Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_2$ равны единице при $u=0$, т. е. когда действует только поперечная нагрузка. Когда продольная растягивающая сила увеличивается, каждая из этих функций уменьшается, т. е. продольные растягивающие силы уменьшают прогибы и изгибающие моменты в поперечно нагруженных растянутых стержнях. Применены вышеприведенной таблицы будут даны ниже при рассмотрении изгиба тонких пластинок (см. стр. 72).

ЗАДАЧИ

1. Найти наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент для растянутого стержня, нагруженного посредине.

Ответ.

$$(y)_{\max} = \frac{P l^3}{48 E J} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^3}, \quad M_{\max} = \frac{P l}{4} \frac{\operatorname{th} u}{u}.$$

2. Найти изгибающие моменты M_0 на концах растянутого стержня с заделанными концами, симметрично нагруженного двумя силами P , как показано на рис. 30.

Решение. Изгибающие моменты на концах получаются из уравнения

$$P \left(1 - \frac{\operatorname{ch} p b}{\operatorname{ch} \frac{p l}{2}} \right) + \frac{M_0 l}{2 E J} \frac{\operatorname{th} u}{u} = 0.$$

3. Найти изгибающие моменты на концах растянутого стержня с заделанными концами, нагруженного треугольной нагрузкой, показанной на рис. 29.

Указание. Воспользоваться решением задачи 3 на стр. 37, а также уравнением (46).

4. Найти наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент для стержня, показанного на рис. 35.

Указание. Считать стержень, как половину растянутого стержня, нагруженного посредине.

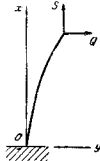


Рис. 35.

7. Представление кривой изгиба тригонометрическим рядом

При рассмотрении изгиба балок иногда очень удобно представить кривую изгиба в виде тригонометрического ряда¹⁾. Это имеет то преимущество, что по всей длине пролета справедливо единое математическое выражение изогнутой оси. Взяв случай балки с опертыми концами²⁾, показанного на рис. 36, можно охарактеризовать прогиб в любой ее точке следующим рядом:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (6)$$

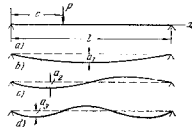


Рис. 36.

Геометрически это означает, что изогнутая ось может быть получена наложением простых синусов, таких, как показаны на рис. 36, б, в, с и d.

¹⁾ См. статью автора «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок», Известия Киевского политехнического института, 1909; см. также Н. М. Westergaard, Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., т. 47, стр. 455—533.

²⁾ В других случаях расчет становится слишком сложным для большинства практических целей.

и т. д. Первый член ряда (а) представляет первую кривую, второй член представляет вторую кривую и т. д. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 ряда дают наибольшие ординаты этих синусоид, а числа 1, 2, 3, ... дают число полуциклов. Наилучшему выбором коэффициентов a_1, a_2, \dots ряда (уравнение (а)) можно представить любую изогнутую ось ϵ со степенью точности, которая зависит от числа взятых членов. Эти коэффициенты можно вычислить путем рассмотрения потенциальной энергии деформации балки (гл. I, уравнение (191), стр. 268), которая определяется выражением

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (b)$$

Вторая производная от y на основании уравнения (а) будет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - a_2 \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - a_3 \frac{3^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \dots$$

В уравнение (b) входит квадрат этой производной, который содержит члены двух родов:

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad 2a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{l^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Непосредственным интегрированием можно показать, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

и

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Следовательно, в интеграле уравнения (b) все члены, содержащие произведения коэффициентов такие, как $a_n a_m$ обращаются в нуль и остаются только члены с квадратами этих коэффициентов. Тогда

$$U = \frac{EI\pi^4}{4l^3} (1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots) = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (53)$$

В предыдущем изложении (см. гл. I, уравнение (а), стр. 303²) было показано, что если упругая система претерпевает малое перемещение из своего положения равновесия, то соответствующее увеличение потенциальной энергии деформации системы равно работе, совершенной внешними силами на таком перемещении. Когда упругая кривая представляется рядом (а), бесконечно малые перемещения можно получить бесконечно малыми вариациями коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots . Если любую коэффициент a_n дать приращение da_n , то вместо члена $a_n \sin(n\pi x/l)$ мы будем иметь в ряде (а) член

$(a_n + da_n) \sin(n\pi x/l)$, другие же члены останутся без изменений. Это приращение da_n коэффициента a_n представляет дополнительный бесконечно малый прогиб, изображаемый синусоидой $da_n \sin(n\pi x/l)$, наложенной на первоначальную кривую. На этом дополнительном прогибе внешние силы совершают работу. В случае только одного груза P , приложенного на расстоянии ϵ от левой опоры, точка приложения груза претерпевает вертикальное перемещение $da_n \sin(n\pi \epsilon/l)$ и груз совершает работу, равную

$$da_n \left(\sin \frac{n\pi \epsilon}{l} \right) P. \quad (c)$$

Приращение потенциальной энергии деформации, определяемой по уравнению (53), вследствие приращения da_n коэффициента a_n равняется

$$dU = \frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n. \quad (d)$$

Приравняв это работе, определяемой уравнением (c), получаем

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n = P \sin \frac{n\pi \epsilon}{l},$$

откуда

$$a_n = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi \epsilon}{l}.$$

Из этого уравнения мы можем определить каждый из коэффициентов ряда (а), и уравнение кривой изгиба получится в таком виде:

$$y = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} \left(\sin \frac{\pi \epsilon}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi \epsilon}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi \epsilon}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (54)$$

При помощи этого уравнения можно вычислить прогиб для любого значения x . Например, прогиб посередине, когда груз находится посередине ($\epsilon = x = l/2$) будет

$$f = (y)_{x=l/2} = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Взяв только один первый член этого ряда, получим

$$f = \frac{2P l^3}{EI\pi^4} = \frac{Pl^3}{48,7EI}.$$

Сравнение с уравнением (90) гл. I (стр. 130) показывает, что мы получили 48,7, и во время как точное значение было 48, так что ошибка, сделанная при использовании только одного первого члена вместо всего ряда, составляет около 1,5%. Такая точность достаточна во многих практических случаях; мы будем иметь другие примеры, где достаточная точность получится при использовании только одного члена ряда (а).

На основании решения, полученного для одного груза, можно исследовать с помощью метода наложения более сложные задачи. Например, рассмотрим балку, несущую равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Каждый элементарный груз qdc , находящийся на расстоянии ϵ от левой опоры, вызывает прогиб, получаемый по уравнению (54) при

¹ См. Вегерли, Fourier Series and Spherical Harmonics, §§ 19—24. См. также Osgood, Advanced Calculus, стр. 391, 1928.

² См. также S. Timoshenko and D. H. Young, Theory of Structures, New York, стр. 229, 1945.

подстановке в него $P = q \, dc$, равный

$$dy = \frac{2q \, dc \, l^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4}.$$

Интегрируя это по c в пределах от $c=0$ до $c=l$, получаем прогиб, вызываемый всей нагрузкой:

$$y = \frac{4q \, l^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (55)$$

Если мы воспользуемся только одним первым членом, прогиб посредине равномерно нагруженной балки будет

$$f = \frac{4q \, l^4}{EJ\pi^5} = \frac{q \, l^4}{76,5EJ}.$$

Сравнивая это решение с точным решением

$$f = \frac{5}{384} \frac{q \, l^4}{EJ},$$

находим, что ошибка при использовании только первого члена в этом случае составляет меньше $1/200$.

Тригонометрический ряд (а) особенно удобен в том случае, когда в дополнение к поперечной нагрузке балка подвергается действию продольной сжимающей или растягивающей силы. В случае балки, показанной на рис. 37, шарнир B приближается к неподвижному шарниру A при изгибе балки на величину, равную разности между длиной изогнутой оси и длиной хорды AB). Для пологой кривой эта разность равняется (см. т. I, стр. 157)

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (56)$$

Если величина u задана уравнением (а), то квадрат ее производной содержит члены двух видов:

$$a_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad 2a_n a_m \frac{n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

Интегрированием можно показать, что

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Тогда уравнение для определения λ получится в таком виде:

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \quad (57)$$

¹⁾ При малых прогибах продольное относительное укорочение балки под действием осевой силы можно считать постоянным.

Для вычисления коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots в ряду (а) мы опять рассмотрим работу, совершенную внешними силами на бесконечно малом перемещении $da_n \sin(n\pi x/l)$ из положения равновесия. В случае, представленном на рис. 37, при таком перемещении и груза P и продольная сила S совершают работу. Перемещение λ вследствие приращения da_n коэффициента a_n увеличивается на величину

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

Тогда работа, совершенная силой S , будет равна

$$S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

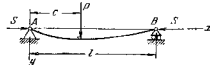


Рис. 37.

Эта работа прибавляется к работе (выражение (с)), совершенной поперечной силой, и сумма этих работ приравнивается приращению потенциальной энергии (уравнение (d)). Это даст нам следующее уравнение для определения любого коэффициента a_n в уравнении (а):

$$P \sin \frac{n\pi c}{l} da_n + S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^5} n^4 a_n da_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^5}{EJ\pi^4} \frac{1}{n^2 \left(n^4 - \frac{S^2}{EJ\pi^4} \right)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Обозначив отношение продольной силы к критическому значению осевой нагрузки (см. стр. 31) через $\alpha = S^2/EJ\pi^4$, получаем

$$a_n = \frac{2Pl^5}{EJ\pi^4} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Подставляя это значение в уравнение (а), придаем уравнению кривой изгиба следующий вид:

$$y = \frac{2Pl^5}{EJ\pi^4} \left(\frac{1}{1-\alpha} \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^2(2^2-\alpha)} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) = \\ = \frac{2Pl^5}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (58)$$

Сравнивая это с уравнением (54), выведенным для случая только поперечной нагрузки, видим, что прогиб бруса увеличивается благодаря действию продольной сжимающей силы S . Мы уже знаем, что первый член ряда (а) представляет хорошее приближенное значение для прогиба бруса; следовательно, уяснение прогиба, вызываемое продольной силой, может быть приближенно представлено отношением $1 : (1 - \alpha)$.

Это заключение также справедливо в том случае, когда действует несколько поперечных грузов в одном и том же направлении или когда на балку действует непрерывная нагрузка. Обозначив через f_0 наибольший прогиб, вызываемый действием только одной поперечной нагрузкой, мы можем с достаточной точностью предположить, что при одновременном действии

сжимающих сил S и поперечной нагрузки наибольший прогиб будет равен

$$f = \frac{f_0}{1-\alpha}. \quad (59)$$

Это выражение для наибольшего прогиба можно применить также и для вычисления изгибающих моментов в сжатом стержне. Например, в случае равномерно сжатого стержня с шарнирными концами наибольший изгибающий момент можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Sf_0}{1-\alpha}. \quad (60)$$

Если продольная сила является растягивающей, а не сжимающей, то разобранный выше метод сохранит силу, необходимо лишь в выражении для изогнутой оси (58) подставить α вместо α . Если мы воспользуемся только первым членом в этом выражении, то для прогиба посередине получим следующую приближенную формулу:

$$f = \frac{f_0}{1+\alpha}, \quad (61)$$

где f_0 означает прогиб, вызываемый только поперечными грузами. Необходимо заметить, что в случае продольных растягивающих сил α может быть больше единицы и что точность приближенного выражения (61) уменьшается с увеличением α . Например, в случае равномерно распределенной нагрузки ошибка в уравнении (61) при $\alpha=1$ составляет приблизительно 6,3%. При $\alpha=2$ ошибка равна 0,7% и при $\alpha=10$ она равна 1,7%.

В случае бруса с заделанными концами для вычисления прогиба посередине пролета можно вывести следующее приближенное выражение, аналогичное выражению (61):

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha}{4}}, \quad (62)$$

где f_0 есть прогиб посередине, вызываемый действием только одних поперечных нагрузок, а α имеет то же значение, что и ранее.

Применение этих приближенных формул будет показано ниже при рассмотрении прогибов тонких прямоугольных пластинок. Метод тригонометрического ряда также может быть распространен на расчет балок переменного поперечного сечения¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь бесконечным рядом, вывести уравнение кривой изгиба балки, показанной на рис. 36, а, если на нее действует пара сил, приложенная на левом конце.

Решение. Принимая c за весьма малую величину и подставляя $Pc = M$, $\sin(\pi c/l) \approx (\pi c/l)$ в ряд (54), мы получим

$$y = \frac{2Ml^3}{EJ\pi^3} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

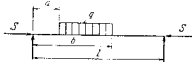


Рис. 38.

2. Составить уравнение изогнутой оси свободно опертого сжатого стержня, нагруженного, как показано на рис. 38.

¹⁾ См. статью М. Heinen, J. Appl. Mech., т. 4, стр. А-49, 1937.

$$\text{Отмет. } y = \frac{2ql^4}{EJ\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-\alpha)} \left(\cos \frac{\pi n a}{l} - \cos \frac{\pi n b}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

3. Найти прогиб f конца B вертикальной колонны AB . Колонна заделана в A и нагружена в B , как показано на рис. 39.

Отмет.

$$f = \frac{Ql^2}{3EJ} \frac{1}{1-\alpha},$$

$$\alpha = \frac{P(2l)^2}{EJ\pi^2}.$$

где

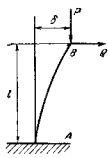


Рис. 39.

8. Прогиб брусев с малой начальной кривизной

Если брус с малой начальной кривизной изгибается только одними поперечными силами, то прогибы можно вычислять по методу, примененному для прямого бруса. Однако условия будут совершенно иными, если имеются кроме поперечных сил еще и продольные силы. Малая начальная кривизна вносит значительное изменение в действие этих продольных сил на прогиб. Решение этой сложной задачи можно значительно упростить, используя тригонометрический ряд для представления как начальной формы кривой, так и прогибов, вызываемых изгибом¹⁾. Предполагаем, как и ранее, что кривой брус имеет плоскость симметрии, в которой действуют внешние силы, и считаем, что этот брус свободно опирается на концах. Пусть y_0 означает начальные ординаты осевой линии бруса, измеренные от корды, соединяющей центры тяжести концов, и y_1 — прогибы, вызываемые внешними силами, так что полные ординаты после изгиба будут равны

$$y = y_0 + y_1. \quad (a)$$

Пусть для начальной изогнутой оси мы имеем ряд

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots, \quad (b)$$

и пусть прогиб, вызываемый грузом, будет

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (c)$$

В этом случае можно пользоваться тем же самым выражением (уравнение (33)) для потенциальной энергии деформации, что и для прямых брусев. Для нагрузки, показанной на рис. 37, необходимо при вычислениях работы, совершенной продольными силами S , заменить величину λ (см. выражение (36)) величиной

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{d(y_1 + y_0)}{dx} \right]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4l} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right). \quad (63)$$

¹⁾ См. статью автора, «Festschrift zum 70. Geburtstag August Föppl», Berlin, стр. 74, 1924.

Это является продольным перемещением одного конца изогнутого стержня относительно другого конца при изгибе.

Поступим так же, как и в случае прямых брусев (стр. 49) и дадим стержню бесконечно малый дополнительный прогиб $da_n \sin(\pi x/l)$. Работа, произведенная продольными силами S при этом прогибе, равна

$$S \frac{\partial (\lambda_1 - \lambda_0)}{\partial a_n} da_n = S \frac{n^2 \pi^2}{2l} (a_n + b_n) da_n.$$

Работа же, совершаемая грузом P , равна

$$P \sin \frac{\pi c}{l} da_n.$$

а приращение потенциальной энергии деформации по уравнению (53) будет

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n.$$

Уравнением для вычисления a_n является

$$\frac{EJ\pi^4}{2l} n^4 a_n da_n = P \sin \frac{\pi c}{l} da_n + S \frac{n^2 \pi^2}{2l} (a_n + b_n) da_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2P l^2 \sin \frac{\pi c}{l} + S n^2 l^2 b_n}{EJ\pi^4 n^4 - S n^2 \pi^2 l^2}.$$

Подставляя уравнение (с) и пользуясь обозначением $\alpha = \frac{S l^2}{EJ\pi^2}$, получаем

$$y_1 = \frac{2P l^2}{EJ\pi^4} \left(\frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{1 - 2\alpha} + \dots \right) + \alpha \left(\frac{b_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + \frac{b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{1 - 2\alpha} + \dots \right). \quad (64)$$

Первый член правой части уравнения (64) представляет прогиб прямого бруса (см. уравнение (58)), а то время как второй дает дополнительный прогиб благодаря начальной кривизне.

Возьмем, например, брус, который имеет начальный прогиб $y_0 = b \sin(\pi x/l)$. Наибольший прогиб будет посредине пролета и равняется b . Если на брус действуют только одни продольные силы S ($P=0$), то прогиб посредине, вызываемый этими силами, получается из уравнения (64) путем подстановки $P=0$, $b_1 = b$, $b_2 = b_3 = \dots = 0$. Тогда

$$y_1 = \frac{ab \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha}. \quad (d)$$

Полные ординаты осевой линии после изгиба будут равны

$$y = y_1 + y_0 = \frac{ab \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + b \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{b}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (65)$$

Благодаря продольным сжимающим силам S ординаты осевой линии увеличиваются в отношении $1:(1-\alpha)$, т. е. увеличение ординат зависит от вели-

чины α , которая представляет собой отношение продольной силы к критической силе.

Если вместо сжимающих сил на брус действуют продольные растягивающие силы, то в предыдущие уравнения вместо α необходимо подставить $-\alpha$. В частном случае, в котором $y_0 = b \sin(\pi x/l)$, ординаты осевой линии после деформации получатся равными

$$y = \frac{b}{1 + \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (66)$$

Отсюда видно, что продольная растягивающая сила уменьшает начальные ординаты. Взяв, например, продольную силу, равную ее критическому значению ($\alpha = -1$), мы найдем $y = \frac{1}{2} b \sin \frac{\pi x}{l}$, т. е. эта продольная сила уменьшает начальные ординаты изогнутой оси бруса наполовину.

показанной на рисунке пунктиром, находятся в равновесии с силой P . Следовательно,

$$-2b \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cos br \, d\theta = P.$$

Подставляя вместо σ_r его выражение (а), мы получаем $k = \frac{2}{\pi}$, и уравнение (а) становится

$$\sigma_r = \frac{-2P \cos \theta}{\pi br}. \quad (67)$$

Если мы рассмотрим горизонтальную плоскость mn в расстоянии h от ребра пластинки (рис. 40), то нормальное напряжение, действующее по этой плоскости, будет

$$\sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta = \frac{-2P \cos^2 \theta}{\pi br} = \frac{-2P \cos^2 \theta}{\pi bh}. \quad (68)$$

Отсюда видно, что давление быстро уменьшается с увеличением угла θ . Также видно, что напряжения увеличиваются с уменьшением расстояния h . Зная напряжения, вызываемые действием одного сосредоточенного груза и пользуясь методом наложения, мы можем легко разобрать случаи, в которых действуют несколько грузов.

Если сосредоточенная сила действует в середине прямоугольной балки узкого поперечного сечения высотой h , то большие напряжения вследствие концентрации, определяемые по формуле (67), накладываются на напряжения от изгиба балки, и в результате получается сложное распределение напряжений вблизи точки приложения груза. Эти неравномерности в распределении напряжений, вызываемые сосредоточенным грузом, носят местный характер и имеют важное значение лишь в области, непосредственно примыкающей к точке приложения груза. Если мы рассмотрим поперечное сечение балки на расстоянии от груза большим, скажем, чем половина высоты балки, то распределение напряжений в этом поперечном сечении достаточно точно будет определяться по простой формуле для балок.

Определяя равнодействующую горизонтальных составляющих радиальных давлений $b\sigma_r d\theta$ для каждой половины очерченного пунктиром полуокруга на рис. 40, а, можно показать, что сосредоточенная сила P вызывает расклинивающее действие, представленное на рис. 40, b двумя равными и противоположными силами величиной P/π . В случае балки высотой h и толщиной b эти силы, действующие на расстоянии $h/2$ от оси балки, вызывают в срединном поперечном сечении не только растягивающие напряжения, определяемые формулой

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi hb}, \quad (b)$$

ГЛАВА III

ОСОБЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК

9. Местные напряжения при изгибе балок

Элементарная формула для напряжения при изгибе в призматических стержнях дает удовлетворительные результаты только на некотором расстоянии от точки приложения груза. Вблизи этой точки будут неравномерности в распределении напряжений. В случае узкого прямоугольного поперечного сечения эти неравномерности можно изучить при помощи строгого решения для распределения напряжений в бесконечно большой пластинке, подверженной действию сосредоточенной силы P (рис. 40). Сила P действует в срединной плоскости пластинки и перпендикулярно ребру пластинки. В этом случае распределение напряжений является простым радиальным распределением напряжений¹⁾. Такой элемент, как показанный у точки A , подвергается простому сжатию в радиальном направлении, и напряжение будет

$$\sigma_r = -k \frac{P \cos \theta}{br}, \quad (a)$$

где r есть радиальное расстояние от точки приложения груза и b — толщина пластинки. Коэффициент k определяется из того обстоятельства, что напряжения σ_r , распределенные по длине полуокружности,

¹⁾ См. S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, New York, стр. 85, 1951. Местные напряжения в заделанных балках, подверженных действию сосредоточенной нагрузки, были изучены E. W. Parkes, Proc. Roy. Soc., A, т. 231, № 186, стр. 379—387, 1955.

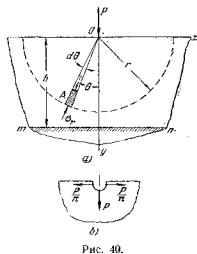


Рис. 40.

но также и напряжения от изгиба, даваемые выражением

$$\sigma_x'' = -\frac{Ph}{2\pi} \frac{y}{J_z}, \quad (с)$$

в котором $Ph/2\pi$ есть изгибающий момент, вызываемый горизонтальными силами P/π , y — расстояние от оси балки, принятое положительным вниз, и $J_z = bh^3/12$ — момент инерции поперечного сечения. Накладывая напряжения уравнений (b) и (с) на напряжения от изгиба, определяемые по обычной формуле для балок, находим, что растягивающее напряжение в наиболее удаленном полочке балки наружного поперечного сечения равняется

$$(\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{bh^3} + \frac{P}{\pi bh} - \frac{3P}{\pi bh} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{bh^3} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{h}{l}\right). \quad (d)$$

Второй член в скобках представляет собой напряжение, вызываемое расклинивающим действием груза P . Видно, что в случае коротких балок это напряжение достигает значительной величины.

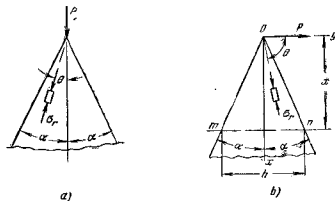


Рис. 41.

Уравнение (d) было выведено для балки узкого прямоугольного поперечного сечения, но оно может быть использовано для двутавровых балок. Предполагая, что местное действие груза P будет восприниматься полностью стенкой балки, опять получим расклинивающие силы P/π , и соответствующие напряжения будут

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi F}, \quad \sigma_x'' = -\frac{Ph}{2\pi} \frac{y}{J_z},$$

где F и J_z будут соответственно представлять площадь и момент инерции поперечного сечения балки. Накладывая эти напряжения на

напряжения, определяемые по простой формуле для балок, мы получаем формулу для определения наибольшего растягивающего напряжения

$$(\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} = \left(\frac{Pl}{4} - \frac{Ph}{2\pi}\right) \frac{h}{2J_z} + \frac{P}{\pi F}. \quad (е)$$

Напряжение, вычисленное по этой формуле, удовлетворительно согласуется с результатами опытов¹⁾.

Чтобы исследовать местные напряжения на опорах балки узкого прямоугольного поперечного сечения, мы можем использовать известные решения²⁾ для двух случаев клина, нагруженного, как показано на рис. 41. В этих случаях опять имеем простое радиальное распределение напряжений и можем воспользоваться формулой (а) для радиального сжимающего напряжения. Постоянная k для случая сжатия клина (рис. 41, а) находится из уравнения

$$2b \int_0^{\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = 2 \int_0^{\alpha} kP \cos^2 \theta d\theta \equiv kP \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}.$$

Тогда из уравнения (а) получаем напряжение

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{br \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}. \quad (69)$$

В случае изгиба клина (рис. 41, б) угол θ опять измеряется от направления силы P , и уравнение статики становится

$$b \int_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = -P,$$

откуда

$$k = -\frac{1}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}}.$$

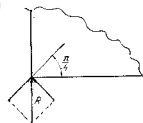


Рис. 42.

Тогда мы получим для радиального сжимающего напряжения

¹⁾ См. статью Arnold W. Hendry, Proc. Soc. Exp. Stress. Anal., т. 7, стр. 91, 1949.

²⁾ См. Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 96, 1951.

формулу

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{br \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)}. \quad (70)$$

Отсюда видно, что если θ больше $\pi/2$, радиальное напряжение получается положительным, т. е. растягивающим.

Объединяя два решения, по уравнениям (69) и (70) можем получить распределение радиальных напряжений у опоры прямоугольной балки (рис. 42).

10. Касательные напряжения в балках переменного поперечного сечения

Пользуясь уравнением (70) предыдущего параграфа, рассмотрим теперь напряжения от изгиба в консоли, имеющей форму клина (рис. 41, б). Взяв поперечное сечение mn , перпендикулярное оси x , получим (см. т. I, уравнения (17) и (18), стр. 41)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \sin^2 \theta = \frac{My}{J_z} \frac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta = \frac{P}{bh} \frac{16y^2}{h^2} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где

$$h = 2x \operatorname{tg} \alpha, \quad J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad M = -Px.$$

По нейтральной плоскости клина $\theta = \pi/2$ и нормальные и касательные напряжения становятся равными нулю. Наибольшие нормальные и касательные напряжения имеют место при $\theta = (\pi/2) \pm \alpha$. Они могут быть вычислены из уравнений (а), что дает

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\max} &= -\beta \frac{Mh}{2J_z}, \\ (\tau_{xy})_{\max} &= 3\beta \frac{P}{bh}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где

$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha \cos^4 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

При $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ и 20° коэффициент β имеет соответственно значения 1,00, 0,970, 0,947 и 0,905.

Из первой формулы (b) видно, что наибольшее нормальное напряжение σ_x приблизительно такое же, какое получается на основании обычной формулы для балок, при условии, что угол α достаточно мал. При $\alpha = 20^\circ$ ошибка, получающаяся при использовании простой

формулы для балок, как это видно из значения коэффициента β , составляет приблизительно $10^3/9$. Наибольшее касательное напряжение, определяемое по второй формуле (b), приблизительно в три раза больше среднего касательного напряжения P/bh и имеет место в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Этот результат прямо противоположен полученным для призматических стержней (т. I, стр. 106). Во многих случаях практики касательные напряжения не имеют большого значения и рассматриваются лишь нормальные напряжения при изгибе. Тогда формула для определения наибольшего напряжения от изгиба, выведенная для призматических балок, может быть также использована с достаточной точностью для стержней переменного поперечного сечения при условии, что изменение поперечного сечения не является слишком резким.

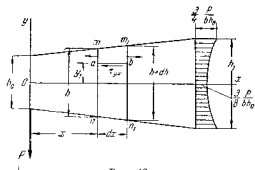


Рис. 43.

В предположении, что простая формула для балок может быть использована с достаточной точностью при вычислении нормальных напряжений от изгиба в балках переменного поперечного сечения, величина касательных напряжений в этих балках может быть вычислена при помощи метода, уже примененного для призматических балок (см. т. I, стр. 105). Предположим, что прямоугольная балка переменной высоты h и постоянной ширины b изгибается грузом P , приложенным на конце (рис. 43). Взяв два смежных поперечных сечения mn и m_1n_1 и вырезав элемент mm_1ba горизонтальной плоскостью ab , найдем величину касательных напряжений τ_{xy} из уравнения равновесия этого элемента

$$b \int_{y_1}^{(h+dh)/2} (\sigma_x + d\sigma_x) dy - b \int_{y_1}^{h/2} \sigma_x dy = b\tau_{xy} dx, \quad (c)$$

где

$$\sigma_x = \frac{12Px}{bh^3}, \quad \sigma_x + d\sigma_x dx = \frac{12Px}{b} \left[\frac{x}{h^3} + \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h^3} \right) dx \right].$$

Подставляя в уравнение (с), получаем

$$\frac{3Px}{h^2} dh + 6P \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h} \right) dx \left(\frac{h}{4} - y_1^2 \right) = b \tau_{yx} dx,$$

откуда

$$\tau_{yx} = \frac{3Px}{bh^2} \frac{dh}{dx} + \frac{6P}{b} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h} \right). \quad (d)$$

Если h дано как некоторая функция x , то из этого уравнения можно легко вычислить τ_{yx} . Предположим, например, что h является линейной функцией x и что $h_1 = 2h_0$ (рис. 43). Тогда имеем $h = h_0(1 + x/l)$ и получаем из уравнения (d) $\tau_{yx} = \frac{6Ph_0}{bh_0^2} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{y_1}{h} \right)^2 - \frac{2x}{l} - 1 \right]$. Отсюда видно, что распределение касательных напряжений зависит не только от y_1 , но также и от расстояния x от нагруженного конца. При $x=0$ мы получаем распределение напряжений по параболе, как для призматической прямоугольной балки. Для заделанного конца при $x=l$ получаем

$$\tau_{yx} = \frac{3P}{8bh_0} \left(1 + \frac{y_1^2}{h_0^2} \right).$$

Это распределение напряжений показано на рис. 43 заштрихованной площадью.

Формула (d) была выведена в предположении частного случая нагружения, показанного на рис. 43. Замечая, что изгибающий момент в этом случае равен Px , и подставляя M в (d) вместо Px , получаем

$$\tau_{yx} = \frac{3M}{bh^2} \frac{dh}{dx} + \frac{6}{b} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{h^2} \right), \quad (e)$$

которое можно применить для любого нагружения балки.

11. Полезная ширина тонких полок

Формула для простого изгиба (см. т. I, уравнение (55), стр. 87) показывает, что нормальные напряжения в балке пропорциональны расстоянию от нейтральной оси. Это заключение справедливо до тех пор, пока мы имеем дело с балками, для которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с их длиной, и до тех пор, пока мы рассматриваем точки, находящиеся на значительном расстоянии от концов балки. В практических приложениях мы иногда применяем балки с широкими полками, для которых элементарная формула балки не может быть применена с достаточной точностью. Возьмем в качестве примера случай балки, состоящей из ребра и широкой полки, как показано на рис. 44. Предполагая, что балка свободно опирается на концах и нагружена в срединной плоскости xy , мы замечаем, что имеются касательные напряжения, действующие между полками и реб-

ром по поверхностям mn (рис. 44, а) и направленные, как показано на рис. 44, б. Видно, что эти напряжения стремятся уменьшить прогиб ребра, т. е. сделать его более жестким. В то же самое время они вызывают сжатие полки. Рассматривая полку по одну сторону ребра как прямоугольную пластинку, подверженную действию касательных усилий вдоль одного края (рис. 44, в), мы видим, что сжимающие напряжения распределяются неравномерно по ширине b полки; точный анализ показывает¹⁾, что эти напряжения распределены так,

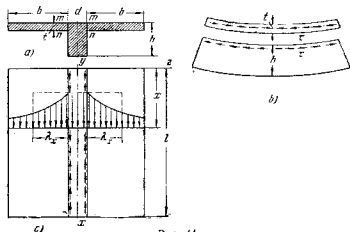


Рис. 44.

как показано на рис. 44, с, наибольшее же напряжение в полке будет таким, как в верхних волокнах ребра. Из этой неравномерности распределения напряжений можно заключить, что, применяя к балке на рис. 44, а простую формулу для наибольшего напряжения от изгиба, мы должны воспользоваться уменьшенной шириной $2x_c$ вместо действительной ширины $2b$ двух полок, для того чтобы получить точное значение наибольшего напряжения. Эта уменьшенная ширина, обычно называемая полезной шириной, может быть вычислена, если известно распределение сжимающих напряжений, показанное заштрихованной площадью на рис. 44, с. Необходимо лишь сделать площадь прямоугольника, указанного на рисунке пунктиром, равной заштрихованной

¹⁾ Рассмотрение точного решения, полученного Th. v. Kármán'ом, дано в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 171, 1951. См. также W. Metzger, Luftfahrtforsch., т. 4, стр. 1, 1929; K. Girkmann, Stahlbau, т. 6, стр. 98, 1933; H. Reissner, Z. angew. Math. u. Mech., т. 14, стр. 312, 1934; E. Reissner, Stahlbau, т. 7, стр. 206, 1934; E. Chwalla, Stahlbau, т. 9, стр. 73, 1936; L. Beschkin, Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., т. 5, стр. 65, 1937—1938.

площади. Величина $2\lambda_x$ обычно изменяется по пролету балки, так как она зависит от размеров балки, а также от формы эпюры изгибающих моментов.

В частном случае, когда ширина полки весьма велика, скажем $2b \gg l$, и эпюра изгибающих моментов представлена синусоидой

$$M = M_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (а)$$

уменьшенная ширина становится постоянной и равной

$$2\lambda_x = \frac{4l}{\pi(1+\mu)(3-\mu)},$$

где μ — коэффициент Пуассона. При $\mu = 0,3$ мы получаем

$$2\lambda_x = 0,363l. \quad (71)$$

Следовательно, в этом частном случае действительная балка может быть заменена эквивалентной тавровой балкой постоянного поперечного сечения и с шириной двух полок, равной $0,363l$. Применяя к этой балке простую формулу, мы получаем такое же наибольшее напряжение, как и для действительной балки.

В общем случае поперечной нагрузки эпюра изгибающих моментов может быть представлена синусоидальным рядом

$$M_x = \sum M_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (б)$$

где коэффициенты M_n могут быть вычислены в каждом частном случае по известной формуле¹⁾

$$M_n = \frac{2}{l} \int_0^l M_x \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (с)$$

В случае равномерной нагрузки, например, мы имеем $M_x = \frac{qx(l-x)}{2}$, и формула (с) даст

$$M_n = \frac{4q l^2}{n^2 \pi^3}, \quad (д)$$

где $n = 1, 3, 5, \dots$

Имея коэффициенты M_n для ряда (б), мы получаем полезную ширину из точного решения, которое в случае большой ширины полок дает

$$\frac{l}{2\lambda_x} = \xi \left[\sum_{n=1, 3, 5} \frac{M_n}{\frac{M_n \sin(n\pi x/l)}{4 + (k/\beta) \lambda x}} - 4 \right], \quad (72)$$

где $\beta = t/dh$ есть отношение площади t к площади поперечного сечения ребра и

$$k = \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{4} = 0,878 \quad \text{при} \quad \mu = 0,3.$$

Взяв, например, случай балки с равномерно распределенной нагрузкой и подставив уравнение (д) вместо M_x в формулу (72), мы найдем, что для различных значений отношения β изменение полезной ширины по длине балки такое, как показано на рис. 45. Видно, что в средней части пролета полезная ширина изменяется очень мало и является приблизительно такой же, как и синусоидальная эпюра изгибающих моментов (см. формулу (71)). Если полезная ширина найдена из формулы (72), то наибольшее напряжение и наибольший прогиб найдутся при помощи простой формулы для эквивалентной балки.

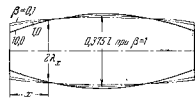


Рис. 45.

Мы рассмотрим случай, в котором полки балки имеют очень большую ширину. Имеются также тонкие решетки для случая, в котором полки не очень широки, а также для случая длинной прямоугольной плиты, усиленной системой одинаковых и равноотстоящих друг от друга ребер. Во всех этих случаях задача сводится к вычислению напряжений и прогибов в эквивалентной балке¹⁾.

Задача такого же общего характера, как и разобранный выше, имеет место при проектировании самолетов. Рассмотрим коробчатую балку (рис. 46), образованную двумя швеллерами, к полкам которых прикреплены заклепки или сваркой два тонких листа.

Если такая балка заделана на левом конце и нагружена, как консоль, двумя силами, приложенными к швеллерам на другом конце, то элементарная теория изгиба даст растягивающие напряжения от изгиба в листе $ABCD$, равномерно распределенные по любому поперечному сечению, параллельному BC . Однако в действительности лист воспринимает, как указано на рис. 46, растягивающие напряжения, вызываемые касательными напряжениями, которые передаются швеллерам его краям. При этом распределение растягивающих напряжений по ширине листа не будет равномерным; они будут большеши у краев, чем в середине. Это отклонение от равномерного распределения

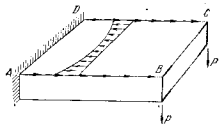


Рис. 46.

¹⁾ Эти точные решения нашли применение в технических условиях для бетонных плит, усиленных ребрами. При проектировании самолетов наличие неравномерного распределения напряжений в широких полках учитывается путем применения приближенной теории, которая изложена в статьях P. Kuhl'na, Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Repts. № 608, 1937 и № 636, 1938. См. также П. Ebn'er, Luftfahrtforsch., т. 14, стр. 93, 1937 и т. 15, стр. 527, 1938.

напряжений, предполагаемого по элементарной теории, известно как запоздалый сдвиг, так как оно включает деформацию сдвига в листах. Задача была решена на основании рассмотрения энергии деформации при некоторых упрощающих допущениях¹⁾.

12. Ограничения метода наложения

При рассмотрении изгиба балок было показано, что вычисление прогибов можно значительно упростить с помощью метода наложения (см. т. I, стр. 143). Этот метод может быть использован при условии, что изгиб балки не вносит каких-либо изменений в действие внешних сил. Например, малые прогибы балки от поперечных нагрузок не изменяют эпюры изгибающих моментов от этих нагрузок, и метод наложения может быть успешно использован. Но если мы имеем изгиб совместный с осевым растяжением или сжатием, то прогиб, производимый поперечными нагрузками, изменяет действие осевых сил, и последние вызывают не только осевое растяжение или сжатие, но также и некоторый дополнительный изгиб. В таких случаях, как мы уже видели (п. 4), накладываются некоторые ограничения на метод наложения; мы можем использовать этот метод только в отношении поперечных нагрузок, предполагая, что осевая сила всегда остается постоянной. Имеются другие случаи, в которые малые прогибы балки могут вносить значительные изменения в действие сил. В таких случаях метод наложения неприменим. Некоторые примеры такого рода будут теперь обсуждены.

В качестве первого примера рассмотрим такой изгиб консоли AB (рис. 47), в процессе которого происходит постепенное прикосновение консоли к жесткой цилиндрической опорной поверхности AC , имеющей постоянную кривизну $1/R$ и горизонтальную касательную в точке A . Очевидно, если кривизна балки на конце A , даваемая формулой

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} = \frac{Pl}{EI_z}, \quad (а)$$

меньше, чем кривизна опоры $1/R$, консоль будет касаться поверхности AC только в точке A , и прогиб f на конце B будет дан известной формулой

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z}. \quad (б)$$

¹⁾ См. статьи E. Reissner's, *Quart. Appl. Math.* т. 4, стр. 268, 1946; J. Hadji-Aryris, *Aeronaut. Research Council (Brit.) Repts. and Mem.*, № 2038, 1944; J. Hadji-Aryris and H. L. Cox, там же, № 1969, 1944. В этих статьях даны ссылки на ранее опубликованные статьи.

Из уравнения

$$\frac{1}{r} = \frac{Pl}{EI_z} = \frac{1}{R} \quad (с)$$

мы можем получить предельное значение груза P , при котором балка начинает приходить в соприкосновение с цилиндрической опорной поверхностью за точкой A . Пусть $P_1 = EI_z/R$ будет таким предельным значением груза; тогда при $P > P_1$ часть AD балки будет опираться, как указано на рис. 47 пунктиром. Длина x несопертой части консоли получается из условия, что в точке D кривизна $1/r$ балки равна кривизне опорной поверхности; следовательно,

$$\frac{Px}{EI_z} = \frac{1}{R},$$

и мы получаем

$$x = \frac{EI_z}{PR}. \quad (д)$$

Полный прогиб на конце B консоли состоит из трех частей: 1) из прогиба части DB балки как простой консоли, который равняется

$$f_1 = \frac{Px^3}{3EI_z} = \frac{(EI_z)^2}{3P^2R^2}; \quad (е)$$

2) из прогиба вследствие наклона касательной в точке D , который равняется

$$f_2 = \frac{x(l-x)}{R} = \frac{EI_z}{PR^2} \left(l - \frac{EI_z}{PR} \right), \quad (ф)$$

и 3) из прогиба, представляющего расстояние точки D от горизонтальной касательной в точке A , который равняется

$$f_3 \approx \frac{(l-x)^2}{2R} = \left(l - \frac{EI_z}{PR} \right)^2 \frac{1}{2R}. \quad (г)$$

Складывая эти три части, получаем полный прогиб:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{l^3}{2R} - \frac{1}{6} \frac{(EI_z)^2}{P^2R^2}. \quad (и)$$

Это выражение для прогиба должно быть использовано вместо уравнения (б), если P больше предельного значения $P_1 = EI_z/R$. Заметим, что прогиб теперь уже не пропорционален P . Если в дополнение к P имеется груз Q , приложенный на конце B консоли, то полный прогиб не будет равен сумме прогибов, вызываемых грузами P и Q , если оба груза рассматривать действующими отдельно. Следовательно, метод наложения в этом случае неприменим.

В качестве второго примера рассмотрим случай равномерно нагруженной балки с заделанными концами, как показано на рис. 48. Предполагается, что при изгибе средний участок балки опирается на

жесткое горизонтальное основание так, что на этом участке прогиб постояен и равен f . Видно, что если прогиб в середине меньше чем f , то мы имеем обычный случай изгиба балки с заделанными концами.

Предельное значение q_1 интенсивности нагрузки получается из известного уравнения

$$\frac{1}{384} \frac{q_1 l^3}{EJ_z} = f. \quad (i)$$

Для нагрузки интенсивности q_1 балка точно касается горизонтального основания в средней точке. С дальнейшим увеличением нагрузки q появляется реакция

$2X$ в точке контакта. Величина реакции может быть определена из уравнения

$$\frac{q_1^3}{384EJ_z} - \frac{2Xl^2}{192EJ_z} = f. \quad (j)$$

Это условие сохраняется до значения q_2 нагрузки, когда изгибающий момент и кривизна посредине балки обращаются в нуль. Значение q_2 можно найти из уравнения

$$\frac{q_2^3}{24} - \frac{2Xl}{8} = 0, \quad (k)$$

которое дает

$$2X = \frac{q_2^3}{3}.$$

Подставляя это значение в уравнение (j), мы получаем

$$\frac{1}{3} \frac{q_2^3}{384EJ_z} = f. \quad (l)$$

Сравнивая это с уравнением (i), мы находим, что $q_2 = 3q_1$. При интенсивности нагрузки, равной q_2 , элемент балки в середине становится прямым и касается горизонтального основания.

При интенсивности нагрузки большей чем q_2 участок CD балки будет опираться на основание, как показано на рис. 48. Эта часть остается прямой, она не имеет изгибающих моментов, а ее нагрузка уравновешивается равномерно распределенной реакцией. Вместе с тем на концах C и D сосредоточены реакции X будут действовать на неподпертые основаниям участки и балки. Длина a этих участков балки и величина X сосредоточенных реакций могут быть получены путем рассмотрения участка AC балки как консоли с равномерной нагрузкой q и с сосредоточенным грузом X на конце. Замечая, что поперечное сечение в C не поворачивается при изгибе, и пользуясь

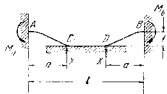


Рис. 48.

уравнениями (94) и (100) из т. I (стр. 134 и 135), получаем

$$\frac{qa^3}{6EJ_z} = \frac{Xa^2}{2EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{qa}{3}. \quad (m)$$

Другое уравнение получится из того условия, что прогиб в C равняется f . Пользуясь известными формулами для прогиба консолей, получаем

$$\frac{qa^4}{8EJ_z} - \frac{Xa^3}{3EJ_z} = f. \quad (n)$$

Решая уравнения (m) и (n), мы находим

$$a = \sqrt[4]{\frac{72fEJ_z}{q}}, \quad X = \sqrt[4]{\frac{8fEJ_z q^3}{9}}. \quad (o)$$

Отсюда непосредственно видно, что реакция X непропорциональна нагрузке. Численно наибольший изгибающий момент, который имеет место в заделанных концах, получается из уравнения

$$|M_a| = |M_b| = \frac{qa^2}{2} - Xa,$$

которое дает

$$M_a = M_b = \frac{qa^2}{6} = \sqrt{2fEJ_z q}. \quad (p)$$

Мы снова видим, что изгибающий момент не увеличивается в таком же отношении, как нагрузка. Следовательно, метод наложения не может быть применен.

ЗАДАЧИ

1. Найти прогиб консоли, показанный на рис. 47, если имеется равномерно распределенная нагрузка q вместо силы P .
2. Найти выражение для прогиба в центре балки, нагруженной посредине силой P (рис. 49) и опертой на две одинаковые цилиндрические поверхности радиуса R .

Решение. Когда груз P увеличивается, точки соприкосновения балки с опорными поверхностями перемещаются внутрь и пролет уменьшается; следовательно, прогиб увеличивается в меньшей степени, чем груз P . Угол α , определяющий положение точек соприкосновения, найдется из того условия, что в этих точках изогнутая ось касательна к опорным поверхностям; следовательно, для малых значений α имеем

$$a = \frac{P(l-2R\alpha)^2}{16fJ_z}.$$

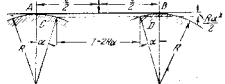


Рис. 49.

Имея α , мы получаем прогиб по середине пролета из уравнения

$$f = \frac{P(l - 2Ra)^2}{48EJ_z} - \frac{R\alpha^2}{2}.$$

3. Решить предыдущую задачу, предполагая, что балка заделана в точках A и B .

4. Решить задачу 2, если груз приложен не по середине пролета AB .

5. Длинная, равномерно нагруженная балка опирается на горизонтальное жесткое основание (рис. 50). Найти угол α поворота конца A и длину x , которая будет изгибаться моментом M_0 , приложенным на конце.



Рис. 50.

$$\frac{qx^3}{24EJ} = \frac{M_0 x}{6EJ}.$$

Угол поворота на конце A равняется

$$\alpha = \frac{M_0 x}{3EJ} - \frac{qx^3}{24EJ}.$$

6. Вертикальная сила P приложена к концу A призматического стержня AB , опертго по всей длине на горизонтальную жесткую плоскость (рис. 51). Исследовать изгиб бруса, предполагая, что P меньше, чем половина веса q бруса.

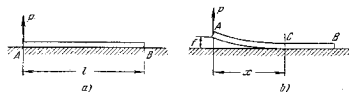


Рис. 51.

Решение. Участок BC бруса (рис. 51, b) остается прямым и изгибающий момент в сечении C равняется нулю. Следовательно, длина x участка AC бруса, подверженного изгибу, найдется из уравнения

$$\frac{qx^2}{2} = Px,$$

$$x = \frac{2P}{q}.$$

В точке C будет действовать сосредоточенная вертикальная реакция, равная P , и участок AC бруса находится в тех же условиях, что и равномерно нагруженная балка с пролетом x . Прогиб конца A бруса равняется

$$f = \frac{qx^3}{24EJ_z}.$$

ГЛАВА IV

ТОНКИЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

13. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности

Предположим, что прямоугольная пластинка постоянной толщины h изгибается по цилиндрической поверхности (рис. 52)¹⁾. В таком случае достаточно рассмотреть лишь одну полоску шириной единица, подобную AB , как балку прямоугольного поперечного сечения длиной l . Из условия непрерывности деформаций можно заключить, что при

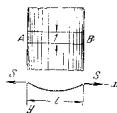


Рис. 52.

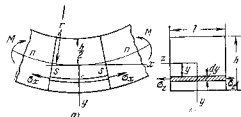


Рис. 53.

изгибе в поперечном сечении полоски не будет такого искажения, как показано на рис. 82, b т. I, стр. 86. Следовательно, волокно, равное по длине полоске, как, например, ss (рис. 53), испытывает не только продольное растягивающее напряжение σ_x , но также растягивающее напряжение σ_z в поперечном направлении, которое должно быть таким, чтобы воспринимать поперечному сокращению волокна. Мы предполагаем, как и прежде (см. т. I, стр. 85), что поперечные сечения полоски остаются плоскими при изгибе. Следовательно, относительные удлинения в направлении осей x и z соответственно будут равны $\epsilon_x = \frac{y}{r}$; $\epsilon_z = 0$. Тогда соответствующие напряжения в направлении

¹⁾ Такой изгиб имеет место в случае длинных прямоугольных пластинок, если действующие силы не изменяются по длине пластинки и если рассматривается участок пластинки, удаленный на достаточное расстояние от концов.

осей x и z получаются, как в случае растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. При помощи уравнений (38) т. I, стр. 55, мы находим

$$\sigma_x = \frac{\epsilon_x E}{1 - \mu^2} = \frac{E y}{(1 - \mu^2) r}, \quad \sigma_z = \frac{\mu \epsilon_x E}{1 - \mu^2} = \frac{\mu E y}{(1 - \mu^2) r}.$$

Теперь мы поступаем так же, как в случае изгиба бруса, и вычислим изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении полоски. Тогда

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y dy = \frac{E}{(1 - \mu^2) r} \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{E k^3}{12(1 - \mu^2) r},$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}, \quad (73)$$

где

$$D = \frac{E k^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (74)$$

Эта величина называется *жесткостью при изгибе пластинки* и соответствует величине EJ_z , которая применялась при рассмотрении изгиба балок. Сравнение выражения (73) для полоски с выражением (56) т. I, стр. 88, для бруса показывает, что жесткость полоски в пластинке больше, чем жесткость отдельного бруса такого же поперечного сечения в отношении $1:(1 - \mu^2)$.

Эксперименты показывают, что в случае изгиба отдельной тонкой полоски большой ширины b имеет место искажение поперечного сечения лишь вблизи краев (рис. 54, *b*), а средний участок aa полоски изгибается по поверхности цилиндра¹⁾; следовательно, уравнение (73) применимо при вычислении прогибов, и полоска будет обладать большей жесткостью, чем следовало бы ожидать из простой формулы для балок.

При малых прогибах полоски AB (рис. 52) кривизна $1/r$ может быть заменена ее приближенным значением d^2y/dx^2 и дифференциальное уравнение изогнутой оси полоски будет

$$D \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (75)$$

¹⁾ Объяснение этого явления дано О. F. C. Searle, *Experimental Elasticity*, Cambridge, 1908. См. также H. Lamb, *London Proc. Math. Soc.*, т. 21, стр. 70, 1891 и статью автора *Mech. Engng.*, стр. 259, 1923.

Исследование пластинки, изгибающейся по цилиндрической поверхности, заключается в интегрировании этого уравнения. Частный случай, в котором изгиб по цилиндрической поверхности вызывается равномерно распределенной нагрузкой, рассматривается в следующем параграфе.

14. Изгиб длинной, равномерно нагруженной прямоугольной пластинки

Если прямоугольная пластинка, длина которой велика по сравнению с ее шириной, равномерно нагружена, то можно предположить, что вблизи центра, где имеют место наибольший прогиб и напряжения, изогнутая поверхность является приблизительно цилиндрической и для вычисления прогибов¹⁾ можно воспользоваться уравнением (73). Рассмотрим эту важную задачу²⁾ для двух крайних условий: 1) края пластинки свободно открыты и могут свободно поворачиваться при изгибе и 2) края заделаны. В обоих случаях предполагается, что нет перемещений краев в плоскости пластинки. Тогда элементарная полоска, подобная AB на рис. 52, находится в тех же условиях, что и растянутый стержень с равномерной поперечной нагрузкой (см. п. 6) и растягивающими усилиями S . Величина усилий S найдется из того условия, что удлинение полоски равно разности между длиной изогнутой оси и длиной l хорды AB (рис. 52).

Свободно открытые края. В случае свободно открытых краев хорошее приближенное значение для S получается при допущении, что изогнутая ось представляет собой синусоиду

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (a)$$

где f означает прогиб посредине. Тогда по выражению (56) стр. 48 удлинение осевой линии полоски будет

$$\lambda = \frac{l}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (b)$$

Взяв для прогиба посредине приближенное уравнение (61), мы имеем

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha}, \quad (c)$$

где

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{D} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{S}{S_{кр}} = \frac{S l^2}{\pi^2 D}. \quad (76)$$

Подставляя в уравнение (b), получаем

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \frac{f_0^2}{(1 + \alpha)^2}. \quad (d)$$

¹⁾ Если длина в три раза больше ширины для свободно открытой пластинки и в два раза больше ширины для пластинки с заделанными краями, решение, выведенное при этом предположении, достаточно точно.

²⁾ Решение задачи было дано И. Г. Бубновым. См. его книгу «Строительная механика корабля». С.-Петербург, т. 2, стр. 545, 1914. Рассмотрение этой задачи вместе с определением напряжений и обшивке корабля дано в книге S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York, 1940; русский перевод: *Пластинки и оболочки*, 1946, 1963.

Поперечное сечение полоски в плоскости пластинки при изгибе предполагается равным нулю, следовательно, при помощи выражений (74) и (76) удлинение осевой линии полоски, вызываемое усилиями S , определяется так:

$$\lambda = \frac{SI(1 - \mu^2)}{Eh} = \frac{\pi^2 a h^2}{12I}. \quad (1c)$$

Приравняв (д) и (е), получаем уравнение для определения a и, следовательно, продольного усилия S в следующем виде:

$$a(1 + \alpha)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2}. \quad (77)$$

Если даны нагрузка q и размеры пластинки, то правая часть уравнения (77) может быть легко вычислена. Решение уравнения (77) можно упростить, положив

$$1 + \alpha = x. \quad (4)$$

Тогда это уравнение обращается в

$$x^3 - x^2 = \frac{3f_0^2}{h^2},$$

т. е. величина x такова, что разность между ее кубом и ее квадратом имеет известное значение. Таким образом, x можно определить при помощи логарифмической линейки или соответствующей таблицы, а величина α найдется из уравнения (4). Прогиб же и напряжения в полоске AB можно затем вычислить при помощи табл. 4, составленной для растянутых стержней с поперечной нагрузкой (см. стр. 43). При пользовании этой таблицей необходимо помнить, что на основании формул (23) и (76) имеем

$$u = \frac{\rho l}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{a}. \quad (78)$$

Возьмем, например, стальную пластинку, имеющую размеры $l = 120$ см и $h = 1$ см и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 0,7$ кг/см². Тогда уравнение (77) получится в таком виде:

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 320, \quad (7c)$$

откуда

$$\alpha \approx 6,19 \quad \text{и} \quad u = \frac{\pi}{2} \sqrt{a} = 3,91.$$

Растягивающие напряжения, возникающие от продольной силы S , равняются

$$\sigma_x^* = \frac{S}{h} = \frac{\pi S_{кр}}{h} = \frac{\pi \pi^2 D}{hI^2} = 777 \text{ кг/см}^2,$$

а наибольший изгибающий момент в середине полоски на основании уравнения (45) равняется

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \psi_1(u). \quad (7d)$$

Опять пользуясь табл. 4, мы находим путем интерполяции, что для $u = 3,91$ $\psi_1(u) = 0,126$. Это показывает, что благодаря действию продольной силы S изгибающий момент значительно уменьшается и составляет лишь около 13% момента, который возникает под действием одной только поперечной нагрузки. Пользуясь формулой (4), находим

$$M_{\max} = \frac{0,7 \cdot 120^2}{8} \cdot 0,126 = 159 \text{ кг см.}$$

Соответствующие наибольшие напряжения изгиба будут

$$\sigma_x^* = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 159}{1^2} = 954 \text{ кг/см}^2.$$

Складываем напряжения от растяжения и от изгиба, получаем наибольшее напряжение $\tau_{\max} = \sigma_x^* + \sigma_x^* = 777 + 954 = 1731$ кг/см².

Можно видеть, что благодаря действию продольной силы наибольшие напряжения возрастают непропорционально интенсивности нагрузки. Например, если в вышеприведенном численном примере мы примем $q = 1,4$ кг/см², то из уравнения (7c) получим

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 320 \cdot 4 = 1280,$$

откуда $\alpha = 10,2$ и $u = 5,02$.

Растягивающие напряжения, возникающие от продольной силы S , равняются $\sigma_x^* = \frac{S}{h} = 1280$ кг/см², и из таблицы при $u = 5,02$ находим $\psi_1(u) = 0,078$. Тогда наибольшее напряжение от изгиба будет

$$\sigma_x^* = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,4 \cdot 120^2}{8 \cdot 1^2} = 0,078 = 1180 \text{ кг/см}^2,$$

и полное наибольшее напряжение будет равняться

$$\tau_{\max} = \sigma_x^* + \sigma_x^* = 1280 + 1180 = 2460 \text{ кг/см}^2.$$

Иными словами, благодаря действию продольных сил S напряжения возрастают гораздо медленнее нагрузки. В том случае, когда нагрузка удваивается, наибольшее напряжение увеличивается лишь на 42%.

Защемленные края. В случае защемленных краев уравнение (а) заменится уравнением ⁴⁾

$$y = \frac{f_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad (8)$$

которое удовлетворяет условиям на защемленных краях, так как прогиб y и угол наклона касательной dy/dx равняются нулю при $x=0$ и $x=l$. Подставляя (8) в выражение (б), получаем удлинение оси полоски

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 f_0^2}{4l}. \quad (8)$$

Для определения прогиба в середине воспользуемся приближенным уравнением (62)

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha/4}$$

и по формулам (8) и (е) находим следующее уравнение для определения α :

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2}. \quad (9a)$$

⁴⁾ См. статью автора, цит. на стр. 45.

или, полагая $1 - \nu = 4 = \alpha$, получаем

$$x^3 - \alpha x^2 = \frac{3 f_2^2}{4 R^2} \quad (6)$$

В предыдущем численном примере при $q = 0,7 \text{ кг/см}^2$ уравнение (6) дает $x^3 - \alpha x^2 = 3,20$, откуда $x = 1,89$ и $\alpha = 3,56$. Следовательно, растягивающая сила меньше, чем в рассмотренном выше случае пластинки с опертими краями, в отношении $3,56/6,19$, и мы получаем

$$\sigma_x' = \frac{3,56}{6,19} \times 777 = 447 \text{ кг/см}^2.$$

При вычислении напряжений от изгиба пользуемся табл. 4 на стр. 43. Замечая, что в нашем случае $\mu = (\pi/2) \sqrt{\alpha} = 2,97$, находим из таблицы путем

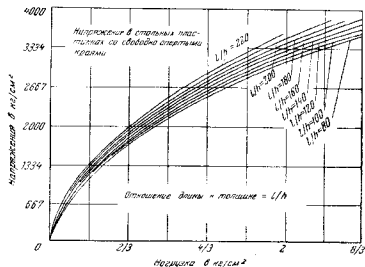


Рис. 55.

интерполяции $\psi_2 = 0,678$, $\psi_3 = 0,473$. Изгибающий момент в защемленных концах будет

$$M = -0,678 \frac{q l^2}{12} = -568 \text{ кг см},$$

а соответствующее наибольшее напряжение $\sigma_x' = 3408 \text{ кг/см}^2$. Полное наибольшее напряжение будет ¹⁾

$$\sigma_{\max} = \sigma_x' + \sigma_x'' = 447 + 3408 = 3855 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Предполагается, что сталь имеет предел пропорциональности выше вычисленного напряжения.

Сравнивая это напряжение с полученным выше напряжением для той же пластинки со свободно опертими краями, мы видим, что заделка краев увеличивает наибольшее напряжение. Это обстоятельство можно объяснить следующим образом: благодаря заделке краев прогиб пластинки уменьшается, вследствие чего уменьшается продольная сила S , а также и ее влияние на изгибающий момент. В случае свободно опертых краев наибольший изгибающий момент составляет лишь 0,131 от момента, вызываемого только одной поперечной нагрузкой. В случае же заделанных краев изгибающий момент на этих краях составляет 0,636 от момента, вызываемого поперечной нагрузкой, т. е. влияние продольной силы в случае опертых краев сказывается гораздо сильнее.

Этим приближенным методом можно пользоваться при вычислении напряжений в обшивке судов, подверженной гидростатическому давлению.

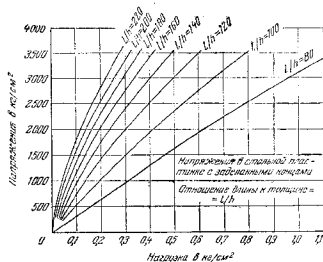


Рис. 56.

Наибольшее напряжение, очевидно, зависит от интенсивности нагрузки q и от отношения L/h . Величина этого напряжения для случая пластинки со свободно опертими краями и для различных значений отношения L/h представлена кривыми ¹⁾ на рис. 55. Видно, что благодаря наличию растягивающих сил S , которые увеличиваются с увеличением нагрузки, наибольшее напряжение непропорционально нагрузке q .

На рис. 56 даны кривые для наибольшего напряжения в случае пластинки с заделанными краями. Видно, что для малых значений интенсивности нагрузки q , когда влияние осевой силы на прогиб носки мало, наибольшее напряжение увеличивается приблизительно в том же отношении, в каком увеличивается q . Но для больших значений q соотношение между нагрузкой и наибольшим напряжением становится нелинейным.

¹⁾ Эти кривые взяты из статьи S. Waу, представленной на собрание отдела прикладной механики A. S. M. E., New Haven, июнь 1932.

15. Изгиб длинных прямоугольных пластинок, имеющих первоначальную малую цилиндрическую кривизну ¹⁾

В этой задаче мы можем пользоваться результатами, уже полученными для изгиба стержней с малой начальной кривизной (стр. 51). Края пластины предположим свободно опертыми, а координатные оси и элементарная полоска взяты, как показано на рис. 52. Пусть

$$y_0 = b \sin \frac{\pi x}{l} \quad (а)$$

представляет малый начальный прогиб пластинки с наибольшим прогибом посредине, равным b . Если приложена равномерная нагрузка q , то вызывается дополнительный прогиб, сопровождаемый растяжением *средней поверхности* ²⁾ пластины. Пусть S , как и прежде, означает растягивающие усилия в полоске AB шириной единица, а α — отношение этой силы к критической силе $S_{кр} = \pi^2 EI$. Тогда дополнительный прогиб, возникающий от нагрузки q , будет равняться

$$y_1 = \frac{f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (б)$$

Первый член правой части представляет собой приближенное выражение для прогиба прямоугольной полоски, которой ранее пользовались для плоских пластинок; второй член выражает влияние начальной кривизны (см. уравнение (д), стр. 52). Складывая уравнения (а) и (б), получаем полный прогиб оси

$$y = y_0 + y_1 = b \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{b+f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (в)$$

Величина α определяется из рассмотрения растяжения полоски AB . Пользуясь теми же рассуждениями, что и в п. 14, получаем следующее выражение для ее удлинения:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx.$$

Подставляя (а) и (в) вместо y_0 и y в интеграл, находим

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{b+f_0}{1+\alpha} \right)^2 - b^2 \right].$$

Полагая эту величину равной удлинению, вызываемому продольной силой S (выражение (е) в п. 14, стр. 72), получаем:

$$\frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{b+f_0}{1+\alpha} \right)^2 - b^2 \right] = \frac{\pi^2 h^2}{12l}$$

или

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 3 \left(\frac{b+f_0}{h} \right)^2 - 3 \frac{b^2}{h^2} (1+\alpha)^2. \quad (80)$$

При $b=0$ это уравнение приводится к уравнению (77) для плоской пластинки. В качестве примера возьмем стальную пластинку таких же размеров, как в п. 14:

$$l = 120 \text{ см}, \quad h = 1 \text{ см}, \quad q = 0,7 \text{ кг/см}^2 \quad \text{и} \quad b = 1 \text{ см}.$$

¹⁾ См. статью автора, цит. на стр. 51.

²⁾ Средняя поверхность есть поверхность, делящая пополам расстояние между верхней и нижней поверхностями пластинки.

Тогда

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D} = 10,22 \text{ см},$$

и из уравнения (80) получается

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 377,4 - 3(1+\alpha)^2. \quad (д)$$

Пусть по-прежнему

$$1+\alpha = x;$$

тогда $x^3 + 2x^2 = 377,4$, откуда $x = 6,61$, $\alpha = 5,61$. Растягивающее напряжение, возникающее от продольной силы S , будет

$$\sigma_x = \frac{S}{h} = \frac{\pi^2 D}{hl^2} = 704 \text{ кг/см}^2.$$

Это напряжение несколько меньше соответствующего напряжения для плоской пластинки (см. стр. 72).

При вычислении напряжений от изгиба необходимо обратить внимание на то, что прогиб, определяемый уравнением (б), состоит из двух частей. Первая часть представляет прогиб для плоской пластинки, а вторая часть

$-\frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}$ выражает влияние начальной кривизны. Наибольшее напряжение от изгиба, соответствующее первой части прогиба, при $x = 5,61$; $u = \frac{\pi}{2} \sqrt{x} = 3,72$; $\psi_1 = 0,138$ (из табл. 4, стр. 44) будет равно 1043 кг/см^2 .

Изгибающий момент, соответствующий второй части прогиба, равен

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \left(-\frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} \right) = -\frac{\pi^2 b D}{(1+\alpha)^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (е)$$

Этот момент имеет отрицательный знак, и соответствующее ему наибольшее сжимающее напряжение, которое необходимо вычесть из напряжения, найденного для плоской пластинки, будет равняться

$$-\frac{6}{h^2} \frac{\pi^2 b D}{(1+\alpha)^2} = -639 \text{ кг/см}^2.$$

Складывая это напряжение с напряжением σ_x и напряжением от изгиба, равным 1043 кг/см^2 , вычисленным как для плоской пластинки, находим полное напряжение

$$\sigma_x = 704 + 1043 - 639 = 1108 \text{ кг/см}^2.$$

Сравнивая эти результаты с результатами, полученными для плоской пластинки, мы видим, что растягивающие силы S здесь несколько уменьшаются, а напряжения от изгиба посредине будут гораздо меньше вследствие отрицательного знака изгибающего момента (уравнение (е)). Влияние начальной кривизны сводится к уменьшению результирующего напряжения с 1747 кг/см^2 до 1108 кг/см^2 . Этот результат получается для пластины, имеющей первоначальный прогиб посредине, равный ее толщине. При увеличении начального искривления наибольшее напряжение можно уменьшить значительно.

16. Чистый изгиб в двух перпендикулярных направлениях

Рассмотрим сначала прямоугольную пластинку, которая изгибается моментами, равномерно распределенными по ее краям (рис. 57). Обозначим через M_1 изгибающий момент, приходящийся на единицу длины края, параллельного оси y , и через M_2 изгибающий момент,

приходящийся на единицу длины края, параллельного оси x . Направления моментов, показанные на рисунке, будем считать положительными. Плоскость, проходящую посредине между гранями пластинки и называемую *срединной плоскостью* пластинки, примем за плоскость xu ,

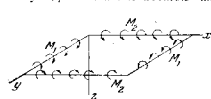


Рис. 57.

и за ось z — линию, перпендикулярную к этой плоскости и направленную вниз. Из этой пластинки двумя парами плоскостей, параллельных плоскостям xz и yz , выделим элемент (рис. 58). Теория чистого изгиба пластинки основана на допущении, что при изгибе боковые грани этого элемента

остаются плоскими и поворачиваются около нейтральных осей u — v . При указанных на рис. 57 направлениях моментов верхняя часть элемента испытывает сжатие, нижняя часть — растяжение. Срединная плоскость uv при этом изгибе пластинки не претерпевает деформаций и поэтому является *нейтральным слоем*. Пусть $1/r_1$ и $1/r_2$ означают

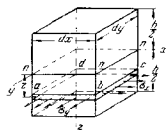


Рис. 58.

соответственно кривизны этой нейтральной поверхности в сечениях, параллельных плоскостям xz и yz ; тогда относительные удлинения по направлениям x и y элементарного слоя $abcd$ в расстоянии z от нейтральной поверхности определяется так же, как и в случае балки (т. I, стр. 86) и будут равны

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_1}; \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_2}. \quad (a)$$

Соответствующие им напряжения на основании уравнения (38) т. I, стр. 55, будут

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} \right), \quad (b)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_2} + \mu \frac{1}{r_1} \right). \quad (c)$$

Эти напряжения пропорциональны расстоянию z от нейтрального слоя. Составляя моменты внутренних усилий, действующих по граням элемента, и приравнявая их к моментам внешним нар, получаем следующие уравнения:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \, dy \, dz = M_1 dy, \quad (d)$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \, dx \, dz = M_2 dx. \quad (e)$$

Подставляя значения (b) и (c) вместо σ_x и σ_y и замечая, что

$$\frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)} = D,$$

где D означает *цилиндрическую жесткость пластинки* (формула (74)), мы находим

$$D \left(\frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} \right) = M_1, \quad (81)$$

$$D \left(\frac{1}{r_2} + \mu \frac{1}{r_1} \right) = M_2, \quad (82)$$

которые соответствуют уравнению (56) т. I, стр. 88, для случая чистого изгиба призматического бруса. Предполагая, что прогибы в направлениях оси z , обозначаемые через w , малы, получаем для кривизны приближенные формулы

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Тогда уравнения (81) и (82), выраженные через w , станут

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_1, \quad (83)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = M_2. \quad (84)$$

Эти уравнения соответствуют уравнению (79) т. I, стр. 124, для изогнутой оси прямого бруса. В частном случае, когда $M_1 = M_2 = M$, кривизна изогнутой поверхности в двух перпендикулярных направлениях одинакова и поверхность является сферической. Кривизна сферы из уравнения (81) будет

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D(1+\mu)}. \quad (85)$$

По такой поверхности изогнется пластинка любой формы, если только изгибающие моменты M равномерно распределены по ее контуру.

Выше предполагалось, что никакого изменения длины волокон срединной поверхности не произошло, т. е. что эта поверхность является нейтральным слоем при изгибе пластинки. Это предположение будет вполне точным лишь в том случае, если поверхность изогнутой пластинки является *развертываемой* поверхностью, как, например, цилиндрическая поверхность, рассмотренная в п. 15. Для неразвертываемых поверхностей указанное предположение будет достаточно точным лишь в том случае, когда прогиб w пластинки мал по сравнению с ее толщиной h . Чтобы показать это, рассмотрим изгиб круглой пластинки под действием моментов M , равномерно распределенных

по ее контуру. Из предыдущего изложения вытекает, что пластинка будет изгибаться по сферической поверхности, радиус которой определяется по формуле (85). Пусть AOB (рис. 59) представляет диаметрально противоположные изогнутые круглой пластинки, a — ее внешний радиус и f — прогиб посредине. Допустим сначала, что размеры срединной плоскости пластинки в меридиональном направлении, например по AOB , не меняются. Тогда дуга $OB = a$, $\varphi = a/r$ и $CB = a_1 = r \sin \varphi$. В таком случае, очевидно, изгиб пластинки будет сопровождаться сжатием в окружном направлении. Величина этой относительной деформации контура пластинки будет равняться



Рис. 59.

$$\varepsilon = \frac{a - a_1}{a} = \frac{r\varphi - r \sin \varphi}{r\varphi}.$$

При малом прогибе f угол φ мал, и поэтому $\sin \varphi \approx \varphi - (\varphi^3/6)$, так что

$$\varepsilon = \frac{\varphi^2}{6}, \quad (1)$$

или, замечая, что

$$f = r(1 - \cos \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2},$$

получаем

$$\varepsilon = \frac{f}{3r}. \quad (2)$$

Это — величина наибольшего относительного сжатия по окружности у края. Она получалась при том допущении, что деформация в меридиональном направлении равна нулю. В действительности же в меридиональном направлении возникает некоторая деформация, вследствие чего истинное сжатие по окружности будет меньше сжатия, определяемого уравнением (2).

Приближенная теория изгиба пластинок совершенно пренебрегает деформацией срединной поверхности и рассматривает лишь деформации, определяемые выражениями (а), наибольшее значение которых

¹⁾ Если прогибы не малы и деформация срединной поверхности принята во внимание, то можно показать, что в случае чистого изгиба круглой пластинки радиуса $a = 23h$ сжимающие напряжения срединной поверхности на контуре в окружном направлении составляют около 18% от наибольшего напряжения от изгиба, когда прогиб посредине равен $0,6$ толщины пластинки. См. статью автора в Сборнике Института инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1915. См. также книгу автора «Theory of Plates and Shells», стр. 332, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1951.

в предыдущем примере равно $h/2r$. Следовательно, деформацией, определяемой выражением (г), можно пренебречь, и срединную поверхность можно считать не деформированной, когда $f/3r$ мало по сравнению с $h/2r$, т. е. когда прогиб f мал по сравнению с толщиной пластинок h . Только при этом допущении можно с достаточной точностью пользоваться результатами, полученными ниже для некоторых частных случаев изгиба пластинок.

17. Температурные напряжения в пластинках

Соотношением (85) (п. 16), полученным для изгиба по сферической поверхности, можно воспользоваться для вычисления температурных напряжений, возникающих в пластинке вследствие неравномерного нагрева. Пусть t означает разность температур верхней и нижней поверхностей пластинки, а α — коэффициент линейного расширения материала. Предполагая, что изменение температуры по толщине пластинки происходит по линейному закону, мы найдем, что по тому же закону будут изменяться и соответствующие удлинения; если край пластинки свободен, то изгиб, обусловленный этими удлинениями, будет происходить по сфере¹⁾. Разность между наибольшим удлинением на поверхности и удлинением в срединной поверхности равняется $\alpha t/2$, а кривизна, обусловленная этим неравномерным расширением, определяется из уравнения $\frac{\alpha t}{2} = \frac{h}{2r}$, откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha t}{h}. \quad (86)$$

Такой изгиб пластинки не вызовет никаких напряжений при условии, что ее края свободны и прогиб мал по сравнению с толщиной.

Однако если края пластинки заделаны, нагревание вызовет изгибающие моменты по ее контуру. Величина этих моментов должна быть такова, чтобы они могли упруго изогнуть кривизну, обусловленную неравномерным нагреванием и определяемую уравнением (86), так как только таким путем будет выполнено условие защемления края. Из уравнений (85) и (86) мы получаем следующее уравнение для изгибающего момента, приходящегося на единицу длины защемленного края:

$$M = \frac{\alpha t(1 + \nu)D}{h}.$$

Так как M действует на площадь прямоугольника с шириной, равной единице и высотой h , находим соответствующее наибольшее напряжение изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t(1 + \nu)D}{h^3} = \frac{\alpha t}{2} \frac{E}{\mu}. \quad (87)$$

¹⁾ Предполагается, что прогибы малы по сравнению с толщиной h пластинок.

Это напряжение пропорционально коэффициенту линейного расширения α , разности температур на обеих поверхностях¹⁾ пластинки и модулю упругости. Разность температур t может возрастать с увеличением толщины пластинки; поэтому большие температурные напряжения следует ожидать в толстых пластинках, а не в тонких. Интегрируя отметить, что уравнением (87), выведенным для плоских пластинок, можно также пользоваться с достаточной точностью в случае сферических или цилиндрических оболочек (см. стр. 192).

18. Изгиб круглых пластинок, нагруженных симметрично относительно центра²⁾

В этом случае изогнутая поверхность пластинки будет симметрична относительно оси, проходящей через центр пластинки перпендикулярно к ее плоскости; поэтому для вычисления прогибов и напряжений достаточно рассмотреть диаметрально сечение, проходящее через эту ось. Рис. 60 изображает такое диаметрально сечение с осью симметрии Oz . Пусть φ означает прогиб пластинки в направлении оси z в какой-либо точке A , находящейся на расстоянии x от оси. Для малых значений φ мы можем положить, что $\varphi = - (d\varphi/dx)$ есть угол наклона касательной к изогнутой поверхности в той же точке. Тогда кривизна пластинки в диаметральном сечении xz будет равняться

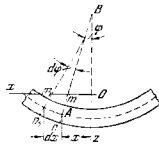


Рис. 60.

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (a)$$

При определении радиуса кривизны r_2 в направлении, перпендикулярном плоскости xz , необходимо заметить, что после деформации пластинки ее сечения, подобные nm , образуют коническую поверхность с вершиной B , находящейся в точке пересечения nm с осью Oz . Тогда AB будет представлять радиус r_2 , и из рис. 60 мы получаем

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\varphi}{x}. \quad (b)$$

¹⁾ Необходимо заметить, что t означает разность температур между двумя поверхностями пластинки, а не разность температур между жидкостями или газами в месте соприкосновения с пластинкой. Последняя вследствие резкого изменения температуры на поверхности пластинки может быть гораздо больше t .

²⁾ Этот случай изгиба был исследован Poisson'ом, Мém. de l'Acad. (Paris), t. 8, 1829.

Теперь мы пренебрегаем влиянием сдвига на изгиб и предполагаем, что имеют место те же соотношения между изгибающими моментами и кривизнами, что и в случае чистого изгиба пластинки (п. 16); поэтому можно воспользоваться уравнениями (81) и (82). Подставляя (a) и (b) в эти уравнения, мы находим

$$M_1 = D \left(\frac{d\varphi}{dx} + \nu \frac{\varphi}{x} \right), \quad (88)$$

$$M_2 = D \left(\frac{\varphi}{x} + \nu \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (89)$$

В этих уравнениях M_1 и M_2 означают изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины, M_1 — действующий по цилиндрическим сечениям таким, как mn , и M_2 — действующий по диаметральным сечениям xz .

Уравнения (88) и (89) содержат лишь одну переменную φ , которую можно определить из уравнения равновесия элемента $abcd$ (рис. 61), вырезанного из пластинки двумя цилиндрическими сечениями ab и cd и двумя диаметральными сечениями aO и bO . Момент, действующий по грани cd элемента, равняется

$$M_1 x d\theta. \quad (c)$$

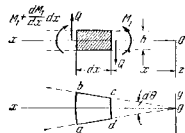


Рис. 61.

Соответствующий момент, действующий по грани ab , равняется

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx} dx \right) (x + dx) d\theta. \quad (d)$$

Моменты, действующие по граням ad и bc , равны каждый $M_2 dx$ и имеют результирующую в плоскости xz , равную

$$M_2 dx d\theta. \quad (e)$$

В дополнение к этим моментам имеются поперечные силы Q , действующие по граням ab и cd). Если Q представляет поперечную силу, приходящуюся на единицу длины, то полная поперечная сила, действующая по грани cd элемента, равняется $Qx d\theta$. Пренебрегая малыми величинами высшего порядка, найдем, что по грани ab действует поперечная сила такой же величины. Эти две силы дают момент в плоскости xz , равный

$$Qx d\theta dx. \quad (f)$$

¹⁾ Из симметрии следует, что по граням bc и ad элемента поперечных сил нет.

Складывая моменты (с), (d), (e) и (f), взятые с надлежащими знаками, получаем следующее уравнение равновесия элемента $abcd$

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx} dx\right)(x - dx) d\theta - M_1 x d\theta - M_2 dx d\theta - Qx dx d\theta = 0,$$

из которого, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, находим

$$M_1 + \frac{dM_1}{dx} x - M_2 - Qx = 0. \quad (8)$$

После подстановки значений M_1 и M_2 из уравнений (88) и (89) в уравнение (8) получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{Q}{D}. \quad (90)$$

В любом частном случае симметрично нагруженной круглой пластинки поперечная сила Q может быть определена из уравнений статики; тогда уравнением (90) можно воспользоваться для определения угла поворота φ и прогиба w пластинки.

Рассмотрим, например, круглую пластинку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и сосредоточенным грузом P , приложенным в центре. Взяв сечение пластинки цилиндрической поверхностью с осью Oz и радиусом x , найдем поперечную силу Q , приходящуюся на единицу длины этого сечения, из условий равновесия внутренней части пластинки, вырезанной цилиндрической поверхностью. Нагрузка, действующая на эту часть пластинки, равняется $P - \pi x^2 q$. Эта нагрузка должна быть равна равнодействующей поперечных усилий, распределенных по цилиндрической поверхности; следовательно,

$$2\pi x Q = P - \pi x^2 q$$

$$Q = \frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}. \quad (91)$$

Подставляя это в уравнение (90), получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right),$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\varphi) \right] = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right),$$

откуда путем интегрирования находим

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\varphi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx^2}{4} + \frac{P}{2\pi} \ln x \right) + C_1, \quad (b)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Интегрирование уравнения (b) даст

$$x\varphi = -\frac{qx^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

или

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} - \frac{Px}{8\pi D} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \quad (92)$$

где C_2 — вторая постоянная интегрирования. При малых прогибах (рис. 60) имеем

$$\varphi = -\frac{dw}{dx},$$

что дает следующее уравнение для прогиба:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{qx^3}{16D} + \frac{Px}{8\pi D} (2 \ln x - 1) - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x},$$

откуда после интегрирования находим

$$w = \frac{qx^4}{64D} + \frac{Px^2}{8\pi D} (\ln x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3. \quad (93)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 и C_3 должны быть определены в каждом частном случае из условий на контуре пластинки.

В предыдущем изложении уравнения (81) и (82) были использованы при допущении, что срединная поверхность пластинки является нейтральной поверхностью, т. е. что в этой плоскости нет никаких деформаций. Это допущение, как мы видели (стр. 79), справедливо лишь в том случае, когда край пластинки не испытывает никаких напряжений в срединной плоскости пластинки и прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки.

19. Изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки

Пластинка с защемленным краем. Угол наклона касательной и прогиб в этом случае определяются из уравнений (92) и (93) путем подстановки в эти уравнения $P=0$. Обозначая через a наружный радиус пластинки, мы имеем для защемленных краев $\varphi=0$ при $x=a$ и при $x=0$. Эти условия дают следующие уравнения для вычисления постоянных интегрирования C_1 и C_2 из уравнения (92):

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right)_{x=a} = 0,$$

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{qa^2}{8D}. \quad (a)$$

Подставляя эти значения в уравнение (92), получаем

$$\varphi = \frac{q x}{16D} (a^2 - x^2), \quad (94)$$

Теперь прогибы можно вычислить по уравнению (93). Полагая прежде всего в этом уравнении $P=0$, а затем подставляя значения постоянных C_1 и C_2 из уравнений (а), находим

$$w = \frac{q x^4}{64D} - \frac{q a^2 x^2}{32D} + C_3. \quad (b)$$

Постоянная C_3 определится из того условия, что на краю пластинки прогиб равен нулю. Следовательно,

$$\frac{q a^4}{64D} - \frac{q a^2}{32D} + C_3 = 0,$$

откуда $C_3 = \frac{q a^2}{64D}$.

Подставляя это значение в уравнение (b), получаем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - x^2)^2. \quad (95)$$

Наибольший прогиб будет в центре пластинки и равен

$$f = \frac{q a^4}{64D}. \quad (96)$$

Этот прогиб составляет $3/8$ прогиба полоски (рис. 52) с защемленными концами и длиной, равной диаметру пластинки.

Изгибающие моменты в пластинке найдем из уравнений (88) и (89) путем подстановки в эти уравнения значения φ из уравнения (94). Таким путем получаем

$$M_1 = \frac{q}{16} [a^2(1+\mu) - x^2(3+\mu)], \quad (c)$$

$$M_2 = \frac{q}{16} [a^2(1+\mu) - x^2(1+3\mu)]. \quad (d)$$

На краю пластинки ($x=a$) моменты будут

$$M_1 = -\frac{q a^2}{8}; \quad M_2 = -\frac{\mu q a^2}{8}; \quad (e)$$

а в центре ($x=0$) моменты равны

$$M_1 = M_2 = \frac{1+\mu}{16} q a^2. \quad (f)$$

Наибольшее напряжение будет на краю пластинки и равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6}{h^2} \frac{q a^2}{8} = \frac{3}{4} \frac{q a^2}{h^2}. \quad (97)$$

Пластинка со свободно открытым краем. При исследовании изгиба пластинки со свободно открытым краем воспользуемся методом наложения. Было показано выше, что в случае защемленных краев по контуру пластинки действуют отрицательные изгибающие моменты $M_1 = -(q a^2/8)$ (рис. 62, а). Если к этому случаю присоединить случай чистого изгиба, показанный на рис. 62, б, таким образом, чтобы уничтожить изгибающие моменты по контуру, то мы получим изгиб пластинки со свободно открытым краем.

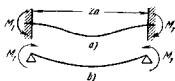


Рис. 62.

Прогиб при чистом изгибе пластинки определится из уравнения (85). Подставляя в это уравнение $M = q a^2/8$, мы находим

$$\frac{1}{r} = \frac{q a^2}{8D(1+\mu)}.$$

Соответствующий прогиб по середине для сферической поверхности будет (см. стр. 89 г. 1)

$$f_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{q a^4}{16D(1+\mu)}.$$

Чтобы получить прогиб пластинки со свободно открытым краем, нужно к полученному прогибу f_1 присоединить прогиб, определяемый уравнением (96). Таким образом, для прогиба в центре пластинки мы получим

$$f = \frac{q a^4}{64D} + \frac{q a^4}{16D(1+\mu)} = \frac{5+\mu}{64(1+\mu)} \frac{q a^4}{D}. \quad (98)$$

При $\mu=0,3$ этот прогиб приблизительно в четыре раза больше прогиба пластинки с защемленным краем.

Для определения изгибающих моментов нужно к постоянному изгибающему моменту $q a^2/8$ присоединить моменты, определяемые уравнениями (c) и (d), найденные выше для случая пластинки с защемленным краем. Отсюда

$$M_1 = \frac{q}{16} (3+\mu)(a^2 - x^2),$$

$$M_2 = \frac{q}{16} [a^2(3+\mu) - x^2(1+3\mu)].$$

Наибольший изгибающий момент будет в центре пластинки, где он равняется

$$M_1 = M_2 = \frac{3+\mu}{16} q a^2.$$

Соответствующие ему наибольшие напряжения будут

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{3(3+\mu)qa^2}{8h^2}. \quad (99)$$

Для сравнения напряжений σ_x и σ_y на нижних поверхностях пластинок с защемленным и со свободно опертым краем на рис. 63 представлены диаграммы, изображающие изменения этих напряжений по длине радиуса пластинок. Измеряя ординаты от горизонтальной оси, проходящей через точку O , мы получаем напряжения для пластинок с защемленным краем. Прибавляя к этим напряжениям постоянную величину

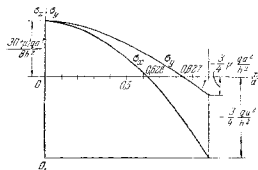


Рис. 63.

$3qa^2/4h^2$, т. е. измеряя ординаты от горизонтальной оси, проходящей через точку O_1 на рис. 63, мы получаем напряжения для свободно опертой пластинки. Отсюда можно видеть, что наиболее благоприятное напряженное состояние получается при защемленном крае.

В предыдущих выводах пренебрегалось влиянием деформации сдвига на прогиб. Когда толщина пластинки не является малой по сравнению с ее радиусом, это влияние может быть значительным и должно быть принято во внимание¹⁾. Дополнительный прогиб, обусловленный сдвигом, найдется таким же способом, как и в случае балок (см. т. I, стр. 150). В случае равномерной нагрузки поперечная сила на основании уравнения (91) будет

$$Q = \frac{qx}{2}.$$

Если мы примем тот же закон распределения касательных напряже-

ний по толщине пластинки, как и в случае бруса прямоугольного поперечного сечения, то наибольшие касательные напряжения будут по срединной поверхности, и величина их в расстоянии x от центра пластинки определится по формуле

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} = \frac{3}{4} \frac{qx}{h}.$$

Соответствующий этому напряжению относительный сдвиг срединной поверхности пластинки будет

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{3}{4} \frac{qx}{Gh},$$

а дополнительный прогиб, обусловленный перекосом какого-нибудь элемента, например $abcd$ на рис. 61, равен

$$\gamma dx = \frac{3}{4} \frac{qx dx}{Gh}.$$

Суммируя эти прогибы по длине радиуса пластинки и замечая, что на контуре пластинки прогиб равен нулю, мы находим

$$w_1 = \frac{3}{4} \frac{q}{Gh} \int_0^a x dx = \frac{3}{8} \frac{q}{Gh} (a^2 - x^2).$$

Присоединяя это к прогибу (уравнение (95)), обусловленному изгибающим моментом, получаем полный прогиб для пластинки с защемленным краем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - x^2)^2 + \frac{3}{8} \frac{q}{Gh} (a^2 - x^2),$$

или, пользуясь выражением (74), можем написать

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - x^2)^2 + \frac{4}{1-\mu} h^2 (a^2 - x^2) \right]. \quad (100)$$

Прогиб в центре будет равен

$$f = \frac{qa^4}{64D} \left(1 + \frac{4}{1-\mu} \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (101)$$

В случае толстых пластинок второй член в скобках, представляющий собой влияние касательных напряжений, может иметь существенное значение.

Изложенная теория изгиба круглых пластинок основана на допущении, что прогибы малы по сравнению с толщиной. При больших прогибах необходимо принять во внимание деформацию срединной поверхности пластинки. При этом можно показать, что при больших прогибах пластинка получается более жесткой, чем это следует на осно-

¹⁾ Увеличение прогиба благодаря сдвигу было показано на опытах, проведенных G. M. Risse (Com. Engineering, т. 123, стр. 343, 1927. См. также статью H. Sattling (там же, т. 123, стр. 31, 1928).

вании изложенной теории¹⁾, и прогибы уже не будут пропорциональны силам. В случае равномерно нагруженной круглой пластинки с защемленным краем прогиб можно вычислить из уравнения²⁾:

$$f + 0,58 \frac{f^3}{h^3} = \frac{qa^2}{64D}, \quad (102)$$

которое хорошо согласуется с опытами.

На практике иногда применяют очень тонкие равномерно нагруженные пластинки. В таких случаях напряжения от изгиба могут быть малы по сравнению с напряжениями, обусловленными деформацией средней поверхности, и пластинка может рассматриваться как тонкая мембрана, не имеющая совершенно изгибной жесткости³⁾. Прогиб посредине равномерно нагруженной круглой мембраны определяется формулой

$$f = 0,662 a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}. \quad (103)$$

Мы получим аналогичную формулу, если в уравнении (102) пренебрежем величиной f по сравнению с членом, содержащим f^3 . Опыты, произведенные с тонкими мембранами, хорошо согласуются с формулой (103)⁴⁾.

20. Изгиб круглых пластинок переменной толщины

В случае равномерно нагруженной круглой пластинки переменной толщины изменение толщины h с изменением радиального расстояния x можно представить с достаточной точностью уравнением

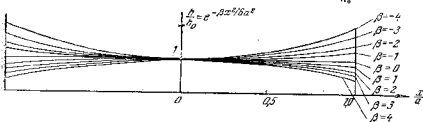


Рис. 64.

в котором h/h_0 есть отношение толщины на расстоянии x к толщине h_0 в центре и β — постоянная. Формы диаметральных сечений пластинок для различных значений постоянной β показаны на рис. 64.

¹⁾ См. статью автора, цит. на стр. 80. См. также его «Theory of Plates and Shells», 1940 (русский перевод: Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, 1946, 1963).

²⁾ Там же, стр. 336.

³⁾ Н. Непскы, Z. Math. u. Phys., т. 63, стр. 311, 1915.

⁴⁾ Вгело Еск, Z. angew. Math. u. Mech., т. 7, стр. 498, 1927. Сведения о диафрагмах см. в Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 738, 1939.

Наибольшее напряжение σ_x от изгиба в радиальном направлении при радиальном расстоянии x от центра можно выразить формулой

$$\sigma_x = \gamma \frac{3qa^2}{h_0^2},$$

где γ есть коэффициент, зависящий от расстояния x . Значения этого коэффициента¹⁾ для пластинки с защемленным контуром даны

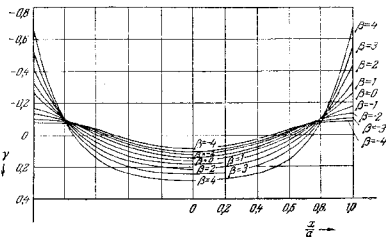


Рис. 65.

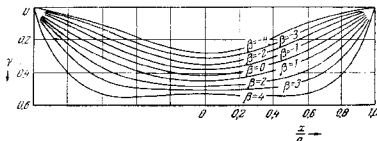


Рис. 66.

на рис. 65. Для свободно опертой пластинки эти значения даны на рис. 66.

¹⁾ Эти значения даны в диссертации О. Pichler'a, Die Biegung kreis-symmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Berlin, 1928. Позднейшие исследования изгиба круглых пластинок переменной толщиной были сделаны Н. Favre and E. Chabloz, Z. angew. Math. u. Mech., т. 1, стр. 317, 1950 и Bull. tech. Suisse romande, № 1, 1952. См. также статью Н. Favre, представленную Международному конгрессу прикладной механики, Стамбул, 1952.

21. Изгиб круглой пластинки, нагруженной в центре

Пластинка с зашпеленным краем. Подставляя $q=0$ в уравнение (92), получаем в этом случае уравнение

$$\varphi = -\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}. \quad (a)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдутся из условий, что $\varphi=0$ на зашпеленном крае и в центре пластинки; отсюда

$$\left. \begin{aligned} \left[-\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=a} &= 0, \\ \left[-\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Так как $(x \ln x)_{x=0} = 0$, то из уравнения (b) получаются следующие значения произвольных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{4\pi D}(2 \ln a - 1), \\ C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

и уравнение (a) приводится к виду

$$\varphi = \frac{Px}{4\pi D} \ln \frac{a}{x}. \quad (d)$$

Уравнение изогнутой поверхности пластинки получится путем подстановки в уравнение (93) $q=0$ и значений (c) произвольных постоянных, что дает

$$w = \frac{Px^2}{8\pi D} \left(\ln \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + C_3. \quad (e)$$

Постоянная C_3 получится из того условия, что на закрепленном крае прогиб равен нулю, следовательно, $C_3 = Pa^2/16\pi D$. Подставляя это в уравнение (e), получаем

$$w = \frac{Px^2}{8\pi D} \ln \frac{x}{a} + \frac{P}{16\pi D}(a^2 - x^2). \quad (f)$$

Прогиб посредине пластинки будет

$$f = \frac{Pa^2}{16\pi D}. \quad (104)$$

Этот прогиб в четыре раза больше того, который получается в случае равномерно распределенной нагрузки той же величины (уравнение (96)).

Изгибающие моменты вычисляются из уравнений (88) и (89) путем подстановки в них выражения (d), что дает

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \mu) \ln \frac{a}{x} - 1 \right], \quad (g)$$

$$M_2 = \frac{P}{4\pi} \left[(1 - \mu) \ln \frac{a}{x} - \mu \right]. \quad (h)$$

На контуре ($x=a$) эти моменты получают значения

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{P}{4\pi}, \\ M_2 &= -\mu \frac{P}{4\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

а соответствующие значения наибольших напряжений будут

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2}; \quad (\sigma_r)_{\max} = \frac{3\mu}{2} \frac{P}{\pi h^2}. \quad (106)$$

Сравнив это с выражением (97) для равномерной нагрузки, видим, что нагрузка, сосредоточенная в центре, вызывает на зашпеленных краях пластинки напряжения вдвое большие напряжений, возникающих от нагрузки той же величины, но равномерно распределенной по пластинке.

В центре пластинки уравнения (g) и (h) дают бесконечно большие значения для изгибающих моментов и напряжений. Этот результат получается вследствие допущения, что нагрузка сосредоточена в точке¹⁾. Если принять, что нагрузка распределена по малому кругу, то напряжения получатся конечного значения (см. стр. 96).

При определении безопасных размеров размеров круглой пластинки, нагруженной в центре, мы можем ограничить наши исследования вычислением наибольшего растягивающего напряжения от изгиба внизу пластинки. Уже было упомянуто, что уравнения (g) и (h) не являются подходящими для этой цели, и более подробное исследование²⁾ указывает, что наилучшая формула для вычисления вышеупомянутого растягивающего напряжения будет иметь вид

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{h^2} (1 + \mu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right). \quad (107)$$

¹⁾ Местные напряжения в точке приложения сосредоточенного груза рассмотрены в статье Н. Henck y, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, Darmstadt, стр. 54, 1913. См. также А. Nadai, Elastische Platten, стр. 97, 1925.

²⁾ Этот вопрос разобран в книге Timoshenko, Theory of Plates and Shells, стр. 75, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963.

Хотя сжимающие напряжения по верху пластинки могут быть во много раз больше, чем растягивающие напряжения внизу в случае резкой сосредоточенной нагрузки, они не представляют непосредственной опасности, потому что носят исключительно местный характер. Местная текучесть, которая происходит в случае пластических материалов, не влияет на общую деформацию пластинки, если растягивающие напряжения внизу пластинки остаются в безопасных пределах. Так как сопряженные сжатие хрупкого материала обычно во много раз больше, чем его сопротивление растяжению, то пластинка из хрупкого материала также будет находиться в безопасности, если растягивающее напряжение внизу пластинки будет в пределах безопасности.

Пластинка со свободно открытым краем. Прогиб пластинки со свободно открытым краем получим, пользуясь методом наложения. К прогибам по уравнению (f), найденным выше для пластинки с заделанным краем, мы присоединим прогибы, вызываемые в пластинке моментами $M_1 = P/4\pi$, равномерно распределенными по контуру, и получаем решение для пластинки со свободно открытым краем. Кривизна, обусловленная действием моментов $M_1 = P/4\pi$, на основании уравнения (85) будет

$$\frac{1}{r} = \frac{P}{4\pi(1+\mu)D},$$

а соответствующий прогиб по середине будет

$$f_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D}.$$

Прибавляя этот прогиб к прогибу по формуле (104), найдем прогиб по середине пластинки со свободно открытым краем

$$f = \frac{Pa^2}{16\pi D} + \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\mu}{1+\mu}. \quad (108)$$

Этот прогиб приблизительно в 2,5 раза больше прогиба пластинки с заделанным краем.

Прибавляя величину $P/4\pi$ к моментам, выраженным уравнениями (g) и (h), полученными выше для пластинки с заделанным краем, найдем выражения для изгибающих моментов пластинки со свободно открытым краем. Наибольшее растягивающее напряжение получается путем добавления $(6/13)(P/4\pi)$ к напряжению, вычисленному по формуле (107).

22. Изгиб круглой пластинки, нагруженной концентрически

Мы начнем с того случая, когда нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса b (рис. 67). Рассмотрим отдельно участок пластинки внутри этого круга и участок вне его. Для каждого участка будем применять общее уравнение (93), полагая $q=0$ для обоих участков и $P=0$ для внутреннего

участка. Произвольные постоянные определяются так¹⁾, чтобы удовлетворить условиям непрерывности изогнутой поверхности на окружности радиуса $x=b$. Обозначая через P полную нагрузку, получим следующие результаты²⁾.

Заделанный край. Для внутреннего участка ($x < b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (x^2 - b^2) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - x^2) \right]. \quad (a)$$

Для внешнего участка ($x > b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{x} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - x^2) \right]. \quad (b)$$

Свободно открытый край. Для внутреннего участка ($x < b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (x^2 - b^2) + \frac{(3+\mu)a^2 - (1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2} (a^2 - x^2) \right]. \quad (c)$$

Для внешнего участка ($x > b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{x} + \frac{(3+\mu)a^2 - (1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2} (a^2 - x^2) \right]. \quad (d)$$

При помощи этих уравнений и метода наложения можно решить задачу об изгибе круглой пластинки для любого случая нагрузки, расположенной симметрично относительно ее центра. Рассмотрим, например, случай, показанный на рис. 68, в котором нагрузка равномерно распределена на внутренней части пластинки, ограниченной кругом радиуса c . Подставляя в уравнение (a) $P = 2\pi b q db$, найдем, что прогиб, вызываемый в центре пластинки элементарной кольцевой нагрузкой, показанной на рис. 68, будет

$$dw = \frac{q}{4D} \left[-b^2 \ln \frac{a}{b} - b^2 + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \right] b db. \quad (e)$$

Тогда прогиб, вызываемый в центре пластинки всей нагрузкой, будет

$$f = \int_0^c dw = \frac{q}{4D} \int_0^c \left[-b^2 \ln \frac{a}{b} - b^2 + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \right] b db = \frac{q}{4D} \left[-\frac{c^4}{4} \ln \frac{a}{c} - \frac{3}{16} c^4 + \frac{a^2 c^2}{4} \right]. \quad (109)$$

При $c=a$ это уравнение совпадает с уравнением (96) для равномерно на-

¹⁾ В этом случае пренебрегается влиянием касательных напряжений, которые нарушают непрерывность изогнутой поверхности на окружности радиуса $x=b$, см. статью: G. A. Garga bedian, J. Ecole Polytechnique, 2 серия, С, № 26, 1927.

²⁾ См. примечание к § 45 перевода St-Venant'a книги Clebsch'a, Theorie der Elasticität fester Körper, Paris.



Рис. 67.



Рис. 68.

груженной пластинки. Подставляя в уравнение (109) $\epsilon = 0$ и $\kappa c^2 q = P$, получаем уравнение (104) для прогиба пластинки от сосредоточенной нагрузки.

Чтобы определить изгибающие моменты и напряжения в центре пластинки, мы возьмем вторую производную выражения (а) по x . Подставляя $x = 0$ и $P = 2\pi b \int_0^c q db$ в эту производную, найдем кривизну в центре, обусловленную элементарной кольцевой нагрузкой (рис. 68)

$$\frac{q}{4D} \left(-2 \ln \frac{a}{b} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) b db.$$

Кривизна в центре, вызываемая полной нагрузкой, равна

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{q}{4D} \int_0^c \left(-2 \ln \frac{a}{b} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) b db = -\frac{q c^2}{4D} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (110)$$

Соответствующий изгибающий момент в центре на основании уравнений (83) и (84) будет

$$M_1 = M_2 = -D(1+\mu) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1+\mu}{4} q c^2 \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right), \quad (111)$$

а наибольшие напряжения от изгиба в центре будут равны

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_y)_{\max} = \frac{3}{2} (1+\mu) \frac{q c^2}{h^2} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (112)$$

Обозначая через P полную нагрузку $\kappa c^2 q$, получаем

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_y)_{\max} = \frac{3}{2} (1+\mu) \frac{P}{\pi h^2} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (113)$$

Уменьшая радиус c круга, по которому распределена нагрузка, мы приближаемся к условию сосредоточенного груза. Напряжения в центре увеличиваются с уменьшением c , но остаются конечными до тех пор, пока c конечен.

23. Изгиб симметрично нагруженной круглой пластинки с круглым отверстием в центре

Изгиб моментами. Обозначим соответственно через M_{1a} и M_{1b} изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины по внешнему и внутреннему контурам пластинки (рис. 69, а). Для этого случая мы имеем $P = q = 0$ и из уравнений (92) и (93) находим

$$\varphi = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \quad (а)$$

$$w = -\frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln \frac{x}{a} + C_3. \quad (б)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 и C_3 определяются теперь из условий на краях. Подставляя выражение (а) в уравнение (88), получаем

$$M_1 = D \left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2} + \mu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2} \right) \right]. \quad (в)$$

Рис. 69.

Подставляя $x = a$ и затем $x = b$, получаем следующие уравнения для опре-

деления C_1 и C_2 :

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\mu) \right] = M_{1a},$$

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\mu) \right] = M_{1b},$$

откуда

$$C_1 = \frac{2(a^2 M_{1a} - b^2 M_{1b})}{(1+\mu)D(a^2 - b^2)}, \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_{1a} - M_{1b})}{(1-\mu)D(a^2 - b^2)}. \quad (д)$$

Постоянная C_3 определится из рассмотрения прогиба пластинки. Положим, например, что пластинка свободно опирается по внешнему контуру; тогда прогиб на этом контуре будет равен нулю и C_3 найдется из уравнения (в), которое при $x = a$ перепишется так:

$$\frac{C_1 a^2}{4} + C_3 = 0,$$

так что

$$C_3 = \frac{a^2}{4} C_1.$$

Уравнение изогнутой поверхности пластинки теперь можно получить подставив в уравнение (в) значения C_1 , C_2 и C_3 .

В качестве второго примера рассмотрим случай изгиба пластинки под действием моментов M_{1a} , когда внутренний контур пластинки заделан (рис. 69, б). Произвольные постоянные C_1 и C_2 в уравнении (а) в этом случае определятся из условий $\varphi = 0$ при $x = b$ и $M_1 = M_{1a}$ при $x = a$. Тогда из уравнения (а) и (с) найдем

$$\frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} = 0, \quad \frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\mu) = \frac{M_{1a}}{D},$$

и мы получаем

$$C_1 = \frac{2a^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]}, \quad C_2 = -\frac{a^2 b^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (а) и (с), находим

$$\varphi = \frac{a^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]} \left(x - \frac{b^2}{x} \right), \quad (е)$$

$$M_1 = \frac{a^4 M_{1a}}{a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)} \left[1 + \mu + (1-\mu) \frac{b^2}{x^2} \right]. \quad (ф)$$

Изгиб пластинки нагрузкой, равномерно распределенной по внутреннему и внешнему контурам. Если изгиб пластинки происходит под действием нагрузки, равномерно распределенной вдоль ее контуров (рис. 70, а), то $q = 0$, а P равняется всей нагрузке, приложенной ко внутреннему контуру. Подставляя эти значения в уравнения (92) и (93) и получаем из уравнения (92)

$$\varphi = -\frac{P x}{8\pi D} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}. \quad (г)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий на контурах. Например, если пластинка защемлена на контурах (рис. 70, б), то произвольные постоянные определяются из условий, что при $x = a$ и $x = b$ угол $\varphi = 0$. Тогда из уравнения (г)

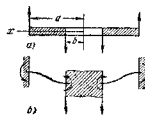


Рис. 70.

давим

$$\begin{aligned} -\frac{Pa}{8\pi D}(2\ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} &= 0, \\ -\frac{Pb}{8\pi D}(2\ln b - 1) + \frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} &= 0. \end{aligned}$$

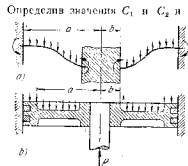


Рис. 71.

вспомогательные (92) и (93) получатся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{qx^3}{16D} + \frac{qb^2x}{8D}(2\ln x - 1) + \frac{C_1 x^2}{2} + \frac{C_2}{x}, \\ w &= -\frac{qx^4}{64D} - \frac{b^2qx^2}{8D}(\ln x - 1) - \frac{C_1 x^3}{4} - C_2 \ln x + C_3. \end{aligned}$$

Для определения произвольных постоянных необходимо использовать условия на контурах. Например, если пластинка закреплена на краях, то для определения C_1 и C_2 получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\frac{qa^2}{16D} + \frac{qab^2}{8D}(2\ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} &= 0, \\ -\frac{qb^2}{16D} + \frac{qb^4}{8D}(2\ln b - 1) + \frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} &= 0. \end{aligned}$$

Решения таких задач, как изгиб поршней паровых машин и изгиб фланцев⁴⁾ цилиндров и труб, могут быть получены путем сочетания разрозненных в этом параграфе решений. Например, сочетая случаи, показанные на рис. 70, б и 71, а, можем получить приближенное решение задачи на изгиб поршня (рис. 71, б) под давлением пара⁵⁾.

⁴⁾ См. статью Everett O. Waters and J. Hall Taylor, Trans. A. S. M. E., 1927.

⁵⁾ Несколько задач такого рода разобрано в статье M. Ensslin, Dinglers Polytech. J., 1903 и 1904. См. также Pfeleiderer, Forschungsarb., № 97, 1911. Опыты с поршнями описаны в статье C. Codron, Revue de mecanique, т. 13, стр. 340, 1903. Круглые пластинки, усиленные ребрами, разобраны M. Schilhanst, Z. angew. Math. u. Mech., т. 6, стр. 484, 1926 и Z. Ver. deut. Ing., т. 71, стр. 1354, 1927. Более подробное изложение о круглых пластинках дано S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940 (русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963).

Несколько случаев, имеющих практическое значение, представлено на рис. 72¹⁾. Во всех этих случаях наибольшее напряжение может быть выражено формулой вида

$$\sigma_{\max} = k \frac{qa^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = k \frac{pR}{h^2}, \quad (114)$$

в зависимости от того, равномерно ли распределена по поверхности приложенная нагрузка или сосредоточена на контуре. Числовые значения

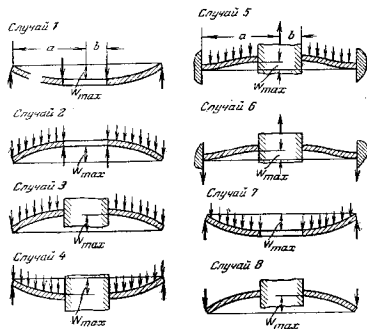


Рис. 72.

коэффициента k , вычисленные для некоторых значений отношения a/b и для коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$, даны в табл. 5. Наибольшие прогибы в тех же случаях определяются формулами типа

$$w_{\max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \text{или} \quad w_{\max} = k_2 \frac{pR^4}{Eh^3}. \quad (115)$$

Числовые коэффициенты k_1 также даны в табл. 5²⁾.

¹⁾ См. статью: A. M. Wahl and G. Lobo, Trans. A. S. M. E., т. 52, 1929.

²⁾ Более полные сведения относительно симметрично нагруженных пластинок можно найти в статье: W. E. Gumpeler, J. Appl. Mech., т. 10, стр. 173, 1943.

Таблица 5

Коэффициенты k и k_1 в уравнениях (114) и (115) для восьми случаев, показанных на рис. 72

Случай	1,25		1,5		2	
	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672
2	0,95	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902
3	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938
4	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,1250
5	0,090	0,00677	0,273	0,0062	0,71	0,6329
6	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237
7	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664
8	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877

Случай	3		4		5	
	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
2	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,310
3	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
4	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
5	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
6	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
7	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
8	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350

24. Изгиб прямоугольных пластинок

Теория изгиба прямоугольных пластинок является более сложной, чем теория круглых пластинок. Поэтому ниже приведены лишь окончательные формулы для изгибающих моментов и прогибов. При выводе этих формул предполагалось, что прогибы малы по сравнению с толщиной пластины и что края пластины при изгибе могут свободно перемещаться в плоскости пластины, т. е. в средней плоскости пластины не действуют никакие усилия.

Пластинка со свободно опертыми краями. В случае равномерно распределенной нагрузки q наибольший прогиб имеет место в центре пластины (рис. 73) и может быть представлен уравнением

$$f = a \frac{qa^4}{EI^3}, \quad (116)$$

Рис. 73.

где a есть короткая сторона пластины, h — толщина пластины и x — число-

вой коэффициент, зависящий от величины отношения b/a . По-прежнему мы обозначим через M_1 и M_2 изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины сечений, соответственно параллельных осям y и x . Наибольшие изгибающие моменты имеют место в центре пластины и равны

$$(M_1)_{\max} = \beta_1 qa^2; \quad (M_2)_{\max} = \beta_2 qa^2, \quad (117)$$

где β_1 и β_2 означают числовые коэффициенты, зависящие от отношения b/a . Некоторые значения коэффициентов α , β_1 и β_2 приведены в табл. 6. Эти значения вычислены в предположении, что коэффициент Пуассона равен 0,3.

Таблица 6

Коэффициенты для расчета равномерно нагруженных прямоугольных пластинок со свободно опертыми краями

$b/a =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$\alpha =$	0,0443	0,0530	0,0616	0,0697	0,0770	0,0843	0,0906	0,0964
$\beta_1 =$	0,0479	0,0553	0,0626	0,0693	0,0753	0,0812	0,0862	0,0908
$\beta_2 =$	0,0479	0,0494	0,0501	0,0504	0,0506	0,0500	0,0493	0,0486

$b/a =$	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0	∞
$\alpha =$	0,1017	0,1064	0,1106	0,1336	0,1400	0,1416	0,1422
$\beta_1 =$	0,0948	0,0985	0,1017	0,1189	0,1245	0,1246	0,1250
$\beta_2 =$	0,0479	0,0471	0,0464	0,0404	0,0384	0,0375	0,0375

Из табл. 6 можно видеть, что при $b/a > 3$ наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент существенно не отличаются от тех же величин, вычисленных при $b/a = \infty$. Это значит, что для длинных прямоугольных пластинок ($b/a > 3$) поддерживающим влиянием коротких сторон можно пренебречь и с достаточной точностью можно пользоваться формулами, выведенными в пп. 13—15 для изгиба по цилиндрической поверхности.

Пластинка с защемленными краями. Наибольший прогиб имеет место в центре пластины и может быть выражен тем же уравнением (116), что и для пластины с опертыми краями. Численно наибольший изгибающий момент имеет место в середине длинных сторон и определяется уравнением

$$|M_1|_{\max} = \beta qa^2. \quad (118)$$

Некоторые значения коэффициентов α и β приведены в табл. 7.

Значения, приведенные в табл. 7, указывают, что защемление краев пластины значительно уменьшает ее наибольший прогиб. Влияние же защемления на величину наибольших нормальных напряжений не так велико. Из таблицы также видно, что в случае защемленных краев наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент при $b/a = 2$ почти совпадают с теми же величинами, полученными при $b/a = \infty$. Это обстоятельство оправдывает применение формул, полученных в п. 14 для изгиба по цилиндрической поверхности, в случае расчета сравнительно длинных прямоугольных пластинок ($b/a \geq 2$) с защемленными краями.

Таблица 7

Коэффициенты для равномерно нагруженных прямоугольных пластинок с защемленными краями

$b/a =$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	∞
$\alpha_{max} =$	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
$\beta =$	0,0513	0,0665	0,0757	0,0806	0,0829	0,0833

Пластинка, у которой две противоположные стороны свободно опираются, третья сторона защемлена и четвертая сторона свободна (рис. 74). В случае равномерно распределенной нагрузки наибольший прогиб будет по середине свободной стороны, т. е. в точке А. Этот прогиб можно представить уравнением

$$f = a \frac{qb^4}{Eh^3}. \quad (119)$$

Значения числового коэффициента a в этом уравнении приведены в табл. 8. Наибольший изгибающий момент M_1 также имеет место в точке А, и его величина определяется уравнением

$$(M_1)_{max} = \beta_1 qa^2. \quad (120)$$

Численно наибольший изгибающий момент M_2 имеет место в точке В, т. е. по середине защемленной стороны, и его величина определяется уравнением

$$(M_2)_{max} = \beta_2 qb^2. \quad (121)$$

Несколько значений коэффициентов β_1 и β_2 приведено в табл. 8.

Таблица 8

Коэффициенты для равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, показанной на рис. 74

$b/a =$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\alpha =$	1,37	1,03	0,635	0,366	0,123
$\beta_1 =$	0	0,0078	0,0293	0,0558	0,0972
$\beta_2 =$	0,500	0,428	0,319	0,227	0,119

Из этой таблицы видно, что если a велико по сравнению с b , то средняя полоска АВ приближается к условиям консоли, защемленной в точке В и равномерно нагруженной.

Равномерно нагруженная пластинка, свободно лежащая на многих равно удаленных друг от друга опорах (рис. 75). В этом случае мы можем получить хорошее приближенное значение наибольшего напряжения и закон распределения напряжений вблизи опор следующим образом. Рассмотрим часть пластинки вблизи опоры, ограниченную кругом радиуса $a = 0,22 c$

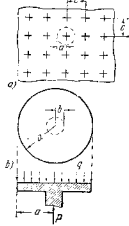


Рис. 75.

(где s есть расстояние между опорами), как круглую пластинку, свободно опирающую по внешнему контуру и нагруженную в центре силой $P = q s^2$, действующей вверх, и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , действующей вниз. Эти нагрузки показаны на рис. 75, б). Задача может быть решена с помощью методов, изложенных в п. 23.

Изгиб прямоугольных пластинок на упругом основании в связи с определением напряжений в бетонных дорожках был исследован Н. М. Westergaard¹⁾.

25. Тонкостенные сосуды, подверженные внутреннему давлению

Здесь мы ограничимся рассмотрением сосудов, имеющих форму тел вращения и подверженных внутреннему давлению интенсивности p , но обязательно равномерною, но симметрично распределенному относительно оси вращения $O-O$ (рис. 76). Если толщина стенок мала по сравнению с радиусами кривизны и нет резких изменений

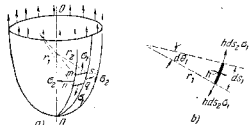


Рис. 76.

в форме меридиональных кривых, то напряжение можно вычислить с достаточной точностью, пренебрегая изгибом стенок сосудов, т. е. допуская, что растягивающие напряжения распределяются по толщине стенки равномерно²⁾. В таком случае величина напряжений может быть легко вычислена из уравнений статики.

Рассмотрим элемент $tnsq$, вырезанный из стенки сосуда двумя меридиональными сечениями tn и sq и двумя сечениями ms и pq ,

¹⁾ См. статью: Н. М. Westergaard and A. Slater, Proc. Am. Concrete Inst., т. 17, 1921. См. также V. L. e. w. e., Die strenge Lösung des Pflzdeckenproblems, Berlin, 1922.

²⁾ См. его статью в Ingeniøren, Copenhagen, стр. 513, 1923 и также в Public Roads, т. 7, стр. 25, 1926. См. также S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940 (русский перевод, Пластины и оболочки, 1946, 1963).

³⁾ Оболочки, которые не сопротивляются изгибу, иногда называются мембранами, а напряжения, вычисленные без учета влияния изгиба, называются мембранными напряжениями. Предполагается, что внешние силы, равномерно распределенные по краю оболочки, направлены по касательным к меридианам.

нормальными к меридиану. Из условия симметрии можно заключить, что по граням этого элемента будут действовать только нормальные напряжения. Примем следующие обозначения:

σ_1 — растягивающее напряжение в меридиональном направлении, или меридиональное напряжение,

σ_2 — растягивающее напряжение вдоль параллельного круга, или окружное напряжение,

h — постоянная толщина стенки сосуда,

ds_1 — размер элемента в меридиональном направлении,

ds_2 — размер элемента по параллельному кругу,

r_1 — радиус кривизны меридионального сечения,

r_2 — радиус кривизны сечения, перпендикулярного к меридиану.

Полные растягивающие усилия, действующие по граням элемента, будут $h\sigma_1 ds_2$ и $h\sigma_2 ds_1$. Растягивающие усилия $h\sigma_1 ds_2$, действующие по граням ms и nq элемента, имеют составляющую в направлении нормали к элементу, равную (рис. 76, б)

$$h\sigma_1 ds_2 d\theta_1 = \frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1}. \quad (a)$$

Точно таким же образом растягивающие усилия, действующие по граням mn и sq , имеют нормальную составляющую

$$h\sigma_2 ds_1 d\theta_2 = \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2}. \quad (b)$$

Сумма этих нормальных составляющих по условию равновесия равняется нормальному давлению на элемент; следовательно,

$$\frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1} + \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2} = p ds_1 ds_2 \quad (c)$$

или

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{h}. \quad (122)$$

Рассмотрим теперь приложения этого уравнения.

Сферический сосуд под действием равномерного внутреннего давления. В этом случае $r_1 = r_2 = r$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Из уравнения (122) получаем

$$\sigma = \frac{pr}{2h}.$$

Конический сосуд. Рассмотрим открытый конический сосуд, наполненный жидкостью (рис. 77). В этом случае кривизна меридиана $1/r_1 = 0$ и окружное напряжение σ_2 , обусловленное давлением жидкости, может быть вычислено из уравнения (122). Внутреннее давление в точках m — n на расстоянии $d - y$

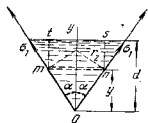


Рис. 77.

равняется p . Внутреннее давление в точках m — n на расстоянии $d - y$

от поверхности жидкости равняется $p = \gamma(d - y)$, где γ — вес единицы объема жидкости. Радиус кривизны r_2 в этих точках равен $r_2 = \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$. Тогда уравнение (122) переписывается так:

$$\sigma_2 \frac{\cos \alpha}{y \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\gamma(d - y)}{h},$$

откуда

$$\sigma_2 = \frac{\gamma(d - y) y \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha}. \quad (d)$$

Наибольшее значение этого напряжения имеет место в точках, где произведение $(d - y)y$ является максимумом. Если мы положим производную от $(d - y)y$ равной нулю, то найдем $y = d/2$, и напряжение в этой точке будет

$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{\gamma d^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha}. \quad (e)$$

Напряжение σ_1 на уровне m — n найдется из того условия, что вертикальные составляющие меридиональных растягивающих усилий в стенках сосуда уравновешиваются весом объема $tmOns$ жидкости (рис. 77); следовательно,

$$2\pi y (\operatorname{tg} \alpha) h \sigma_1 \cos \alpha = \pi y^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha) \left(d - y + \frac{1}{3} y \right) \gamma,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{y (\operatorname{tg} \alpha) \left(d - \frac{2}{3} y \right) \gamma}{2h \cos \alpha}. \quad (f)$$

Это напряжение достигает наибольшего значения при $y = \frac{3}{4}d$. Подставляя это значение в уравнение (f), мы находим

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{d^2 \gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha}. \quad (g)$$

Уравнения (d) и (f) представляют полное решение задачи в том случае, когда напряжениями от изгиба в стенке сосуда можно пренебречь.

В случае цилиндрического сосуда диаметром d , подверженного равномерному давлению p , мы находим по-прежнему (см. т. I, стр. 46)

$$\sigma_1 = \frac{pd}{4h}; \quad \sigma_2 = \frac{pd}{2h}.$$

ЗАДАЧИ

1. Бак (рис. 78) наполнен жидкостью до указанного на рисунке уровня. Определить наибольшие напряжения σ_1 и σ_2 в цилиндрической и шаровой поверхностях сосуда, а также сжимающее усилие в укрепляющем кольце mn .

Решение. Вес жидкости, содержащейся в сосуде, равняется

$$Q = \left[\pi dr^2 + \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^2 l + \frac{r^3}{3} \right) \right] \gamma.$$

Для цилиндрической части бака имеем

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi r h} = \text{const} \quad \text{и} \quad (\sigma_2)_{\text{max}} = \frac{d\gamma r}{h}.$$

Для шаровой части наибольшее напряжение будет внизу на дне, где гидростатическое давление жидкости равноется γd , и $\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma d, R/2h$. Растягивающие усилия в шаровой части сосуда, приходящиеся на единицу длины кольца mn , равняются $Q/(2\pi r \sin \alpha)$. Радиальная сжимающая этого усилия, вызывающая сжатие кольца (рис. 78, б), равняется $(Q/2\pi r) \sin \alpha$, а сжимающее усилие в кольце равно $(Q/2\pi) \sin \alpha$. Это является лишь приближенным решением, полученным на основании допущения, что цилиндрическая и шаровая части представляют собой мембраны, соприкасающиеся только растяжением. При вычислении сжимающих напряжений в

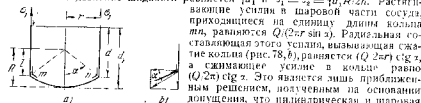


Рис. 78.

кольце необходимо к поперечному сечению самого кольца mn прибавить сечения смежных участков цилиндрической и шаровой частей.

2. Определить напряжения в точках m и n цилиндрического бака с полусферическим дном, который наполнен до указанного на рис. 79 уровня.

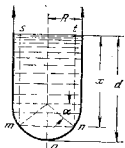


Рис. 79.

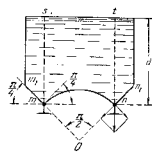


Рис. 80.

Решение. Из уравнения (122) для какой-либо точки шаровой части, находящейся на расстоянии x от поверхности жидкости, имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\gamma x}{R}. \quad (h)$$

Так как меридиональные усилия, приложенные по сечению mn , уравновешиваются весом объема $smOn$ жидкости, то второе уравнение будет

$$\sigma_1 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{d-R}{2} + \frac{R}{3} \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right), \quad (i)$$

и из уравнения (h) получаем

$$\sigma_2 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{d-R}{2} + \frac{R}{3} \frac{\sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \right).$$

3. Для бака на рис. 80 определить зависимость между внешним диаметром бака, диаметром опорного кольца mn и глубиной d жидкости по

условию, чтобы опорное кольцо mn испытывало лишь вертикальное давление. Средняя часть дна резервуара является шаровой поверхностью с полярным углом $\pi/2$. Тот же угол имеет и коническая часть mtm_1 .

Указание. Требуемая зависимость может быть получена из того условия, что давление на кольцо со стороны шарового дна и со стороны конической боковой поверхности, действующие под углом 45° , не должны давать горизонтальной составляющей. Из этого следует, что объем жидкости, ограниченный внутренней поверхностью mtm , должен быть равен объему жидкости, ограниченной наружной поверхностью.

4. Определить наибольшее напряжение в баке, представленном на рис. 78, если $R = 3$ м, $r = 2,1$ м, $d = 6$ м, $\gamma = 1$ г/см³ и $h = 0,6$ см.

5. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в стенках тора, подверженного равномерному внутреннему давлению p (рис. 81).

Решение. Условие равновесия для вертикальных сил в части mtm_1n_1 , вырезанной из сосуда

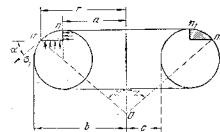


Рис. 81.

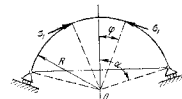


Рис. 82.

вертикальной цилиндрической поверхностью радиуса a и конической поверхностью mtm_1 , выразится так:

$$\pi (r^2 - a^2) p - \sigma_1 h 2\pi r \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{p (r^2 - a^2)}{2rh \sin \alpha}.$$

Теперь напряжение σ_2 можно вычислить из уравнения (122).

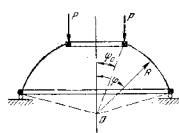


Рис. 83.

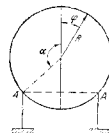


Рис. 84.

6. Определить наибольшее напряжение в стенках сосуда, представленного на рис. 81, если $a = 3$ м, $b = 3,6$ м, $h = 0,6$ см и $p = 3,5$ кг/см².

7. Шаровой купол постоянной толщины h (рис. 82) нагружен собственным весом q , приходящимся на единицу площади. Найти напряжения в меридиональном направлении, а также в перпендикулярном к меридиану.

$$\text{Ответ. } \sigma_1 = -\frac{qR}{h(1+\cos\varphi)}, \quad \sigma_2 = \frac{qR}{h}\left(\frac{1}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi\right).$$

8. Решить предыдущую задачу, если верхняя часть шарового купола удалена (рис. 83) и к верхнему контуру приложена равномерно распределенная нагрузка P , приходящаяся на единицу длины.

$$\text{Ответ. } \sigma_1 = -\frac{qR(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{h\sin^2\varphi} - \frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi},$$

$$\sigma_2 = \frac{qR}{h}\left(\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \cos\varphi\right) + \frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi}.$$

9. Шаровой бак (рис. 84), опертый по параллельному кругу, полностью наполнен жидкостью удельного веса j . Найти σ_1 и σ_2 .

Ответ. Если $\varphi < \alpha$:

$$\sigma_1 = \frac{7R^2}{6h}\left(1 - \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right), \quad \sigma_2 = \frac{7R^2}{6h}\left(5 - 6\cos\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right).$$

Если $\varphi > \alpha$:

$$\sigma_1 = \frac{7R^2}{6h}\left(5 + \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right), \quad \sigma_2 = \frac{7R^2}{6h}\left(1 - 6\cos\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right).$$

26. Местные напряжения изгиба в тонкостенных сосудах

В предыдущем параграфе пренебрегалось изгибом стенок сосуда и рассматривались только растягивающие, так называемые *мембранные напряжения*. Перемещения, обусловленные мембранными напряжениями, вызывают изгиб стенок, и результирующая напряжений изгиба может иметь существенное значение. В особенности это относится к местам перелома меридиана. Если меридиан состоит из кривых, которые не имеют в месте сопряжения общей касательной, то для того, чтобы воспрепятствовать значительному изгибу стенок сосуда, необходимо устроить скрепляющее кольцо, как показано на рис. 78.

Напряжения могут достигать значительной величины в местах сопряжения в меридиональном сечении, состоящем из нескольких кривых, также и в том случае, если в местах сочленения имеются общие касательные. Дополнительные напряжения, возникающие в этих точках, называются *напряжениями разрывной непрерывности напряжений*.

Покажем теперь способ их определения в простом случае цилиндрического сосуда с полушаровыми днищами, подверженного действию равномерного внутреннего давления (рис. 85). Сначала мы рассмотрим только мембранные напряжения и для цилиндрической части найдем

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h}, \quad \sigma_2 = \frac{pr}{h}, \quad (a)$$

где r — радиус цилиндра и полушара и h — толщина стенки. Для шаровой части имеем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pr}{2h}.$$

Соответствующие радиальные перемещения для цилиндрической и шаровой частей будут равны

$$\frac{r}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma) = \frac{pr^2}{2hE}(2 - \mu) \quad \text{и} \quad \frac{pr^2}{2hE}(1 - \mu).$$

Если бы шаровая и цилиндрическая части были разделены (рис. 85, б), то разность радиусов вследствие деформации, вызываемой мембранными напряжениями, равнялась бы

$$\delta = \frac{pr^2}{2hE}. \quad (b)$$

В действительном же сосуде днище и цилиндр связаны взаимно на их стыке усилиями сдвига $Q_0 = P_0$ и изгибающими моментами M_0 (рис. 85, в), отнесенными к единице длины окружности срединной поверхности сосуда. Эти усилия вызывают изгиб смежных частей сосуда. При изучении изгиба цилиндрической части достаточно рассмотреть изгиб элементарной полоски (рис. 86), поскольку деформация симметрична относительно оси и прогиб этой полоски совершается в меридиональной плоскости. Для простоты предположим, что полоска имеет ширину, равную единице. Если у означает радиальное перемещение в каком-либо поперечном сечении полоски, то радиус цилиндра в этом сечении укорачивается на величину u , вследствие чего появляется относительное сжатие в окружном направлении величиной u/r . Соответствующее сжимающее напряжение будет

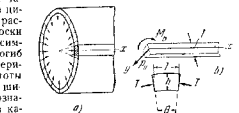


Рис. 86.

Естественно, когда полоска прогибается в направлении оси цилиндра, то возникают поперечные сжимающие усилия T (рис. 86, с), величина которых на единицу длины полоски равна

$$T = \frac{E\gamma}{r}h. \quad (c)$$

Так как угол θ равен $1/r$, то эти усилия дают радиальную результирующую, равную

$$\frac{E\gamma h}{r} = \frac{E\gamma h}{r^2}, \quad (d)$$

которая противодействует прогибу полоски. (Предполагается, что угол θ мал.) Эти реактивные силы распределяются по полоске пропорционально прогибам u , так что при изгибе полоска находится в тех же условиях, что и балка на упругом основании ⁴⁾ с коэффициентом постели $k = Eh/r^2$. Так как

⁴⁾ Кажется, что этот метод анализа местного изгиба в цилиндрических оболочках был введен H. Schaffler'ом, см. Orgau f. Eisenbauwesen, 1856.

любому изменению формы поперечного сечения полосы препятствуют смежные полосы точно таким же образом, как в пластинках, то здесь для расчета полосы также используется цилиндрическая жесткость (см. стр. 70) $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси полосы будет (см. уравнение (1) стр. 12)

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{Eh}{r^2} y.$$

Вводя, как и прежде, обозначение

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4D}} = \sqrt[4]{\frac{\delta(1-\mu^2)}{r^2 h^3}}, \quad (123)$$

полюс уравнение изогнутой оси полосы (см. уравнение (1), стр. 12)

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [Q_0 \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)]. \quad (e)$$

Это волнообразная кривая с быстро затухающими амплитудами и длиной волны

$$l = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{r^2 h^3}{\delta(1-\mu^2)}}, \quad (f)$$

которая мала по сравнению с r , если h мало. Из этого можно видеть, что изгиб в месте соединения цилиндра и днища имеет *местный характер* и оказывает заметное влияние на напряжения лишь в узкой полоске в непосредственной близости к соединению. Эта узкая полоска по краю днища является почти цилиндрической по форме, и следовательно, уравнением (e), которое было выведено для цилиндрической части сосуда, также можно пользоваться для приближенного вычисления прогибов и напряжений в днище ¹⁾.

В простейшем случае, когда цилиндрическая стенка и шаровое днище имеют одну и ту же толщину, прогибы и углы наклона, вызываемые на краях шаровой и цилиндрической частей силами Q_0 , равны. Тогда условия непрерывности в месте соединения удовлетворяются, если $M_0 = 0$, а $Q_0 = P_0$ имеет такую величину, которая вызывает прогиб по краю цилиндра, равный $f/2$. Подставляя в уравнение (e) $M_0 = 0$ и $x = 0$, получаем для вычисления Q_0 уравнение $\frac{Q_0}{2\beta^2 D} = \frac{f}{2}$, откуда

$$Q_0 = f \beta^2 D = \frac{pr^2}{2hE} \frac{1}{4\beta^2 r^2} = \frac{p}{8\beta}. \quad (124)$$

Зная Q_0 , мы можем вычислить из уравнения (e) прогиб и изгибающий момент в любом поперечном сечении полосы. Соответствующие напряжения разрыва непрерывности напряжений должны быть прибавлены к мембранным напряжениям, определенным уравнениями (a).

Если днище и цилиндрическая часть сосуда имеют разную толщину, то в месте соединения будут существовать величина сдвига Q_0 и момент M_0 . Эти две величины определяются из следующих условий: 1) сумма прогибов по краю шаровой и цилиндрической частей должна равняться f (рис. 85, b); 2) углы поворота обоих краев должны быть равны между собой.

¹⁾ Доказательство того, что это является достаточно точным, было дано E. Meissnerom, Schweiz. Bauzeitung, т. 86, стр. 1, 1925.

Указанный метод можно применить также и тех случаях, когда днище не является доуларовым ¹⁾. Если толщина стенок сосуда, испытывающих давление, не мала, то напряжения от изгиба в стенках могут иметь нервно-степенное значение, и в этом случае становится необходимым более подробное исследование закона распределения напряжений ²⁾.

ЗАДАЧИ

1. Определить напряжения вследствие разрыва непрерывности в сосуде, показанном на рис. 85, если $p = 10 \text{ кг/см}^2$, $r = 60 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $\mu = 0,3$.

Решение. Из уравнения (123) мы получаем $\beta = 0,151$ и из выражения (124) мы находим $Q_0 = \frac{10}{8 \cdot 0,151} = 8,3 \text{ кг/см}$. Изгибающий момент в элементарной

полоске равен $M = -D \frac{d^2 y}{dx^2}$. Пользуясь уравнением (e) и подставляя

$$y = \frac{Q_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} \cos \beta x, \text{ получаем}$$

$$M = -\frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x.$$

Численно наибольшее значение этого момента имеет место при $\beta x = \pi/4$, когда $M_{\max} = 17,8 \text{ кг см}$. Соответствующее наибольшее напряжение от изгиба в полоске будет равно $6M_{\max}/h^2 = 74 \text{ кг/см}^2$. Это напряжение нужно сложить с мембранным напряжением

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h} = \frac{10 \cdot 60}{2 \cdot 1,2} = 250 \text{ кг/см}^2.$$

Изгиб полосы вызывает также окружные напряжения. Эти напряжения состоят из двух частей: 1) напряжений, которые препятствуют искажению поперечных сечений полосы (см. стр. 70) и наибольшее значение которых в любом поперечном сечении полосы равно $\pm 6M_0/h^2$ и 2) напряжений $-yE/r$, обусловленных укорочением окружности. Подставляя вместо y и M найденные выше выражения, получаем напряжение разрыва непрерывности, которое надо добавить к мембранному напряжению σ_2 . По уравнению (11):

$$-\frac{Q_0 E}{2\beta^2 D r} e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{6M_0 Q_0}{3h^2} e^{-\beta x} \sin \beta x = \frac{6M_0 Q_0}{3h^2} e^{-\beta x} (\sin \beta x - 1,83 \cos \beta x).$$

¹⁾ Этот метод был применен при исследовании закона распределения напряжений в различных формах днищ паровых котлов; см. E. Höhn and A. Huggenberger, Über die Festigkeit der gewölbten Boden und der Zylinderhäute, Zürich, 1927 и W. M. Coates, The State of Stress in Full Heads of Pressure Vessels, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1929. Метод также был применен при исследовании местного изгиба в резервуарах, содержащих жидкости; см. T. Pöschl u. K. Terschaghi, Berechnung von Behältern, Berlin, 1926. H. Reissner, Beton u. Eisen, т. 7, 1928; и C. Rungel, Z. Math. u. Phys., т. 51, стр. 254, 1904. Цилиндрические оболочки с плоскими днищами были рассмотрены E. O. Holtmbergom и K. Axelssonom, Trans. A. S. M. E., т. 54, стр. 132, 1932. Метод также был применен к толстостенным цилиндрам и дал удовлетворительные результаты; см. статью: C. W. MacGregor and L. F. Coffin, J. Appl. Mech., т. 14, стр. A-301, 1947. Далее о цилиндрических оболочках см. S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963.

²⁾ См. S. Timoshenko, там же.

Наибольшее значение этого напряжения можно легко найти обычным путем. Оно мало по сравнению с мембранным круговым напряжением $pr/h = 7 \cdot 500 \text{ кг см}^2$, так что напряжения разрыва непрерывности в этом случае существенно не влияют на наибольшее напряжение.

2. Тонкий цилиндрический барабан, прикрепленный к двум сплошным дискам, вращается около оси $O-O$ (рис. 87) с окружной скоростью v . Определить местные напряжения от изгиба в барабане, если он заделан по краям $m-m$ и n_1-n_1 .

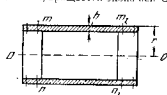


Рис. 87.

Решение. Если бы барабан был отделен от дисков, то увеличение радиуса барабана вследствие действия центробежной силы равносильно бы $\gamma v^2 r / gE$ (см. т. I, уравнение (15), стр. 36). Увеличение же радиуса сплошных дисков (см. выводы на стр. 181—183) равняется $\frac{1 - \mu \gamma v^2 r}{4 gE}$. Разности этих двух величин равна $\delta = \frac{3 + \mu \gamma v^2 r}{4 gE}$. (Предполагается, что γ , μ и E одинаковы как для барабана, так и для дисков.) Применяя тот же метод, что и в предыдущей задаче, и рассматривая полосу шириной, равной единице, найдем при помощи уравнений (11) и (12) величины поперечной силы Q_0 и изгибающего момента M_0 . Этими уравнениями можно воспользоваться, если рассматриваемая полоска является очень длинной. В дополнение мы можем считать диски весьма жесткими по сравнению с барабаном и пренебречь деформациями, вызываемыми в них силами Q_0 и моментами M_0 . Тогда уравнениями для вычисления Q_0 и M_0 будут

$$\frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 2M_0) = \delta, \quad \frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 2M_0) = 0,$$

откуда

$$Q_0 = 4\beta^2 D \delta; \quad M_0 = 2\beta^2 D \delta.$$

При помощи этих величин прогиба и напряжения от изгиба в барабане найдутся из уравнения, аналогичного уравнению (11).

3. Определить наибольшее напряжение от изгиба в барабане предыдущей задачи, если $r = 80 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $v = 150 \text{ м/сек}$ и материалом является сталь.

4. Определить напряжения от изгиба, возникающие в трубе под действием пассажного из нее узкого кольца (рис. 88).

Решение. Рассмотрим продольную полоску шириной, равной единице, и обозначим через P давление между кольцом и трубой, приходящееся на единицу длины окружности трубы. Эта полоска будет изгибаться точно так же, как длинный стержень на упругом основании, который несет сосредоточенный груз P (п. 1). Уменьшение радиуса трубы под действием силы P на основании формулы (8) равняется $P/8\beta^2 D$. Увеличение радиуса кольца равно Pr^2/FE , где F — площадь поперечного сечения кольца. (Уменьшение



Рис. 88.

кольца в радиальном направлении предполагается малым по сравнению с радиусом r .) Если через δ обозначить первоначальную разность между внутренним радиусом кольца и наружным радиусом трубы, то для вычисления P получим следующее уравнение:

$$\frac{P}{8\beta^2 D} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta,$$

или, пользуясь формулой (123) и принимая $\mu = 0,3$, получаем

$$0,643 \frac{P}{E} \left(\frac{r}{h} \right)^{3/2} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta. \quad (9)$$

P определяется из этого уравнения, и наибольший изгибающий момент в полоске найдется на выражении (9). Наибольшее напряжение изгиба в полоске будет

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{P}{h^2} \sqrt{\frac{r^2 h^2}{3(1 - \mu^2)}}.$$

Тот же метод применяется также в случаях, когда цилиндрическая труба с укрепляющими кольцами подвергается равномерному внутреннему или равномерному наружному давлению. Если расстояние между кольцами настолько велико, что влиянием любого из них на прогибы, вызываемые другими, можно пренебречь, то P можно получить из уравнения (9) путем подстановки $\delta = pr^2/Eh$. Это выражение представляет собой величину изменения радиуса трубы под действием равномерного давления (3).

5. Решить предыдущую задачу, предположив, что длина l трубы неслучайно и что кольцо находится в середине длины. Материалом является сталь и даны следующие размеры: $r = 60 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $l = 120 \text{ см}$, $F = 25 \text{ см}^2$ и $\delta = 0,12 \text{ см}$.

Указание. При вычислении давления P , приходящегося на единицу длины кольца, воспользоваться результатами, полученными для балки, показанной на рис. 13, стр. 25. Таким образом, прогиб, вызываемый в трубе давлением P , равняется

$$\frac{P}{8\beta^2 D} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}.$$

Тогда уравнение для вычисления P будет

$$\frac{P}{8\beta^2 D} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta.$$

6. Крутая цилиндрическая труба со свободными концами подвергается внутреннему равномерному давлению p . Найти продольное напряжение от изгиба и прогиб посредине трубы (рис. 89). Размеры трубы те же, что и в предыдущей задаче.

Указание. По результатам решения задачи, представленной на рис. 20, стр. 29, прогиб и изгибающий момент, приходящийся на единицу длины окружности, в среднем поперечном сечении $C-C$ будут

$$y_c = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{2 \text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\text{ch } \beta l + \cos \beta l} \right), \quad M = \frac{p}{E^2} \frac{\text{sh } \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\text{ch } \beta l + \cos \beta l}.$$

7. Решить предыдущую задачу, предположив, что края трубы жестко заделаны.

Указание. Воспользоваться результатами задачи, представленной на рис. 21, стр. 29.

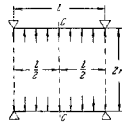


Рис. 89.

¹⁾ Пример таких вычислений дан в статье: G. Cook, Engineering, т. 116, стр. 479, 1923. См. также R. Lorenz, Z. Ver. deut. Ing., т. 52, стр. 1706, 1908; M. Westphal, там же, т. 41, стр. 1036, 1897.

²⁾ Приложение этого метода к вычислению окружных напряжений в полой трубке, имеющих круговое поперечное сечение, дано в статье K. v. Sandera, «Wert u. Reederer», стр. 189, 1920.

8. Круглая стальная труба усилена кольцами, которые находятся на расстоянии l одно от другого (рис. 90, а), и подвергается внутреннему давлению p . Найти давление P , возникающее на единицу длины внутренней окружности кольца. Найти наибольшие напряжения изгиба трубы.

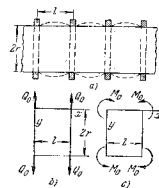


Рис. 90.

Для левого конца полоски на рис. 90, с получаем

$$(w_1)_{x=0} = -\frac{2M_0 \beta^2 r^2}{Eh} \frac{\text{sh } \beta l - \sin \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (j)$$

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4M_0 \beta^2 r^2}{Eh} \frac{\text{ch } \beta l - \cos \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (k)$$

Из нашего определения P следует, что $Q_0 = -\frac{P}{2}$. Подставляя это в уравнение (j) и замечая, что в трубе (рис. 90, а) касательная к полоске должна быть параллельна оси трубы, получаем

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{dw_2}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \frac{\text{sh } \beta l - \sin \beta l}{\text{ch } \beta l - \cos \beta l}. \quad (l)$$

При вычислении P мы предполагаем сначала, что кольца абсолютно жестки. В таком случае прогиб в трубе, вызываемый силами P под кольцами, должен равняться радиальному расширению pr^2/Eh , которое труба должна была бы иметь при отсутствии укрепляющих колец. Следовательно, уравнением для вычисления P будет

$$(w_1)_{x=0} + (w_2)_{x=0} = \frac{pr^2}{Eh},$$

или

$$\frac{P\beta r^2 \text{ch } \beta l + \cos \beta l}{Eh \text{sh } \beta l + \sin \beta l} - \frac{P\beta r^2}{2Eh} \frac{(\text{sh } \beta l - \sin \beta l)^2}{(\text{sh } \beta l + \sin \beta l)(\text{ch } \beta l - \cos \beta l)} = \frac{pr^2}{Eh}. \quad (m)$$

В каждом частном случае это уравнение можно легко решить относительно P . Подставляя значение P в уравнение (l), мы получаем требуемое значение изгибающего момента M_0 .

Решение. Начнем с рассмотренной части трубы между двумя кольцами, находящейся под действием поперечных сил Q_0 (рис. 90, б) и изгибающих моментов M_0 (рис. 90, в), приходящихся на единицу длины окружности трубы. (Предполагается, что шириной кольца можно пренебречь по сравнению с расстоянием l между кольцами.) Рассматривая продольную полоску шириной, равной единице, как балку на упругом основании, и пользуясь результатами задач, представленных на рис. 12, стр. 24, и на рис. 18, стр. 28, мы находим прогиб и угол наклона касательной в своем конце полоски по рис. 90, б;

$$(w_1)_{x=0} = -\frac{2Q_0 \beta r^2 \text{ch } \beta l + \cos \beta l}{Eh \text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (n)$$

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2Q_0 \beta^2 r^2 \text{sh } \beta l - \sin \beta l}{Eh \text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (o)$$

Чтобы принять в расчет расширение укрепляющих колец, мы замечаем, что силы P вызывают увеличение внутреннего радиуса кольца, равное Pr^2/Ft , где F — площадь поперечного сечения кольца. Прогиб трубы уменьшается на ту же величину. Следовательно, чтобы получить силу P в этом случае, мы должны подставить в правую часть уравнения (n) величину $\frac{pr^2}{Eh} - \frac{Pr^2}{Ft}$ вместо $\frac{pr^2}{Eh}$.

9. Найти изгибающий момент M_0 и поперечную силу Q_0 , приходящиеся на единицу длины окружности в днище цилиндрического стального резервуара, наполненного жидкостью (рис. 91), если $r = 9$ м, $d = 7,8$ м, $h = 35$ см, $\gamma = 1$ г/см³ и $\mu = 0,25$.

Ответ. $M_0 = 5585$ кг·см/м, $Q_0 = 225$ кг/м.

10. Решить задачу 9, предполагая, что кольцо насажено на левый конец трубы. Сопротивление кольца кручению можно пренебречь.

Указание. Воспользоваться результатами, полученными в задаче 8, стр. 28.

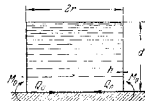


Рис. 91.

27. Температурные напряжения в цилиндрических оболочках

Если цилиндрическая оболочка со свободными краями испытывает равномерное изменение температуры, то никакие температурные напряжения не возникают. Но если края открыты или зашпелены, это будет препятствовать свободному расширению оболочки и на краях возникнут кривые напряжения изгиба. Предположим, например, что края длиной цилиндрической трубы зашпелены; тогда поперечные силы и изгибающие моменты на краях получатся такие же, как в задаче 2, п. 26. Необходимо лишь подставить в уравнение этой задачи величину $\delta = r\Delta t$, представляющую собой увеличение радиуса оболочки вследствие температурного расширения. Если длина трубы велика и одновременно должны рассматриваться оба конца, то изгибающие моменты и поперечные силы могут быть легко получены при помощи результатов задачи 8 п. 26. Рассмотрим теперь случай, когда происходит изменение температуры в радиальном направлении. Предположим, что t_1 и t_2 — постоянные температуры цилиндрической стенки соответственно на внутренней и наружной поверхностях и что изменение температуры по толщине стенки происходит по линейному закону. Тогда в точках, удаленных на большое расстояние от концов оболочки, не будет изгиба, и напряжение можно вычислить при помощи уравнения (87), стр. 81, выведенного для пластины с заделанными краями. Эта формула дает следующее наибольшее напряжение от изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha E (t_1 - t_2)}{2(1 - \mu)}. \quad (a)$$

(Предполагается, что $t_1 > t_2$.) На внешней поверхности оболочки будет действовать растягивающее напряжение.

Вблизи концов оболочки будет некоторый ее изгиб, и полные температурные напряжения получатся путем наложения напряжений, возникающих вследствие этого изгиба, на напряжения, определяемые уравнением (а). Рассмотрим в качестве примера напряжения на свободном конце длинной цилиндрической трубы. При вычислении напряжений в этом случае заметим, что напряжения на краю, представленные уравнением (а), складываются в равномерно распределенные моменты M_0 (рис. 92, а) величиной

$$M_0 = \frac{\alpha E (t_1 - t_2) h^2}{12(1-\mu)}. \quad (b)$$

Чтобы иметь свободный край, нужно наложить моменты той же величины, но противоположного направления (рис. 92, б). Следовательно, и температурные напряжения на свободном крае получатся путем наложения на напряжения, определяемые уравнением (а), напряжений, вызываемых показанными на рис. 92, б моментами. Эти

последние можно легко получить, рассматривая изгиб элементарной полоски и затем пользуясь уравнением (11), стр. 21, которое дает

$$y = -\frac{M_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad (c)$$

где β определяется по формуле (123). Наибольший прогиб, получающийся на свободном конце ($x=0$), равняется

$$y_{\max} = -\frac{M_0}{2\beta^2 D}, \quad (d)$$

а соответствующие окружные напряжения

$$\frac{M_0 E}{2\beta^2 D r} = \frac{E \alpha (t_1 - t_2)}{2 \sqrt{3(1-\mu)}} \sqrt{1-\mu^2}. \quad (e)$$

Изгибающий момент, действующий на конце элементарной полоски, определяется по уравнению (b). Изгибающие моменты, препятствующие искажению поперечных сечений полоски при изгибе, будут равняться

$$\mu M_0 = \mu \frac{\alpha E (t_1 - t_2) h^2}{12(1-\mu)}. \quad (f)$$

Наибольшее температурное напряжение действует на наружной поверхности трубы в окружном направлении и состоит из трех частей: 1) напряжения, определяемого по выражению (а), 2) напряжения, определяемого по выражению (е), и 3) напряжения, вызываемого моментами, определяемыми по выражению (f). Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha E (t_1 - t_2)}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{3}} - \mu \right). \quad (125)$$

При $\mu=0,3$ это напряжение приблизительно на 25% больше, чем напряжение, определяемое по уравнению (а), вычисленное в точках на большом расстоянии от концов. Поэтому мы можем заключить, что если имеет место трещина в хрупком материале, как, например, в стекле, вследствие разности температур $t_1 - t_2$, то она начнется с края и будет проходить в осевом направлении. Подобным способом можно также вычислить напряжения в случаях, когда края заделаны или оперты¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Найти температурные напряжения, возникающие в длинной стальной трубе с заделанными краями, если $r=60$ см, $h=1,2$ см, $\mu=0,3$, коэффициент температурного линейного расширения $\alpha=125 \cdot 10^{-7}$ и увеличение температуры трубы 55°C .

Решение. При данных размерах мы находим

$$\beta = 0,151 \text{ см}^{-1}, \quad D = 316 \cdot 10^3 \text{ кг см}.$$

Свободное удлинение радиуса трубы вследствие повышения температуры равно $\delta = \alpha r (t_1 - t_2) = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 55 = 4125 \cdot 10^{-3}$ см. Подставляя в формулы задачи 2 предыдущего параграфа, находим поперечную силу и изгибающий момент, приходящиеся на единицу длины окружности в заделанном конце:

$$Q_0 = 486^2 D = 173,2 \text{ кг/см},$$

$$M_0 = 286^2 D = 577,5 \text{ кг см}^2/\text{см}.$$

По значениям Q_0 и M_0 можно легко вычислить напряжения в осевом и круговом направлениях в заделанном конце. (Предполагается, что труба может свободно расширяться в осевом направлении.)

2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что края свободно оперты.
3. Стальная труба тех же размеров, что и в задаче 1, имеет температуры t_1 и t_2 соответственно на внутренней и наружной поверхности. Найти наибольшее напряжение в трубе, если $t_1 - t_2 = 55^\circ \text{C}$ и края свободны.

Ответ. $\sigma_{\max} = 1250 \text{ кг/см}^2$.

4. Решить предыдущую задачу, предполагая, что края трубы были заделаны, когда труба имела постоянную температуру, равную $(t_1 + t_2)/2$.

28. Кручение круглого кольца под действием моментов, равномерно распределенных по его оси

Имеются случаи, когда круглое кольцо постоянного поперечного сечения подвергается действию скручивающих моментов, равномерно распределенных по его оси²⁾. Рассматривая половину кольца (рис. 93, а) как свободное тело, мы заключаем, что из условия равновесия мо-

¹⁾ Несколько примеров такого рода рассмотрено С. Н. Кел'гом, Trans. A. S. M. E., т. 53, стр. 167, 1931. Случай изменения температуры в осевом направлении разобран в книге: S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, стр. 423, 1940 (русский перевод, 1946 и 1963).

²⁾ Примерами таких задач является расчет напряжений в удерживающих кольцах коммутаторов электрических машин и расчет напряжений во фланцах труб.

ментов относительно диаметра Ox изгибающий момент, действующий в поперечных сечениях m и n , должен быть равен

$$M = M_k a, \quad (a)$$

где a — радиус оси и M_k — скручивающая пара, приходящаяся на единицу длины оси.

Рассмотрим теперь деформацию кольца. Из условия симметрии можно заключить, что при кручении каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на один и тот же угол θ , который в последующем изложении будем считать малым¹⁾. Пусть C будет центр вращения (рис. 93, б) и B — точка в поперечном сечении, находящаяся на расстоянии ρ от C . Вследствие поворота поперечного сечения точка B описывает малую дугу $\overline{BB_1} = \rho\theta$. Благодаря этому перемещению радиус продольного волокна кольца, которое перпендикулярно сечению в точке B , увеличивается на B_2B_1 . Если координатные оси приняты, как указано на рисунке, из подобия треугольников BB_1B_2 и BDC имеем

$$\overline{B_1B_2} = \overline{BB_1} \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \rho\theta \frac{y}{\rho} = \theta y. \quad (b)$$

Рассмотрим сначала случай, в котором размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом a оси. Тогда радиус любого волокна кольца можно без большой погрешности принять равным a , и относительное удлинение волокна B благодаря перемещению, определяемому по уравнению (b), будет равно

$$\epsilon = \frac{\theta y}{a}. \quad (c)$$

Если не имеется бокового давления между волокнами кольца, то напряжения, соответствующие этому удлинению ϵ волокна, равняются

$$\sigma = \frac{E\theta y}{a}. \quad (d)$$

Теперь из условий равновесия половины кольца следует, что сумма всех нормальных усилий, действующих по поперечному сечению

¹⁾ Общее решение задачи, когда угол θ не мал, дано R. Grammel, Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 429 и т. 7, стр. 198, 1927. См. также книгу С. В. Визирова и R. Grammel, Technische Dynamik, т. 1, стр. 430, 1953.

кольца, должна равняться нулю, а момент этих усилий относительно оси x должен равняться M (см. выражение (a)). Если через dF обозначить элементарную площадь поперечного сечения, то указанные условия равновесия напишутся так:

$$\int_F \frac{E\theta y}{a} dF = 0; \quad \int_F \frac{E\theta y^2}{a} dF = M, \quad (e)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь F поперечного сечения. Первое из этих уравнений показывает, что центр тяжести поперечного сечения должен быть на оси x ; из второго уравнения находим

$$\theta = \frac{Ma}{EJ_x} = \frac{M_k a^2}{EJ_x}, \quad (126)$$

где J_x — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно оси x . Подставляя это в уравнение (d), находим

$$\sigma = \frac{M_k a y}{J_x}, \quad (127)$$

т. е. закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению кольца тот же, что и в случае изгиба призматических стержней; напряжение пропорционально расстоянию от нейтральной оси x , и наибольшее напряжение имеет место в точках, наиболее удаленных от оси.

В качестве второго примера рассмотрим кольцо прямоугольного поперечного сечения (рис. 94), ширина b которого не мала по сравнению с радиусом a оси. Пусть c и d соответственно означают внутренний и наружный радиусы кольца, а r — радиус какого-либо волокна кольца; предположим, как выше, что деформация кольца заключается в повороте его поперечного сечения¹⁾ на угол θ . Относительное удлинение волокна при радиусе r и соответствующее ему напряжение будут

$$\epsilon = \frac{\theta y}{r}; \quad \sigma = \frac{E\theta y}{r}. \quad (f)$$

Уравнение равновесия, аналогичное второму из уравнений (e), получится в следующем виде:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \int_c^d \frac{E\theta y^2 dr dy}{r} = M;$$

¹⁾ При этом рассмотрении возможность искажения поперечного сечения исключается. Соответствующая погрешность мала при условии, если $d/c < 1,5$. См. А. М. Вайль, цит. на стр. 99.

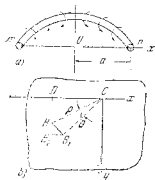


Рис. 93.

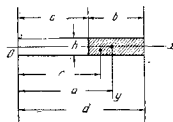


Рис. 94.

интегрируя, находим

$$\frac{Ebh^3}{12} \ln \frac{d}{c} = M,$$

откуда

$$\theta = \frac{12M}{EA^3 \ln \frac{d}{c}} = \frac{12M_0 \alpha}{Eh^3 \ln \frac{d}{c}}. \quad (128)$$

Подставляя это значение во второе из формул (6), получаем

$$a = \frac{12M_0 \nu}{h^3 r \ln \frac{d}{c}}.$$

Наибольшее напряжение имеет место во внутренних углах кольца, где $r = c$ и $y = h/2$:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2 c \ln \frac{d}{c}} = \frac{6M_0 a}{h^2 c \ln \frac{d}{c}}. \quad (129)$$

Если b мало, то уравнение (128) можно легко привести к виду уравнения (125). Таким образом, полагая $d = a + (b/2)$ и $c = a - (b/2)$, находим

$$\ln \frac{d}{c} = \ln \frac{a + \frac{b}{2}}{a - \frac{b}{2}} \approx \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

При малых значениях отношения b/a этот логарифм приблизительно равен b/a . Подставляя это в выражение (128), приходим к уравнению (126).

Этими выводами можно воспользоваться при вычислении напряжений, возникающих в месте сопряжения трубы и фланца⁴⁾ под действием сил R (рис. 95). R есть сила, приходящаяся на единицу длины внутренней окружности трубы. Сила, приходящаяся на единицу длины внешней окружности фланца, равняется $R(d/c)$. Под действием этих сил поперечное сечение фланца повернется на угол θ , а стенка трубы изогнется, как показано на рис. 95, b пунктиром. Пусть M_0 и $Q_0 = P_0$ будут изгибающий момент и поперечная сила в месте сопряжения, приходящиеся на единицу длины внутренней окружности трубы. Значения этих величин можно найти из условий непрерывности в месте сопряжения трубы и фланца. Так как обычно фланец бывает очень жестким в плоскости, перпендикулярной к оси трубы, то радиальное перемещение, вызываемое во фланце силами Q_0 , ничтожно, и прогиб на конце трубы можно считать равным нулю. Угол поворота конца трубы равняется θ , т. е. углу поворота поперечного

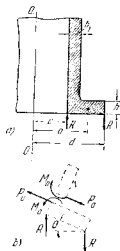


Рис. 95.

сечениями Q_0 , ничтожно, и прогиб на конце трубы можно считать равным нулю. Угол поворота конца трубы равняется θ , т. е. углу поворота поперечного

⁴⁾ Другой метод вычисления этих напряжений дан Е. О. Waterston, J. Appl. Mech., т. 59, стр. 161, 1937. См. также J. D. Mattimore, N. O. Smith-Petersen and H. C. Bell, Trans. A. S. M. E., т. 60, стр. 297, 1938. Этот метод был распространен на нецилиндрические оболочки G. Horgau and I. M. Clausen, см. статью № 53-A-43, представляющую на годичное собрание Американского о-ва инженеров-механиков, декабрь 1953.

сечения фланца. Тогда уравнения (11) и (12) (см. стр. 21) превращаются в следующие уравнения для определения M_0 и Q_0 :

$$\frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - \beta M_0) = 0; \\ - \frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 2\beta M_0) = 0.$$

Первое из этих уравнений дает

$$Q_0 = \beta M_0. \quad (г)$$

Тогда

$$M_0 = 2\beta D \theta \quad \text{и} \quad Q_0 = 2\beta^2 D \theta. \quad (h)$$

Для трубы толщиной h_1 и внутренним радиусом c мы находим β по формуле (123)

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{c^3 h_1^3}}. \quad (i)$$

(Если толщина трубы мала, то разницей между внутренним радиусом и радиусом средней поверхности можно пренебречь.) Скручивающий момент, приходящийся на единицу длины фланца и вызываемый показанными на рисунке силами, равняется

$$M_k = \frac{c}{a} \left[R(d-c) - M_0 - P_0 \frac{h}{2} \right] = \frac{c}{a} \left[R(d-c) - M_0 - M_0 \frac{h}{2} \beta \right]. \quad (j)$$

Подставляя это в выражение (128), получаем угол θ , а затем из первой формулы (h) находим

$$M_0 = 2\beta D - \frac{12c}{Eh^3 \ln \frac{d}{c}} \left[R(d-c) - M_0 - M_0 \frac{h}{2} \beta \right].$$

Заменяя D его значением $EM_0^2/12(1-\nu^2)$, мы получаем

$$M_0 = \frac{R(d-c)}{1 + \frac{3h}{2} + \frac{\nu^2}{2\beta c} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \ln \frac{d}{c}}. \quad (130)$$

Если даны размеры трубы, коэффициент Пуассона и сила R , то из формул (130) и (г) мы сможем вычислить величины M_0 и Q_0 , а затем, зная их, можем найти напряжения изгиба в трубе, как указано в п. 28.

ЗАДАЧИ

1. Определить изгибающий момент M_0 и поперечную силу Q_0 в трубе, показанной на рис. 95, если $d = 15,5$ см, $c = 8,5$ см, $h = 3,5$ см, $h_1 = 2$ см, $\nu = 0,3$.

Решение. Из формулы (i) имеем

$$\beta = \frac{\sqrt{0,73}}{\sqrt{c h_1^3}} = 0,313 \text{ см}^{-1}.$$

Кроме того, $\ln \frac{d}{c} = 0,601$; $\frac{\beta h}{2} = 0,505$. Подставляя эти значения в выражение (130), получаем

$$M_0 = 0,467R(d-c), \quad Q_0 = \beta M_0 = 0,145R(d-c).$$

Наибольшее напряжение от изгиба в трубе получится из формулы $\sigma = \frac{6M_0}{h^2}$.

2. Найти выражение для малого прогиба конического кольца, показанного на рис. 96 и представляющего элемент пружины Белливиля. R — нагрузка на единицу длины внутреннего контура кольца.

Решение. Возьмем, как и прежде, координатные оси x и y с началом координат в центре вращения C . Относительное удлинение и напряжение для какого-либо волокна радиуса r определяются уравнениями (i). Из условий равновесия половины кольца мы получаем

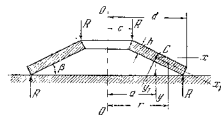


Рис. 96.

$$\left. \begin{aligned} \int_P \frac{E\beta y}{r} dF &= 0, \\ \int_P \frac{E\beta y^2}{r} dF &= M = Rc(d-c). \end{aligned} \right\} (k)$$

Положение центра вращения можно определить по первому из этих

уравнений. Пусть a будет радиус в точке C , и допустим, что угол β конуса настолько мал, что мы можем принять $\sin \beta = \beta$; $\cos \beta = 1$. Тогда, принимая оси x и y параллельными сторонам прямоугольного поперечного сечения и замечая, что $y = y_1 + \beta x_1 = y_1 + \beta(r-a)$, перепишем первое из уравнений (k) в таком виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_c^d \frac{E\beta}{r} [y_1 + \beta(r-a)] dr dy_1 &= E\beta^2 h \left[r - a \ln r \right]_c^d = \\ &= E\beta^2 h \left(d - c - a \ln \frac{d}{c} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a = \frac{d-c}{\ln \frac{d}{c}}. \quad (l)$$

Второе из уравнений (k) преобразуем так:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_c^d \frac{E\beta}{r} [y_1 + \beta(r-a)]^2 dr dy_1 &= \\ = E\beta \left[\frac{h^3}{12} \ln \frac{d}{c} + \beta^2 h \left(\frac{d^3 - c^3}{2} - 2a(d-c) + a^2 \ln \frac{d}{c} \right) \right] &= Rc(d-c). \end{aligned}$$

Подставляя вместо a его значение (l), получаем следующее выражение для

вертикального прогиба верхнего края конуса:

$$f = \theta(d-c) = \frac{Rc(d-c)}{E \left[\frac{h^3}{12(d-c)} \ln \frac{d}{c} + \beta^2 h \left(\frac{d^3 - c^3}{2} - \frac{d-c}{\ln \frac{d}{c}} \right) \right]}. \quad (m)$$

Из этого уравнения мы можем определить f , если нам будут известны размеры кольца, модуль упругости материала и нагрузка R . При этом выводе влиянием изменения угла β вследствие поворота на угол θ пренебрегались¹⁾.

¹⁾ Для больших прогибов изменение угла β должно быть принято во внимание. В таких случаях прогиб уже не пропорционален грузу. См. статью: W. A. Benschl and A. M. Wahl, Trans. A.S.M.E. Appl. Mech. Div., т. 52, стр. 52, 1930. См. также статья J. O. Atten and A. Laszlo, там же, т. 58, стр. 305, 1936 и S. Gross, Z. Ver. deut. Ing., т. 79, стр. 863, 1935.

ГЛАВА V

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ПЛАСТИНОК
И ОБОЛОЧЕК¹⁾29. Продольный изгиб призматических стержней
(простые случаи)

Рассмотрение одновременного действия изгиба и сжатия стержней (т. I, стр. 223) показало, что существует определенное *критическое значение* сжимающей силы, при котором можно незначительной поперечной нагрузкой вызвать большие прогибы. Для призматического стержня с шарнирно закрепленными концами и имеющего две плоскости симметрии²⁾ эта *критическая сжимающая сила* равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (a)$$

где J — наименьший главный момент инерции площади поперечного сечения. Опыты показывают, что когда сжимающая сила, приложенная к гибкому³⁾ стержню, приближается к этому значению, то начинается боковое выпучивание и оно настолько быстро происходит с возрастанием сжимающей силы, что величина нагрузки, равная критическому значению, обычно бывает достаточной для того, чтобы привести к потере несущей способности конструкции. Следовательно, эту *критическую нагрузку* нужно принимать за критерий прочности гибких колонн и стержней.

Из выражения (a) видно, что эта критическая нагрузка не зависит от предела прочности *материала* стержня, а зависит лишь от размеров конструкции и модуля упругости материала. Два одинаковых гибких стержня, один из которых имеет материалом высокопрочную

сталь, а другой — обыкновенную строительную сталь, будут выпучиваться при одной и той же сжимающей силе, хотя прочность материала в этих двух случаях весьма различна. Уравнение (a) показывает также, что несущая способность стержня может быть увеличена путем увеличения момента инерции J . Это можно сделать без изменения площади поперечного сечения, путем размещения материала возможно дальше от главных осей инерции поперечного сечения. Следовательно, трубчатые сечения более экономичны, чем сплошные сечения для сжатых стержней. Уменьшая толщину стенки таких сечений и увеличивая поперечные размеры, мы можем увеличить их устойчивость. Однако существует низший предел для толщины стенки, ниже которого сама стенка становится неустойчивой, и вместо продольного изгиба стержня как целого происходит местный продольный изгиб, который коробит стенки.

Эти рассуждения показывают, что *устойчивость упругих систем* или боковое выпучивание сжатых элементов имеет большое практическое значение. Это особенно справедливо во многих новейших конструкциях, где размеры поперечного сечения делаются все меньшими и меньшими благодаря использованию прочных материалов и в целях экономии веса. Во многих случаях разрушение инженерных сооружений можно объяснить упругой неустойчивостью, а не недостаточной прочностью материала.

В прежнем изложении (т. I, стр. 223) величина критической нагрузки стержня была получена путем рассмотрения одновременного действия сжимающих и изгибающих сил. Тот же результат можно получить, если допустить, что стержень сжимается только одним центральным приложенным грузом⁴⁾. Рассмотрим случай стержня в виде гибкой вертикальной призмы, зашлепленной внизу и нагруженной по оси сверху (рис. 97). Если груза P меньше, чем его критическое значение, то стержень остается прямым и испытывает лишь осевое сжатие. Эта прямая форма упругого равновесия *устойчива*, т. е. если приложить поперечную силу и вызвать малый прогиб, то прогиб исчезает, когда поперечная сила будет удалена, и

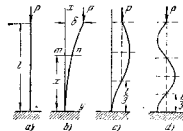


Рис. 97.

¹⁾ Подробные сведения по вопросу о продольном изгибе можно найти в книге S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, New York, 1936; русский перевод, 1946, 1935.

²⁾ Более общий случай, в котором продольный изгиб сочетается с кручением, рассмотрен ниже (стр. 231).

³⁾ Когда стержень недостаточно гибок, продольный изгиб происходит при сжимающих напряжениях, превосходящих предел пропорциональности. Этот случай разобран ниже (стр. 150).

⁴⁾ Значения критических грузов для различных условий на концах сжатого призматического стержня впервые были получены Л. Эйлером; см. Additamentum, «De curvis elasticis», in Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne, 1744 см. также Histoire de l'Académie, Berlin, т. 13, 1757. Английский перевод этой работы дан в Isis, № 58, т. 20, 1933.

стержень снова становится прямым. Увеличивая P постепенно, мы приходим к условию, при котором прямая форма равновесия становится неустойчивой и незначительная поперечная сила нагрузки вызывает поперечный прогиб, который не исчезает после удаления нагрузки. Тогда критическая нагрузка определяется как осевая нагрузка, которая достаточна для того, чтобы удержать стержень в слегка изогнутом виде (рис. 97, б).

Эта нагрузка может быть вычислена с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси. Взяв ось, как указано на рис. 97, б, изгибающий момент в произвольном поперечном сечении x получим равным $P(\delta - y)$; дифференциальное же уравнение изогнутой оси будет¹⁾

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = P(\delta - y). \quad (b)$$

Очевидно, что при свободном верхнем конце выпучивание стержня произойдет в плоскости *наименьшей жесткости*. Обозначая через EJ наименьшую жесткость при изгибе и полагая

$$p^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (c)$$

приводим уравнение (b) к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = p^2\delta. \quad (d)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$y = \delta - C_1 \cos px + C_2 \sin px, \quad (e)$$

в котором C_1 и C_2 — постоянные, которые должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить следующим условиям в заделанном конце:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

Эти условия будут выполнены, если мы примем

$$C_1 = -\delta, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$y = \delta(1 - \cos px). \quad (f)$$

Условием на верхнем конце будет

$$(y)_{x=l} = \delta,$$

¹⁾ Для прогиба, показанного на рис. 97, б, d^2y/dx^2 положительно, следовательно, мы пользуемся положительным знаком в правой части уравнения (b).

которое удовлетворится, если $\cos pl = 0$ или если

$$pl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (g)$$

где n — целое число. Наименьшее значение pl , а следовательно и P , которое удовлетворяет уравнению (g), получается, если положить $n = 0$. Тогда, пользуясь уравнением (c), получим

$$pl = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (131)$$

Это и есть *критическая нагрузка* для стержня, представленного на рис. 97, а, т. е. наименьшая нагрузка, которая может удерживать стержень в слегка изогнутой форме.

При $n = 1, 2, \dots$ из уравнения (g) мы получим

$$P = \frac{9\pi^2 EJ}{4l^2}, \quad P = \frac{25\pi^2 EJ}{4l^2}, \dots$$

Соответствующие изогнутые оси показаны на рис. 97, с и 97, d. Для формы, показанной на рис. 97, с, необходима сила в десять раз большая, чем критическая, а для формы, показанной на рис. 97, d, сила должна быть в 25 раз больше. Эти формы продольного изгиба являются неустойчивыми и не имеют практического значения, потому что конструкция тернет сопротивлении, когда нагрузка достигнет значения, данного уравнением (131).

Критическая нагрузка для некоторых других случаев может быть легко получена из решения для предыдущего случая. Например, в случае стержня с шарнирно закрепленными концами (рис. 98) по условиям симметрии очевидно, что каждая половина стержня находится в тех же условиях, что и стержень, показанный на рис. 97, б. Следовательно, критическая нагрузка для этого случая получится путем подстановки в уравнение (131) $l/2$ вместо l , что дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (132)$$

Случай стержня с шарнирно закрепленными концами очень часто встречается в практических приложениях и называется *основным случаем* продольного изгиба призматического стержня.

В случае стержня с защемленными концами (рис. 99) возникают реактивные моменты, которые удерживают концы от поворота при продольном изгибе. Сочетание сжимающей силы и концевых моментов



Рис. 98.

эквивалентно сжимающей силе P , приложенной эксцентрично (рис. 99). Имеются точки перегиба, где линия действия P пересекает изогнутую ось, поскольку изгибающий момент в этих точках равен нулю. Эти точки и средняя точка пролета разделяют стержень на четыре равные части, каждая из которых находится в тех же условиях, что и стержень, представленный на рис. 97, б. Следовательно, критическая нагрузка для стержня с заделанными концами найдется из уравнения (131) путем подстановки $l/4$ вместо l , что дает

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (133)$$

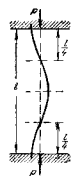


Рис. 99.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что стержень весьма гибок и напряжения, которые имеют место при продольном изгибе, остаются в пределах пропорциональности. Только при этом условии можно применять уравнение (б). Для того чтобы установить предел применимости формулы, выведенной выше для критических нагрузок, рассмотрим *основной случай* (рис. 98).

Разделив обе части формулы (132) на площадь F поперечного сечения стержня и обозначив через i наименьший радиус инерции, мы получим

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l}\right)^2. \quad (134)$$

Это уравнение применимо до тех пор, пока напряжение $\sigma_{кр}$ остается ниже предела пропорциональности материала. Если этот предел и модуль E для данного материала известны, можно по формуле (134) легко получить для каждого частного случая предельное значение отношения l/i , которое называется *гибкостью* стержня.

На рис. 100 зависимость (формула (134)) между гибкостью l/i и значением $\sigma_{кр}$ дается кривой ACB для строительной стали, имеющей $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Предполагая, что предел пропорциональности материала равняется 2000 кг/см^2 , мы заключаем, что лишь участок CB кривой можно использовать для определения $\sigma_{кр}$.

Поступая точно таким же образом, как и выше, мы находим следующие уравнения для случаев, представленных на рис. 97 и 99:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{2l}\right)^2, \quad (135)$$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l}\right)^2. \quad (136)$$

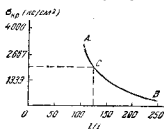


Рис. 100.

Формулу для основного случая (134) можно применять и в этом случае, если мы воспользуемся *приведенной длиной* l_1 вместо действительной длины стержня. В случае призматического стержня с одним защемленным и другим свободным концом приведенная длина (формула (135)) в два раза больше действительной длины, так что $l_1 = 2l$. В случае призматического стержня с обоими защемленными концами приведенная длина (формула (136)) равняется половине действительной длины или $l_1 = l/2$. Выразивши для критического напряжения в общем случае можно, следовательно, представить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l_1}\right)^2 = \pi^2 E \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \quad (137)$$

где α зависит от условий на концах стержня и иногда называется *коэффициентом длины*.

При изложении расчета колонны (г. I, стр. 227) был рассмотрен основной случай колонны с шарнирно закрепленными концами. Полученные в этом случае сведения теперь могут быть применены к колоннам с другими условиями на концах, если вместо действительной длины l воспользоваться приведенной длиной l_1 . Таким образом, в каждом частном случае расчет колонны сводится к определению надлежащего значения *коэффициента длины*.

При выводе уравнения (г) для изогнутой оси после продольного изгиба наибольший прогиб δ остается неопределенным, т. е. при критической нагрузке стержень может иметь любой малый прогиб. Приведенная выше теория может быть применена только к *малым* прогибам, потому что только в этих случаях можно воспользоваться приближенным выражением d^2y/dx^2 для кривизны вместо точного выражения

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{3/2}.$$

Решение точного дифференциального уравнения для изогнутой оси было найдено для некоторых случаев¹⁾; оно показывает, что в действительности не существует такой неопределенности в прогибе, как предполагалось выше. Например, для стержня с шарнирно закрепленными концами наибольший прогиб можно представить выражением²⁾

$$\delta = \frac{l^2 \sqrt{P}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} - 1} \left[1 - \frac{l}{8} \left(\frac{P}{P_{кр}} - 1 \right) \right], \quad (138)$$

¹⁾ См. Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig, 1880. См. также Hüllphen, Traité des fonctions elliptiques, т. 2, стр. 192, 1888.

²⁾ См. R. v. Mises, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 433, 1924, см. также O. Dörmke, Bautechnik, т. 4, стр. 747, 1926 и R. W. Burges, Phys. Rev. 1917.

которое показывает, что прогиб увеличивается очень быстро, когда нагрузка будет выше критического значения. Предполагая, например, что нагрузка будет на 1% больше чем $P_{кр}$, мы находим из выражения (138), что прогиб составляет приблизительно 9% длины l стержня. (Предполагается, что деформации лежат в пределах пропорциональности.)

Зависимость между нагрузкой и прогибом можно представить графически (рис. 101) кривой OAB , в которой нагрузка представлена ординатами, а прогибы абсциссами. До тех пор, пока нагрузка меньше чем $P_{кр}$, прогиб равен нулю. За этим пределом прогиб увеличивается быстро с возрастанием нагрузки. (Когда начинается текучесть, кривая AB уже непривисима, и в дальнейшем выпучивание происходит, как указано на рис. 101 пунктирной линией BC .)

При опытных исследованиях явления выпучивания сжатых стержней найдено, что связь между прогибом и нагрузкой зависит в значительной степени от точности, с какой центрирована нагрузка, и от прямины и однородности стержня. Кривая, изображающая зависимость между нагрузкой и прогибом, обычно подобна кривой OD на рис. 101. Вследствие неточностей различного рода искривление начинается при малых нагрузках, но прогибы возрастают очень медленно до тех пор, пока нагрузка значительно ниже критического значения. Как только нагрузка приближается к критическому значению, прогибы растут очень быстро. Чем точнее выполнен и нагружен стержень, тем ближе опытная кривая приближается к теоретической OAB).

Рис. 101.

ЗАДАЧИ

1. Стальной стержень, прямоугольного поперечного сечения $2,5 \times 5$ см с шарнирно закрепленными концами сжимается вдоль оси. Определить наименьшую длину, при которой можно применить формулу (132), если $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и предела пропорциональности равняется 2000 кг/см². Определить величину критического напряжения, если длина стержня равняется 1,5 м.

Решение. Наименьший радиус инерции равен $i = 2,5/2 \sqrt{3}$ см; следовательно, наименьшая длина найдется из формулы (134)

$$2000 = \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{6,25}{12} \cdot \frac{1}{i_{\min}^2}$$

и $i_{\min} = 71,8$ см.

Критическое напряжение при $l = 1,5$ м из (134) будет $\sigma_{кр} = 457$ кг/см².

4) Очень близкое совпадение опытных и вычисленных значений критических нагрузок было получено Т. К. в. К а г т а н о м, Forschungsarb., № 81, 1910. См. также К. М е т т л е г, Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 357, 1926.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круглое поперечное сечение диаметра 2,5 см и концы его зашкелены.

Ответ. Наименьшая длина равняется 1,25 м. При $l = 1,5$ м $\sigma_{кр} = 1370$ кг/см².

3. Определить критическую сжимающую нагрузку для стойки с шарнирно закрепленными концами двутаврового сечения длиной 1,8 м при $J = 64,4$ см⁴.

Ответ.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{9,87 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 64,4}{180^2} = 39360 \text{ кг.}$$

30. Продольный изгиб призматических стержней (более сложные случаи)

В качестве примера более сложного случая продольного изгиба стержней рассмотрим центральную сжатую стойку с заделанным нижним концом и с шарнирно закрепленным верхним концом (рис. 102). Критическое значение сжимающей силы есть такое значение $P_{кр}$, которое может удерживать стойку в слегка изогнутой форме. Можно видеть, что в этом случае при продольном изгибе возникает поперечная реакция Q , и дифференциальное уравнение изогнутой оси получается в виде

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Q(l-x). \quad (a)$$

Общим решением этого уравнения при обозначении (с) из п. 29 является

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px + \frac{Q}{P}(l-x). \quad (b)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 и неизвестной реакции Q мы имеем следующие условия на концах:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y)_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

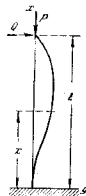


Рис. 102.

Подставляя значение y из уравнения (b), получаем по этим условиям

$$C_1 + \frac{Q}{P}l = 0, \quad C_1 \cos pl + C_2 \sin pl = 0, \quad pC_2 - \frac{Q}{P} = 0. \quad (c)$$

Определив постоянные C_1 и C_2 из первого и третьего уравнений, а затем подставив во второе, приходим к следующему трансцендентному уравнению для вычисления критической нагрузки:

$$\operatorname{tg} pl = pl. \quad (d)$$

Для решения этого уравнения полезен графический метод. На рис. 103 начерчены кривые, представляющие $\operatorname{tg} pl$ в функции от pl . Эти кривые асимптотически приближаются к вертикальным линиям $pl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$; при этих значениях $\operatorname{tg} pl$ становится бесконечным. Теперь корни уравнения (d) получатся как абсциссы точек пересечения вышеуказанных

кривых с прямой линией $y = \mu l$. Наименьший корень, полученный таким образом, равняется $\mu l = 4,493$. Тогда

$$P_{кр} = \mu^2 EJ = \frac{20,19 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,71)^2}. \quad (130)$$

Эта критическая нагрузка является такой же, как для стойки с шарнирно закрепленными концами, имеющей приведенную длину $l_1 = 0,71l$.

В качестве второго примера рассмотрим стержень, лежащий на трех опорах и центрально сжимаемый силой P (рис. 104). При вычислении критического значения сжимающей силы последуем нашему предыдущему определению и предположим, что $P_{кр}$ есть сила, которая может удержать стержень слегка искривленной формы. В результате искривления возникает изгибающий момент

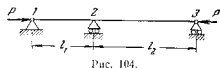


Рис. 104.

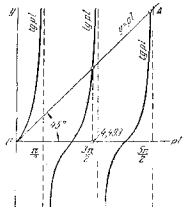


Рис. 103.

M_2 на средней опоре¹⁾, который может быть вычислен из уравнения (38), стр. 39, приведенного для неразрезных стержней. Замечая, что и в нашем случае концы стержня шарнирно закреплены, получим $M_1 = M_3 = 0$, и уравнение (38) напишется в следующем виде:

$$\left(\beta_1 \frac{l_1}{J_1} + \beta_2 \frac{l_2}{J_2} \right) M_2 = 0. \quad (e)$$

Это уравнение удовлетворяется, и искривленная форма стержня становится возможной, если

$$\beta_1 \frac{l_1}{J_1} + \beta_2 \frac{l_2}{J_2} = 0. \quad (f)$$

Здесь приняты следующие обозначения (см. выражения (36) и (23)):

$$\beta_1 = 3 \left[\frac{1}{(2u_1)^2} - 2u_1 \operatorname{tg} 2u_1 \right], \quad (g)$$

$$\beta_2 = 3 \left[\frac{1}{(2u_2)^2} - 2u_2 \operatorname{tg} 2u_2 \right]$$

¹⁾ Исключение составляет тривиальный случай, когда два пролета одинаковы и поперечное сечение постоянно по всей длине. В этом случае $M_2 = 0$ на промежуточной опоре и каждый пролет находится в тех же условиях, что и стержень с шарнирно закрепленными концами.

и

$$u_1 = \frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}, \quad u_2 = \frac{l_2}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}. \quad (h)$$

Если размеры стержня даны, то из уравнений (h) известно отношение $u_1 : u_2$, а из уравнения (f) находим отношение $\beta_1 : \beta_2$, равное

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{l_1}{l_2} \frac{J_1}{J_2}. \quad (i)$$

Имея числовую таблицу функций β , мы можем легко решить это уравнение при соответствующих значениях u_1 и u_2 . Тогда критическое значение P получится из уравнения (h).

Возьмем, например, $J_1 = J_2 = J$ и $l_2 = 2l_1$. Тогда $u_2 = 2u_1$ и

$$\beta_1 : \beta_2 = -2. \quad (j)$$

Для того чтобы решить это уравнение, мы должны найти такое значение u_1 (по табличному аргументу $2u_1$), чтобы после удваивания аргумента его функция β_2 изменила знак и уменьшилась до половины численного значения функции β_1 . Пользуясь таблицей¹⁾ числовых значений β , мы легко найдем, что это условие удовлетворяется, если

$$2u_1 = 1,93.$$

Следовательно, из уравнения (h) находим

$$P_{кр} = \frac{1,93^2 EJ}{l_1^2} = \frac{3,72 EJ}{l_1^2} = \frac{14,9 EJ}{l_2^2}.$$

Видно, что значение критической нагрузки лежит между двумя значениями $\pi^2 EJ/l_1^2$ и $\pi^2 EJ/l_2^2$, вычисленными для отдельных пролетов, как если бы каждый представлял стержень с шарнирно закрепленными концами. Устойчивость более короткого пролета уменьшается благодаря действию более длинного пролета, в то время как устойчивость более длинного пролета увеличивается.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачу 1 и 29, предполагая, что один конец стержня шарнирно закреплен, а другой защемлен, как показано на рис. 102.

2. Определить критическое значение силы P , которые сжимают вертикальные стержни прямоугольной рамы, показанной на рис. 105.

Решение. Симметричное выпучивание, показанное пунктиром на рис. 105, вызывает реактивные изгибающие моменты M_0 , которые соотновляются свободному повороту концов вертикальных стержней. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

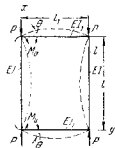


Рис. 105.

¹⁾ Такая таблица функций $\beta = \beta$ по аргументу $2u$ дана в книге автора «Theory of Elastic Stability», 1936 (русский перевод, 1936, 1955).

вертикального стержня будет

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + M_0.$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px + \frac{M_0}{P}. \quad (к)$$

Постоянные интегрирования и моменты M_0 определяются из следующих условий, основанных на симметричности формы искривленной рамы (рис. 105):

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l/2} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \theta = \frac{M_0 l}{2EJ_1}.$$

Подставляя значение y из уравнения (к), получаем

$$C_1 + \frac{M_0}{P} = 0, \quad -C_1 p \sin \frac{pl}{2} + C_2 p \cos \frac{pl}{2} = 0, \quad C_2 p = \frac{M_0 l}{2EJ_1}.$$

Эти уравнения дают следующее трансцендентное уравнение для определения p и критической нагрузки:

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{Pl_1}{2pEJ_1} = 0,$$

или, пользуясь обозначениями уравнения (с) п. 29, находим

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{J}{J_1} \frac{l_1}{l} \frac{pl}{2} = 0. \quad (l)$$

Когда $(J/J_1)(l_1/l)$ велико, т. е. когда сопротивление горизонтальных стержней рамы вызываемым вертикальным стержней мало, то $\operatorname{tg} pl/2$ является большим отрицательным числом и $pl/2$ приближается к $\pi/2$. Тогда критическая нагрузка приближается к значению $\pi^2 EJ_1/l^2$, полученному прежде для стержня с шарнирно закрепленными концами (формула (132)).

Когда $(J/J_1)(l_1/l)$ мало, т. е. сопротивление горизонтальных стержней рамы вызываемым вертикальным стержней очень велико, то $\operatorname{tg} pl/2$ представляет малое отрицательное число и $pl/2$ приближается к π . Тогда критическая нагрузка приближается к критическому значению $4\pi^2 EJ_1/l^2$, полученному прежде (формула (133)) для стержня с защемленными концами.

В случае квадратной рамы со всеми стержнями одинакового поперечного сечения ($l = l_1$, $J = J_1$) уравнение для определения критической нагрузки получается

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} = 0,$$

откуда

$$\frac{pl}{2} = 2,029,$$

$$P_{кр} = \frac{16,47EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,774l)^2}. \quad (м)$$

Следовательно, в этом случае приведенная длина равняется 0,774*l*. (Кривые, подобные кривым, изображенным на рис. 103, можно использовать также и в этом случае.)

3. Решить предыдущую задачу, предполагая, что в дополнение к вертикальным силам P имеются две пары горизонтальных сил Q , которые вызывают сжатие горизонтальных стержней рамы.

Указание. Так как горизонтальные стержни сжаты, то угол поворота, указанный на рис. 105, равняется 1) $\theta = \frac{M_0 l_1}{2EJ_1} \operatorname{tg} u$, где $u^2 = \frac{Ql_1^2}{4EJ_1}$. Уравнение для вычисления критического значения P получается путем подстановки $l_1 \operatorname{tg} u$ вместо J_1 в уравнение (l) задачи 2.

4. Стойка AB с шарнирно закрепленными концами (рис. 106) сжимается двумя силами P_1 и P_2 . Найти критическое значение силы $P_1 + P_2$, если $(P_1 + P_2)l_1 = m$, $J_1/J_2 = n$ и $l_1/l_2 = r$.

Решение. Предполагая, что искривленная форма стойки будет такой, как показано на рис. 106 пунктиром, найдем, как горизонтальные реакции, вызываемые при выгибании, будут равняться $Q = \delta P_2/l_2$. Дифференциальные уравнения верхнего и нижнего участков изогнутой оси будут

$$\left. \begin{aligned} EJ_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} &= -P_1 y_1 - \frac{\delta P_2}{l_2} (l-x), \\ EJ_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} &= -P_2 y_2 - \frac{\delta P_2}{l_2} (l-x) + P_2 (\delta - y_2). \end{aligned} \right\} (п)$$

Пользуясь обозначениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{EJ_1} &= \rho_1^2, & \frac{P_2}{EJ_1} &= \rho_2^2, \\ \frac{P_1 + P_2}{EJ_2} &= \rho_3^2, & \frac{P_2}{EJ_2} &= \rho_4^2, \end{aligned} \right\} (о)$$

мы получаем следующие решения уравнений (п):

$$y_1 = C_1 \sin \rho_1 x + C_2 \cos \rho_1 x - \frac{\delta}{l} \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} (l-x),$$

$$y_2 = C_3 \sin \rho_2 x + C_4 \cos \rho_2 x + \frac{\delta}{l} \frac{\rho_2^2}{\rho_4^2} x.$$

Постоянные интегрирования получаются из условий на концах обеих частей искривленного стержня:

$$(y_1)_{x=0} = 0, \quad (y_1)_{x=l_2} = \delta, \quad (y_2)_{x=l_2} = \delta, \quad (y_2)_{x=0} = 0.$$

Из этих условий мы получаем

$$C_1 = \frac{\delta(\rho_2^2 l + \rho_1^2 l_1)}{\rho_1^2 l (\sin \rho_1 l_2 - \operatorname{tg} \rho_1 l \cos \rho_1 l_1)}, \quad C_2 = -C_1 \operatorname{tg} \rho_1 l,$$

$$C_3 = \frac{\delta(\rho_2^2 l - \rho_4^2 l_2)}{\rho_2^2 l \sin \rho_2 l_2}, \quad C_4 = 0.$$

Подставляя в условие непрерывности

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_2} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=l_2},$$

получаем следующее трансцендентное уравнение для вычисления критических нагрузок:

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho_1^2 l + \rho_1^2 l_1}{\rho_1 \operatorname{tg} \rho_1 l} = \frac{\rho_2^2}{\rho_4^2} + \frac{\rho_2^2 l - \rho_4^2 l_2}{\rho_2 \operatorname{tg} \rho_2 l_2}. \quad (р)$$

¹⁾ Это получается из уравнения (48), стр. 43 подстановкой $\operatorname{tg} u$ вместо $l_1 u$.



Рис. 106.

которое можно решить в каждом частном случае путем последовательных построений или построением графиков обеих частей уравнения и определением точек пересечения двух кривых. Взяв, например, $l_1 = l_2$, $J_1 = J_2 = J$ и $P_1 = P_2$, получим

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,817)^2}.$$

5. Найти критическую нагрузку для колонны, заделанной внизу и свободной наверху, состоящей из двух призматических участков с моментами инерции J_1 и J_2 (рис. 107).

Решение. Если δ прогиб верха колонны, то дифференциальные уравнения для двух участков изогнутой оси будут

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P(\delta - y_1), \quad EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = P(\delta - y_2).$$

Пользуясь обозначениями (6), получаем решение этих уравнений в следующем виде:

$$y_1 = \delta - C \cos p_1 x + D \sin p_1 x,$$

$$y_2 = \delta(1 - \cos p_2 x).$$

Постоянные интегрирования получаются из условий

$$(y_1)_{x=0} = \delta, \quad (y_1)_{x=l_1} = (y_2)_{x=l_1},$$

которые дают

$$\delta + C \cos p_1 l_1 + D \sin p_1 l_1 = \delta,$$

$$\delta + C \cos p_1 l_2 + D \sin p_1 l_2 = \delta(1 - \cos p_2 l_2),$$

откуда

$$C = -D \operatorname{tg} p_1 l_1, \quad D = \frac{\delta \cos p_2 l_2 \cos p_1 l_1}{\sin p_1 l_1}.$$

Так как два участка изогнутой оси имеют одну и ту же касательную при $x = l_2$, то имеем уравнение

$$p_2 \sin p_2 l_2 = -C p_1 \sin p_1 l_2 + D p_1 \cos p_1 l_2.$$

Подставляя вместо C и D найденные выше значения, окончательно получаем следующие уравнение для определения $P_{кр}$:

$$\operatorname{tg} p_1 l_1 \operatorname{tg} p_2 l_2 = \frac{p_1 l_2}{p_2 l_1}. \quad (9)$$

В частном случае, когда оба участка колонны будут одинаковы, мы имеем

$$p_1 l_1 = p_2 l_2 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

и уравнение (9) получается

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) = 1$$

или

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{4}$$

и $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$. Это — критическая нагрузка для колонны постоянного поперечного сечения.

31. Энергетический метод определения критических сжимающих нагрузок¹⁾

Формула Эйлера, выведенная в п. 29, была получена путем решения дифференциального уравнения изогнутой оси для сжатого стержня с заданными условиями на концах. Имеются случаи, в которых это уравнение получается сложным и точное решение становится затруднительным. Тогда можно пользоваться приближенным методом, основанным на рассмотрении энергии системы.

В качестве простого примера рассмотрим колонну, заделанную внизу и свободную наверху (рис. 97, а и 97, б). Приложившаяся форма равновесия сжатого стержня является *устойчивой*, если сжимающая сила P мала, но она *неустойчива* после того, как P достигнет своего критического значения, при котором начинается попережное вынуживание. Это критическое значение P можно найти, сравнивая энергию системы в двух случаях: 1) когда стержень просто *сжат* и 2) когда он *сжат и изогнут*. Энергия деформации в изогнутом стержне больше, чем энергия деформации в прямом сжатом стержне, так как энергия изгиба должна быть прибавлена к энергии сжатия, которую можно считать постоянной для малых поперечных прогибов. Потенциальная энергия груза P также должна быть рассмотрена. Прогиб стержня сопровождается понижением точки приложения груза P , так что потенциальная энергия груза уменьшается. Пусть U — энергия деформации изгиба и U_1 — уменьшение потенциальной энергии груза. Если U_1 меньше, чем U , то прогиб стержня сопровождается увеличением потенциальной энергии системы. Это значит, что нужно было бы приложить некоторую дополнительную поперечную силу, чтобы произвести изгиб. В таком случае прямолнейная форма равновесия является *устойчивой*. С другой стороны, если $U_1 > U$, то прогиб стержня сопровождается уменьшением потенциальной энергии системы, и изгиб будет происходить без приложения какой-либо поперечной силы, т. е. прямолнейная форма равновесия будет *неустойчивой*. Поэтому критическое значение сжимающей силы получится из условия

$$U = U_1. \quad (140)$$

Для того чтобы вычислить величину критической нагрузки из этого уравнения, мы должны иметь выражения для U и U_1 . Когда стержень находится под действием сжимающей нагрузки, равной критической нагрузке ($pl = \pi/2$), то на основании уравнения (f) п. 29, стр. 126 уравнение изогнутой оси стержня будет

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (9)$$

¹⁾ См. статьи автора в Известиях Киевского политехнического института, 1910 и Ann. ponts et chaussées, Paris, 1914.

При этом значении u выражение потенциальной энергии изгиба получается равным

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^4}{64l^3} EJ. \quad (b)$$

Понижение точки приложения нагрузки при изгибе равняется (см. стр. 48)

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{16l}, \quad (c)$$

и, следовательно,

$$U_1 = P\lambda = \frac{\delta^2 \pi^2 P}{16l}. \quad (d)$$

Подставляя значение (b) и (d) в уравнение (140), получаем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2},$$

что совпадает с формулой (131), полученной ранее.

В этом примере изогнутая ось (уравнение (a)) была заранее известна, и поэтому точное решение для критической нагрузки было получено из уравнения (140). В случаях, когда изогнутая ось неизвестна, приближенное значение критической нагрузки можно получить, взяв *подходящую кривую* (т. е. кривую, удовлетворяющую условиям на концах стержня) для изогнутой оси и поступая таким же образом, как описано выше.

Для того чтобы показать точность, которую можно достигнуть при помощи этого метода, рассмотрим снова предыдущую задачу. Предположим, например, что в случае, показанном на рис. 97, б, изогнутая ось является такой же, как для консоли, нагруженной на конце поперечной силой Q . Тогда из уравнения (97) т. 1, стр. 134, мы получаем $y = (Qx^2/6EJ)(3l-x)$. Это выражение нужно подставить в уравнение (b) для энергии деформации U изгиба, а также в уравнение (d) для U_1 , и мы получим

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{6EJ},$$

$$U_1 = P\lambda = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{P}{15} \frac{Q^2 l^2}{EJ}.$$

Подставляя в уравнение (140), получаем $P_{кр} = 2,5EJ/l^2$. Сравнивая этот результат с точной формулой (выражение (131)), мы видим, что ошибка, происходящая от этого приближения, составляет лишь около 1%.

Ошибка может быть значительно уменьшена и получится лучшее приближение, если мы возьмем для энергии деформации изгиба выражение

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 dx. \quad (e)$$

Подставив в это выражение

$$M = P(\delta - y) = P \left[\delta - \frac{Qx^2}{6EJ} (3l-x) \right] = P\delta \left[1 - \frac{x^2}{2l^2} (3l-x) \right], \quad (f)$$

мы найдем

$$U = \frac{P^2 \delta^2 17l}{2EJ 35}.$$

Уменьшение потенциальной энергии груза P равняется

$$U_1 = \frac{P}{15} \frac{Q^2 l^2}{(EJ)^2} = \frac{3P}{5} \frac{\delta^2}{l}.$$

Подставляя в уравнение (140), получаем

$$\frac{P^2 \delta^2 17l}{2EJ 35} = \frac{3P}{5} \frac{\delta^2}{l},$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{42 EJ}{17 l^2} = 2,4706 \frac{EJ}{l^2}.$$

Точное же значение

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Следовательно, ошибка приближенного решения составляет лишь 0,13%. Пользуясь уравнением (e) вместо уравнения (b) для энергии деформации, мы вводим в вычисление прогиба y предполагаемую кривую вместо произвольной d^2y/dx^2 . Так как y представляется с большей точностью при помощи предполагаемой кривой, чем d^2y/dx^2 , то второй метод вычисления дает лучшее приближенное значение для $P_{кр}$.

Энергетический метод обычно дает весьма удовлетворительное приближение при условии, что принята кривая является надлежаще выбранной. Иногда мы можем сделать весьма грубое допущение для формы кривой и все же получим удовлетворительный результат. Например, мы можем принять в предыдущем примере изогнутую ось как параболу, определяемую уравнением $y = \frac{\delta x^2}{l^2}$. Тогда

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 \delta^2}{2EJ} \int_0^l \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{P^2 \delta^2}{2EJ} \frac{8}{15} l,$$

$$U_1 = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{l} P.$$

Подставляя в уравнение (140), находим $\frac{P_2^2 - 8}{2EJ} l = \frac{2}{3} \frac{h^2}{l} P$ и $P_{кр} = 2,5 \frac{EJ}{l^2}$. Таким образом, получается удовлетворительное приближение к критической нагрузке, хотя предполагаемая параболическая кривая не может рассматриваться как очень узкая. Она имеет приблизительно постоянную кривизну по длине, между тем как в действительной кривой кривизна пропорциональна изгибающему моменту. Она равняется нулю вверху стержня и имеет максимум внизу.

Применяя энергетический метод и пользуясь предполагаемой кривой, которая удовлетворяет условиям на концах, мы всегда получаем значение для критической нагрузки выше, чем истинное значение. Это следует из того факта, что действительная изогнутая ось искривленного стержня является такой, которая соответствует наименьшему сопротивлению стержня. Только по чистой случайности предполагаемая кривая будет истинной кривой наименьшего сопротивления. Почти в каждом случае предполагаемая кривая будет отличаться от этой кривой наименьшего сопротивления, давая таким образом более высокие значения для критических нагрузок¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачу, показанную на рис. 102, предполагая, что изогнутая ось будет точно такой же, как для равномерно нагруженной балки с одним заделанным и другим шарнирно опертым концом.

2. Решить при помощи энергетического метода задачу 4 п. 30 (стр. 135), допуская $I_1 = I_2 = \frac{l}{2}$.

Решение. Предполагая, что изогнутая кривая представляет синусоиду

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

находим, что изгибающие моменты для двух участков кривой будут

$$M_1 = P_1 y + \frac{h P_2}{l} (l - x),$$

$$M_2 = (P_1 + P_2) y - \frac{\delta P_2 x}{l}.$$

Потенциальная энергия изгиба равняется

$$U = \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EJ_1} + \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EJ_2} = \frac{h^2}{2EJ_1} \left(P_1^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} + P_1 P_2 \frac{2l}{\pi^2} \right) + \frac{h^2}{2EJ_2} \left[(P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} - P_1 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right].$$

¹⁾ Дальнейшее изложение энергетического метода см. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 120, 1936 (русский перевод, 1946, 1955).

Уменьшение потенциальной энергии вследствие понижения точек приложения грузов P_1 и P_2 равняется

$$U_1 = \frac{P_1}{2} \int_0^l \left| \frac{dy}{dx} \right| dx + \frac{P_2}{2} \int_0^l \left| \frac{dy}{dx} \right| dx = \frac{h^2 \pi^2}{4l} (P_1 + \frac{1}{2} P_2).$$

Подставляя в уравнение (140) и пользуясь предыдущими обозначениями (стр. 135), получаем

$$(P_1 + P_2)_{кр} = - \frac{(\pi^2 E J_2 / l^2) (m+1)}{m + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 - \frac{8}{\pi^2} (m-1) + n \left[\frac{1}{m} + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{m-1}{m} \right]} \quad (141)$$

3. Решить задачу 5 п. 30 при помощи энергетического метода. *Ответ.* Предполагая, что изогнутая кривая представляет уравнением

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right),$$

получаем

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{E J_2}{4l^2} \frac{1}{\frac{l}{2} - \left| \frac{l}{J_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{J_2}{J_1} - 1 \right) \right|} \sin \frac{\pi l}{l} \quad (142)$$

32. Продольный изгиб призматических стержней под действием равномерно распределенных осевых сил

Предполагая, что под действием равномерной осевой нагрузки имеет место небольшое боковое вынуждение (рис. 108), мы можем получить критическое значение нагрузки интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси. В этом случае уравнение не является таким простым, как было ранее, и его точное решение требует применения функций Бесселя¹⁾. Однако приближенное решение можно легко получить с помощью энергетического метода.

За приближенное выражение для изогнутой оси примем

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (a)$$

которое представляет истинную кривую для случая, когда происходит продольный изгиб под действием сжимающей нагрузки, приложенной на конце. Изгибающий момент в поперечном сечении xy , возникающий от нагрузки, лежащей выше этого сечения, равняется

$$M = \int_x^l q (y - y') dx.$$



Рис. 108.

¹⁾ См. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 115, 1936; русский перевод: Устойчивость упругих систем, 1946, 1955.

Подставляя выражение (а) вместо y и полагая

$$v = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

получаем после интегрирования по x

$$M = \delta q \left[(l-x) \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \right].$$

Подставляя это в выражение потенциальной энергии изгиба, получаем

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{\delta^2 q^2 l^3}{2EJ} \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4} \right). \quad (b)$$

При вычислении уменьшения потенциальной энергии распределенной нагрузки вследствие бокового вынуждения заметим, что благодаря наклону в поперечном сечении m элемента dx изогнутой оси верхняя часть груза испытывает перемещение вниз, равное

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

и соответствующее уменьшение потенциальной энергии будет

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 q (l-x) dx.$$

Полным же уменьшением потенциальной энергии от нагрузки при продольном изгибе станет

$$U_1 = \frac{q}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 (l-x) dx = \frac{\pi^2 \delta^2 q}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right). \quad (c)$$

Подставляя (b) и (c) в уравнение (140), мы получаем

$$\frac{\delta^2 q^2 l^3}{2EJ} \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4} \right) = \frac{\pi^2 \delta^2 q}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right),$$

откуда $(ql)_{кр} = \frac{7,89EJ}{l^2}$. Точным решением для этого случая является

$$(ql)_{кр} = \frac{7,89EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,122l)^2}. \quad (143)$$

Таким образом, ошибка в приближенном решении меньше 1%.

ЗАДАЧИ

1. Призматический стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 109) подвергается действию равномерно распределенной осевой нагрузки интенсивности q и осевой сжимающей силы P . Найти критическое значение P , предполагая, что уравнение для изогнутой оси дается в следующем виде:

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l}.$$

$$\text{Ответ. } P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} - \frac{ql}{2}.$$



Рис. 109.

33. Продольный изгиб стержней переменного поперечного сечения

На рис. 110 показан стержень переменного поперечного сечения, симметричный относительно середины длины и имеющий две осевые плоскости симметрии. Средний участок имеет постоянное поперечное сечение с наименьшим моментом инерции, равным J_0 . К концам поперечное сечение изменяется, и наименьшие моменты инерции следуют закону

$$J = J_0 \left(\frac{x}{a} \right)^m, \quad (a)$$

где x и a — расстояния от некоторой фиксированной точки (рис. 110), m — число, зависящее от типа колонны. Когда средний участок представляется собой сплошной цилиндр, а концы — сплошные конусы, J изменяется пропорционально четвертой степени x и $m = 4$ в уравнении (а). Когда колонна имеет постоянную толщину в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 110, моменты инерции J относительно оси, параллельной плоскости рисунка, пропорциональны x и $m = 1$ в уравнении (а). Когда колонна состоит из четырех уголков, связанных решеткой, как показано на рис. 111, площадь поперечного сечения остается постоянной, и J можно принять пропорциональным x^2 , так что $m = 2$ в уравнении (а). Вычисления, сделанные для $m = 1, 2, 3, 4$, показывают ¹⁾, что критическая нагрузка в пределах упругости может быть представлена уравнением

$$P_{кр} = \alpha \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (144)$$

в котором α — числовой коэффициент, зависящий от отношения h/l и J_1/J_0 , где $J_1 = J_0 (b/a)^m$ — момент инерции площади конусового поперечного сечения. В табл. 9 даны величины α для различных отношений в предположении, что концы колонны шарнирно закреплены. Можно видеть, что когда отношение h/l или отношение J_1/J_0 приближается к единице, то коэффициент α приближается к π^2 , и значения по формуле (144) сближаются со значениями по (132) для призматического стержня.

В качестве примера на применение этой таблицы рассмотрим деревянную стойку прямоугольного поперечного сечения длиной 2 м. Толщина стойки остается постоянной и равной 2 см. Ширина изменяется по гиперболическому закону и равняется 10 см в середине и 6 см на концах. Определить $P_{кр}$, если $E = 80\,000 \text{ кг/см}^2$. В этом случае $h/l = 0$; $m = 1$ и $J_1/J_0 = 6/10 = 0,6$. Из табл. 9 находим $\alpha = 8,60$ и критическая нагрузка по формуле (144) будет

$$P_{кр} = 8,60 \frac{80\,000 \cdot 10 \cdot 2^2}{12 \cdot 200^2} = 115 \text{ кг}.$$

Для второго примера рассмотрим пирамидальную колонну (рис. 111), поперечное сечение которой состоит из четырех уголков $90 \times 90 \times 10$ мм. Наружная ширина колонны на концах равна 30 см,



Рис. 110.

в пределах упругости



Рис. 111.

¹⁾ См. А. Н. Динник, Вестник инженеров, 1927. Таблица 9 взята из этой статьи.

Таблица 9

Коэффициент α в формуле (144)

$J_1 J_2$	$h/l =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1	$m=1$	6,48	7,58	8,68	9,46	9,82	*
	$m=2$	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	*
	$m=3$	5,91	6,32	7,84	9,11	9,77	*
	$m=4$	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	*
0,2	$m=1$	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	*
	$m=2$	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	*
	$m=3$	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	*
	$m=4$	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	*
0,4	$m=1$	7,87	8,60	9,19	9,70	9,84	*
	$m=2$	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	*
	$m=3$	7,52	8,38	9,10	9,63	9,84	*
	$m=4$	7,43	8,33	9,10	9,63	9,84	*
0,6	$m=1$	8,60	9,12	9,55	9,74	9,85	*
	$m=2$	8,51	9,03	9,48	9,74	9,85	*
	$m=3$	8,50	9,02	9,47	9,74	9,85	*
	$m=4$	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	*
0,8	$m=1$	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86	*
	$m=2$	9,21	9,50	9,69	9,82	9,86	*
	$m=3$	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86	*
	$m=4$	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	*
1		π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	*

a в среднем 50 см. Длина колонны равняется 20 см. Определить критическую нагрузку для этой колонны, принимая для строительной стали $E=2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и полагая, что релаксия из стальной настольно жестка, что позволяет применить формулу (144), выведенную для сплошных стержней. Площадь и моменты инерции поперечного сечения $F=4 \times 17,2=68,8 \text{ см}^2$; $J_1=4[128+17,2(15-2,59)^2]=11\,075 \text{ см}^4$; $J_2=4[128+17,2(25-2,59)^2]=33\,635 \text{ см}^4$. Взяв $J_1 J_2=0,3$, $m \approx 2$ и $h/l=0$, найдем из табл. 9 путем интерполирования $\alpha \approx 7$. Тогда по формуле (144) получим $P_{кр} = 7 \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 33\,635}{2000^2} = 122\,628 \text{ кг}$ и

$$\sigma_{кр} = \frac{122\,628}{68,8} = 1782 \text{ кг/см}^2.$$

34. Влияние поперечной силы на величину критической нагрузки

В предыдущих выводах формул для критических нагрузок мы пользовались дифференциальным уравнением изогнутой оси (см. стр. 126), в котором влиянием поперечной силы на прогиб пренебрегалось. Но когда произойдет выпучивание, поперечные сечения стержня уже не будут перпендикулярны сжимающей силе и в этих сечениях будет действовать поперечная сила. Влияние этой силы можно оценить с помощью энергетического метода, изложенного в п. 31. При использовании этого метода к энергии изгиба должна быть добавлена энергия сдвига при вычислении энергии деформации U вследствие продольного изгиба.

Пусть AB (рис. 112) — сплошного сечения стойка с шарниро закрепленными концами, изогнутая действием сжимающих сил P . Величины изгибающего момента и поперечной силы в каком-либо поперечном сечении m будут

$$M = Py; \quad Q = P \frac{dy}{dx}. \quad (a)$$



Рис. 112.

По предыдущему (см. т. I, § 69) потенциальная энергия, накопленная в элементе стержня, равняется

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{vQ^2 dx}{2GJ}, \quad (b)$$

где F — площадь поперечного сечения, α — числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (см. т. I, стр. 150). Премещение сечения m относительно m_0 благодаря сдвигу здесь принято равным $(\alpha Q/GF) dx$, и второй член правой части уравнения (b) представляет потенциальную энергию сдвига элемента. При помощи уравнений (a) и (b) найдем, что потенциальная энергия, накопленная в стержне при продольном изгибе, равняется

$$U = \int_0^l \frac{P^2 y^2 dx}{2EI} + \int_0^l \frac{\alpha P^2}{2GF} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (c)$$

Уменьшение потенциальной энергии груза равняется

$$U_1 = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (d)$$

Допуская, что изогнутая ось искривленного стержня представляет собой синусоиду

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (e)$$

и подставляя это значение в выражения (с) и (д), получаем

$$\left. \begin{aligned} U &= \delta^2 \frac{P^2 l}{4EJ} + \delta^2 \frac{P^2 l \sin^2 \alpha}{4GF I^2} \\ U_1 &= \delta^2 \frac{P^2 x^2}{4I^2} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Тогда уравнение (140) дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{EJ \sin^2 \alpha}{GF I^2}} \quad (g)$$

Сравнение с формулой Эйлера (уравнение (132)) показывает, что благодаря действию сдвига критическая нагрузка уменьшается в отношении

$$\frac{1}{1 + \frac{EJ \sin^2 \alpha}{GF I^2}} \quad (145)$$

Если мы положим

$$\frac{\pi^2 EJ}{I^2} = P_e, \quad \frac{GF}{a} = P_d, \quad (h)$$

то формула (g) примет вид

$$P_{кр} = P_e \frac{1}{1 + \frac{P_e}{P_d}} \quad (146)$$

Для сплошных стержней P_d весьма велико по сравнению с P_e , и влиянием поперечной силы можно пренебречь. В случае составных стержней, особенно когда применяются соединяющие планки или распорки (см. рис. 114, а), P_d может получиться того же порядка, что и P_e , и в этом случае уже нельзя пренебречь влиянием поперечной силы. Эта задача рассматривается в следующем параграфе.

35. Продольный изгиб составных стержней¹⁾

Составные стержни иногда применяются в стальных конструкциях. Их способность сопротивляться нагрузкам всегда меньше, чем сплошных колонн, имеющих ту же площадь поперечного сечения и ту же гибкость, т. е. отношение I/I_1 , и зависит главным образом от конструкции решетки составных стержней, от размещения распорок и планок. Это уменьшение критических напряжений объясняется главным образом тем обстоятельством, что в случае составных колонн поперечные

¹⁾ См. F. Engesser, Zentr. Bauverwalt., стр. 483, 1891 и стр. 609, 1907; L. Prandtl, Z. Ver. deut. Ing., 1907, а также статью автора в Известиях Киевского политехнического института, 1908. Эти статьи рассматривают вопрос о продольном изгибе составных стержней в связи с потерей устойчивости сжатой стержня Киевского моста.

силы оказывают значительно большее влияние на прогибы, чем в случае сплошных стержней. Чтобы оценить влияние поперечной силы на критическую нагрузку, можно применить к составным стержням формулу (146), которая была выведена для сплошных стержней. Пусть P_e , как и ранее, будет критическая нагрузка, определяемая формулой (132). В случае сплошных стержней P_d в формуле (146) имеет простой физический смысл, а именно отношение Q/P_d представляет собой дополнительный угол наклона γ изогнутой кривой, вызываемый поперечными силами. P_d также имеет то же значение в случае составных стержней при условии, что число панелей велико. Чтобы определить P_d в каком-либо частном случае, мы должны исследовать боковые перемещения, вызванные поперечными силами.

Рассмотрим сначала панель составного стержня, показанного на рис. 113, а. Перемещение сдвига зависит от удлинения и укорочения диагоналей и распорок каждой панели (рис. 113, б). Положим, что узлы являются шарнирными; удлинение диагонали, вызываемое поперечной силой Q равняется $Qa (\sin \varphi \cos \varphi EF_d)$, где φ — угол между распоркой и диагональю, $Q \cos \varphi$ — растягивающее усилие в диагонали, $a/\sin \varphi$ — длина диагонали, F_d — площадь поперечного сечения двух диагоналей. Соответствующее боковое перемещение (рис. 113, б) будет

$$\delta_1 = \frac{Qa}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} \quad (a)$$

Укорочение распорки и соответствующее боковое перемещение (рис. 113, в) равно

$$\delta_2 = \frac{Qb}{EF_b}, \quad (b)$$

где b — длина распорки, F_b — площадь поперечного сечения двух распорок.

Из выражений (а) и (б) получаем угловое перемещение, вызываемое поперечной силой Q :

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Q}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{Qb}{aEF_b}$$

Используя ранее введенное соотношение $Q/P_d = \gamma$, находим

$$P_d = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{b}{aEF_b}$$

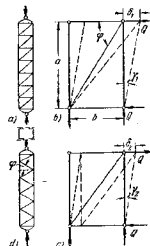


Рис. 113.

Подставляя это в формулу (146), получаем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{b}{aEF_b} \right)} \quad (147)$$

Если площади сечений F_d и F_b очень малы по сравнению с площадью поперечного сечения швеллеров (рис. 113, а), критическая нагрузка (выражение (147)) может быть значительно меньше той, которая получается по формуле Эйлера (132).

Выражение (147) можно также применить в случае, представленном на рис. 113, д, если угол φ измерить, как показано на рисунке, и исключить при этом член, обусловленный деформацией распорок.

В случае стержня с соединениями только из планок, как на рис. 114, а, для определения бокового перемещения от поперечной силы Q мы должны рассмотреть деформацию участка стержня, вырезанного поперечными сечениями m и m_1 . Допустим, что изогнутые оси швеллеров имеют точки перегиба в этих сечениях; условия изгиба будут отмечать показанным на рис. 114, б. (Растягивающие и сжимающие усилия, действующие на швеллеры, на рисунке не показаны.) Прогиб состоит из двух частей: из перемещения δ_1 вследствие изгиба планки и перемещения δ_2 вследствие изгиба швеллеров. По концам планки действуют моменты $Qa/2$, и соответствующий угол поворота θ (см. уравнения (103) и (104) т. I, стр. 141) равняется

рис. 114.

$$\theta = \frac{Qa}{2} \frac{b}{3EJ_2} - \frac{Qa}{2} \frac{b}{6EJ_2} = \frac{Qab}{12EJ_2},$$
 где b — длина планок и EJ_2 — их жесткость при изгибе. Боковое перемещение δ_1 , вызванное изгибом планок, равняется

$$\delta_1 = \theta \frac{a}{2} = \frac{Qa^2b}{24EJ_2}. \quad (c)$$

Перемещение δ_2 можно вычислить по формуле для консоли

$$\delta_2 = \frac{Q}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{Qa^3}{48EJ_1}. \quad (d)$$

Полное угловое перемещение, вызываемое поперечной силой Q , равняется

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{Qab}{12EJ_2} + \frac{Qa^2}{24EJ_1},$$

но так как $Q/P_d = \gamma$, получаем

$$\frac{1}{P_d} = \frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1},$$

и формула (146) для определения критической нагрузки становится

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1} \right)}, \quad (148)$$

где по-прежнему $\pi^2 EJ/l^2$ представляют критическую нагрузку, вычисленную для сплошной колонны по формуле Эйлера. Можно видеть, что когда жесткость при изгибе планок мала, действительная критическая нагрузка будет гораздо меньше, чем нагрузка, определяемая по формуле Эйлера.

Из выражений (147) и (148) вытекает, что при вычислении критических нагрузок для составных колонн действительная длина колонны заменится приведенной длиной, которая определяется в случае составной колонны (рис. 113) формулой

$$l_1 = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1} \right)},$$

а в случае колонны, составленной с помощью планок, как показано на рис. 114, формулой

$$l_1 = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1} \right)}.$$

Когда приведенная длина составной колонны определена, допускаемое напряжение получается, как для сплошной колонны с гибкостью, равной отношению l_1/l .

При проектировании составных колонн важное практическое значение имеет выбор размеров составных стержней и планок. В основу для определения напряжений в этих деталях при проектировании коротких колонн предпологается, что сжимающие силы приложены эксцентрично¹⁾. Если эксцентриситеты на двух концах равны e и

¹⁾ Этот вопрос рассмотрен более подробно в статье Д. Н. Уоллинга, Proc. Am. Soc. Civil Engrs, декабрь, 1934 и в другой статье того же автора в Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., Zürich, т. 2, стр. 480, 1934. См. также С. Тимошенко, Theory of Elastic Stability, стр. 197, 1936; русский перевод, 1946, 1955 и F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, New York, стр. 167, 1952.

противоположны по направлению, то сжимающие силы образуют пару сил с моментом $2Pe$, который вызывает на концах стержня поперечные силы, равные

$$Q = \frac{2Pe}{l}. \quad (149)$$

Наибольшее значение Q получается путем подстановки в это уравнение вместо P наибольшей нагрузки $P_{кр}$, которую колонна может выдержать. Эксцентриситет e обычно принимается как некоторая часть радиуса r ядра сечения, скажем $e/r = 0,3$. Тогда детали должны быть спроектированы таким образом, чтобы наибольшие напряжения, вызываемые в них силой Q_{max} , не превосходили предела текучести.

В случае сжатых составных элементов фермы с жесткими узлами при нагружении фермы на концах элемента возникают некоторые изгибающие моменты. Если величины M_1 и M_2 этих моментов вычислены из анализа *вторичных напряжений*, то соответствующие эксцентриситеты $e_1 = M_1/P$ и $e_2 = M_2/P$ точек приложения сжимающей силы известны, и величина их алгебраической суммы должна быть подставлена в уравнение (149) вместо $2e$.

36. Неупругий продольный изгиб прямолинейных колонн

В предыдущем изложении вопросов устойчивости всегда предполагалось, что материал колонны является совершенно упругим и следует закону Гука. Предположим теперь, что материал, хотя и является

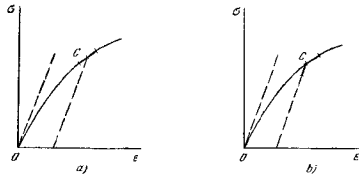


Рис. 115.

совершенно упругим, но не следует закону Гука, и что диаграмма сжатия подобна показанной на рис. 115, а. Если стержень из такого материала находится под действием сжимающих напряжений, соответствующих точке C на диаграмме, а затем вызывается некоторое малое изменение в напряжении (положительное или отрицательное), то связь

между изменением напряжения и изменением деформации будет зависеть от величины начального напряжения. Эта связь определяется наклоном огибающей диаграммы сжатия в точке C или, как показано на рисунке, наклоном жирного элемента диаграммы. Величина отношения $d\sigma/d\varepsilon$ может рассматриваться как переменный модуль упругости материала, будет называться *касательным* модулем и обозначаться через E_T .

Рассмотрим теперь сжатый по оси призматический стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 116, а) и предположим, что упругие свойства материала представлены диаграммой на рис. 115, а. При

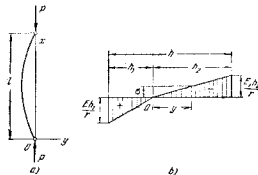


Рис. 116.

определении значения критической нагрузки для такого стержня мы можем поступить, как и прежде, и предположить, что после приложения сил P возникает бесконечно малый прогиб стержня. Тогда критическая сила $P_{кр}$ определится как сила, необходимая для того, чтобы удержать стержень в этой слегка искривленной форме. Так как предполагаемый прогиб бесконечно мал, то соответствующие напряжения от изгиба малы по сравнению с начальным сжимающим напряжением, и зависимость между напряжением и деформацией от изгиба определится соответствующим значением касательного модуля E_T . В таком случае дифференциальное уравнение изогнутой оси будет иметь тот же самый вид, что и для материала, следующего закону Гука, но вместо E появится касательный модуль E_T . Интегрирование этого уравнения дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_T J}{l^2}, \quad (150)$$

и

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E_T \frac{I^2}{J^2}. \quad (151)$$

Разница между этими формулами и уравнениями (132) и (184) для материалов, следующих закону Гука, заключается лишь в замене

постоянного модуля упругости E касательным модулем E_t , который является функцией сжимающего напряжения ε .

Если диаграмма сжатия, подобная приведенной на рис. 115, а, известна, то значение E_t можно легко определить для любого значения ε . Чтобы установить зависимость между $\varepsilon_{кр}$ и гибкостью, равной отношению l/i , мы возьмем ряд значений $\varepsilon_{кр}$ с соответствующими значениями E_t и подставим их в уравнение (151). Тогда уравнение определит соответствующие значения l/i . Пользуясь этими значениями, можно представить зависимость между l/i и $\varepsilon_{кр}$ кривой, аналогичной полученной на рис. 100 для материала, следующего закону Гука.

Этот метод вычисления $\varepsilon_{кр}$ для случая, когда материал не следует закону Гука, был применен Ф. Энгессером¹⁾, который поддал также мысль о применении метода для металлических стержней, сжатых выше предела пропорциональности. Однако в этом случае задача становится более сложной. Если стержень сжат за предел упругости и возник малый прогиб (рис. 116, а), то деформация сжатия на выпуклой стороне увеличивается, и зависимость между деформацией и напряжением определяется здесь величиной касательного модуля E_t . В то же самое время деформация сжатия на вогнутой стороне уменьшается, и в таком случае зависимость между напряжением и деформацией определяется тем начальным значением E модуля. Таким образом, здесь условия будут такие, как для материала, имеющего два различных модуля, один при растяжении и другой при сжатии. Соответствующие наклонные указаны на рис. 115, б двумя короткими жирными элементами графика. Предполагая, что поперечные сечения стержня остаются плоскими при повороте, малые напряжения изгиба можем представить двумя треугольниками, показанными на рис. 116, б. Эти напряжения от изгиба накладываются на равномерно распределенные начальные сжимающие напряжения. Если через r обозначить радиус кривизны изогнутой оси в рассматриваемом поперечном сечении, через $Eh_1 r$ и $E_t h_2 r'$ — соответственно наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения от изгиба, то положение нейтральной оси O (рис. 116, б) найдется из условия, что результирующие растягивающих и сжимающих напряжений изгиба должны быть равны и должны создать пару, которая уравновесит изгибающий момент M . В случае прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b эти условия требуют

$$Eh_1^2 = E_t h_2^2 \quad (а)$$

$$\frac{Eh_1 bh_1}{r} \frac{2h}{3} = M. \quad (б)$$

Замечая, что $h_1 + h_2 = h$, получаем из уравнения (а)

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}, \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}. \quad (с)$$

Тогда уравнение (б) дает

$$\frac{1}{r} \frac{bh^3}{12} \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^3} = M. \quad (д)$$

Вводя обозначение

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^3}, \quad (152)$$

получаем из уравнения (д)

$$\frac{E_r J}{r} = M. \quad (153)$$

Уравнение (153) имеет тот же вид, что и уравнение для упругой кривой, когда материал следует закону Гука. Мы должны лишь заменить модуль E величиной E_r , определяемой уравнением (152) и называемой *приведенным модулем упругости*. Пользуясь для $1/r$ его приближенным выражением d^2y/dx^2 и интегрируя уравнение (153), мы получим для стержня с шарнирными закрепленными концами (рис. 116, а)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_r J}{l^2}, \quad (154)$$

$$\varepsilon_{кр} = \pi^2 E_r \frac{l^2}{R^2}. \quad (155)$$

Сравнивая эти выражения с (150) и (151), видим, что разница заключается лишь в зависимости касательного модуля E_t , примененного в первоначальных уравнениях Энгессера, приведенном модулем E_r . Так как $E_t < E$, из формулы (152) видно, что $E_r > E$ ²⁾ и, следовательно, значения $P_{кр}$ на основании формулы (154) будут большими, чем значения по формуле (150). Это повышенное значение получается из того соображения, что при

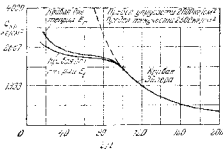


Рис. 117.

выпуклой стороне стержня представляет уменьшение начальной

¹⁾ F. Engesser, Z. Architect. u. Ingenieurw., стр. 455, 1889. См. также Considère, Congr. internat. procédés de construction, Paris, t. 3, стр. 371, 1889.

²⁾ Можно показать, что это справедливо не только для случая прямоугольного сечения стержня, но также для стержня с любым симметричным поперечным сечением, который изгибается в плоскости симметрии.

деформации сжатия. Таким образом, деформация упрочнения материала как бы имеет влияние на изгиб. На рис. 117 представлены кривые, устанавливающие зависимость между $\sigma_{кр}$ и l/λ , вычисленные по выражениям (151) и (155) для прямоугольных стержней из строительной стали¹⁾.

В течение многих лет формула (155), основанная на приведенном модуле E_p , применялась инженерами, которые имели дело с такими пластическими материалами, как алюминиевые сплавы и строительная сталь, но некоторые эксперименты показали, что результаты испытаний лучше согласуются с формулой (151). Рис. 118, например, представляет результаты испытаний для сплошных круглых стержней из алюминиевого сплава²⁾. Видно, что для больших значений гибкости результаты совпадают с кривой Эйлера, для коротких же стержней результаты удовлетворительно согласуются с кривой, отвечающей теории касательного модуля. Таким образом, метод рассуждения, примененный при вычислении $\sigma_{кр}$ в упругой области, становится неудовлетворительным за пределом упругости, так как кривая, отвечающая теории E_p , основанная на этом методе, не согласуется с результатами испытаний.

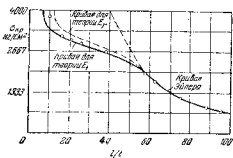


Рис. 118.

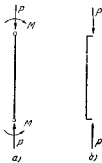


Рис. 119.

¹⁾ Чтобы объяснить несостоятельность этого общепринятого метода³⁾, мы должны помнить, что в случае пластической деформации стержня величина прогибов может зависеть не только от значений действующих сил, но также от порядка, в каком эти силы приложены. Возьмем, например, случай одновременного сжатия и изгиба (рис. 119, а). Если

¹⁾ Рис. 117 и 118 взяты из F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1952.

²⁾ См. статью R. L. Templin, R. G. Sturm, E. C. Hartmann and M. Holt, *Aluminum Research Laboratories*, Aluminum Company of America, Pittsburgh, 1938.

³⁾ Обяснение было дано F. R. Shanley, *J. Aeronaut. Sci.*, т. 14, стр. 261, 1947.

деформации совершенно упруги, то прогибы стержня зависят только от величин P и M и не зависят от порядка, в котором они были приложены. Условия будут совершенно отличны, если при нагружении возникнут пластические деформации. Предположим, например, что сначала приложены осевые силы P и их величина такова, что возникает пластическая деформация. Если теперь будут приложены моменты M , то на изгиб стержня под их действием будет оказывать влияние наклеп материала силами P . Этот наклеп должен быть принят во внимание, и при вычислении прогибов нужно применить приведенный модуль E_p . Другой путь нагружения рассмотрим в случае, когда одновременно приложены постепенно увеличивающиеся нагрузки P и M . Такое условие нагружения получается, например, если стержень сжат силами P , приложенными с некоторым эксцентриситетом, как показано на рис. 119, б. В этом случае деформации в каждом продольном волокне непрерывно увеличиваются, и зависимость между напряжением и деформацией определяется для каждого этапа нагружения соответствующим значением касательного модуля E_t .

При экспериментальном исследовании поперечного выпучивания колонны условия обычно подобны представленным на рис. 119, б. Благодаря неизбежным эксцентриситетам изгиб колонны начинается немедленно после начала нагружения. Однако так как эксцентриситеты весьма малы, то прогибами пренебрегают до стадии, когда нагрузка начинает приближаться к ее критическому значению. В этот период деформации начинают увеличиваться быстро, и их величина определяется с помощью модуля E_t соответственно критическому значению нагрузки. Следовательно, из этих соображений вытекает, что первоначальная формула (151) Энгессера будет давать критические напряжения с большей точностью, чем формула (153), как об этом свидетельствуют опыты.

Предыдущие рассуждения, изложенные для основного случая продольного изгиба (рис. 98), можно также применить к другим случаям продольного изгиба, как, например, показанным на рис. 99 и 102. Критическое напряжение можно вычислить по формуле (137) путем подстановки E_t вместо E . Однако в общем задаче на продольный изгиб в пластической области являются более сложными, так как условия на концах и коэффициенты длины обыкновенно перестают быть постоянными и изменяются с изменением $P_{кр}$. Возьмем, например, случай, показанный на рис. 105. В пластической области коэффициент длины для этого случая зависит лишь от отношения (см. уравнение (1), стр. 134)

$$\frac{J_1}{J_2} \quad (e)$$

которое не зависит от значения $P_{кр}$. Но в пластической области должно быть применено E_t вместо E , и взамен отношения (e) мы

получим

$$\frac{E_t P_{cr}}{EJ} \quad (1)$$

где E_t меньше E и зависит от величины $P_{кр}$. Следовательно, отношение жесткости изгиба горизонтальных элементов рамы к жесткости вертикальных элементов получается большим, в результате чего коэффициент длины получается меньше в пластической области, чем для случая совершенной упругости. Из этого мы заключаем, что если при расчете вертикальных элементов рамы в пластической области воспользуемся для приведенной длины тем же значением, какое вычислено для совершенно упругих условий, то мы обеспечим безопасность. Подобные заключения получаются также для случаев, разобранных в пп. 32, 33, 35.

37. Устойчивость круговых колец и труб под действием внешнего давления

Устойчивость кругового кольца. Хорошо известно, что круговое кольцо или труба могут потерять устойчивость при действии лишь внешнего давления. Если жесткость изгиба кольца недостаточна, то такая потеря устойчивости может произойти при напряжениях, значительно меньших предела упругости материала. Это явление нужно принимать во внимание в таких задачах как расчет трубок паровых котлов, подвергнутых внешнему давлению, и расчет укрепляющих колец подводных лодок.

Давление, при котором круговая форма становится неустойчивой и происходит сиюминутное, называется *критическим давлением*. Его

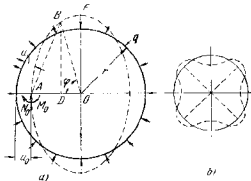


Рис. 120.

значение можно получить при помощи общего уравнения для изогнутой оси (уравнение (235) т. I, стр. 339).

Предположим, что под действием внешнего давления кольцо сиюминутно деформируется в эллиптическую форму, как показано на рис. 120, а пункти-

ром. Примем следующие обозначения: q — внешнее давление, приходящееся на единицу длины оси, R — радиус оси кольца, u — радиальное перемещение кольца при сиюминутном, u_0 — радиальное перемещение поперечного сечения A , M_0 — изгибающий момент в поперечном сечении, $N_0 = q(R - u_0)$ — продольная сжимающая сила в поперечном сечении A .

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении B сиюминутного кольца будет

$$M = M_0 + q \overline{AO} \cdot \overline{AD} - \frac{q}{2} AB^2. \quad (a)$$

Теперь в треугольнике AOB имеем

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \overline{AO} \cdot \overline{AD}$$

или

$$\frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \overline{AO} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} (\overline{OB}^2 - \overline{AO}^2) = \frac{1}{2} [(R - u)^2 - (R - u_0)^2].$$

Так как u мало по сравнению с R , то членами u^2 или u_0^2 можно пренебречь, следовательно,

$$\frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \overline{AO} \cdot \overline{AD} = R(u_0 - u).$$

Вставляя это значение в уравнение (a), мы получаем

$$M = M_0 - qR(u_0 - u).$$

Уравнение (235) т. I, стр. 339, получается в таком виде:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = - \frac{R^2}{EJ} [M_0 - qR(u_0 - u)]$$

или

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \left(1 + \frac{qR^3}{EJ}\right) = - \frac{M_0 R^2 + qR^2 u_0}{EJ}. \quad (b)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$u = C_1 \sin p\varphi + C_2 \cos p\varphi + \frac{M_0 R^2 + qR^2 u_0}{EJ + qR^3}, \quad (c)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые должны быть определены из условий в поперечных сечениях A и F сиюминутного кольца, и

$$p^2 = 1 + \frac{qR^3}{EJ}. \quad (d)$$

Из условий симметрии следует, что

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (e)$$

На основании первого из этих уравнений мы получаем $C_1 = 0$, а из второго

$$\sin \frac{p\pi}{2} = 0. \quad (f)$$

Наименьший корень этого уравнения будет $\frac{p\pi}{2} = \pi$, или $p = 2$.

Вставляя это в выражение (d), мы получаем значение для критического давления¹⁾

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (156)$$

Другие корни уравнения (f) такие, как $p\pi/2 = 2\pi$, $p\pi/2 = 3\pi$ и т. д., соответствуют большему числу волн сплюсненного кольца и дают большие значения для давления q . Рис. 120, б) показывает, например, сплюсненную форму при $p\pi/2 = 2\pi$. Эти высшие формы сплюсывания представляют интерес при исследовании устойчивости коротких цилиндрических трубок с закрепленными концами.

Устойчивость круговой арки.

Если круговая арка, имеющая шарнирно закрепленные концы, подвергается действию равномерно распределенного радиального давления, она может вынуживаться, как показано на рис.

Рис. 121.

121 пунктиром. Критическое значение давления зависит от величины угла α и может быть вычислено по следующей формуле²⁾:

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} \left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (157)$$

Задача об устойчивости кольца в направлении, перпендикулярном его плоскости, также решена³⁾.

Устойчивость круговых труб. Изложенная выше теория устойчивости кругового кольца может быть применена также и в случае длинной круговой трубы, подверженной равномерному внешнему давлению. Рассмотрим элементарное кольцо, вырезанное из трубы двумя поперечными сечениями на расстоянии одно от другого, равном еди-

¹⁾ Эта задача была решена М. Врессоном, Cours de mécanique appliquée, Paris, т. I, стр. 334, 1866.

²⁾ См. статью автора «Об устойчивости упругих систем», Известия Киевского политехнического института, 1910; французский перевод Ann. ponts et chaussées, 1913. См. также E. Hurlbrink, Schiffbau, т. 9, стр. 640, 1907 — 1908; E. Chwalla and C. F. Kollbrunner, Stahlbau, 1937 и 1938; А. Н. Динник, Пролонный изгиб стержней, Москва, 1939.

³⁾ См. E. L. Niscolai, Z. angew. Math. u. Mech., т. 3, стр. 227, 1923; см. также статью автора там же, стр. 358.

нице. Момент инерции поперечного сечения этого кольца будет $J = \frac{1}{12} h^3$, где h означает толщину стенки трубы. Так как при изгибе поперечные сечения кольца не искажаются, то вместо E можно пользоваться величиной $\frac{E}{1-\nu^2}$. Формула (156) для вычисления критического давления получается в следующем виде:

$$p_{кр} = \frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)R^3}. \quad (158)$$

Этим выражением можно пользоваться до тех пор, пока соответствующее сжимающее напряжение в трубе будет меньше предела пропорциональности материала. За пределом пропорциональности истинное критическое давление будет меньше, чем получаемое из формулы (158), и для материала с ясно выраженным пределом текучести можно пользоваться формулой⁴⁾:

$$p_{кр} = \frac{h}{R} \left[\frac{\sigma_T}{1 + 4 \frac{\sigma_T}{E} \frac{R^2}{h^2}} \right], \quad (159)$$

в которой σ_T обозначает предел текучести материала при сжатии. Когда толщина уменьшается, критическое давление приближается к предельному значению $Eh^3/4R^3$, которое несколько меньше данного формулой (158), и во всех случаях его значение меньше чем $h\sigma_T/R$, т. е. меньше давления, соответствующего пределу текучести⁵⁾.

В области за пределом упругости мы можем поступать так же, как в случае сжатых стержней и пользоваться E_T вместо E в уравнении (158). Таким путем устанавливается зависимость между $p_{кр}$ и h/R в пластической области.

Трубы с начальной эллиптической формой. Потеря устойчивости труб под действием равномерного внешнего давления и значительной степени зависит от различного рода недостатков в них. Наиболее важным недостатком является начальная эллипτικότητα, предельная величина которой в каждом типе трубы обычно хорошо известна по многочисленным измерениям

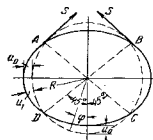


Рис. 122.

⁴⁾ См. R. V. Southwell, Phil. Mag., т. 29, стр. 67, 1915.

⁵⁾ Опыты над потерей устойчивости коротких труб под действием внешнего давления описаны G. Cookом, Phil. Mag., стр. 51, 1914. Библиография по этому предмету того же автора см. Brit. Assoc. Adv. Sci. (Birmingham) Repts., 1913.

при осмотре. Поэтому желательно иметь расчетную формулу, в которой эта начальная эллиптичность явно выражена. Чтобы вывести такую формулу¹⁾, предположим, что начальное отклонение формы трубы от совершенной круглой формы, указанной пунктиром на рис. 122, определяется уравнением

$$u_1 = u_0 \cos 2\varphi, \quad (g)$$

в котором u_0 — наибольшее начальное радиальное отклонение, рассматриваемое малым по сравнению с R , а φ — центральный угол, измеряемый, как показано на рисунке. Начальная форма трубы представлена сплошной линией.

Если к такой некруглой трубе приложить внешнее давление, то будет происходить дальнейшее сближивание трубы. Обозначая радиальное перемещение, соответствующее дополнительному сжатыванию, через u_2 и рассматривая элементарное кольцо с шириной, равной единице, мы получаем из уравнения (235) т. I, стр. 339:

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D} MR^2, \quad (h)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

— жесткость изгиба элементарного кольца. Что касается изгибающего момента M , возникающего от давления p , то мы видим, что уменьшение кривизны имеет место на участках AB и CD элементарного кольца; следовательно, M является положительным в этих областях, и в то время как на остальных участках кольца момент отрицателен. В точках A , B , C и D изгибающий момент равен нулю, и взаимодействие между частями элементарного кольца представится лишь силами S , касательными к пунктирному кругу, представляющему идеальную форму трубы. (Действие сил S на участок AB кольца показано на рисунке.) Этот круг можно рассматривать как веревочную кривую для внешнего равномерного давления p . Сжимающее усилие вдоль этой кривой остается постоянным и равным $S = pR$. Таким образом, изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении получается путем умножения S на полное радиальное отклонение $u_1 + u_2$ в этом поперечном сечении. Тогда

$$M = pR (u_2 + u_0 \cos 2\varphi), \quad (i)$$

и уравнение (h) получается в виде

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D} pR^2 (u_2 + u_0 \cos 2\varphi),$$

¹⁾ См. статью автора J. Appl. Mech., т. 1, стр. 173, 1933.

или

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 (1 - p \frac{R^2}{D}) = -\frac{1}{D} pR^2 u_0 \cos 2\varphi.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям непрерывности в точках A , B , C и D , будет

$$u_2 = \frac{u_0 p}{p_{кр} - p} \cos 2\varphi, \quad (160)$$

в котором $p_{кр}$ дается формулой (158). Видно, что в точках A , B , C и D перемещение u_2 и его вторая производная обращаются в нуль. Следовательно, изгибающие моменты в этих точках равняются нулю, как предполагалось ранее. Наибольший изгибающий момент имеет место при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$, где

$$M_{\max} = pR \left(u_0 + \frac{u_0 p}{p_{кр} - p} \right) = \frac{p u_0 R}{1 - \frac{p}{p_{кр}}}. \quad (161)$$

Видно, что при малых значениях отношения $p/p_{кр}$ изменением в эллиптичности трубы вследствие давления p можно пренебречь и что наибольший изгибающий момент получается путем умножения сжимающего усилия $S = pR$ на начальное отклонение u_0 . Если отношение $p/p_{кр}$ не мало, то изменение в начальной эллиптической форме трубы должно быть учтено и для вычисления M_{\max} нужно воспользоваться уравнением (161).

Наибольшее сжимающее напряжение получится тогда путем добавления наибольшего сжимающего напряжения от изгибающего момента M_{\max} к напряжению, возникающему от сжимающего усилия pR . Таким образом, находим

$$\sigma_{\tau} |_{\max} = \frac{pR}{h} + \frac{6pRu_0}{h^2} \frac{1}{1 - p/p_{кр}}. \quad (j)$$

С помощью этого выражения можно разработать для расчета труб метод, подобный методу расчета колец на основании допусковых несовершенств.

Предельное значение давления p есть то значение, при котором начинается текучесть материала. Обозначая это давление через p_{τ} и подставляя в уравнение (j) τ вместо σ_{\max} , получаем

$$\sigma_{\tau} = \frac{p_{\tau} R}{h} + \frac{6p_{\tau} Ru_0}{h^2} \frac{1}{1 - p_{\tau}/p_{кр}}, \quad (k)$$

откуда можно вычислить предельное давление p_{τ} , если известны σ_{τ} и начальное отклонение u_0 . При помощи обозначений

$$\frac{R}{h} = m \quad \text{и} \quad \frac{u_0}{R} = n \quad (l)$$

уравнение (k) для вычисления p_r получается в таком виде:

$$p_r^2 - \left| \frac{\sigma_r}{m} + (1 + 6mt) p_{kr} \right| \sigma_r - \frac{\sigma_r p_{kr}}{m} = 0. \quad (162)$$

На основании этого уравнения можно построить кривые, дающие среднее сжимающее напряжение $p_r R/h$ как функцию R/h для различных значений отношения u_0/R и для различных значений σ_r . При помощи таких кривых и при задании коэффициента безопасности можно легко подобрать подходящую толщину стенки трубы. Необходимо заметить, что давление p_r , определенное таким образом, меньше, чем давление, при котором происходит полная потеря устойчивости трубы; следовательно, пользуясь p_r как предельным значением давления, мы всегда сможем обеспечить устойчивость трубы.

В предыдущем изложении предполагалось, что длина трубы l велика по сравнению с ее радиусом, скажем, $l/R > 20$. Для коротких труб, если их края заделаны или просто оперты, значение p_{kr} больше значения, даваемого формулой (158), и зависит от отношения l/R . Теория устойчивости таких труб является более сложной¹⁾, так как труба разбивается при выпучивании на несколько волн по окружности и число этих волн зависит от отношения l/R ²⁾.

Задача об устойчивости труб, закрытых на концах и подверженных равномерному давлению на концах и с боков³⁾, также решена⁴⁾.

38. Устойчивость прямоугольных пластинок

Проблема выпучивания сжатых прямоугольных пластинок представляет большой практический интерес при рассмотрении упругой устойчивости сжатых элементов,

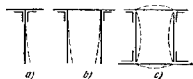


Рис. 123.

составленных из пластинок, которые часто применяются в стальных конструкциях (рис. 123). Потеря устойчивости таких элементов может быть вызвана выпучиванием стенки или боковых пластин, но не выпучиванием элемента как целого. Например, в случаях, показанных на рис. 123, выпучивание пластин, как указано пунктиром, имеет место, если толщина пластинки

¹⁾ Рассмотрение этой задачи см. С. Тимошенко, *Theory of Elastic Stability*, стр. 445, 1936; см. русский перевод, 1946, 1955.

²⁾ Некоторые кривые для вычисления критических давлений на короткие трубы были предложены Комитетом исследования по сопротивлению сосудов, находящимся под внешним давлением, А. С. М. Е., декабрь 1933.

³⁾ Это условие возникает при исследовании устойчивости обшивки корпуса подводной лодки между двумя укрепляющими кольцами.

⁴⁾ См. статью R. v. Mises in *Festschrift f. Prof. A. Stodola*, Zürich, 1929.

выбрана неудовлетворительно. Так как длина сжатого элемента обычно велика по сравнению с размерами поперечного сечения, задача сводится к задаче о выпучивании длинной сжатой пластинки (рис. 124). Короткие стороны пластинки можно рассматривать как свободно опертые; условием для двух других сторон зависит от формы поперечного сечения. Например, если сечение колонны имеет квадратную форму (рис. 123, c) и все боковые пластинки имеют одну и ту же толщину, то они стремятся выпучиться одновременно. Каждую грань можно тогда рассматривать как сжатую прямоугольную пластинку со всеми четырьмя свободно опертыми сторонами. В случаях, показанных на рис. 123, a и 123, b, нижние края вертикальных стенок свободны, а верхние края упруго защемлены¹⁾.

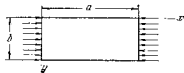


Рис. 124.

Имеется строгое решение задачи об устойчивости для различных условий вдоль длинных сторон пластинки, показанной на рис. 124²⁾. Здесь мы даем только некоторые окончательные результаты и значения критических напряжений, полученные из этих решений.

Прямоугольная пластинка, свободно опертая на четырех краях. Свободно опертая пластинка под действием равномерного сжатия в направлении оси x (рис. 124) выпучивается, разделяясь на квадраты или прямоугольники, близкие к квадратам. Критическое значение сжимающего напряжения дается формулой³⁾

$$\sigma_{кр} = \beta \sigma_0, \quad (163)$$

в которой

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 E h^2}{12 b^2 (1 - \mu^2)}, \quad (164)$$

где h — толщина пластинки и b — ее ширина. Коэффициент

$$\beta = \left(\frac{a}{mb} + \frac{mb}{a} \right)^2 \quad (a)$$

¹⁾ Первые опыты, в которых вопрос об устойчивости тонкостенных конструкций был рассмотрен, были сделаны В. Ферриером и описаны в его книге «*Britannia and Conway Tubular Bridges*», London, 1849. См. также работу Е. Годкинсона, опубликованную в качестве приложения к Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, London, 1849.

²⁾ См. S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, 1936; см. русский перевод, 1944, 1956.

³⁾ Решение такой задачи принадлежит Г. Н. Врэнгу; см. Proc. London Math. Soc., т. 22, стр. 54, 1891. Другие случаи продольного изгиба прямоугольных пластинок были рассмотрены автором. См. его статьи «Об устойчивости сжатых пластинок», Известия Киевского политехнического института, 1907; Z. Math. u. Phys. т. 58, 1911; Eisenbau, т. 12, 1921. Proc. Am. Soc. Civil. Engrs., т. 55, стр. 855, 1929; см. также Н. Reissner, Zentr. Bauverwalt., Berlin, стр. 83, 1909.

зависит от величины отношения a/b , а целое число m представляет число волн, на которые пластинка разделяется при выпучивании. Число m должно быть выбрано так, чтобы β сделать наименьшим¹⁾. Некоторые значения коэффициента β даны в табл. 10. Для более длинных пластинок ($a/b > 3$) хорошее приближенное значение даст $\beta = 4$.

Таблица 10

Коэффициенты для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольных пластинках со свободно открытыми краями

$a/b =$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3
$\beta =$	8,41	5,14	4,20	4,00	4,13	4,47	4,20	4,04	4,00	4,04	4,13	4,04	4,00
$\tau_{кр} =$	1520	938	760	727	747	807	760	733	727	733	747	733	727

Значения $\tau_{кр}$, данные в табл. 10, вычислены в предположении, что $E = 2 \times 10^4$ кг/см², $\nu = 0,3$ и $h/b = 0,01$. Критическое напряжение для какого-либо другого значения отношения h/b можно получить путем умножения табличных значений на $10^4 (h^2/b^2)$. Для пояснения сказанного рассмотрим длинную стальную пластинку, имеющую предел текучести, равный 2800 кг/см². Предположим, что мы желаем определить значение отношения b/h , при котором критическое напряжение равняется пределу текучести. Полагая $\beta = 4$ и пользуясь табл. 10, мы получаем $\tau_{кр} = 725 \times 10^4 \times \frac{h^2}{b^2} = 2800$ кг/см², откуда

$$\frac{b}{h} = 50,8. \quad (b)$$

При больших значениях отношения b/h выпучивание будет происходить при сжимающих напряжениях, меньших предела текучести материала. При таких условиях за основу определения рабочего напряжения нужно принимать критическое напряжение, а не предел текучести материала.

Три края пластинки открыты, а четвертый свободен. Если один из длинных краев, например $y = b$, свободен (см. рис. 124), то для вычисления критических значений сжимающего напряжения можно воспользоваться предыдущей формулой (163), взяв значения коэффициента β из нижеследующей табл. 11.

Таблица 11

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с тремя свободно открытыми краями и четвертым ($y = b$) свободным

$a/b =$	0,5	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
$\beta =$	4,40	1,440	1,135	0,952	0,835	0,755	0,698	0,610	0,564	0,516	0,506

¹⁾ Можно видеть, что это наименьшее значение β равняется 4 и имеет место при $a = mb$, т. е. когда пластинка при изгибе разделяется на квадраты.

Для противоположных краев свободно открыты, третий защемлен, а четвертый свободен. Край $x = 0$, $x = a$ на рис. 124 будут рассматриваться как свободно открытые, а край $y = 0$ — как защемленный. Здесь можно воспользоваться той же самой формулой (163), причем значение коэффициента β брать в табл. 12. (Для больших значений отношения a/b хорошее приближенное значение даст $\beta = 1,33$.)

Таблица 12

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с двумя противоположными краями, свободно открытыми, третьим защемленным и четвертым ($y = b$) свободным

$a/b =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$\beta =$	1,70	1,56	1,47	1,41	1,36	1,34	1,33	1,33
$a/b =$	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$\beta =$	1,34	1,36	1,38	1,45	1,47	1,41	1,36	1,34

Для противоположных краев просто открыты, два других защемлены¹⁾. Край $x = 0$ и $x = a$ рассматриваются свободно открытыми. Соответствующие значения коэффициента β формулы (163) даны в табл. 13.

Таблица 13

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с двумя противоположными свободно открытыми краями и с защемленными двумя другими краями

$a/b =$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1
$\beta =$	9,44	7,69	7,05	7,00	7,29	7,83	7,59	7,05	7,00	7,29	7,05	7,00

Прямоугольная пластинка, открытая по контуру и подвергающаяся действию касательных напряжений, равномерно распределенных по контуру (рис. 125). Критическое значение касательного напряжения, при котором может произойти выпучивание пластинки, равняется

$$\tau_{кр} = \beta \tau_e \quad (165)$$

Значения численного коэффициента β даны в табл. 14.

Табл. 14 можно пользоваться при выборе толщины стенки составной балки. У опор балки поперечная сила имеет наибольшее значение. Поэтому часть стенки между двумя ребрами жесткости можно

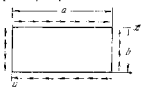


Рис. 125.

¹⁾ Мы имеем это условие, когда два противоположных края сжатого элемента, показанного на рис. 123, ϵ , очень жестки и только два других края могут выпучиваться.

Таблица 14

Коэффициент β для вычисления критического касательного напряжения в прямоугольной пластинке, опертой по контуру и подвергающейся действию равномерно распределенных по ее контуру касательных напряжений

$a/b \rightarrow$	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3	∞
$\beta =$	9,42	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,3	6,1	5,4

рассматривать как прямоугольную пластинку со свободно опертыми краями, подвергающуюся лишь действию касательных напряжений. Например, если расстояние между ребрами жесткости равняется 1,5 м, $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и $\mu = 0,3$, то, пользуясь табл. 15¹⁾, получим следующие значения критического напряжения в кг/см^2 для балок со стенкой высотой h и толщиной b .

Таблица 15

Критическое напряжение (кг/см^2) в балке со стенкой высотой h и толщиной b

$b, \text{ см}$	$h = 0,95 \text{ см}$	$h = 1,11 \text{ см}$	$h = 1,27 \text{ см}$	$h = 1,43 \text{ см}$
150	683	933	1220	1550
210	530	723	945	1200
300	478	654	850	1086

При помощи табл. 10—15 можно получить необходимую толщину стальных листов, применяемых в составных сжатых элементах, сечения которых показаны на рис. 123. Если сторонами трубчатого сечения рис. 123, с рассматривать как длинные прямоугольные пластинки с опертыми краями, то критическое сжимающее напряжение будет

$$\sigma_{кр} = 4\sigma_e = \frac{\pi^2 h^2}{3b^2} \frac{E}{1 - \mu^2}. \quad (с)$$

Взяв, например, $h/b = 0,01$, мы найдем $\sigma_{кр} = 725 \text{ кг/см}^2$. Это напряжение значительно ниже предела пропорциональности для строительной стали. Если длинные края той же пластинки рассматривать как защемленные, то мы находим

$$\sigma_{кр} = 7\sigma_e = \frac{7}{4} \cdot 725 = 1270 \text{ кг/см}^2.$$

В случаях, показанных на рис. 123, а и 123, б, сжатые вертикальные стальные листы можно рассматривать как длинные пластинки, защемлен-

¹⁾ Дополнительные данные относительно выпучивания стенки и расчет ребер жесткости даны в статьях автора, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., т. 35, стр. 855, 1929 и Engineering, т. 138, стр. 207, 1934. См. также E. Chwalia, Repts. 2d Congr. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., Berlin, 1936; Stahlbau, 1936.

нас²⁾ верхним краем и со свободным нижним краем. Поэтому критическое напряжение будет равняться

$$\sigma_{кр} = 1,33\sigma_e = \frac{1,33\pi^2}{12} \frac{h^2}{b^2} \frac{E}{1 - \mu^2}. \quad (д)$$

(д) (здесь устойчивость пластинки зависит от величины отношения b/h . Предполагая, что предел текучести строительной стали равняется 2000 кг/см^2 , значение b/h , при котором $\sigma_{кр}$ равняется этому напряжению, получится из уравнения (д):

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{1,33\pi^2}{12 \cdot 2000} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{0,91}} \approx 35.$$

Следовательно, если $b/h > 35$, то критическое напряжение получается меньше предела текучести материала. Это обстоятельство должно быть принято во внимание при выборе величины допускаемого напряжения. Устойчивость пластинки можно увеличить путем усиления свободного края пластинки.

Во всех приведенных выше случаях предполагалось, что критическое напряжение ниже предела пропорциональности. Для напряжений за пределом пропорциональности приведенные выше формулы дают преувеличенные значения критических напряжений³⁾.

39. Выпучивание балок, не имеющих боковых опор

Хорошо известно, что при отсутствии поперечных опор двутавровые балки, нагруженные в плоскости стенки, оказываются недостаточно устойчивыми в поперечном направлении. Если нагрузка увеличивается за некоторый критический предел, то такие балки выпучиваются из плоскости стенки, и дальнейшее нагружение вызывает в них потерю устойчивости⁴⁾. Для определения этого предела можно воспользоваться энергетическим методом.

Для пояснения этого рассмотрим балку AB (рис. 126, а) узкого прямоугольного поперечного сечения, нагруженную в центре тяжести среднего поперечного сечения силой P , действующей в продольной вертикальной плоскости симметрии. Если эта сила мала, то изгиб балки происходит только в вертикальной плоскости и эта форма изгиба будет устойчивой. Это значит, что если балка изгибается в боковом направлении поперечной силой, то этот прогиб исчезнет по удалении силы, и балка возвращается к своей первоначальной форме. Однако если сила P увеличивается, достигается ее предельное значение, при котором изгиб вертикальной плоскости становится

⁴⁾ Это предположение дает верхний предел для критического напряжения. Истинное критическое напряжение будет несколько ниже, так как закрепление верхнего края не абсолютно жестко.

⁵⁾ Этот вопрос разобран в книге S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 384, 1936; русский перевод, 1946, 1955.

⁶⁾ Потери устойчивости балок вследствие бокового выпучивания иллюстрируются катастрофой с мостом вблизи Тарба, Франция; см. Revue technique, ноябрь 15, 1897. Боковое выпучивание балок узкого прямоугольного поперечного сечения было разобрано Л. Прайдлем, Диссертация, Юренберг, 1899 и A. G. Michell, Phil. Mag., т. 48, 1899. Выпучивание двутавровых балок было разобрано автором; см. Известия Петербургского политехнического института, томы 4 и 5, 1905 и 1906. См. также Ann. polyt. et chaussees,

нестойчивым. Тогда балка выпучивается в боковом направлении и могут иметь место большие поперечные прогибы при весьма малом увеличении нагрузки. Это предельное значение P называется *критической нагрузкой*.

Критическая нагрузка определяется путем рассмотрения потенциальной энергии системы. Какой-либо боковой прогиб балки сопровождается увеличением энергии деформации. После малого бокового выпучивания мы имеем не только энергию деформации изгиба в вертикальной плоскости, которую можно рассматривать неизменной, но также энергию деформации изгиба в поперечном направлении и энергию деформации кручения. В то же самое

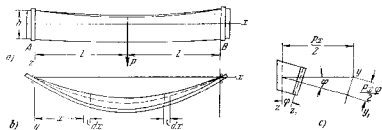


Рис. 126.

время потенциальная энергия груза уменьшается, потому что боковое выпучивание сопровождается понижением ее точки приложения. Пусть U_1 означает это уменьшение потенциальной энергии груза, U_2 — энергию деформации вследствие изгиба в поперечном направлении и U_3 — энергию деформации вследствие кручения. Тогда критическая нагрузка определится по уравнению (140), стр. 137, которое получается в следующем виде:

$$U_1 + U_2 = U_3. \quad (a)$$

Теперь мы должны вычислить величины, входящие в это уравнение. Изгибающий момент в вертикальной плоскости в каком-либо поперечном сечении в расстоянии x от левой опоры (рис. 126, б) равняется $Px/2$. При рассмотрении бокового выпучивания необходимо вычислить изгибающий момент относительно оси z_1 (рис. 126, в). Этот момент равняется $(Px/2)\varphi$, где φ — величина малый угол закручивания, переменный по длине балки. Тогда при малых поперечных прогибах ¹⁾ мы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2} \varphi. \quad (b)$$

Соответствующая энергии деформации изгиба равняется

$$U = EJ_z \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{P^2}{4EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx. \quad (c)$$

1913 и Trans. Am. Soc. Civil. Engrs., т. 87, стр. 1247, 1924. Практическое приложение теории разработано E. Ch walla, Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelsymmetrischem I-Querschnitt, Berlin, 1939. См. также книгу Ф. Бейка, цит. на стр. 149, гл. 4.

¹⁾ При малых прогибах мы можем принять для кривизны d^2y/dx^2 вместо d^2y/dx^2 .

Энергия деформации кручения равняется (см. г. I, уравнение (186))

$$U_3 = C \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx, \quad (d)$$

где жесткость при кручении C для прямоугольного поперечного сечения получается из уравнения (159) г. I, стр. 245.

Рассмотрим теперь понижение точки приложения груза P вследствие поперечного прогиба. Возьмем два симметрично расположенных элемента dx балки (рис. 126, б и 126, в) и рассмотрим влияние изгиба только этих двух элементов в плоскости xy . Угловые перемещения вследствие этого изгиба равно $-\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx$. Так как этот изгиб происходит в плоскости xy , наклоненной под углом φ к горизонту (рис. 126, в), то он приводит к понижению груза P на $-x\varphi \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx$. Полное понижение P в результате изгиба всех элементов балки при выпучивании поэтому будет $\delta = -\int_0^l x\varphi \frac{d^2y}{dx^2} dx$;

пользуясь уравнением (b), находим

$$\delta = \frac{P}{2EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx.$$

Отсюда

$$U_1 = P\delta = \frac{P^2}{2EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx. \quad (e)$$

Подставляя в уравнение (a) выражения (c), (d) и (e), находим

$$P_{кр}^2 = \frac{4EJ_z C \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l x^2 \varphi^2 dx}. \quad (f)$$

Взяв для угла закручивания φ удачно выбранную функцию x , удовлетворяющую условиям на концах, получаем приближенное значение критической нагрузки из уравнения (f). Предположим, например, что

$$\varphi = a \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (g)$$

Эта функция имеет нулевое значение на концах балки, где угол закручивания равен нулю, и наибольшее значение в середине ($x=l$). Подставляя (g) в выражение (f), находим ¹⁾

$$P_{кр} = \frac{17,2 \sqrt{C E J_z}}{(2l)^2}. \quad (166)$$

¹⁾ Более подробное исследование показывает, что ошибка этого приближенного решения составляет около 1,5%. Следовательно, формула (166) достаточно точна для практических приложений.

Таким образом, критическое значение нагрузки зависит от произведения жесткости кручения и жесткости бокового изгиба балки.

Выше предполагалось, что груз P приложен в центре тяжести срезного поперечного сечения балки. Если точка приложения находится на расстоянии a выше центра тяжести, то правая часть формулы (166) должна быть умножена на

$$[1 - 1,74 (\alpha/2l) \sqrt{EJ_z} \zeta]^{-1}.$$

Если нагрузка равномерно распределена по центральной оси балки (рис. 126), то ее критическое значение равно

$$(2ql)_{кр} = \frac{28,8 \sqrt{CEJ_z}}{(2l)^2}. \quad (167)$$

Для консоли длиной l , нагруженной в центре тяжести свободного конца, критическая нагрузка равняется

$$P_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{CEJ_z}}{l}. \quad (168)$$

В случае двутавровой балки формулы для критических нагрузок имеют вид, полученный выше для балки узкого прямоугольного поперечного сечения, с той разницей, что числовой коэффициент в числителе правой части не является постоянным, но зависит от величины выражения α

$$\alpha = \frac{C}{EJ_z} \left(\frac{2l}{h} \right)^2. \quad (h)$$

Например, если двутавровая балка опирается, как показано на рис. 126, и равномерно нагружена по центральной оси, то критическое значение полной распределенной нагрузки будет

$$(2ql)_{кр} = \frac{\beta \sqrt{CEJ_z}}{(2l)^2}. \quad (169)$$

Величины коэффициента β для различных значений отношения α даны в табл. 16. Видно, что с увеличением α постоянная β приближается к величине, данной ранее для балки прямоугольного поперечного сечения.

В третьей строке табл. 16 даны величины соответствующих значений критических напряжений изгиба, вычисленные в предположении, что

$$\gamma = \frac{J_z}{J_y} \left(\frac{h}{2l} \right)^2 = 0,0001. \quad (i)$$

Здесь J_z/J_y — отношение боковой и вертикальной жесткости изгиба и $h/2l$ — отношение высоты балки к ее пролету. Для любых других соотношений размеров балки критические напряжения получаются путем умножения чисел третьей строки на 10^4 . Четвертая и пятая строки табл. 16 дают критическое напряжение, когда нагрузка соответственно приложена к верхней

¹⁾ См. статью автора в Ann. ponts et chaussées, 1913. См. также его «Theory of Elastic Stability», стр. 254, 1936; русский перевод, 1946, 1955.

²⁾ Жесткость при кручении C для двутавровых балок рассмотрена в п. 47, стр. 204.

или нижней полке балки. Все вычисления сделаны в предположении совершенной упругости материала¹⁾.

Таблица 16

Критические напряжения ($\text{кг}/\text{см}^2$) для двутавровых балок, находящихся под действием равномерной нагрузки при $\gamma = 0,0001$ и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}^2$

$\alpha =$	0,1	1	2	4	6	8	12
$\beta =$	143,0	53,0	42,6	36,3	33,8	32,5	31,5
$\sigma_{кр} =$	568	663	753	907	1040	1153	1353
$\sigma'_{кр} =$	367	454	538	684	813	923	1120
$\sigma''_{кр} =$	880	970	1050	1200	1330	1430	1630
$\alpha =$	16	20	32	50	70	90	100
$\beta =$	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6
$\sigma_{кр} =$	1530	1780	2080	2570	3020	3400	3580
$\sigma'_{кр} =$	1290	1440	1840	2330	2770	3160	3330
$\sigma''_{кр} =$	1810	1980	2350	2840	3280	3670	3840

Рассмотрим в качестве примера строительную стальную двутавровую балку следующих размеров: длина $2l = 6$ м; высота $h = 60$ см; ширина полки $b = 18$ см; толщина стенки $\delta_1 = 1,7$ см; средняя толщина полки $\delta = 2,2$ см; площадь поперечного сечения $F = 175$ см²; главная жесткость изгиба $EJ_z = 91\,060 E$ кг/см⁴; главная жесткость изгиба $EJ_z = 1840 E$ кг/см⁴. Из уравнения (224), стр. 204 имеем

$$C = G \left(\frac{2}{3} b^3 + \frac{1}{3} h^3 \right) = 226G.$$

Тогда из уравнения (h), полагая $E = 2,6G$, находим $\alpha = 4,78$ и из выражения (i) получаем

$$\gamma = \frac{1840}{91\,060 \cdot 100} = 202 \cdot 10^{-4}.$$

Путем интерполяции из табл. 16 получаем при $\alpha = 4,78$

$$\sigma_{кр} = 907 + (1040 - 907) \frac{0,78}{2} = 959 \text{ кг}/\text{см}^2.$$

¹⁾ Более подробное исследование этого предмета см. в статье автора Trans. Am. Soc. Civil Engrs., т. 87, стр. 1247, 1924 и его «Theory of Elastic Stability», т. 5, 1936; русский перевод, 1946, 1955; см. также E. Chwalla, цит. на стр. 168.

Это критическое напряжение при $\gamma = 0,0001$. Критическое напряжение в рассматриваемом примере будет равняться $959 \cdot \gamma \cdot 10^4 = 1937 \text{ кг/см}^2$. Нагрузка, соответствующая этому напряжению, должна рассматриваться как предельная нагрузка для балки.

Этот числовой результат показывает, что боковое вынуживание может иметь место при напряжениях, меньших предела прочности материала при непосредственном сжатии и даже меньших предела упругости. Это обстоятельство следует учитывать, и для определения рабочих напряжений нужно принимать за основу критическое напряжение, а не предел текучести. В этом примере, взяв коэффициент безопасности, равный 3, найдем, что рабочее напряжение будет равняться $1937/3 = 646 \text{ кг/см}^2$.

ГЛАВА VI

ДЕФОРМАЦИИ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

40. Толстостенный цилиндр

Если круглый цилиндр со стенкой постоянной толщины подвергается действию равномерно распределенных внутреннего и наружного давлений, то вызываемые ими деформации будут симметричными относительно оси цилиндра и не будут меняться по его длине. Рассмотрим кольцо, вырезанное из цилиндра двумя перпендикулярными к его оси плоскостями, отстоящими одна от другой на единицу (рис. 127). Из условий симметрии следует, что по граням элемента

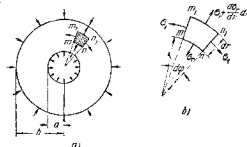


Рис. 127.

m_1n_1 (рис. 127, *b*), выделенного из этого кольца двумя осевыми плоскостями и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями, не будут действовать касательные напряжения. Пусть σ_r означит окружное напряжение, действующее по нормали к граням m_1n_1 и n_1n_2 элемента, и σ_r — радиальное напряжение, нормальное к грани m_1m_2 . Это напряжение изменяется с изменением радиуса r , и величина этого изменения в расстоянии dr равняется $(d\sigma_r/dr)dr$. Нормальное радиальное напряжение по грани m_1n_1 , следовательно, будет

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr.$$

Проектуя усилия, приходящиеся на элемент, на направление биссектрисы угла $d\varphi$, получим следующее уравнение равновесия:

$$\sigma_r r d\varphi + \sigma_t dr d\varphi - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\varphi = 0, \quad (a)$$

или, пренебрегая малыми величинами высшего порядка,

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (b)$$

Это уравнение содержит два неизвестных: напряжения σ_t и σ_r . Второе уравнение, необходимое для определения этих величин, получается из рассмотрения деформации цилиндра.

Деформация цилиндра симметрична относительно его оси и состоит из радиального перемещения всех точек стенки цилиндра. Это перемещение постоянно в окружном направлении, но меняется по радиусу, т. е. является только функцией радиуса. Если u означает радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиуса r , то перемещение на поверхности радиуса $r + dr$ равняется $u + \frac{du}{dr} dr$. Следовательно, элемент mm_1n_1 претерпевает полное удлинение и радиальном направлении, равное $(du/dr) dr$, и относительное удлинение в этом же направлении будет

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (c)$$

Относительное удлинение того же элемента в окружном направлении равно относительному удлинению соответствующего радиуса, т. е.

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (d)$$

На основании формул (38) т. I, стр. 55, выражения для напряжений в зависимости от деформации будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_t очевидно, не независимы, поскольку они могут быть выражены в функции одного u . Подставляя выражения (170) в уравнение (b), получаем следующее уравнение для определения u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (e)$$

⁴⁾ Весом элемента здесь пренебрегаем.

Общее решение этого уравнения будет

$$u = C_1 r - \frac{C_2}{r}, \quad (f)$$

что можно проверить путем подстановки. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра, где давления, т. е. нормальные напряжения σ_r , известны. Подставляя решение (f) в выражения (170), получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1 + \mu) - C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right], \quad (g)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1 + \mu) + C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right]. \quad (h)$$

Если p_b и p_n означают соответственно внутреннее и наружное давление, то условия на наружной и внутренней поверхностях цилиндра будут

$$(\sigma_r)_{r=b} = -p_n \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=a} = -p_b. \quad (i)$$

Знак правой части каждого условия отрицателен, потому что за положительное нормальное напряжение принято растягивающее. Подстановка выражения σ_r (выражения (g)) в условия (i) дает два уравнения для определения постоянных C_1 и C_2 , из которых получаем

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \frac{a^2 p_n - b^2 p_b}{b^2 - a^2}, \quad C_2 = \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_b - p_n)}{b^2 - a^2}. \quad (j)$$

Имея эти значения для произвольных постоянных, мы из выражений (g) и (h) получим общие формулы¹⁾ для нормальных напряжений σ_r и σ_t :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_n - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_n) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}, \\ \sigma_t &= \frac{a^2 p_n - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{(p_b - p_n) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Интересно отметить, что сумма этих двух напряжений остается постоянной; деформации же всех элементов в направлении оси цилиндра одинаковы, и поперечные сечения цилиндра после деформации остаются плоскими. Это оправдывает наше рассмотрение задачи как плоской.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $p_n = 0$, т. е. цилиндр подвергается *только внутреннему давлению*. Тогда формулы (171) напишутся так:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (172)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (173)$$

¹⁾ Это решение появилось впервые в статье Ламе и Клапейрона «Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes», Mém. divers savans, т. 4, 1833.

Эти уравнения показывают, что σ_r всегда является сжимающим напряжением, а σ_t — растягивающим напряжением. Последнее является наибольшим на внутренней поверхности цилиндра, где оно равняется

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_n(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \quad (174)$$

Это уравнение показывает, что $(\sigma_t)_{\max}$ всегда численно больше внутреннего давления и приближается к этой величине, когда b увеличивается. Наименьшее значение σ_t будет на наружной поверхности цилиндра. Отношение

$$\frac{(\sigma_t)_{\max}}{(\sigma_t)_{\min}} = \frac{a^2 + b^2}{2a^2}$$

увеличивается с увеличением толщины стенки цилиндра. При сравнительно малой толщине нет большой разницы между наибольшим и наименьшим значениями σ_r . Если, например, $b = 1,1a$, найдем, что $(\sigma_t)_{\max}$ превосходит $(\sigma_t)_{\min}$ на 10,5%. Поэтому ошибка будет малой, если мы предположим, что растягивающие напряжения σ_t равномерно распределены по толщине стенки, и воспользуемся формулой

$$\sigma_t = \frac{p_n a}{(b - a)},$$

которая совпадает с выражением, приведенным на стр. 106 для тонкостенных цилиндров. Касательное напряжение будет наибольшим на внутренней поверхности цилиндра, где оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_n(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} - \frac{p_n(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} \right] = \frac{p_n b^2}{b^2 - a^2}. \quad (к)$$

Когда на цилиндр действует только наружное давление, мы имеем $p_n = 0$, и формулы (171) дают

$$\sigma_r = -\frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (175)$$

$$\sigma_t = -\frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (176)$$

В этом случае σ_r и σ_t оба — сжимающие напряжения, и σ_t всегда численно больше, чем σ_r . Наибольшее сжимающее напряжение будет на внутренней поверхности цилиндра, где

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{2p_n b^2}{b^2 - a^2}. \quad (177)$$

Интересно отметить, что когда отношение b/a радиусов цилиндра увеличивается, то это наибольшее сжимающее напряжение приближается к удвоенному значению наружного давления, действующего на цилиндр, а именно к $-2p_n$.

Рассмотрим теперь деформацию цилиндра. Подставляя значения (j) произвольных постоянных в уравнение (f), находим

$$u = \frac{1}{E} \left[\frac{\mu a^2 p_n - b^2 p_n}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_n - p_n)}{(b^2 - a^2) r} \right]. \quad (178)$$

Это дает радиальное перемещение для любой точки стенки цилиндра. В частном случае цилиндра, подверженного только внутреннему давлению ($p_n = 0$), радиальное перемещение на внутренней поверхности на основании выражения (178) будет

$$(u)_{r=a} = \frac{a p_n}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} + \mu \right). \quad (179)$$

Когда цилиндр подвергается только наружному давлению ($p_n = 0$), радиальное перемещение на наружной поверхности равно

$$(u)_{r=b} = -\frac{b p_n}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right). \quad (180)$$

Знак минус указывает на то, что перемещение направлено к оси цилиндра.

41. Напряжения, вызываемые горячей посадкой

Если необходимо вызвать контактное давление между штулкой и валом или между двумя кольцами, собранными одно внутри другого, то обычно на практике делают внутренний радиус наружной части меньше наружного радиуса внутренней части и конструкцию собирают после предварительного подогревания наружной части. После охлаждения возникнет контактное давление между двумя частями, которое называется *давлением от горячей посадки*. Величину этого давления и напряжения, возникающее от него, легко можно вычислить при помощи формул предыдущего параграфа.

Предположим, например, что наружный радиус внутреннего цилиндра и ненапряженного состояния больше внутреннего радиуса наружного цилиндра (рис. 128) на величину δ . Тогда после сборки возникнет давление p между двумя цилиндрами. Величина p найдется из того условия, что увеличение внутреннего радиуса наружного цилиндра плюс уменьшение наружного радиуса внутреннего цилиндра должно быть равно δ .

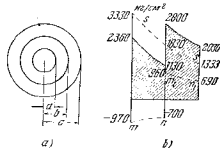


Рис. 128.

Следовательно, на основании формул (179) и (180) запишем

$$\frac{bp}{F} \left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \mu \right) - \frac{bp}{F} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) = \delta,$$

откуда

$$p = \frac{Fb}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)}. \quad (181)$$

Тогда формулы (172) и (173) дадут напряжения в наружном цилиндре (181), а (175) и (176) — напряжения во внутреннем цилиндре. При расчете обычно рассматриваются напряжения, возникающие на внутренней поверхности наружного цилиндра. Эти напряжения будут

$$\sigma_t = \frac{p(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2}, \quad \sigma_r = -p.$$

Наибольшее касательное напряжение на этой поверхности равно (см. формулу (k), стр. 176)

$$\tau_{\max} = \frac{pc^2}{c^2 - b^2},$$

или, подставляя вместо p его значение из формулы (181), находим

$$\tau_{\max} = \frac{Fb^2(c^2 - a^2)}{2b^3(c^2 - a^2)}. \quad (182)$$

В частном случае сплошного вала и втулки мы имеем $a = 0$, что дает

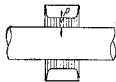


Рис. 129.

$$p = \frac{Fb}{2bc^2} (c^2 - b^2), \quad (183)$$

$$\tau_{\max} = \frac{Fb}{2b}, \quad (184)$$

т. е. наибольшее касательное напряжение будет таким же, как в простом растянутом стержне, который претерпевает относительное удлинение, равное δ/b .

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что оба цилиндра имеют одинаковую длину. В случае вала и втулки (рис. 129) выступающие части вала сопротивляются сжатию, в результате чего давление вблизи концов втулки увеличивается, как показано заштрихованной зоной¹⁾.

¹⁾ Экспериментальные исследования напряжений от горячей посадки приведены в статье: A. Huggenberger, Technische Blätter, Schweiz, Lokomotiv- und Maschinenfabrik, Winterthur, 1926. Дальнейшее рассмотрение напряжений от горячей посадки даны в статье: W. Janicki, Schweiz, Bauzeitung, т. 88, 93, 1926 и т. 90, стр. 127, 1927. См. также J. W. Baughner, Trans. A. S. M. E., т. 52, 1930 и O. J. Horgger and C. W. Nelson, J. Appl. Mech., т. 4, стр. 183, 1937 и т. 5, стр. 32, 1938. Практические сведения о напряжениях от горячей посадки см. O. J. Horgger, изд. A. S. M. E. Handbook, New York, стр. 178, 1953. Точное решение задачи см. S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, стр. 388, 1951.

Если составной цилиндр, как, например, представленный на рис. 128, подвергается внутреннему давлению, то вызываемые этим давлением напряжения будут такими же, как в цилиндре со сплошной стенкой толщиной $c - a$. Эти напряжения накладываются на напряжения от горячей посадки. Горячая посадка вызывает окружное сжимающее напряжение на внутренней поверхности цилиндра, которое уменьшает наибольшее окружное растягивающее напряжение, вызываемое внутренним давлением в этом месте, так что можно получить более благоприятное распределение напряжений, чем в случае цельной трубы (см. задачу 2, стр. 179). Поэтому цилиндры, составленные из нескольких труб, применяются в тех случаях, где внутренние давления очень высоки, как, например, в стволах орудий.

Распределение начальных напряжений, аналогичное описанному выше, в случае составных цилиндров можно также получить и в цельной трубе, применяя высокое внутреннее давление, достаточное для того, чтобы вызвать остаточную деформацию во внутренней части трубы. После удаления этого внутреннего давления останутся некоторые напряжения в трубе вследствие остаточной деформации, так что тогда внутренняя часть будет находиться в состоянии сжатия, а наружная часть в состоянии растяжения¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Определить окружные напряжения на внутренней и наружной поверхностях и в середине толщины стенки цилиндра при внутреннем давлении 10 см и наружном радиусе 20 см, подвергнутому внутреннему давлению $p_a = 2000 \text{ кг/см}^2$.

Отмет. Из формулы (173) получаем $(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = 3330 \text{ кг/см}^2$; $(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = 1830 \text{ кг/см}^2$; $(\sigma_r)_{r=20 \text{ см}} = 1330 \text{ кг/см}^2$.

2. Определить напряжение в составном цилиндре (рис. 128), подвергнутом внутреннему давлению $p_a = 2000 \text{ кг/см}^2$, если $a = 10 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$, $c = 20 \text{ см}$, $\mu = 0,012$.

Решение. Определим сначала первоначальные напряжения в цилиндре вследствие разности внутреннего радиуса наружной поверхности и наружного радиуса внутренней поверхности. По формуле (181) получаем

$$p = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,012 (15^2 - 10^2)(20^2 - 15^2)}{15 \cdot 2 \cdot 15^2 (20^2 - 10^2)} = 260 \text{ кг/см}^2.$$

Окружные напряжения, вызываемые этим давлением во внутреннем цилиндре, на основании формулы (176) будут

$$(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = \frac{2pb^2}{b^2 - a^2} = \frac{2 \cdot 260 \cdot 15^2}{15^2 - 10^2} = 970 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = -\frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = -760 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Дальнейшее изложение этого вопроса дано в п. 70.

Напряжения для наружного цилиндра на основании формулы (173) будут

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = \frac{\rho(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2} = \frac{960(15^2 + 20^2)}{20^2 - 15^2} = 960 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_r)_{r=20 \text{ см}} = \frac{2\rho b^2}{c^2 - b^2} = \frac{2 \cdot 260 \cdot 15^2}{20^2 - 15^2} = 690 \text{ кг/см}^2.$$

Распределение первоначальных напряжений σ_r по толщине стенки показано на рис. 128, b и m, n — инстинграми m и n . Напряжения, вызванные возросшим давлением, такие же, как и в предыдущей задаче, представлены на рисунке пунктиром σ_r . Наложение этих двух распределений напряжений дает эпюру напряжений, представленную заштрихованной площадью. Можно видеть, что благодаря первоначальным напряжениям, возникшим при сборке, наибольшее напряжение в цилиндре, подверженном внутреннему давлению, уменьшается с 3330 до 2800 кг/см².

3. Используя рис. 128, найти напряжение σ_r от горячей посадки при $r = 15$ см и $r = 25$ см, если $a = 10$ см, $b = 30$ см, $c = 30$ см. Воспользоваться коэффициентом посадки $b/b = 0,001$ и принять $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

4. Для втулки и вала на рис. 129 найти равновесное давление p , если радиус вала равен 15 см и наружный радиус втулки равен 30 см. Начальная разность диаметров между втулкой и валом равняется 0,03 см. Принять $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

42. Вращающийся диск постоянной толщины

Когда круглый диск вращается вокруг оси симметрии, которая перпендикулярна диску, то силы инерции вызывают напряжения, которые могут получиться очень большими при высоких скоростях. Эти напряжения распределяются симметрично относительно оси вращения и могут быть вычислены при помощи метода, указанного в п. 40. Предполагается, что напряжения не изменяются по толщине диска, и эта толщина принимается равной единице.

Уравнение равновесия такого элемента, как mnm, n_1 на рис. 127, выводится путем добавления к силам, которые были рассмотрены в п. 40, силы инерции, действующей на элемент:

$$\frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} dr db. \quad (a)$$

В этом уравнении γ есть вес единицы объема и ω — угловая скорость диска. Остальные обозначения те же, что и в п. 40. Тогда уравнение равновесия получится в следующем виде:

$$\sigma_r - \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - \gamma \omega^2 r^2 = 0. \quad (b)$$

Подставляя вместо напряжений σ_r и σ_r выражения их в зависимости от перемещения u (выражение (170), стр. 174), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2 r^2}{gE} = 0. \quad (185)$$

Общее решение этого уравнения получается путем сложения частного решения с решением соответствующего однородного уравнения (см. уравнения (e) и (f), стр. 175). Частное решение будет

$$u = -(1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2 r^3}{gE}.$$

Тогда, пользуясь обозначением

$$N = (1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2}{gE}, \quad (c)$$

получаем общее решение уравнения (185)

$$u = -N \frac{r^2}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (d)$$

где так же, как и прежде, C_1 и C_2 — постоянные, которые нужно определить таким путем, чтобы удовлетворить условиям на краях диска.

Для диска с отверстием в центре (рис. 127) и при отсутствии сил на его контуре эти условия выразятся так:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0. \quad (e)$$

Общее выражение для σ_r получится, если подставить выражение (d) в первое из уравнений (170), стр. 174, что даст

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[-\frac{3 + \mu}{8} N r^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{r^2} \right]. \quad (f)$$

При $r = a$ и $r = b$ это выражение должно обратиться в нуль, как то следует из уравнений (e). Производя эту подстановку, мы получаем для определения C_1 и C_2 следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3 + \mu}{8} N a^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{a^2} &= 0, \\ -\frac{3 + \mu}{8} N b^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{b^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

откуда

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8(1 + \mu)} (a^2 + b^2) N, \quad C_2 = \frac{3 - \mu}{8(1 - \mu)} a^2 b^2 N. \quad (h)$$

Общее выражение для u получится, если эти значения подставить в уравнение (d). Затем, подставив в уравнения (170) результирующее выражение для u , мы найдем

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8(1 + \mu^2)} E N \left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right), \quad (186)$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8(1 - \mu^2)} E N \left(a^2 + b^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right). \quad (187)$$

Если теперь N заменить его значением, данным формулой (с), и положить

$$\frac{a}{b} = \alpha, \quad \frac{r}{b} = x, \quad b\omega = v, \quad (i)$$

то формулы (186) и (187) станут следующими:

$$\sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + x^2 - x^2 - \frac{x^2}{x^2} \right), \quad (188)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + \alpha^2 - \frac{1+3\alpha}{3+\mu} x^2 + \frac{x^2}{x^2} \right). \quad (189)$$

Видно, что радиальное напряжение σ_r обращается в нуль на краях, где $x=1$ или $x=\alpha$, и оно положительно для других значений x . Наибольшее же значение имеет место при

$$x = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

или

$$r = \sqrt{ab}. \quad (j)$$

Пользуясь формулой (j) для r , получаем из выражения (188)

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} (1 - \alpha)^2. \quad (190)$$

Окружное напряжение σ_t достигает наибольшего значения на внутреннем крае диска. Подставляя $x = \alpha$ в выражение (189), получаем

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + \frac{1-\mu}{3+\mu} \alpha^2 \right). \quad (191)$$

Можно видеть, что $(\sigma_t)_{\max}$ всегда больше, чем $(\sigma_r)_{\max}$.

На рис. 130 значения членов, содержащихся в скобках выражений (188) и (189), показаны как ординаты в зависимости от значений x , принятых абсциссами. Сплошные линии представляют случаи $\alpha = 1/4$, т. е. внутренний радиус составляет $1/4$ наружного радиуса. Пунктиры представляют

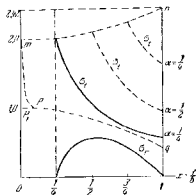


Рис. 130.

значения члена, содержащегося в скобках выражения (189), для других значений α . Формулой (191) устанавливается, что напряжение $(\sigma_t)_{\max}$ на внутреннем крае изменяется в зависимости от α по параболическому закону. Это показано кривой mn на рис. 130.

Интересно отметить, что когда внутренний радиус очень мал, т. е. α приближается к нулю, то наблюдается очень резкое изменение напряжения σ_t вблизи отверстия. Это показано кривой mnp , для которой

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{4}. \quad (192)$$

Для другого крайнего случая, когда внутренний радиус приближается к наружному радиусу диска и α приближается к единице, выражение (191) приводится к виду

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g}.$$

Это совпадает с формулой (15) т. I, стр. 36, которая была получена для тонкого вращающегося кольца. Видно, что в случае диска с отверстием в центре наибольшее напряжение незначительно меняется с изменением радиуса отверстия; значение для очень тонкого кольца лишь приблизительно на 20% выше значения для очень толстого кольца с малым отверстием.

В случае сплошного диска условие на конце будет $u=0$ при $r=0$; следовательно, постоянную C_2 в общем решении (уравнение (d)) нужно принять равной нулю. Постоянная C_1 найдется из условия, что $\sigma_r=0$ на наружном крае диска. Пользуясь вторым из выражений (g), мы, таким образом, получаем

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8(1+\mu)} Nb^2. \quad (k)$$

Вводя теперь значения постоянных C_1 и C_2 в общее выражение (уравнение (d)) для перемещения u , подставляем затем результат в формулы (170) стр. 174. Таким путем получаем

$$\sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} (1 - x^2), \quad (193)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} x^2 \right), \quad (194)$$

где $x=r/b$. И радиальное, и окружное напряжения всегда положительны и увеличиваются с уменьшением x . Другими словами, напряжения увеличиваются с приближением их к центру. В центре ($x=0$) напряжения будут

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8}. \quad (195)$$

Сравнивая это с формулой (192), видим, что благодаря концентрации напряжения на краю малого центрального отверстия в два раза больше, чем в центре сплошного диска. Закон изменения напряжений σ_t по радиусу сплошного диска представлен на рис. 130 пунктиром pqr .

Формулы, введенные выше для вращающихся дисков, применяются иногда для сравнительно длинных цилиндров¹⁾, например, для роторов электрических машин. В больших машинах окружающие скорости бывают весьма велики. Вышесказанные рассуждения показывают, что напряжения, вызываемые силами инерции, пропорциональны квадрату окружной скорости и поэтому они имеют первостепенное значение в таких случаях. Следовательно, для материала данной прочности и для данной угловой скорости ротора существует определенный предел для диаметра ротора, за который опасно переходить.

При выборе рабочих напряжений для таких роторов необходимо иметь в виду, что очень большие покоски могут, по всей вероятности, иметь дефекты материала у центра, где как раз достигают наибольшего значения напряжения, обусловленные силами инерции. Чтобы исключить неопределенность, на практике обычно просверливают центральное отверстие по оси ротора. Хотя наибольшие напряжения вследствие наличия отверстия увеличиваются вдвое, однако это компенсируется возможностью исследования доброкачественности материала внутри покоски. При предварительных испытаниях ротор заставляют вращаться со скоростью, выше обычной²⁾, так что напряжения около отверстия могут превосходить предел текучести. После остановки ротора напряжения не исчезнут совершенно вследствие остаточной деформации материала у отверстия. Внутренняя часть металла, претерпевшая текучесть, сжимается наружной, а наружная, наоборот, растягивается внутренней³⁾. Это явление совершенно аналогично тому, что происходит в толстостенном цилиндре, перенапряженном под действием внутреннего давления (см. стр. 179). Остаточные напряжения, вызываемые у отверстия перенапряжением, противоположны по знаку напряжениям, обусловленным силами инерции; следовательно, перенапряжение оказывает благоприятное влияние на окончательное распределение напряжения в роторе⁴⁾.

Необходимо также заметить, что полученные выше выражения для напряжений (см. формулы (188) и (189)), кроме ν и постоянных, определяющих свойства материала, содержат лишь отношения x и r . Следовательно, для данного материала и данной окружной скорости напряжения равны в подобно расположенных точках геометрически

¹⁾ Распределение напряжений в толстых дисках рассмотрено в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 352, 1951; русский перевод, 1937, стр. 348.

²⁾ В электрических машинах обычно на 20% выше рабочей скорости.

³⁾ Этот вопрос разобран С. Ноллегером, Brown Bowley C. Mitt., ноябрь 1919.

⁴⁾ Остаточные напряжения во вращающихся дисках, вследствие текучести металла, были исследованы A. Nadai and L. H. Donnell; см. Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928. См. также Н. Ненский, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 331, 1924 и F. Laszlo, там же, т. 5, стр. 281, 1925.

подобных роторов. Это обстоятельство может упростить вычисления напряжений геометрически подобных дисков, а также может быть использовано при установлении прочности больших дисков на основании испытаний моделей.

В предыдущем положении предполагалось, что контуры дисков свободны от внешних сил. Если же на диск действуют растягивающие или сжимающие силы, равномерно распределенные по его контуру, то вызываемые ими напряжения найдутся при помощи формул, выведенных для толстостенных цилиндров (п. 40). Эти напряжения (см. формулы (171)) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= k - \frac{n}{r^2}, \\ \sigma_t &= k + \frac{n}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где k и n — постоянные, зависящие от размеров диска и от величины внешних сил, действующих на контуре. Напряжения, определяемые по формулам (1), должны быть присоединены к напряжениям из формул (188) и (189), и полные напряжения могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} - \beta_1 \omega^2 r^2, \\ \sigma_t &= A - \frac{B}{r^2} - \beta_2 \omega^2 r^2, \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{g} \frac{3 + \mu}{8}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma}{g} \frac{1 + 3\mu}{8}, \quad (197)$$

A и B — постоянные интегрирования, которые можно вычислить в каждом частном случае при помощи выражений (171), (188) и (189). При обозначениях

$$\left. \begin{aligned} s &= \sigma_r + \beta_1 \omega^2 r^2, \\ t &= \sigma_t + \beta_2 \omega^2 r^2 \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

и

$$w = \frac{1}{r^2} \quad (199)$$

выражения (196) становятся

$$s = A + Bw; \quad t = A - Bw. \quad (200)$$

Если s и t известны для какой-либо точки диска, то эти величины для другой точки можно легко найти, пользуясь следующим графическим методом¹⁾.

Пусть s_1 и t_1 означают величины s и t для какой-либо точки, где $w = w_1$ (рис. 131). Тогда величины s_2 и t_2 для какой-либо другой точки, где $w = w_2$, получаются как отрезки, отсекаемые на вертикальной линии, проходящей через w_2 , прямыми $s_1 s_2$ и $t_1 t_2$, которые между собой пересекаются на оси ординат ($w = 0$) и одинаково наклонены к этой оси. Эти линии представляют графически уравнения (200). Они имеют общую ординату A на оси $w = 0$ и имеют равные и противоположные по знаку углы наклона ($\pm B$). Это графическое построение является весьма полезным при вычислении напряжений во вращающихся дисках переменной толщины, как мы увидим в следующем параграфе.

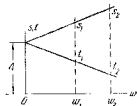


Рис. 131.

¹⁾ Этот метод был разработан R. G. Gammell, Dinglers Polytech. J., т. 338, стр. 217, 1923.

ЗАДАЧА

1. Определить напряжения, возникающие под действием центробежных сил в роторе; наружный его радиус равен 63 см и радиус внутреннего отверстия — 10 см. Наружная часть ротора имеет прорезы глубиной 25 см, в которые вкладывается обмотка (рис. 132). Ротор стальной и делает 1800 оборотов в минуту. Вес обмотки в прорезах равен весу удаленного материала.

Решение. Часть ротора, заключенная между наружной поверхностью и цилиндрической поверхностью радиуса 40 см из-за наличия радиальных прорезов не может испытывать окружные растягивающие напряжения. Центробежные силы, возникающие в этом вращающемся кольце, передаются в виде радиальных растягивающих напряжений на поверхность цилиндра радиусом 40 см. Величина этих напряжений равняется

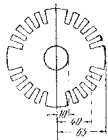


Рис. 132.

$$p_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 40} \int_{r=40}^{r=63} \gamma \cdot \omega^2 r dV = \frac{1}{2\pi \cdot 40} \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot 2\pi \int_{40}^{63} r^2 dr = \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot 1755.$$

При $\gamma = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $g = 981 \text{ см/сек}^2$ это дает

$$p_0 = 495 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее окружное напряжение, возникающее на внутреннем контуре от растягивающих напряжений p_0 , по формуле (177) равняется

$$\sigma_r' = \frac{2 \cdot 495 \cdot 40^2}{40^2 - 10^2} = 1056 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее окружное напряжение на том же контуре, обусловленное влиянием массы ротора, расположенной между радиусами в 10 см и 40 см и вычисленное, как для вращающегося диска, по формуле (191), равняется $\sigma_r' = 378 \text{ кг/см}^2$. Тогда полное наибольшее окружное напряжение на внутреннем контуре будет равно $(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_r' + \sigma_r'') = 1056 + 378 = 1434 \text{ кг/см}^2$.

2. Стальное кольцо насажено на чугунный диск (рис. 128). Определить изменение давления по поверхности их соприкосновения, вызванное силами инерции при 3600 об/мин, если $a = 2,5 \text{ см}$, $b = 12,5 \text{ см}$, $c = 2,5 \text{ см}$, $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E_n = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma_c = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $\gamma_n = 0,0072 \text{ кг/см}^3$.

Решение. Пусть p_0 будет увеличение давления между кольцом и диском. Произвольные постоянные в уравнении (f) для наружного кольца определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_c}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} Nc^3 + (1+\mu) C_1 - (1-\mu) C_2 \frac{1}{c^2} \right] &= 0, \\ \frac{E_n}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} Nb^3 + (1+\mu) C_1 - (1-\mu) C_2 \frac{1}{b^2} \right] &= -p_0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Если мы применим уравнение (f) к внутреннему диску, для которого произвольные постоянные обозначим через C_1' и C_2' , а N' — постоянная, определяемая формулой (с), то для определения C_1' и C_2' мы получим следующие

уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_c}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} N'b^3 + (1+\mu) C_1' - (1-\mu) C_2' \frac{1}{b^2} \right] &= -p_0, \\ \frac{E_n}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} N'a^3 - (1+\mu) C_1' - (1-\mu) C_2' \frac{1}{a^2} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Из уравнений (m) и (n) можно найти четыре постоянные C_1 , C_2 , C_1' и C_2' как функции p_0 . Величина же p_0 найдется из того условия, что на поверхности соприкосновения радиальные перемещения диска и кольца равны между собой. В результате, пользуясь уравнением (d), получим для определения p_0 следующее уравнение:

$$-N \frac{b^3}{8} + C_1 b + \frac{C_2}{b} = -N' \frac{b^3}{8} + C_1' b + \frac{C_2'}{b}. \quad (o)$$

Числовые вычисления предоставляется произвести читателю.

3. Найти изменение давления p , вычисленного в задаче 4 и 41, если вал и втулка вращаются со скоростью 1800 оборотов в минуту, $\gamma = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

43. Вращающийся диск переменной толщины

Вопрос об определении напряжений во вращающемся диске переменной толщины является более сложным¹⁾. Мы разберем приближенный метод решения этой задачи, основанный на замене действительного профиля системы диском постоянной толщины (рис. 133²⁾). Напряжения в отдельных дисках вычисляются по формулам, выведенным в п. 42. В таком случае мы должны будем рассмотреть условия на границах между этими дисками, например, в сечениях 2, 3, 4 (рис. 133), где имеет место изменение толщины диска. Если у и $u + \Delta u$ означают толщины двух рассматриваемых смежных дисков, то соответствующее изменение Δr величины радиального напряжения σ_r найдется из уравнения

$$\sigma_r u = (\sigma_r + \Delta \sigma_r) (u + \Delta u),$$

которое выведено в предположении, как и прежде, что напряжения равномерно распределяются по толщине диска. Решая это уравнение,

¹⁾ Общее уравнение для этого случая вместе с решениями его разными методами можно найти в книге: A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 6 изд., стр. 312—340, 1924. Вращающийся диск конического профиля был рассмотрен Н. М. Martin'ом, Engineering, т. 115, стр. 1, 1923. В. H. Dickinson'ом, Engineering, т. 116, стр. 274, 1923 и A. Fischer'ом, Z. Österr. Ing. u. Architekt.-Ver., т. 74, стр. 46, 1922. См. также книгу: L. Malkin, Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, Berlin, 1935 и книгу: C. В. Bickeleno и R. Grammel, Technische Dynamik, т. 2, ст. 5, 1953.

²⁾ Этот метод был разработан M. Donath'ом, Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe, Berlin, 1912. Это описано на английском языке Н. Heale в Engineering, т. 106, стр. 131, 1918. Дальнейшая разработка метода принадлежит R. Grammel'у, инт. в ст. 185, и числовой пример рис. 133 был взят из этой статьи. См. также статьи: M. G. Griessen, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928; R. Grammel, Ing. Arch., т. 7, стр. 136, 1935; R. G. O'Connell, там же, т. 8, стр. 270 и 373, 1937; A. Heild, там же, т. 10, стр. 339, 1939. Приближенный метод решения задачи был дан G. F. Lask, J. Appl. Mech., т. 12, стр. A-65, 1945.

получаем

$$\Delta \sigma_r = -\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r \quad (а)$$

Изменение $\Delta \sigma_r$ окружного напряжения в том же сечении найдется из условия, что относительное окружное удлинение будет одним и тем же на обеих сторонах сечения. Следовательно,

$$\sigma_r - \mu \epsilon_r = (\sigma_r + \Delta \sigma_r) - \mu (\epsilon_r + \Delta \epsilon_r),$$

откуда

$$\Delta \sigma_r = \mu \Delta \epsilon_r.$$

Тогда из соотношений (198) найдем

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_r = \Delta \sigma_\theta = -\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r, \\ \Delta \epsilon_r = \Delta \epsilon_\theta = \mu \Delta \sigma_r. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Формулы (197), (198), (199) и (201) совместно с графическим решением, данным на рис. 131, достаточны для расчета диска переменной толщины.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рис. 133 диск, вращающийся со скоростью 3000 оборотов в минуту. Размеры диска даны

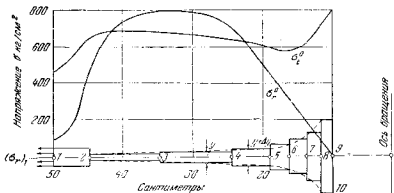


Рис. 133.

в табл. 17. В допущение предположим, что центробежные силы, приложенные на внешнем крае, как, например, центробежная сила лопаток турбины, вызывают радиальное напряжение на внешнем контуре, равное $(\sigma_r)_1 = 100 \text{ кг/см}^2$. Пусть $\mu = 0,3$ и $\gamma = 0,00785 \text{ кг/см}^3$. Тогда из соотношений (197) мы получим $\beta_1 \omega^2 = 0,327 \text{ кг/см}^2$, $\beta_2 \omega^2 = 0,188 \text{ кг/см}^2$.

Первые восемь колонок табл. 17 составлены на основании приведенных выше данных и рис. 133.

Вычисление напряжений мы начнем с внешнего контура диска, где известно напряжение $(\sigma_r)_1$. Величина окружного напряжения $(\sigma_\theta)_1$ на наружном контуре обычно бывает неизвестной, поэтому для начала расчета необходимо задать ее. Возьмем для простоты вычисления $(\sigma_\theta)_1$ так, чтобы λ и ϵ были равны между собой (см. формулы (198)). Тогда

$$(\sigma_\theta)_1 = (\sigma_r)_1 + \beta_1 \omega^2 r_1^2 - \beta_2 \omega^2 r_1^2,$$

Таблица 17

ВРАЩАЮЩИЙСЯ ДИСК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

189

Вычисленна напряжений во вращающемся диске

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	14	
Положительное направление	r см	r ² см ²	100 r ² см ²	β ₁ ω ² кг/см ²	β ₂ ω ² кг/см ²	y см	$\frac{\Delta y}{y + \Delta y}$ кг/см ²	σ _r кг/см ²	Δσ кг/см ²	Δε кг/см ²	ε _r кг/см ²	$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta}$ кг/см ²	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}$ кг/см ²	
1	50	2500	4,00	817	470	2,5	0	100			447	50	100	479
2	45	2025	4,94	662	381	1,9	+1,50	255	+383	-115	536	56	440	628
3	35	1225	8,16	401	230	1,5	-0,353	984	-328	-98	705	75	801	705
4	25	625	16,00	204	118	2,5	-0,400	950	-380	-114	626	128	724	683
5	20	400	25,00	131	75	3,5	-0,286	682	-195	-38	514	186	534	605
6	17,5	306	32,63	100	58	4,75	-0,263	532	-140	-42	459	232	402	688
7	15	225	44,44	74	42	7,0	-0,221	421	-135	-40	430	300	280	604
8	12,5	156	64,00	51	29	10,0	-0,300	284	88	-25	419	402	152	666
9	10	100	100,00	33	19			178	-281	+16	447	570	0	808

нав, пользуясь числами 5-й и 6-й колонок таблицы, получаем

$$(\sigma_r)_1 = 100 + 817 - 470 = 447 \text{ кг/см}^2.$$

Теперь из формул (198) находим

$$\begin{aligned} s_1 &= (\sigma_r)_1 + \beta_1 \omega^2 r_1^2 = 100 + 817 = 917 \text{ кг/см}^2, \\ t_1 &= (\sigma_t)_1 + \beta \omega^2 r_1^2 = 447 + 470 = 917 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Так как $s_1 = t_1$, то при построении, указанном на рис. 131, прямые s и t совпадают. На рис. 134, где s и t приняты орднатами, а $\omega = 1/r^2$ — абсциссой, эти линии изобразятся линиями $a-a$, параллельной оси ω . Длина этой

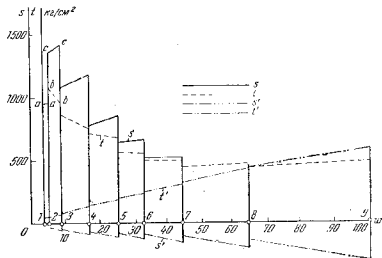


Рис. 134.

длины, соответствующая радиальному расстоянию $l-2$ диска (рис. 134), определяется из чисел 4-й колонки таблицы. Таким образом, получим для сечения 2 (рис. 133)

$$\sigma_2 = t_2 = 917 \text{ кг/см}^2,$$

а пользуясь формулами (198), найдем

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_2 &= s_2 - \beta_1 \omega^2 r_2^2 = 917 - 662 = 255 \text{ кг/см}^2, \\ (\sigma_t)_2 &= t_2 - \beta \omega^2 r_2^2 = 917 - 381 = 536 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

В сечении 2 имеет место резкое изменение толщины диска. Чтобы принять это в расчет, мы воспользуемся формулами (201) совместно с числами 8-й колонки таблицы 17. Тогда

$$\begin{aligned} (\Delta s)_2 &= (\Delta \sigma_r)_2 = \left(-\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r \right) = 1,50 \cdot 255 = 383 \text{ кг/см}^2, \\ (\Delta t)_2 &= (\Delta \sigma_t)_2 = \mu (\Delta s)_2 = 0,3 \cdot 383 = 115 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Чтобы получить точки b и c , мы должны прибавить эти величины к ординате точки a на рис. 134; линии bb и cc тогда будут построены, как указано на рис. 131. Таким же образом будут найдены s_2 и t_2 для сечения 3. Повторяя указанный процесс, получим все необходимые данные для сечений 3 и т. д. Таким образом, мы можем вычислить все значения верхних строчек в колонках от 9-й до 12-й табл. 17.

Вследствие того, что напряжение $(\sigma_r)_1$ на краю диска было взято произвольно, условия на внутреннем контуре обычно не будут удовлетворены и напряжение $(\sigma_r)_1$, полученное указанным способом, не будет совпадать с напряжением, которое в действительности там имеется. Для того чтобы удовлетворить условиям на внутреннем контуре, необходимо произвести дополнительное вычисление. Положив $(\sigma_r)_1 = 0$, $\omega = 0$ и взяв для $(\sigma_t)_1$ произвольное значение (в расчете принято $(\sigma_t)_1 = 50 \text{ кг/см}^2$), получим тем же, что и ранее, приемом соответствующее распределение напряжений. В этом случае по формулам (198) мы получаем $s = \sigma_r$ и $t = \sigma_t$. Результаты этих вычислений приведены в нижних строчках колонок от 9-й до 12-й, а соответствующие построения представлены линиями t' и s' на рис. 134. Решение, которое удовлетворяет действительным условиям на внутреннем контуре диска, получим путем сочетания двух найденных выше распределений напряжений следующим образом. Пусть $(\sigma_r)_1$ и $(\sigma_r)_1'$ будут радиальные напряжения на внутреннем контуре диска, полученные соответственно при первом и втором вычислениях, и пусть $(\sigma_r)_1''$ означает действительное напряжение на внутреннем контуре. Тогда решение для действительных условий получится, если напряжения, найденные во втором вычислении, умножить на величину

$$n = \frac{(\sigma_r)_1'' - (\sigma_r)_1}{(\sigma_r)_1'}$$

и присоединить их к напряжениям, найденным в первом вычислении. Величина средних напряжений в сечениях, где толщина резко изменяется, может быть вычислена из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_1'' &= (\sigma_r)_1 + \frac{\Delta s}{2} + n \left((\sigma_r)_1' + \frac{\Delta s'}{2} \right), \\ (\sigma_t)_1'' &= (\sigma_t)_1 + \frac{\Delta t}{2} + n \left((\sigma_t)_1' + \frac{\Delta t'}{2} \right). \end{aligned}$$

Результаты этих вычислений в случае, когда радиальные напряжения на внутреннем контуре равны нулю, приведены в двух последних колонках таблицы и представлены двумя кривыми на рис. 133.

44. Температурные напряжения в длинном полом цилиндре

Когда стенки цилиндра неравномерно нагреваются, то их элементы расширяются неодинаково, вследствие чего возникают температурные напряжения. В исследуемом изложении распределение температуры принимается симметричным относительно оси цилиндра и постоянным вдоль этой оси. В таком случае деформации цилиндра будут симметричны относительно оси, и мы можем воспользоваться методом, изложенным в п. 40. Выразим из цилиндра кольцо с двумя поперечными сечениями, перпендикулярными к оси и находящимися одно от другого на расстоянии, равном длине. Можно допустить, что при деформации эти поперечные сечения остаются плоскими, если взять их на достаточном расстоянии от концов цилиндра¹⁾; следова-

¹⁾ На концах напряжения в направлении оси цилиндра равны нулю, и распределение напряжений получается более сложным.

тельно, относительные удлинения в осевом направлении будут постоянными. Пусть z будет осью цилиндра, w — осевое перемещение по z , остальные обозначения будут теми же, что и в п. 40 и на рис. 127. Тогда относительные удлинения в трех перпендикулярных направлениях будут

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{const}, \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (a)$$

Эти удлинения могут быть выражены в зависимости от напряжений $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_t$ и температурного расширения. Пусть α — коэффициент линейного расширения, а t — прирост температуры сверх равномерной начальной температуры. Температурный прирост меняется только с изменением радиального расстояния r . Из уравнений (43) (см. т. 1, стр. 64) удлинения определяются так:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_t) + \alpha t, \\ \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_t) + \alpha t, \\ \epsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_r) + \alpha t. \end{aligned} \right\} (b)$$

Обозначая через Δ относительное объемное расширение, получаем

$$\Delta = \epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_t = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_r + \sigma_t) + 3\alpha t. \quad (c)$$

Из уравнений (b) и (c) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_t + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}. \end{aligned} \right\} (d)$$

Уравнение равновесия элемента m, n, n_1 (рис. 127) будет (см. уравнение (b), стр. 174)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \quad (e)$$

Подставляя уравнения (d) и (a) в уравнение (e), получаем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \frac{dt}{dr}. \quad (202)$$

Это уравнение определяет перемещение u для какого-либо частного распределения температуры. Оно может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \frac{dt}{dr}.$$

Интегрирование по r дает

$$\frac{d}{dr} (ru) = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha t r + 2C_1 r.$$

Второе интегрирование приводит к решению

$$u = \frac{1}{r} \frac{1+\mu}{1-2\mu} \int_a^r \alpha t r dr + C_1 r + C_2 \frac{1}{r}, \quad (f)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые должны быть определенными таким образом, чтобы удовлетворить условиям на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Если эти поверхности считать свободными от внешних сил, то условия для определения C_1 и C_2 выразятся так:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_t)_{r=b} = 0. \quad (g)$$

Общее выражение для σ_r получится, если подставить во второе из уравнений (d) $\epsilon_r = du/dr$ и $\epsilon_t = u/r$ и затем взять вместо u его значение (f), что даст

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{1+\mu}{(1-\mu)r^2} \int_a^r \alpha t r dr + \frac{C_1}{1-2\mu} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_z \right). \quad (h)$$

Тогда из уравнений (g) находим

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \alpha t r dr, \\ C_1 &= \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b \alpha t r dr - \mu \epsilon_z. \end{aligned} \right\} (i)$$

Подставляя эти значения в уравнение (h), получаем общее выражение для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_a^r \alpha t r dr + \frac{r^2 - a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b \alpha t r dr \right], \quad (203)$$

а из уравнения равновесия (e) найдем общее выражение для σ_t :

$$\sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r \alpha t r dr + \frac{r^2 + a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b \alpha t r dr \right]. \quad (204)$$

Если закон распределения температуры по толщине стенки известен, то мы можем раскрыть интегралы выражений (203) и (204) и получить σ_r и σ_t для каждого частного случая.

Когда стенки цилиндра имеют температуру t_b на внутренней поверхности и температуру, равную нулю, на наружной¹⁾, то закон распространения температуры можно представить следующей функцией:

$$t = \frac{t_b}{b} \cdot \ln \frac{b}{a}. \quad (205)$$

¹⁾ Любое другое температурное состояние на поверхностях цилиндра можно получить путем наложения на это состояние состояние равномерного нагревания или охлаждения, что не вызывает каких-либо напряжений.

При помощи этого выражения для t формулы (203) и (204) получаются в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left[-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \ln\frac{b}{a} \right], \quad (206)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left[1 - \ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \ln\frac{b}{a} \right]. \quad (207)$$

Наибольшее значение σ_t достигает на внутренней или внешней поверхностях цилиндра. Подставляя в последнее уравнение $r = a$ и $r = b$, получаем

$$(\sigma_t)_{r=a} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln\frac{b}{a}\right), \quad (208)$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln\frac{b}{a}\right). \quad (209)$$

Распределение температурных напряжений по толщине стенки для частного случая, когда a/b равно 0,3 и t_b отрицательно, показано на рис. 135.

Если толщина стенки мала по сравнению с наружным радиусом цилиндра, то мы можем упростить формулы (208) и (209), полагая

$$\frac{b}{a} = 1 + m, \quad \ln\frac{b}{a} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

и рассматривая m как малую величину. Тогда

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{m}{3}\right), \quad (i)$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)} \left(1 - \frac{m}{3}\right). \quad (k)$$

В случае очень тонких стенок вторым членом в скобках этих уравнений можно пренебречь, и формулы совпадают с выведенными для неравномерно нагретой пластинки (см. выражение (87), стр. 81).

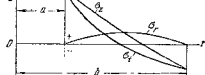


Рис. 135.

для σ_t . Это выражение содержит постоянное удлинение ϵ_2 в направлении оси цилиндра. Если мы допустим, что цилиндр может свободно удлиняться, то получим величину ϵ_2 из условия, что сумма нормальных углов по поперечному сечению цилиндра, перпендикулярному к оси z , равняется нулю. В результате этих вычислений получим следующее окончательное выражение для ϵ_2 :

$$\epsilon_2 = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - 2\ln\frac{b}{a} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln\frac{b}{a}\right). \quad (210)$$

Можно видеть, что на внутренней и наружной поверхностях цилиндра напряжения σ_r и σ_t равны между собой¹⁾.

В случае диска без отверстия в центре и имеющего постоянную толщину, которую можно считать малой по сравнению с радиусом b диска, радиальные и окружные напряжения определяются следующими выражениями:

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b t r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r t r dr \right), \quad (211)$$

$$\sigma_t = \alpha E \left(-t + \frac{1}{b^2} \int_0^b t r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r t r dr \right). \quad (212)$$

В каждом частном случае, когда температура t известна как некоторая функция r , интегралы в этих выражениях можно легко раскрыть и получить температурные напряжения.

Температурные напряжения представляют большое практическое значение, особенно для больших цилиндров, как, например, роторов паровых турбин, тяжелых валов или больших турбинных дисков. Во всех этих случаях нагревание или охлаждение должно быть постепенным для того, чтобы избежать температурный градиент в радиальном направлении²⁾. Температурные напряжения имеют важное значение также и в дизельных двигателях³⁾. В случае материалов, которые слабо сопротивляются растяжению, как, например, камень, кирпич и бетон, трещины, вероятно, начнутся на наружной поверхности цилиндра, где t_b положительно.

ЗАДАЧИ

1. Определить температурные напряжения в цилиндре, имеющем $2a = 1$ см, $2b = 3$ см, $E\alpha(1-\mu) = 35,7$, если температура на внутренней его поверхности равняется $t_b = -1^\circ\text{C}$, а на наружной поверхности равняется нулю.

Решение. По формулам (208) и (209) находим

$$(\sigma_t)_{r=a} = (\sigma_t)_{r=b} = 24 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = (\sigma_r)_{r=a} = -12 \text{ кг/см}^2.$$

Величина σ_r на основании формулы (206), достигает наибольшего значения при $r = 0,78$ см и равняется $4,6 \text{ кг/см}^2$. Закон распределения напряжений по толщине стенки показан на рис. 135.

¹⁾ Более подробное исследование температурных напряжений в цилиндрах было произведено С. П. Леес, Proc. Roy. Soc. (London) A, т. 101, 1922. Графики для быстрого расчета напряжений на основании уравнений (206) (207) и (210) были даны Л. Н. Вагкел'гом, Engineering, т. 124, стр. 443, 1927. Исключительный пример, который приведен ниже, взят из этой статьи.

²⁾ Рассмотрение вопроса о температурных напряжениях в цилиндрах, в которых температура изменяется вдоль оси, дано А. Стодолой, цит. на стр. 187, Приложение. См. также G. Eichelberg, Forschungsarb., № 230, 1923 и № 263. О температурных напряжениях в дисках см. H. Quidan, Z. Ver. deut. Ing., т. 72, стр. 522, 1928. Та же задача рассмотрена в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 408, 1951; русский перевод, 1937, стр. 401.

³⁾ См. R. Zaizer, Temperature Variation and Heat Stresses in Diesel Engines, т. 121, стр. 447, 1926; A. Nägel, Transfer of Heat in Reciprocating Engines, там же, т. 127, стр. 282, 1929; W. Nusselt, Z. Ver. deut. Ing., т. 70, стр. 468, 1926; J. N. Goodier, J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-33, 1937.

Угол закручивания на единицу длины равен

$$\theta = \frac{4\pi^2 M_k J_p}{F^2 G}, \quad (214)$$

где $J_p = (\pi/64)(bh^2 + b^2h)$ — полярный момент инерции площади поперечного сечения (см. т. I, Приложение А, стр. 352) и $F = \pi bh/4$ — площадь поперечного сечения.

Равносторонний треугольник. Наибольшее касательное напряжение имеет место в середине сторон (точки m на рис. 137) и может быть вычислено по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{20M_k}{b^3}. \quad (215)$$

Угол закручивания на единицу длины равняется

$$\theta = \frac{M_k}{0,56 G J_p} = \frac{46,2 M_k}{b^4 G}. \quad (216)$$

Правильный шестиугольник¹⁾. Для этого случая будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,217 F d}, \quad (217)$$

$$\theta = \frac{M_k}{0,133 F d^2 G}, \quad (218)$$

где d — диаметр вписанного круга и F — площадь поперечного сечения.

Правильный восьмиугольник. Для этого случая будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,223 F d}, \quad (219)$$

$$\theta = \frac{M_k}{0,130 F d^2 G}. \quad (220)$$

где F и d имеют то же значение, что и в предыдущем случае.

Трапеция. В случае равнобочной трапеции приближенные значения наибольшего напряжения и угла закручивания получаются при условии замены трапеции эквивалентным прямоугольником, который получен, как указано пунктирными линиями на рис. 138. Из центра тяжести C трапеции чертим перпендикуляры BC и CD на боковые стороны и затем проводим вертикали через точки B и D . Формулы (158) и (159), данные в т. I, стр. 245, если применить к таким образом полученному прямоугольному поперечному сечению, дают приближенные значения τ_{\max} и θ для трапеции, показанной на рис. 138.



Рис. 138.

Для какого-либо сплошного (нетрубчатого) вада приближенное значение угла закручивания получается путем замены поперечного сечения *эквивалентным* эллиптическим сечением той же площади F и того же полярного момента инерции J_p . Тогда приближенное значение для θ будет дано формулой (214).

¹⁾ Решения для правильного шестиугольника, восьмиугольника и трапеции см. С. Weber, Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit, Berlin, 1921.

ГЛАВА VII КРУЧЕНИЕ

45. Валы некругового поперечного сечения

Вопрос о кручении круглых валов был рассмотрен в т. I (стр. 238). Там же были даны формулы для наибольшего напряжения и для угла закручивания прямоугольных валов. Имеется несколько других форм поперечного сечения скручиваемого вала, для которых задача о распределении напряжений и угле закручивания решена. На следующих страницах дано несколько окончательных результатов, которые могут представить практический интерес.



Рис. 136.

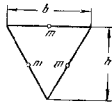


Рис. 137.

Эллиптическое поперечное сечение¹⁾. Наибольшее касательное напряжение имеет место на концах малой оси mn (рис. 136) и равняется

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi b^2 h}. \quad (213)$$

¹⁾ Решения задач на кручение для эллиптического поперечного сечения, а также для равнобедренного треугольника принадлежат St. Venant'у, Mém. des savants étrangers, t. 14, 1855. Вывод формул, данных здесь, можно найти в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 258, 1951; русский перевод, стр. 261, 1937.

46. Мембранная аналогия¹⁾.

Мембранная аналогия устанавливает определенные соотношения между поверхностью провисания равномерно нагруженной мембраны и распределением напряжений в скручиваемом стержне. Вообразим однородную мембрану с тем же очертанием, какое имеет поперечное сечение скручиваемого элемента, подверженную равномерному растяжению по контуре и равномерному поперечному давлению. Можно показать, что дифференциальное уравнение провисания поверхности²⁾ этой мембраны имеет тот же вид, что и уравнение, которое определяет распределение напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня. Если S — растягивающее усилие, приходящееся на единицу длины контура мембраны, p — поперечное давление, приходящееся на единицу площади, и θ — угол закручивания на единицу длины стержня, то оба дифференциальных уравнения будут идентичны, когда

$$\frac{p}{S} = 2G\theta \quad (a)$$

Если это условие выполнено, то устанавливаются следующие соотношения между поверхностью мембраны и распределением касательных напряжений при кручении: 1) *касательная к горизонтали поверхности* в любой точке провисшей мембраны дает направление касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения скручиваемого стержня; 2) *наибольший угол* наклона мембраны относительно контура в любой точке определяет величину касательного напряжения в соответствующей точке скручиваемого стержня; 3) *удвоенный объем*, заключенный между поверхностью изогнутой мембраны и плоскостью, проходящей через ее контур, пропорционален крутящему моменту скручиваемого стержня.

Все эти положения можно легко доказать в случае кругового вала. Пусть рис. 139 представляет соответствующую круговую мембрану, равномерно растянутую усилиями S и нагруженную равномерным давлением p , действующим вверх. Рассматривая центральный участок mn радиуса r мембраны (рис. 139, б), замечаем, что полное давление

на этот участок равняется $\pi r^2 p$. Это давление уравнивается растягивающими усилиями S , которые равномерно распределены по кругу радиуса r и имеют направление касательной к деформированной мембране. Обозначая через w смещение мембраны, получаем

$$\pi r^2 p = -2\pi r S \frac{dw}{dr} \\ \text{и} \quad -\frac{dw}{dr} = \frac{pr}{2S}. \quad (b)$$

Подставляя в это уравнение значение p/S , данное формулой (а), получаем

$$-\frac{dw}{dr} = G\theta r. \quad (c)$$

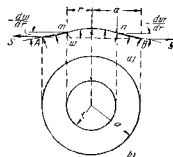


Рис. 139.

В правой стороне этого уравнения мы имеем выражение для напряжения кручения в скручиваемом круглом валу (см. уравнение (b), т. I, стр. 239). Следовательно, угол наклона касательной к мембране дает величину напряжения при кручении. Наибольший угол наклона касательной к мембране в каждой точке направлен по меридиану; следовательно, напряжение при кручении в валу в каждой точке имеет направление, перпендикулярное радиусу.

Это заключение снова согласуется с результатом элементарной теории кручения.

Чтобы определить крутящий момент, который вызывает напряжения, определяемые по уравнению (с), вычислим объем, заключенный между мембраной (рис. 139, а) и плоскостью контура AB . Интегрирование уравнения (с) дает деформированную поверхность мембраны

$$w = \frac{G\theta}{2} (a^2 - r^2),$$

а требуемый объем будет равняться

$$V = \int_0^a 2\pi r w \, dr = G\theta \frac{\pi a^4}{4} = \frac{1}{2} G\theta J_p.$$

Сравнив это выражение с обычной формулой для крутящего момента (см. уравнение (150) т. I, стр. 240), мы в мембранной аналогии заключаем, что удвоенный объем дает величину крутящего момента. Следовательно, приведенные выше три положения относительно мембранной аналогии легко доказываются в случае кругового вала.

¹⁾ Аналогия была разработана L. Prandtl'ем, см. Phys. Z., т. 4, стр. 758, 1903; Jahresber. deut. math. Ver., т. 13, стр. 31, 1904. О дальнейшем развитии см. статьи: A. A. Griffith and G. I. Taylor, Proc. Inst. Mech. Engrg., стр. 755, 1917 и Advisory Comm. Aeronaut. (England) Tech. Repts., т. 3, стр. 920, 938 и 950, 1917—1918. См. также Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 289, 1951; русский перевод, стр. 267, 1937.

²⁾ Предполагается, что прогибы малы.

В других случаях форму поверхности провисания мембраны надо представить для заданного поперечного сечения вала; следовательно, качественные заключения относительно распределения напряжения при кручении легко получить. Например, для прямоугольного поперечного сечения поверхность изогнутой мембраны можно представить горизонтальными, как показано на рис. 140, *a*. Напряжение обратно пропорционально расстоянию между этими линиями; следовательно, оно больше там, где линии сближаются. Наибольшее напряжение имеет место в точках *m—m*, где наклон поверхности мембраны является наибольшим. В углах *a, b, c, d*, где поверхность мембраны совпадает с плоскостью контура *abcd*, наклон этой поверхности равен нулю; следовательно, касательное напряжение в этих точках равно нулю.

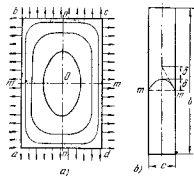


Рис. 140.

Рассмотрим теперь случай узкого прямоугольного поперечного сечения (рис. 140, *b*). Изогнутую поверхность равномерно нагруженной мембраны на некотором удалении от коротких сторон прямоугольника можно считать цилиндрической. При этом допущении каждая полоска *mm* поверхности ведет себя подобно равномерно нагруженной нити и ее наибольший прогиб определяется выражением

$$\delta = \frac{pe^2}{8S},$$

или, пользуясь соотношением (а), находим

$$\delta = \frac{e^2}{4} G\theta.$$

Наибольшее напряжение равно углу наклона поверхности в точках *m—m*. Этот наклон поверхности равен $4\delta/c$ для параболической кривой; следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{4\delta}{c} = cG\theta. \quad (d)$$

Соответствующий крутящий момент равен удвоенному объему, ограниченному мембраной и плоскостью контура. Пренебрегая влиянием коротких сторон прямоугольника на деформацию мембраны и вычисляя объем, принимая его за объем параболического цилиндра длиной *b*, находим

$$M_k = 2 \frac{2}{3} \delta bc = \frac{1}{3} bc^2 G\theta, \quad (e)$$

откуда

$$\theta = \frac{M_k}{\frac{1}{3} bc^2 G}. \quad (221)$$

Подставляя в выражение (d), получаем

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{1}{3} bc^2}. \quad (222)$$

Эти формулы совпадают с формулами (158), (159), приведенными в т. I (стр. 245), если прямоугольник предпологается очень узким.

Если вместо узкого прямоугольника мы имеем узкую трапецию, как показано на рис. 141, то приближенное решение получается при допущении, что поверхность изогнутой мембраны на достаточном удалении от коротких сторон является конической. Удвоенный объем, соответствующий элементу *mm* поперечного сечения, получается как в приведенном выше уравнении (e) и равняется

$$\frac{1}{3} G\theta c^2 dx, \quad (f)$$

где *c* — переменная ширина поперечного сечения, определяемая уравнением

$$c = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{b} x. \quad (g)$$

Подставляя это в уравнение (f) и интегрируя результат, получим крутящий момент в следующем виде:

$$M_k = \int_0^b \frac{1}{3} G\theta c^2 dx = \frac{bG\theta}{12} (c_1 + c_2) (c_1^2 + c_2^2).$$

Тогда угол закручивания будет

$$\theta = \frac{M_k}{\frac{1}{12} b (c_1 + c_2) (c_1^2 + c_2^2) G}. \quad (223)$$

Если $c_1 = c_2 = c$, эта формула совпадает с (221), полученной для узкого прямоугольника.

В более сложных случаях, в которых форма изогнутой поверхности мембраны не может быть легко определена аналитически, эту поверхность можно исследовать экспериментально при помощи мыльной пленки для равномерно растянутой мембраны и путем измерения наклона ее поверхности оптическим методом. Для этой цели применяется аппарат, показанный на рис. 142¹⁾. Алюминиевая пластинка с двумя отверстиями — одним круглым и другим тресбуемой формы —

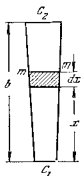


Рис. 141.

¹⁾ См. А. А. Griffith and G. I. Taylor, цит. на стр. 198.

закрепляется между двумя половинами чугунного ящика *A*. Нижняя часть ящика, имеющая форму неглубокого лотка, поддерживается установочными винтами. Вследствие накачивания воздуха в эту часть ящика мыльные пленки, покрывающие отверстия, выгибаются вверх.

Горизонталы на поверхности мыльной пленки вычерчиваются при помощи винта *B*, который проходит через отверстие в листе плоского

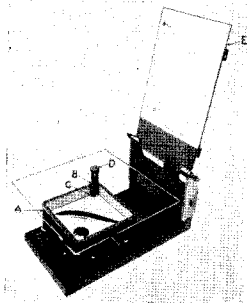


Рис. 142.

стекла. Стекло достаточно велико для того, чтобы покрыть ящик, когда винт *B* находится в любом возможном положении. Нижний конец винта несет закаленное стальное острие *C*, расстояние которого от стеклянной пластинки фиксируется винтом. Острие приближают к пленке путем передвижения стеклянной пластинки до тех пор, пока искажение вида пленки не покажет, что контакт достигнут. Запись делается на листе бумаги, прикрепленном к доске *E*, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси, расположенной на том же уровне, что и стальное записывающее острие *D*. Чтобы отметить какое-либо положение винта, необходимо только наклонить точку на бумаге, поворачивая доску вниз на записывающее острие. После того как острие *B* заставили коснуться пленки в ряде мест, точки, записанные на бу-

маге, используются для вычерчивания горизонталей. Меняя установку винта *B*, можно повторить эту операцию для любого числа горизонталей. Когда эти линии начерчены, объем и соответствующий крутящий момент можно получить суммированием.

Углы наклона в мембране и соответствующие напряжения в стержне получаются в результате измерения расстояний между соседними горизонталями. Лучшую точность измерения наклонов можно получить, направляя луч света на поверхность пленки и измеряя угол отклонения отраженного луча. Чтобы установить соотношения между измеренным наклоном и напряжением, пленки, покрывающие два отверстия в алюминиевом листе, сравниваются при одном и том же давлении воздуха. Так как обе пленки имеют одно и то же отношение p/S , то соответствующие два вала имеют

одни и те же значения $G\theta$ (см. уравнение (а)). Следовательно, измеряя углы наклона двух мыльных пленок, мы можем сравнить напряжения вала данного поперечного сечения с напряжениями круглого вала известного диаметра при условии, что они имеют один и тот же угол закручивания θ на единицу длины и один и тот же модуль сдвига. Соответствующее отношение λ крутящих моментов определяется отношением объемов, заключенных между мыльными пленками и плоскостью пластинки. Это отношение дает отношение жесткостей при кручении двух сопоставляемых валов. Что касается напряжений круглого вала, то эти напряжения можно легко вычислить в любой точке для любого заданного крутящего момента M_k . Напряжение τ , вызванное в какой-либо точке некруглого вала крутящим моментом λM_k , получается путем умножения напряжения τ_0 в выбранной точке круглого вала на экспериментально определяемое отношение наибольших наклонов в рассматриваемых точках двух валов.

На рис. 143 изображены горизонталы, полученные для части сечения двутавра, который был использован как лонжерон крыла самолета. Вследствие близкой группировки горизонталей в выкрутках входящих углов и в середине верхней грани надо считать, что касательные напряжения наибольшего значения достигают именно в этих местах. Выступающие части полки очень мало напряжены. Наибольшее напряжение в среднем участке стенки практически постоянно вдоль грани стенки и равно напряжению в узком прямоугольнике для того же угла закручивания.

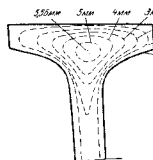


Рис. 143.

47. Кручение прокатных профилей

Формулы (221) и (222), выведенные для узкого прямоугольного поперечного сечения, можно применить также для приближенных решений в других случаях, в которых ширина поперечного сечения мала. Например, в случае одинаковой толщины поперечных сечений, показанных на рис. 144, *a* и 144, *b*, угол закручивания получается из формулы (221) путем подстановки развернутой длины осевой линии вместо *b*. Эта длина равняется $b = \varphi r$ и в случае сечения, представленного на рис. 144, *a*, и $b = 2a - c$ в случае сечения, представленного на рис. 144, *b*. Наибольшее напря-

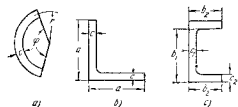


Рис. 144.

яжение для первого из этих двух сечений получается из формулы (222). Для углового сечения (рис. 144, *b*) наибольшее напряжение имеет место у входящего угла. Это наибольшее напряжение получается путем умножения напряжения, даваемого формулой (222), на коэффициент концентрации напряжений, больший единицы. Величина этого коэффициента будет рассмотрена ниже (см. п. 58, стр. 258).

Приведенные здесь заключения следуют из мембранной аналогии, рассмотренной в предыдущем параграфе. Из этого рассуждения читатель может видеть, что если толщина *c* поперечного сечения, показанного на рис. 144, *a*, мала по сравнению с радиусом *r*, то с достаточной точностью все еще можно использовать параболическую кривую, показанную на рис. 140, *b* и определяющую провисание пленки¹⁾. В таком случае наибольший наклон пленки и соответствующее наибольшее напряжение для поперечного сечения на рис. 144, *a* будут приблизительно такими же, как для узкого прямоугольника.

В случае швеллера (рис. 144, *c*) угол закручивания получается путем расчленения поперечного сечения на три прямоугольника, как показано на рисунке, с подстановкой в формулу (221) величины $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$ вместо bc^3 . Таким образом, мы получаем

$$\theta = \frac{3M_k}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G} \quad (224)$$

Чтобы вычислить напряжение, которое имеет место в середине сторон b_2 полков, необходимо лишь, как видно из формулы (221), (222)

¹⁾ Поверхность провисания здесь уже не цилиндрическая, но если *c* мала по сравнению с *r*, то кривизна линии в тангенциальном направлении мала по сравнению с кривизной в радиальном направлении и ею можно пренебречь.

умножить θ на c_2G ; тогда

$$\tau = \frac{3M_k c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad (225)$$

Эти же приближенные формулы можно использовать также при кручении двутавровых балок¹⁾ с полками постоянной толщины (рис. 145, *a*).

В случае двутавровой балки с наклонными полками (рис. 145, *b*) мы обозначим через c_2 толщину полков на краях и через c_3 толщину полков у стенки, так что

$$c_3 = c_2 + \frac{1}{2} b_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Пользуясь выражением (223) для полков, мы заключаем, что угол закручивания θ получается из формулы (224) путем подстановки в него величины $\frac{1}{4}(c_2 + c_3)(c_2^3 + c_3^3)$ вместо c^3 .

Наибольшее напряжение обычно имеет место в выточках и носит местный характер. Его величина будет рассмотрена в п. 58. Значительное напряжение может также иметь место в точках *m* (рис. 145, *b*) в середине наружных граней полков. Это последнее напряжение получается по-прежнему путем умножения угла закручивания θ на $c_k G$, где c_k представляет наибольшую толщину полки.

Необходимо заметить, что при выводе формулы (224) была использована формула для бесконечно узкого прямоугольника и что влияние коротких сторон прямоугольника на рис. 140 на величину объема, ограниченного мыльной пленкой, совершенно пренебрегалось. Благодаря наличию этих сторон объем, очевидно, будет несколько уменьшен. В то же самое время в углах швеллера (рис. 144, *c*), где сходятся вместе два прямоугольника, можно ожидать большей деформации мыльной пленки, чем в случае одного прямоугольника. Такое дополнительное смещение вызывает увеличение объема. Эти два фактора, которыми пренебрегалось при выводе формулы (224), противоположно действуют, в некоторой степени нейтрализуют друг друга, так что формула (224) достаточно точна для тонкостенных сечений²⁾.

¹⁾ Наибольшее напряжение имеет место во входящих углах, оно будет рассмотрено ниже (см. п. 58, стр. 258).

²⁾ Опыт с тонкостенными двутавровыми балками при кручении были проделаны автором, Известия Истербургского политехнического института, т. 5, 1906. Эти испытания показали удивительное согласие с формулой (224). Весьма обширный ряд испытаний на кручение прокатных балок

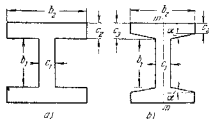


Рис. 145.

Для случаев кручения двутавровых балок и швеллеров, в которых толщина полки не мала и изменяется по ширине полки, была выведена ¹⁾ более сложная формула для жесткости кручения, которая весьма удовлетворительно согласуется с опытами.

ЗАДАЧИ

1. Найти отношение углов закручивания цельной и разрезанной круглой тонких труб одинаковых геометрических размеров (рис. 146) и находящейся под действием равных крутящих моментов.

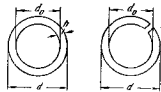


Рис. 146.

Решение. Пользуясь формулами (151) г. 1, стр. 241 и (221), получим для цельной и разрезанной труб соответственно

$$\theta = \frac{32M_k}{\pi d^4 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right) G},$$

$$\theta_1 = \frac{3M_k}{\pi \left(\frac{d+d_0}{2}\right)^2 \left(\frac{d-d_0}{2}\right)^2 G}.$$

Отношение углов закручивания будет равняться

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{2}{3} \frac{(d-d_0)^2}{3d^2 + d_0^2}.$$

Для очень тонких труб ($d^2 + d_0^2 \approx 2d^2$) в отношении получается в виде

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{d}\right)^2.$$

2. Определить угол закручивания на сантиметр длины швеллера (рис. 144, e), если $M_k = 20000$ кг·см, $b_1 = 25$ см, $b_2 = 9$ см, $c_1 = 1$ см, $c_2 = 1,5$ см, $G = 8 \cdot 10^8$ кг/см².

Решение. $\theta = \frac{3 \cdot 20000}{(25 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1,5^3) 8 \cdot 10^8} = 0,00088$ рад на см.

3. Определить отношение наибольших касательных напряжений для труб, рассмотренных в задаче 1, если крутящие моменты одинаковы для обеих труб.

4. Определить жесткость кручения C для двутавровой балки, рассмотренной на стр. 205, если полки наклонены так, как пояснено на той же странице.

48. Кручение тонкостенных трубчатых стержней

При рассмотрении кручения тонкостенных трубчатых стержней опять удобно применить мембранную аналогию ²⁾. В этом случае наружный и внутренний края поперечного сечения располагаются

был сделан А. Фёрр Гем, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch., стр. 295, 1921 и Bauingenieur, т. 3, стр. 42, 1922. Некоторые поправочные коэффициенты для формулы (224) были получены на основании этих опытов.

¹⁾ Формула была выведена на основании опытов, проведенных Inge Lys e and B. G. Johnston, Lehigh University Publ., т. 9, 1935.

²⁾ Кручение трубчатых стержней было рассмотрено R. Вгедлом, Z. Ver. deut. Ing., т. 40, стр. 815, 1896. См. также T. P. ресотт, Phil. Mag., т. 60, 1920.

в мембране на различных горизонтальных плоскостях, соединяющих края, как показано линиями mn на рис. 147. Если толщина трубы мала, то кривизной мембраны можно пренебречь, т. е. линия mn можно считать прямой. Угол наклона мембранной поверхности в таком случае будет постоянным по толщине стенки и равным f/h , где f — разность уровней двух краев и h — толщина трубы, которая может изменяться вдоль контура поперечного сечения. Мембранная аналогия указывает на то, что в этом случае касательные напряжения равномерно распределяются по толщине стенки и определяются наклоном поверхности, равным

$$\tau = \frac{f}{h}. \quad (a)$$

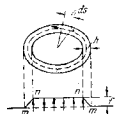


Рис. 147.

Следовательно, напряжение по контуру обратно пропорционально толщине стенки. Объем, заключенный между поверхностями mn и mn_1 , вычисляется при помощи осевой линии кольцевого поперечного сечения, показанной штриховой кривой на рисунке. Если F — площадь, ограниченная этой линией, объем mn_1 равен Ff , то из мембранной аналогии мы получаем

$$M_k = 2Ff. \quad (b)$$

Тогда из выражений (a) и (b) мы находим

$$\tau = \frac{M_k}{2Fh}. \quad (226)$$

Эту формулу можно применить при вычислении напряжений в трубчатых стержнях при кручении, если толщина стенки мала, изменение толщины не является резким и нет входящих углов.

Угол закручивания θ на единицу длины трубчатого стержня можно вычислять из рассмотрения энергии деформации кручения. Энергия деформации, приходящаяся на единицу длины трубчатого стержня, равняется

$$U = \int_0^s \frac{t^2 h ds}{2G},$$

где s — длина осевой линии кольцевого поперечного сечения, показанная на рис. 147 штриховой линией.

Подставляя в это уравнение значение τ из формулы (226) и приравняв энергию деформации работе, совершенной крутящим моментом, получаем

$$\frac{M_k^2}{8F^2 G} \int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2} M_k \theta, \quad (c)$$

откуда

$$\theta = \frac{M_K}{4F^2 G} \int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2FG} \int_0^s \tau ds. \quad (227)$$

В случае трубы одинаковой толщины τ — постоянно и выражение (227) приводится к виду

$$\theta = \frac{\tau s}{2FG}. \quad (228)$$

По этой формуле можно легко вычислить угол закручивания, когда даны размеры поперечного сечения, касательное же напряжение τ можно определить, используя формулу (226).

Выражение (227), выведенное из рассмотрения энергии деформации скручиваемого трубчатого стержня, можно также получить из мембранной аналогии. Рассматривая равновесие плоскости $n-n$ на рис. 147, мы заключаем, что давление $p(F^1)$, действующее на эту плоскость, уравновешивается растягивающими усилиями S , действующими в мембране. Растягивающее усилие $S ds$, действующее на элемент ds контура, имеет малый наклон поверхности, равный τ ; следовательно, вертикальная составляющая этого усилия равна $\tau S ds$, и условие равновесия плоскости $n-n$ будет

$$pF = \int_0^s \tau S ds. \quad (d)$$

Замечая, что растягивающее усилие S в мембране постоянно и что $p/S = 2G\theta$ (см. уравнение (a), стр. 198), мы находим из уравнения (d)

$$\frac{p}{S} = \frac{1}{F} \int_0^s \tau ds = 2G\theta.$$

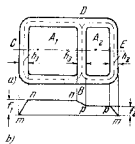


Рис. 148.

Решая это уравнение относительно θ , мы получаем формулу (227) для угла закручивания.

Иногда требуется вычислить напряжения кручения в трубчатом стержне, имеющем промежуточные стенки, как из рис. 148, а. Границы поперечного сечения в этом случае формируются из трех замкнутых кривых. Применяя мембранную аналогию, заметим, что эти кривые будут размещены в трех различных горизонтальных плоскостях mn , pp и mm , как показано на рис. 148, б. Мысленная пленка, соединяющая эти три кривые, образует ограниченную поверхность, поперечные сечения которой показаны линиями mn , pp и mm . Предполагая опять, что толщина стенки h_1 , h_2 и h_3 мала, и пренебрегая

⁴ В случае тонкостенных стержней площадь F , ограниченную осевой линией (показанной пунктиром), можно рассматривать вместо площади плоскости $n-n$.

кривизной мембраны в направлениях, нормальных к краям сечения, заключаем, что линии mn , pp и mm являются прямыми. В таком случае наклоны мембраны, дающие напряжения в стенках трубчатого стержня, будут

$$\tau_1 = \frac{f_1}{h_1}, \quad \tau_2 = \frac{f_2}{h_2}, \quad (e)$$

$$\tau_3 = \frac{f_1 - f_2}{h_3} = \frac{h_1 \tau_1 - h_2 \tau_2}{h_3}. \quad (f)$$

Величина крутящего момента, вызывающего эти напряжения, получается путем удваивания объема фигуры *шпирит* на рис. 148, б. Если мы обозначим площади, ограниченные пунктирными линиями на рис. 148, а, через F_1 и F_2 , то этот крутящий момент будет равняться

$$M_K = 2(F_1 f_1 + F_2 f_2), \quad (g)$$

или, пользуясь формулами (e), получаем

$$M_K = 2F_1 h_1 \tau_1 + 2F_2 h_2 \tau_2. \quad (h)$$

Другие уравнения для решения задачи получаются применением уравнения (227) к двум замкнутым кривым, указанным штриховыми линиями на рис. 148, а. Предполагая, что участок $BCDB$ стенки имеет постоянную толщину h_1 и что угол закручивания θ имеет постоянную толщину, соответственно равную h_2 и h_3 , из уравнения (227) имеем

$$\tau_1 s_1 + \tau_2 s_2 = 2G\theta F_1, \quad (i)$$

$$\tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 = 2G\theta F_2. \quad (j)$$

В этих выражениях s_1 , s_2 и s_3 являются длинами осевой линии, измеренными по пунктирным линиям соответственно $BCDB$, DEB и DB . Применяя интеграл (227) к замкнутым кривым $BCDB$ и $DEBD$, мы проходим участок DB длины s_3 в двух противоположных направлениях; следовательно, вторые члены левых частей уравнений (i) и (j) появляются с противоположными знаками. Угол закручивания θ правых частей выражений (i) и (j), очевидно, тот же, что и угол закручивания всего трубчатого стержня. Четыре уравнения (i), (h), (i) и (j) содержат четыре неизвестных τ_1 , τ_2 , τ_3 и θ , которые можно легко вычислить. Исключая θ , мы получаем для касательных напряжений следующие формулы:

$$\tau_1 = M_K \frac{h_2 s_2 F_1 + h_3 s_3 (F_1 + F_2)}{2 [h_1 h_2 s_1 F_1^2 + h_2 h_3 s_1 F_2^2 + h_1 h_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]}, \quad (k)$$

$$\tau_2 = M_K \frac{h_2 s_1 F_2 + h_1 s_3 (F_1 + F_2)}{2 [h_1 h_2 s_1 F_1^2 + h_2 h_3 s_1 F_2^2 + h_1 h_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]}, \quad (l)$$

$$\tau_3 = M_K \frac{h_1 s_2 F_1 - h_2 s_1 F_2}{2 [h_1 h_2 s_1 F_1^2 + h_2 h_3 s_1 F_2^2 + h_1 h_2 s_3 (F_1 + F_2)^2]}. \quad (m)$$

Если стенка DB поперечного сечения на рис. 148, а есть плоскость симметрии поперечного сечения, то мы имеем $s_1 = s_2$, $h_1 = h_2$ и $F_1 = F_2$, и уравнение (m) лев $\tau_3 = 0$. Таким образом, в этом случае крутящий момент воспринимается полностью наружной стенкой трубы, а промежуточная стенка является ненапряженной⁴).

Чтобы получить угол закручивания θ для трубчатого стержня, мы должны представить вычисленное значение напряжений в уравнение (i) или (j). Таким

⁴ В этом выводе малыми напряжениями, соответствующими изменению наклона мембраны по толщине стенки, пренебрегается.

образом, задача о кручении трубчатого стержня, подобного показанному на рис. 148, может быть легко решена с достаточной точностью при условии, что толщина стенки мала по сравнению с общими размерами поперечного сечения.

В предыдущем примере был рассмотрен трубчатый стержень, состоящий только из двух ячеек. В практических приложениях мы часто встречаем стержни с большим числом ячеек, в которых случай алгебраического решения, описанный выше, становится громоздким. Быстрый ответ можно получить путем численного решения задачи в каждом частном случае при помощи метода последовательных приближений¹⁾. Чтобы пояснить численный метод, мы рассмотрим случай трубчатого стержня с тремя ячейками (рис. 149). Следуя

прежним обозначениям, мы обозначим через f_1, f_2 и f_3 соответствующие трем ячейкам уровни мембраны, s_1, \dots, s_4 — длины осевых линий стенок сегментов и h_1, \dots, h_4 — соответствующие толщины стенок. Тогда, поступая по-прежнему, мы получаем вместо уравнений (i) и (j) следующие:

$$\left. \begin{aligned} f_1 \frac{s_1}{h_1} + (f_1 - f_2) \frac{s_2}{h_2} &= 2G\theta F_1, \\ -(f_1 - f_2) \frac{s_2}{h_2} + f_2 \left(\frac{s_2}{h_2} + \frac{s_3}{h_3} \right) + (f_2 - f_3) \frac{s_4}{h_4} &= 2G\theta F_2, \\ -(f_2 - f_3) \frac{s_4}{h_4} + f_3 \frac{s_4}{h_4} &= 2G\theta F_3. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Здесь величины $f_1 = \tau_1/h_1$, $f_2 = \tau_2/h_2$, $f_1 - f_2 = \tau_3/h_3$, ... называемые касательными потоками, вводятся вместо касательных напряжений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. Вводя обозначение $s_i/h_i = r_i$, мы можем переписать эти уравнения в следующем простом виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_1 r_i \right) f_1 - r_2 f_2 &= 2G\theta F_1, \\ -r_2 f_1 + \left(\sum_2 r_i \right) f_2 - r_3 f_3 &= 2G\theta F_2, \\ -r_3 f_2 + \left(\sum_3 r_i \right) f_3 &= 2G\theta F_3, \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

где $\sum_1 r_i, \sum_2 r_i, \sum_3 r_i$ — суммы значений r_i соответственно для первой, второй и третьей ячеек. Разделив эти уравнения на коэффициенты диагональных членов и введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{2G\theta F_1}{\sum_1 r_i} = f_1', \quad \frac{2G\theta F_2}{\sum_2 r_i} = f_2', \quad \frac{2G\theta F_3}{\sum_3 r_i} = f_3', \\ \frac{r_2}{\sum_1 r_i} = d_{12}, \quad \frac{r_3}{\sum_2 r_i} = d_{23}, \quad \frac{r_4}{\sum_3 r_i} = d_{34}, \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

¹⁾ См. статью F. M. Вайона, J. Appl. Mech., т. 9, стр. A-72, 1942.

окончательно напишем уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_1 - d_{12} f_2 &= f_1', \\ -d_{21} f_1 + f_2 - d_{23} f_3 &= f_2', \\ -d_{32} f_2 + f_3 &= f_3'. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

К этим уравнениям мы прибавим уравнение для вычисления крутящего момента, подобное уравнению (g):

$$M_x = 2(F_1 f_1 + F_2 f_2 + F_3 f_3). \quad (r)$$

К численному решению уравнений (q) мы приступим, назначив численное значение для угла закручивания на единицу длины θ . Величины f_1, f_2 и f_3 тогда определятся, и уравнения (q) можно решить. Для того чтобы найти соответствующее значение M_x в уравнении (r) подставляем результирующие значения f_1, f_2 и f_3 . Для какого-либо другого желательного значения крутящего момента M_x мы должны лишь изменить значение θ , f_1, f_2 и f_3 в прямой пропорции.

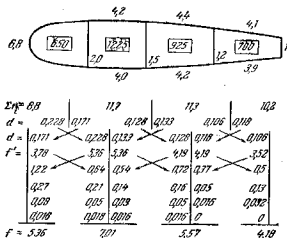


Рис. 150.

Применяя метод последовательных приближений к решению уравнений (q), мы замечаем, что все коэффициенты d_{ij} меньше единицы. Поэтому как первое приближение мы сократим лишь диагональные члены в уравнениях (q) и примем f_1, f_2 и f_3 за первое приближение для f_1, f_2 и f_3 . Подставляя эти первые приближения в недиагональные члены уравнений (q), мы получаем первые поправки:

$$\Delta^* f_1 = d_{12} f_2', \quad \Delta^* f_2 = d_{21} f_1' + d_{23} f_3', \quad \Delta^* f_3 = d_{32} f_2'. \quad (s)$$

Подставляя значения (s) в недиагональные члены уравнений (q), получаем Вторые поправки:

$$\Delta^{**} f_1 = d_{12} \Delta^* f_2, \quad \Delta^{**} f_2 = d_{21} \Delta^* f_1 + d_{23} \Delta^* f_3, \quad \Delta^{**} f_3 = d_{32} \Delta^* f_2.$$

Поступая точно таким же образом, находим третьи поправки и т. д. Вычисления нужно повторять до тех пор, пока дальнейшие поправки станут весьма

малыми. Тогда, прибавляя все поправки к первым приближениям f_1 , f_2 и f_3 , получаем приближенные значения f_1 , f_2 и f_3 . Уравнение (г) даст соответствующее значение $M_{\text{кр}}$, а значения касательных напряжений определятся из уравнений, подобных уравнениям (е) и (ф).

Чтобы пояснить вычисления, на рис. 150 приведен численный пример¹⁾ для металлопластического сечения крыла. Площадь каждой ячейки дана числом, ограниченным прямоугольником, а значения r проставлены около каждой стенки сегмента. В таблице, приведенной под рисунком, значения $\sum r_i$ для каждой ячейки даны в первой строке. Во второй строке даны коэффициенты d_{ij} для стенок промежуточных ячеек. Прежде чем начать вычисления, нужно эти коэффициенты переставить, как показано, стрелками в третью строку. В следующей строке написаны первые приближения f для касательных потоков, вычисленные при допущении, что $G\theta = 1$. Первые поправки вычисляются путем умножения каждого из значений f на коэффициенты d , расположенные над ними с итерационной результирующими значениями в смежных ячейки, как показано стрелками. Полная поправка для внутренней ячейки состоит из двух чисел, написанных по обе стороны вертикальной линии. Эти числа мысленно складываются и умножаются на соответствующий множитель при вычислении вторых поправок. Вычисления повторяются до тех пор, пока поправки станут незначительными. Окончательные значения касательных потоков, полученные путем добавления (сложения) всех поправок к первым приближениям f , даны в последней строке на рис. 150. Подставляя эти значения в уравнение (г), получим крутящий момент, соответствующий $G\theta = 1$.

49. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля, в которых предотвращено искажение некоторых поперечных сечений

В предыдущем обсуждении задачи о кручении двутавровых балок и швеллеров (стр. 204) предполагалось, что крутящие моменты приложены к концам стержня и что все поперечные сечения могут совершенно свободно искажаться (коробиться). Однако имеются случаи, в которых одно или несколько поперечных сечений стержня вынуждены оставаться плоскими, и возникает вопрос, как это препятствие искажению влияет на угол закручивания и на распределение напряжений. Для стержней сплошного поперечного сечения, как, например, эллипсы или прямоугольники, сопротивление искажению оказывает лишь незначительное влияние на угол закручивания²⁾ при условии, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. В случае двутавровых балок, швеллеров и других тонкостенных стержней открытого профиля препятствие искажению при кручении сопровождается изгибом полок и может оказать значительное влияние на угол закручивания.

Простой случай, в котором имеет место препятствие искажению, представляет собой двутавровая балка, скручиваемая парой сил по-

середине и свободно лежащая¹⁾ на двух опорах (рис. 151). Вследствие симметрии поперечное сечение mn при кручении должно оставаться плоским, а поворот этого поперечного сечения относительно конечных поперечных сечений будет сопровождаться изгибом полок. Кошовой крутящий момент уравновешивается в любом поперечном сечении частично касательными напряжениями, возникающими от кручения, и частично касательными напряжениями, возникающими от изгиба полок²⁾. Рис. 152, а представляет половину балки, показанной на рис. 151. Среднее поперечное сечение mn остается плоским благодаря симметрии, и мы можем рассматривать его как заделанное с крутящим моментом, приложенным на другом конце. Пусть φ будет угол закручивания в каком-либо поперечном сечении балки. Тогда часть крутящего момента, $M_{\text{кр}}$, который уравновешивается касательными напряжениями, вызванными кручением, определится из уравнения

$$M_{\text{кр}} = C \frac{d\varphi}{dx}, \quad (а)$$

в котором C — жесткость кручения стержня (см. т. I, стр. 246).

Чтобы определить часть крутящего момента $M_{\text{кр}}$, который уравновешивается касательными напряжениями в полках, возникающих от изгиба, мы должны рассмотреть изгиб полки (рис. 152, в). Обозначая через h расстояние между центрами тяжести полок (рис. 152, б), найдем прогиб в каком-либо поперечном сечении верхней полки:

$$z = \frac{hq}{2}, \quad (б)$$

и путем дифференцирования получим

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{h}{2} \frac{d^2q}{dx^2}. \quad (в)$$

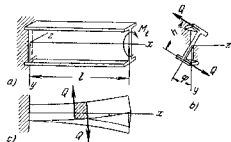


Рис. 152.

¹⁾ Простые опоры таковы, что концы балки не могут поворачиваться вокруг продольной оси, но могут свободно искривляться (коробиться).

²⁾ См. статью автора «Известия Петербургского политехнического института», 1905—1906, Z. Math. u. Phys., т. 58, стр. 361, 1910. См. также K. Huber, Dissertations, Мюнхен, 1922 и C. Weber, Z. angew. Math. u. Mech., т. 6, стр. 85, 1926. Дальнейшее рассмотрение вопроса о различных формах тонкостенных стержней дано A. Ostenfeld, Lab. Baustatik Techn. Hochschule, Copenhagen, Mit. № 6, 1931.

¹⁾ Этот пример взят из статьи Stanley U. Benscoter's, J. Aero-naut. Sci., т. 13, стр. 438, 1946.

²⁾ Обсуждение этого вопроса см. в Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 302, 1951; русский перевод, стр. 303, 1937.

Обозначив через D жесткость при изгибе одной полки в плоскости xz и заметив, что z положительно в направлении, показанном на рис. 152, c , получим выражение для поперечной силы в полке от изгиба¹⁾

$$Q = \frac{dM}{dx} = D \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{Dh}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (d)$$

где M — изгибающий момент полки. Принимая за положительное направление Q такое, как показано на рис. 152, c , имеем

$$M_k^* = -Qh = -\frac{Dh^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (e)$$

и полный крутящий момент равняется

$$M_k = M_k^* + M_k^* = C \frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (229)$$

В рассматриваемой задаче (рис. 152, c) крутящий момент M_k является постоянным по длине l балки. Концевые условия таковы²⁾:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=l} = 0,$$

и поэтому решение уравнения (229) будет

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{C} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a}} \right), \quad (f)$$

где

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C}. \quad (g)$$

Так как жесткость при изгибе D и жесткость при кручении C измеряются в одних и тех же единицах ($\text{кг}\cdot\text{см}^2$), то из выражения (g) следует, что a имеет линейную размерность и зависит от размеров балки.

Благодаря наличию второго члена в уравнении (f) угол закручивания на единицу длины изменяется по длине стержня, хотя крутящий момент остается постоянным. Кручение стержня, которое зависит от изгиба полки и определяется уравнением, подобным уравнению (229), называется *неравномерным кручением*.

Когда $d\varphi/dx$ определено, то части M_k^* и M_k^* полного крутящего момента M_k можно вычислить для любого поперечного сечения из

¹⁾ Влиянием поперечной силы на кривизну изогнутой оси полки в этом выводе пренебрегается.

²⁾ Условия определяются из рассмотрения каждой полки как балки с одним защемленным и другим свободным концом.

уравнений (a) и (e). Для заделанного сечения, где $x=0$ и $d\varphi/dx=0$, мы получаем из уравнения (a), что $M_k^*=0$. Следовательно, в этой точке полный момент уравновешивается моментом от поперечных сил, действующих в полках, и мы имеем $Q = -M_k^*/h$. На концах $x=l$, пользуясь уравнением (f), получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{C} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{a}} \right). \quad (h)$$

Если длина балки велика по сравнению с ее поперечными размерами, l велико по сравнению с a , и второй член в скобках выражения (h) становится ничтожным, то $d\varphi/dx$ приближается к значению M_k/C .

Изгибающий момент в полках находится из уравнения (d):

$$M = \frac{Dh}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}; \quad (i)$$

подставляя же выражение (f) вместо $d\varphi/dx$ и пользуясь обозначением (g), получаем

$$M = \frac{a}{h} M_k \frac{\operatorname{sh} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}}. \quad (j)$$

Изгибающий момент в заделанном конце будет равняться

$$M_{\max} = \frac{a}{h} M_k \operatorname{th} \frac{l}{a}. \quad (k)$$

Когда l в несколько раз больше a , то $\operatorname{th} h(l/a)$ приближается к единице и мы можем применять формулу

$$M_{\max} = \frac{aM_k}{h}, \quad (l)$$

т. е. наибольший изгибающий момент полки такой же, как и для консоли длиной a , нагруженной на конце силой M_k/h . Для очень короткой балки l мало по сравнению с a , $\operatorname{th} h(l/a)$ приближается к l/a , и мы имеем из выражения (k)

$$M_{\max} = \frac{M_k l}{h}. \quad (m)$$

Возьмем в качестве примера двутавровую балку с площадью поперечного сечения $61,2 \text{ см}^2$. Поперечное сечение заменим эквивалентным поперечным сечением (рис. 153), состоящим из трех прямоугольников, имеющих те же площади поперечных сечений полки и стенки, что и действительное сечение³⁾. Пользуясь уравнением (224), мы находим

$$C = (27,12 \cdot 0,9^3 + 2 \cdot 12,6 \cdot 1,44^3) \frac{G}{3} = 31,7 G.$$

³⁾ Несколько лучше приближение для C можно получить, если принять в расчет наклон полки, как пояснено на стр. 205.

Жесткость при изгибе полки D получится, если взять половину момента инерции стандартного поперечного сечения относительно вертикальной главной оси ¹⁾ и умножить на E . Тогда $D = \frac{1}{2} E I_x = 200 E$, и мы получаем из уравнения (г)

$$a = h \sqrt{\frac{D}{2C}} = 2,8 h. \quad (о)$$

Следовательно, если балка нагружена, как показано на рис. 151, то наибольший изгибающий момент в полке на оковалке формулы (1) приблизительно в три раза больше крутящего момента M_x при условии, что балка достаточно длинна, так что $\lg h (l/a)$ близок к единице. Например, если $l/a = 2$, так что $l \approx 5,6 h$, мы имеем $\lg h (l/a) = 0,96$, и ошибка в предыдущем вычислении составит 4 процента.

Для вычисления угла закручивания φ мы пользуемся уравнением (1). Интегрируя это уравнение и подбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\varphi = 0$ при $x = 0$, получаем

$$\varphi = \frac{M_x}{C} \left(x + \frac{a \operatorname{sh} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}} - a \operatorname{th} \frac{l}{a} \right). \quad (п)$$

Подставляя в это уравнение $x = l$, получаем

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_x}{C} \left(l - a \operatorname{th} \frac{l}{a} \right). \quad (q)$$

Второй член в скобках представляет влияние изгиба полки на угол закручивания. Для длинных балок $\lg h (l/a) \approx 1$, и уравнение (q) получается в следующем виде:

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_x}{C} (l - a). \quad (r)$$

Следовательно, влияние изгиба полки на угол закручивания эквивалентно уменьшению длины l на величину a .

Описанный выше метод для постоянного крутящего момента M_x можно также применить в том случае, когда крутящий момент изменяется по длине балки. Необходимо лишь в уравнение (229) подставить точное выражение M_x в функции x .

В предыдущем анализе кручения двутавровой балки (рис. 152) предполагалось на основании симметрии, что каждое поперечное сечение поворачивается относительно центральной оси балки. Поэтому нужно было рассматривать только изгиб полки. Видно также, что

¹⁾ Момент инерции площади поперечного сечения стенки предполагается ничтожным.

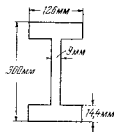


Рис. 153.

этот изгиб не препятствует простому кручению стенки, так как в местах соединения стенки с полками напряжения от изгиба в полках обращаются в нуль. В случае несимметричных поперечных сечений или поперечных сечений только с одной осью симметрии задача становится более сложной, так как не только изгиб полки, но также

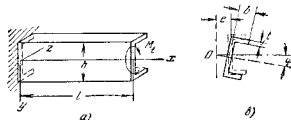


Рис. 154.

и изгиб стенки будет возникать при кручении. В качестве примера рассмотрим кручение швеллера (рис. 154). В этом случае при кручении каждое поперечное сечение поворачивается относительно центра сдвига O , который находится на горизонтальной оси симметрии поперечного сечения на расстоянии, равном (см. т. I, стр. 203)

$$e = \frac{b^2 h t}{4J_x} \quad (с)$$

от срединной плоскости стенки. Из этого следует, что прогибы полки и стенки в их срединных плоскостях соответственно будут

$$z = \pm \frac{h}{2} \varphi \quad \text{и} \quad y = e \varphi, \quad (т)$$

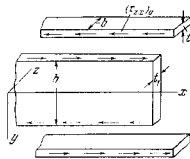


Рис. 155.

где φ есть угол закручивания, который предполагается малым. Также предполагается, что толщины полки и стенки малы, так что напряжениями, вызванными изгибом их в направлениях, перпендикулярных к их срединным плоскостям, можно пренебречь.

Взаимодействие между верхней полкой и стенкой представлено касательными напряжениями $(\tau_{xz})_0$, показанными на рис. 155. Эти напряжения вызывают изгиб и сжатие полки. Если S есть величина сжимающего усилия в полке на расстоянии x от заделанного конца, то мы имеем

$$t (\tau_{xz})_{x=0} = - \frac{dS}{dx} \quad \text{и} \quad S = t \int_0^h (\tau_{xz})_0 dx.$$

Величина усилия S теперь определится из того условия, что деформация ϵ_x в продольном направлении в месте сопряжения стенки и полки одинакова для обеих этих частей. Вычисляя кривизны изогнутых осей из выражений (т), находим, что условие представится уравнением¹⁾

$$\epsilon_x = c \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{b}{2} - \frac{S}{btF}. \quad (u)$$

Теперь, пользуясь выражением (s) и замечая, что $J_z = \frac{t_1 h^3}{12} + \frac{b h^3}{2}$, получаем

$$S = \frac{E b^3 h^3 t_1}{48 J_z} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (v)$$

Имея это выражение для S , мы можем легко определить касательные напряжения в стенке и в полках, а также часть M_x^* крутящего момента, уравновешиваемого этими напряжениями.

Начнем с расчета касательных напряжений в стенке. Взяв два смежных поперечных сечения mn и $m_1 n_1$ (рис. 156, а) и рассмотрев обычным путем равновесие заштрихованного элемента, получим

$$\tau_{yx} t_1 dx - \frac{dS}{dx} dx + \frac{dM}{dx} S_2 dz = 0.$$

В этом уравнении S_2 — статический момент относительно оси z заштрихованного участка поперечного сечения стенки (рис. 156, б),

$J_z = \frac{t_1 h^3}{12}$ — момент инерции площади поперечного сечения стенки относительно оси z и M — изгибающий момент в стенке. Изгибающий момент M является положительным, если он вызывает растяжение в верхней грани стенки и равняется

$$M = E J_z e \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = S h.$$

Тогда выражение для напряжений получится в виде

$$\tau_{yx} = \frac{dS}{t_1 dx} \left(1 - \frac{S_2 h}{J_z} \right).$$

Замечая, что изменение S_2 по высоте поперечного сечения следует параболическому закону, находим, что распределение касательных напряжений τ_{yx} дается заштрихованной площадью на рис. 156, с и что

¹⁾ В этом выводе влиянием поперечных сил на кривизну изогнутой оси полки пренебрегается.

равнодействующая касательных усилий в стенке обращается в нуль. Это последнее заключение можно было предвидеть, так как касательные усилия в стенке и в двух полках должны уравновесить часть M_x^* крутящего момента, а это возможно лишь в том случае, если касательное усилие в стенке обращается в нуль, а касательные усилия в двух полках образуют пару сил.

При вычислении касательных напряжений τ_{zx} в полке (рис. 157, а) замечаем, что в переходном сечении mn действует сжимающее усилие S и изгибающий момент¹⁾

$$M = D \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{h}{2}. \quad (w)$$

Рис. 157.

Рассматривая равновесие заштрихованного элемента между двумя смежными поперечными сечениями, получаем

$$t_{zx} dx + \frac{dS}{dx} dx \frac{b-x}{b} + \frac{dM}{dx} dx \frac{S_{z1}}{J_1} = 0,$$

где S_{z1} и J_1 должны быть вычислены для полки таким же образом, как S_2 и J_z для стенки. Подставляя вместо M его значение (w), находим

$$\tau_{zx} = - \frac{1}{t} \frac{dS}{dx} \frac{b-x}{b} - \frac{E}{t} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{h S_{z1}}{2}.$$

Два члена правой части этого уравнения представлены на рис. 157, б заштрихованными площадями соответственно треугольника и параболического сегмента. Сумма этих двух площадей, умноженная на t , дает полную поперечную силу в полке, которая равняется²⁾

$$Q = \frac{b}{2} \frac{dS}{dx} + E \frac{h b^3}{24} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}.$$

Тогда, подставляя из уравнения (v) значение S , получаем крутящий момент, уравновешиваемый касательными (поперечными) усилиями в полках, в следующем виде:

$$M_x^* = - Q h = - \frac{D h^2}{2} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4 J_z} \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (x)$$

Полный крутящий момент равняется

$$M_x = C \frac{d\varphi}{dx} - \frac{D h^2}{2} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4 J_z} \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (y)$$

¹⁾ $D = \frac{E t b^3}{12}$ означает, как и ранее (стр. 214), жесткость при изгибе полки в ее плоскости.

²⁾ Положительное направление для Q показано на рис. 157, с.

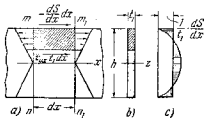
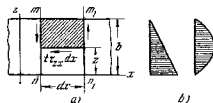


Рис. 156.



Следовательно, все заключения, полученные для двутавровой балки, можно применить для швеллера, если величину a^2 , определяемую выражением (g), заменить величиной

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C} \left(1 + \frac{t_1 h^2}{4J_z} \right).$$

Метод, примененный при изложении кручения симметричного швеллера (рис. 154), можно приложить также к более общему случаю несимметричного корытного сечения (рис. 158). Положение центра сдвига O для этой формы было определено ранее (см. т. I, стр. 204—206). Далее, поступая по-прежнему (см. выражения (1)), выразим уравнения изогнутых осей полки и стенки в зависимости от угла закручивания φ . Продольные усилия S_1 и S_2 в полках теперь определяются из того условия, что в местах сопряжения продольная деформация ϵ_x одинакова, как для стенки, так и для полки. Когда усилия S_1 и S_2 вычислим, то распределение касательных напряжений можно найти, как и для симметричного швеллера. Затем можно показать¹⁾, что касательное усилие в стенке обращается в нуль и что касательные усилия Q в двух полках

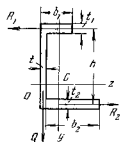


Рис. 158.

создают пару, уравновешиваемую частью M_k^* крутящего момента. Мы опять получим для полного крутящего момента уравнение, подобное уравнениям (229) и (y); а вообще можно установить, что в случае неравномерного кручения уравнение имеет следующий вид:

$$M_k = C \frac{d\varphi}{dx} - C_1 \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (230)$$

Постоянная C_1 , называемая жесткостью при короблении, должна быть определена в каждом частном случае так, как показано на предыдущих примерах.

Метод, изложенный выше для неравномерного кручения стержней открытого профиля, можно также применить в случае трубчатых стержней полигонального поперечного сечения²⁾, и мы опять найдем, что полный крутящий момент состоит из двух частей: 1) части, обусловленной чистым кручением, как было показано в п. 48, и 2) части, обусловленной изгибом плоских граней трубы. Логично ожидать, что

¹⁾ Вычисления даны в статье А. Ostenfeld'a, цит. на стр. 213.

²⁾ Эта задача была рассмотрена впервые Н. Reissner'ом, Z. Flugtech. u. Motolufschiffahrt, т. 17, стр. 384, 1926. См. также статью Th. v. Kármán'a и N. B. Christensen'a в J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 160, 1944 и статью P. Stüssi, Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., т. 11, стр. 375, 1951 и т. 12, стр. 239, 1952.

в случае трубчатых стержней вторая часть крутящего момента будет иметь весьма ограниченный характер в зацепленном поперечном сечении. Вычисление соответствующих напряжений по формуле для простой балки может оказаться неточным, так что желательнее произвести более тщательный анализ напряжений для этого поперечного сечения¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Консоль zетового сечения (рис. 159) закреплена одним концом и скручивается парой сил M_k , приложенной на другом конце. Найти угол закручивания и наибольший изгибающий момент в полках.

Решение. В этом случае центр сдвига совпадает с центром тяжести C поперечного сечения (см. т. I, стр. 206) и никакого изгиба в стенке не происходит. Усилия S идентичны для обеих полок; распределение касательных напряжений показано на рис. 159, в. Равнодействующая касательных усилий в стенке обращается в нуль, а равные и противоположные касательные усилия Q в полках будут равняться

$$Q = \pm \frac{Eb^3ht}{12} \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

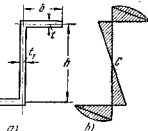


Рис. 159.

Крутящий момент, обусловленный действием усилий Q , равняется

$$M_k^* = -Qh = -Dh^2 \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

где D — жесткость при изгибе одной полки. Угол закручивания и наибольший изгибающий момент в полках вычисляются по формулам (h) и (1), в которых для этого случая

$$a^2 = \frac{Dh^2}{C} \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right).$$

2. Решить задачу 1, предполагая, что поперечное сечение такое, как показано на рис. 160.

Ответ. Касательные усилия в полках будут равняться

$$Q = \pm Dd \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

где

$$D = \frac{Et_1 b_1^3}{12}, \quad \frac{d}{h-d} = \frac{bt_1}{b_1 t_1}.$$

Крутящий момент от изгиба полки равняется

$$M_k^* = -D dh \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

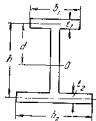


Рис. 160.

¹⁾ См. статью Th. von Kármán'a and Wei-Zang Chien'a, J. Aeronaut. Sci., т. 13, стр. 503, 1946.

Значение a , подставляемое в выражения (h) и (b), имеет вид

$$a^2 = \frac{D dh}{C}$$

3. Решить задачу 1 для поперечных сечений, показанных на рис. 161. *Ответ.* В обоих случаях центр сдвига O находится на пересечении полог. Вращение относительно этой точки не вызывает никакого изгиба

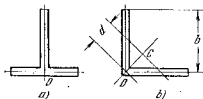


Рис. 161.

полог в их плоскостях, поэтому полный крутящий момент передается напряжениями от кручения и $M_k^0 = 0$.

50. Совместный изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля¹⁾

Рассмотрим общий случай тонкостенного стержня, находящегося под действием каких-либо поперечных нагрузок. Каждую силу можно заменить параллельной силой, проходящей через ось центров сдвига, и крутящим моментом. Таким образом, мы получим стержень, нагруженный по оси центров сдвига и подверженный действию крутящих моментов, приложенных в некоторых поперечных сечениях. Поперечные силы, приложенные к оси центров сдвига, вызывают только изгиб (см. гл. I, п. 52, стр. 206). При рассмотрении кручения мы можем воспользоваться результатами п. 49. Возьмем начало координат в конце стержня ($x=0$) и обозначим через M_k^0 крутящий момент на этом конце. Чтобы определить угол закручивания φ , воспользуемся уравнением (230). Разделив это уравнение на C_1 и введя обозначение

$$k^2 = \frac{C}{C_1},$$

получим

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_k}{C_1}, \quad (231)$$

где штрихи означают производные по x . Общее решение этого

уравнения будет

$$\varphi = \frac{M_k^0 x}{C} + A + A_1 \operatorname{sh} kx + A_2 \operatorname{ch} kx, \quad (232)$$

так как в этом случае $M_k = M_k^0$. Подобное уравнение можно написать для каждого участка стержня, взятого между двумя последовательными поперечными нагрузками. Необходимо лишь заменить M_k^0 значением крутящего момента в начале этого участка. Постоянные интегрирования должны быть тогда определены из условий непрерывности в точках приложения нагрузок.

Вычисления можно значительно упростить, если вместо постоянных интегрирования A , A_1 и A_2 мы вводим величины, определяющие условия на конце $x=0$ стержня¹⁾. Дифференцируя уравнение (232) и подставляя $x=0$, мы получаем

$$\varphi_0 = A + A_2, \quad \varphi_0' = \frac{M_k^0}{C} + kA_1, \quad \varphi_0'' = k^2 A_2,$$

где нуль указывает на то, что величины относятся к концу $x=0$ стержня. Решая эти уравнения относительно постоянных A , A_1 и A_2 и подставляя эти значения в уравнение (232), получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0' \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi_0'' (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^0}{C} (x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k}). \quad (233)$$

В этом выражении угол закручивания φ для какого-либо поперечного сечения на первом участке стержня выражен в зависимости от величин φ_0 , φ_0' и M_k^0 на конце $x=0$. Дифференцируя уравнение (233), находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0' \operatorname{ch} kx + \frac{\varphi_0''}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{M_k^0}{C} (1 - \operatorname{ch} kx), \\ \varphi'' &= k \varphi_0' \operatorname{sh} kx + \varphi_0'' \operatorname{ch} kx - \frac{k M_k^0}{C} \operatorname{sh} kx. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Уравнения (233) и (234) применимы в пределах между $x=0$ и $x=a$, где a определяет положение первой поперечной нагрузки.

При рассмотрении второго участка стержня ($x > a$) мы должны принять в расчет крутящий момент M_k^a , приложенный в поперечном сечении $x=a$. Выражение для угла закручивания во втором участке бруса теперь получится путем добавления угла закручивания, вызванного

¹⁾ См. статью автора, J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4 и 5, стр. 258, 1945; русский перевод: Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1953, стр. 502-561.

²⁾ Этот метод был разработан А. Н. Крыловым в связи с рассмотрением изгиба балок, лежащих на упругом основании. См. его книгу «Расчет балок на упругом основании», АН СССР, Ленинград, 1931.

M_k^0 к уравнению (233). Таким образом, мы получим для $x > a$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0' \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi_0'' (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{M_k^0}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right]. \quad (235)$$

Последний член правой части представляет собой угол, вызываемый M_k^0 . Он получается из последнего члена уравнения (233) путем подстановки M_k^0 вместо M_0^0 и $x - a$ вместо x , так как расстояние M_k^0 от рассматриваемого поперечного сечения равняется $x - a$.

Подобным образом мы можем поступить с третьим участком стержня и так далее до последнего участка. Выражения для φ во всех участках стержня содержат одни и те же постоянные $\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0''$ и M_k^0 . Все эти постоянные можно теперь определить из условий на двух концах стержня.

Чтобы пояснить метод, рассмотрим несколько простых примеров. Мы начнем со случая, в котором стержень скручивается крутящим моментом, приложенным на концах, и в то же самое время концы открыты так, что они могут вращаться, но коробление их совершенно исключено. Так как в процессе не приложены силы, то уравнение (233) можно применить по всей длине стержня. Предполагая, что конец $x=0$ неподвижен, и замечая, что коробление исключено, мы должны в уравнение (233) подставить $\varphi_0 = 0, \varphi_0' = 0$, что даст

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{k^2} \varphi_0'' (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right), \\ \varphi' &= \frac{1}{k} \varphi_0'' \operatorname{sh} kx + \frac{M_k^0}{C} (1 - \operatorname{ch} kx). \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

Так как коробление на другом конце ($x=l$) стержня также устранено, то мы имеем

$$\varphi_1' = \frac{1}{k} \varphi_0'' \operatorname{sh} kl + \frac{M_k^0}{C} (1 - \operatorname{ch} kl) = 0,$$

откуда

$$\varphi_0'' = -\frac{kM_k^0}{C} \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl}.$$

Подставляя это в первое из уравнений (236), получаем угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_k^0}{kC} \left[\frac{(\operatorname{ch} kl - 1)(\operatorname{ch} kx - 1)}{\operatorname{sh} kl} + kx - \operatorname{sh} kx \right].$$

Взяв $x=l$, мы получим поворот конца $x=l$ стержня

$$\varphi_1 = \frac{M_k^0 l}{C} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} kl/2}{kl/2} \right).$$

Второй член в скобках оценивает влияние конечного сопротивления короблению на величину угла закручивания.

В качестве второго примера рассмотрим случай, показанный на рис. 162. Стержень, открытый на концах, эксцентрично нагружен на расстоянии a от

левого конца. Обозначим через e расстояние груза от оси нейтральной стержня, мы сводим задачу к задаче на простой изгиб стержня нагрузкой P в сочетании с кручением, вызываемым крутящим моментом Pe . Предположим сначала, что концы стержня не могут поворачиваться относительно оси x , но могут свободно коробиться. В таком случае условия на концах будут $\varphi = \varphi' = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Для участка стержня от $x=0$ до $x=a$ мы возьмем уравнение (233). Подставив в это уравнение $\varphi_0 = \varphi_0' = 0$, получим

$$\varphi = \frac{1}{k} \varphi_0'' \operatorname{sh} kx + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{Pe}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right].$$

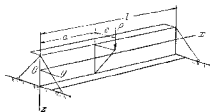


Рис. 162.

Для правого участка стержня ($x > a$) воспользуемся уравнением (235), которое при $\varphi_0 = \varphi_0' = 0$ и $M_k^0 = Pe$ дает

$$\varphi = \frac{1}{k} \varphi_0'' \operatorname{sh} kx + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{Pe}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right].$$

Дифференцируя, мы находим

$$\varphi' = k \varphi_0'' \operatorname{sh} kx - \frac{kM_k^0}{C} \operatorname{sh} kx - \frac{kPe}{C} \operatorname{sh} k(x-a).$$

Замечая, что на конце $x=l$ условия будут $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$, получаем следующие уравнения для вычисления постоянных φ_0'' и M_k^0 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0'' \operatorname{sh} kl + \frac{M_k^0}{C} (kl - \operatorname{sh} kl) &= -\frac{Pe}{C} [kl - ka - \operatorname{sh} k(l-a)], \\ \varphi_0'' \operatorname{sh} kl - \frac{M_k^0}{C} \operatorname{sh} kl &= \frac{Pe}{C} \operatorname{sh} k(l-a). \end{aligned} \right\}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$M_k^0 = -Pe \frac{l-a}{l},$$

$$\varphi_0'' = \frac{Pe}{C} \left[\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Подставляя эти значения в выражение для φ , мы получаем углы закручивания для обоих участков стержня.

Если концы стержня на рис. 162 зашпательны и не могут коробиться, то условия на концах будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l.$$

Подставляя $\varphi_0 = \varphi_0' = 0$ в уравнение (235), получаем при $x > a$

$$\varphi = \frac{1}{k^2} \varphi_0'' (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{Pe}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right].$$

Применяя это уравнение для конца $x=l$, получаем следующие уравнения для вычисления постоянных φ_0^* и M_k^* :

$$\varphi_0^* (\operatorname{ch} kl - 1) + \frac{kM_k^*}{C} (kl - \operatorname{sh} kl) = -\frac{kPe}{C} [kl - ka - \operatorname{sh} k(l-a)];$$

$$\varphi_0^* \operatorname{sh} kl + \frac{kM_k^*}{C} (1 - \operatorname{ch} kl) = -\frac{kPe}{C} [1 - \operatorname{ch} k(l-a)].$$

Из этих уравнений можно вычислить постоянные φ_0^* и M_k^* в каждом частном случае. Подставляя их в выражения для φ , мы опять находим полное решение задачи. Имея решение для одной сосредоточенной силы, как показано на рис. 162, мы можем найти решение для любого числа сосредоточенных сил, применяя метод наложения.

Случай распределенной нагрузки также решается без затруднения. В качестве примера рассмотрим опять стержень, показанный на рис. 162, и предположим, что вместо силы P имеем распределенную нагрузку постоянной интенсивности q , приложенную по линии, параллельной оси x на расстоянии e от оси центра сдвига. Тогда крутящим моментом в произвольном поперечном сечении будет

$$M_k = M_k^* + qex.$$

Подставляя это значение в уравнение (230) и решая по-прежнему, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0^* \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi_0^{**} (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^*}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Если оба конца стержня жестко защемлены, то условия на концах будут $\varphi = \varphi' = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Тогда, подставляя $\varphi_0 = \varphi_0^* = 0$ в выше приведенное выражение для φ , получаем

$$\varphi = \frac{1}{k^2} \varphi_0^{**} (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^*}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Применяя это уравнение для конца $x=l$ и замечая, что из условий симметрии $M_k^* = -qel/2$, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{k^2} \varphi_0^{**} (\operatorname{ch} kl - 1) - \frac{qel}{2C} \left(l - \frac{\operatorname{sh} kl}{k} \right) + \frac{qel^2}{2C} = 0,$$

откуда

$$\varphi_0^{**} = -\frac{qekl}{2C} \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl - 1}.$$

Подставляя это значение в выражение для φ , находим

$$\varphi = -\frac{qel}{2kC} \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl - 1} (\operatorname{ch} kx - 1) - \frac{qel}{2C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Это выражение можно упростить и привести к следующему виду:

$$\varphi = \frac{qel}{kC} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{kx}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \operatorname{sh} \frac{k(l-x)}{2} - \frac{kx(l-x)}{2l} \right].$$

Из этих примеров видно, что решение уравнения (230) можно легко получить в любом частном случае.

51. Крутильная форма потери устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля¹⁾

Известно, что тонкостенный стержень под действием равномерного осевого сжатия иногда может потерять устойчивость в круглой форме, в то время как его ось остается прямой. Рис. 163 показывает пример такого чистого выпучивания от кручения в случае стержня, имеющего четыре одинаковых полки. Волокно, совпадающее с осью, остается прямым при этом выпучивании, и момент M_x сжимающих сил, приложенных на конце, обращается в нуль для каждого поперечного сечения стержня. Чтобы определить крутящий момент, вызывающий кручение, указанное на рисунке, нужно рассмотреть перемещение полки при выпучивании.

Метод, который должен быть применен в последующем расчете, сначала применим на простом случае выпучивания стержня (рис. 164, а). Первоначально стержень является прямым и на него действует только центрально приложенная сила P . Предположим теперь, что сила P достигла своего критического значения, так что стержень имеет слегка изогнутую

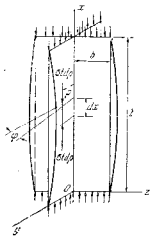


Рис. 163.

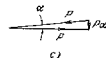
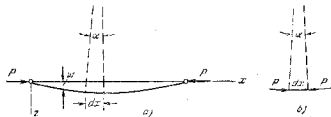


Рис. 164.

форму равновесия. Благодаря этому изгибу напряжения изгиба будут

¹⁾ См. статью автора, J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4 и 5, стр. 263, 1945.

накладываться на первоначально равномерно распределенные сжимающие напряжения. В то же время начальные напряжения будут действовать на слетка поперукые поперечные сечения, как показано на рис. 164, *b*. Каждый элемент изогнутого стержня между двумя смежными поперечными сечениями находится в равновесии, и мы можем считать, что напряжения изгиба, возникающие при выпучивании стержня, находятся в равновесии с первоначально сжимающими напряжениями, действующими на слетка поперукые поперечные сечения. Угол между двумя последовательными поперечными сечениями после изгиба (рис. 164, *b*) будет $\alpha = -\frac{d^2 w}{dx^2} dx$, где w — прогиб стержня в направлении z . Поэтому мы заключаем, что действие сжимающих сил P на поперукые поперечные сечения стержня эквивалентны действию на каждый элемент стержня поперечной нагрузки (рис. 164, *c*), равной $-P \frac{d^2 w}{dx^2} dx$. Отсюда ясно, что изогнутую ось стержня и соответствующие напряжения изгиба можно найти, предполагая, что стержень нагружен фиктивной нагрузкой интенсивности $-P d^2 w/dx^2$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси в этом случае будет

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = -P \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Из этого уравнения можно получить обычным путем известное критическое значение сжимающей силы $P_{кр}$.

Возвращаясь теперь к задаче о крутильной форме потери устойчивости, показанной на рис. 163, мы можем установить, что в критическом состоянии выпученная форма равновесия подлерживается продольными сжимающими напряжениями, действующими на поперукые поперечные сечения волокон. Предполагая, что толщина t полок мала, и рассматривая полок поперечного сечения $t dp$ на расстоянии p от оси, мы видим, что вследствие излучивания прогиба ее равновесие $w = \rho \varphi$. Взяв один элемент этой полойки между двумя последовательными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии dx одно от другого, и рассмотрев действие первоначального сжимающего усилия σdp на слетка поперукые поперечные сечения полойки (рис. 163), мы получим поперечную силу

$$-(\sigma t dp) \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -(\sigma t dp) \rho \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx.$$

Момент этой силы относительно оси x будет равняться

$$-\sigma \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx (t p^2 dp).$$

Суммируя эти моменты и распространяя суммирование на все поперечное сечение, мы получаем крутящий момент, действующий на эле-

мент выпученного при кручении стержня, заключенный между двумя последовательными поперечными сечениями. Пользуясь обозначением m_x для крутящего момента, приходящегося на единицу длины стержня, получаем

$$m_x = -4\sigma \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \int_0^b t p^2 dp = -\sigma \frac{d^2 \varphi}{dx^2} J_0, \quad (a)$$

где J_0 — полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня относительно центра сдвига, совпадающего в этом случае с центром тяжести площади поперечного сечения. Для того чтобы вывести теперь уравнение для выпученного стержня, воспользуемся уравнением (230). Дифференцируя это уравнение по x и замечая, что $m_x = -\frac{dM_x}{dx}$, находим

$$C_1 \varphi''' - C \varphi'' = m_x, \quad (237)$$

Подставляя вместо m_x его значение, даваемое уравнением (а), получаем

$$C_1 \varphi''' - (C - \sigma J_0) \varphi'' = 0. \quad (238)$$

Из этого уравнения теперь будет получено критическое значение сжимающего напряжения σ .

Для случая, показанного на рис. 163, средние линии всех полок пересекаются в поперечном сечении в одной точке, и следовательно, жесткость при короблении C_1 обращается в нуль; поэтому уравнение (238) получается в следующем виде:

$$(C - \sigma J_0) \varphi'' = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если допустить, что величина в скобках обращается в нуль, что дает

$$\sigma_{кр} = \frac{C}{J_0} = \frac{\frac{4}{3} b^2 G}{\frac{4}{3} t b^3} = G \frac{t^2}{b^2}. \quad (239)$$

Формула (239) указывает на то, что критическое значение сжимающего напряжения не зависит от длины стержня и от формы выпучивания, определенной углом φ . Такой результат получается потому, что при выводе уравнения (230) пренебрегалось тем, что бы то ни было сопротивлением полок изгибу в направлении, перпендикулярном плоскости полок. Для того чтобы такой изгиб принять в расчет, мы должны рассматривать каждую полок как равномерно сжатую пластинку, свободно открытую зретья краями и могущую совершенно свободно выпучиваться по четвертому краю. Такое более точное

исследование показывает, что критическое напряжение будет равняться¹⁾

$$\sigma_{кр} = \left(0,456 + \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{\pi^2}{6(1-\mu)} \frac{GI^2}{bc}.$$

Второй член в скобках дает влияние длины стержня на критическое напряжение. Для стержней значительной длины этим членом можно пренебречь. Тогда мы получим

$$\sigma_{кр} = \frac{0,75}{1-\mu} \frac{GI^2}{b^2}.$$

При $\mu = 0,3$ это значение больше значения, вычисленного выше (уравнение (239)), приблизительно на 7%.

Выражение (238) сохраняет свою силу также в случаях, когда C_1 не обращается в нуль, оно справедливо и для несимметричных поперечных сечений при условии, что ось стержня остается прямой при вынуждении. Это требует, как мы увидим в следующем параграфе, чтобы ось центров сдвига и ось центров тяжести совпадали, как в случае ветвистого сечения. Во всех таких случаях критическое сжимающее напряжение получается из решения уравнения (238). Вводя обозначение

$$k^2 = \frac{aJ_0 \cdot C}{C_1}, \quad (b)$$

мы находим, что этим решением будет

$$\varphi = A \sin kx + A_1 \cos kx + A_2 x + A_3. \quad (240)$$

Если концы сжатого стержня не могут поворачиваться, но могут свободно коробиться, мы имеем следующие условия на концах:

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l,$$

откуда следует

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \text{ и } kl = n\pi.$$

Подставляя это значение k в выражение (b), получаем

$$aJ_0 - C = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_1.$$

Наименьшее значение n , удовлетворяющее этому условию, равняется²⁾

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_1 \right). \quad (241)$$

¹⁾ Это решение было получено автором, см. Известия Киевского политехнического института, 1907 и Z. Math. u. Phys., т. 38, стр. 337, 1910.

²⁾ Это решение было получено Н. Вагнером, 25th Anniversary Publication, Technische Hochschule, Danzig, стр. 329, 1929.

Если концы стержня заделаны и не могут коробиться, условия на концах будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = l.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, мы должны принять

$$A_1 = -A_2, \quad A = A_2 = 0 \text{ и } kl = 2n\pi.$$

Наименьшее критическое сжимающее напряжение в этом случае будет

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{4\pi^2}{l^2} C_1 \right).$$

52. Потеря устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля от одновременного действия изгиба и кручения¹⁾

Рассмотрим теперь общий случай потери устойчивости, когда под действием центрального сжатия имеет место не только кручение, но также и изгиб оси сжатого стержня. Предположим, что y и z являются главными центральными осями поперечного сечения стержня до вынуждения (рис. 165), и y_0, z_0 — координаты центра сдвига O . Перемещения оси центров сдвига в направлениях y и z при вынуждении обозначим через v и w соответственно, а через φ — угол поворота произвольного поперечного сечения относительно оси центров сдвига. На рис. 165 точки C' и O' представляют отклоненные положения центра тяжести C и центра сдвига O . Тогда перемещения центральной оси при вынуждении будут равны

$$v + z_0 \varphi \text{ и } w - y_0 \varphi.$$

Предполагая, что сила P действует на концах стержня по оси x , в случае свободно опертого стержня находим, что изгибающие моменты относительно главных осей в произвольном поперечном сечении будут

$$M_y = P(w - y_0 \varphi), \quad M_z = -P(v + z_0 \varphi).$$

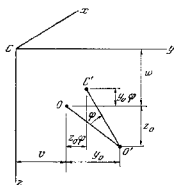


Рис. 165.

¹⁾ Продольный изгиб при кручении был рассмотрен Н. Вагнером, цит. на стр. 230. См. также Н. Wagner and Freischner, Luftfahrtforsch., т. 11, стр. 174, 1934; R. Каррис, там же, т. 14, стр. 444, 1937. Английский перевод последней статьи дан в Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 851, 1938. См. также статью автора в J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4, 5, стр. 201, 1945. Русский перевод, Устойчивость упругих систем, стр. 302—361,

Дифференциальными уравнениями упругой кривой для оси центров сдвига будут

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{d^2 v}{dx^2} &= -P(v + z_0 \varphi), \\ EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= -P(w - y_0 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

В дополнение к изгибу стержня, описанному уравнениями (242), будут иметь место деформации кручения. Чтобы написать уравнение для угла закручивания φ , поступим так, как в п. 51. Возьмем поперечное сечения t и ds ¹⁾, определяемую координатами y и z в плоскости поперечного сечения. Составляющие ее смещения в направлениях y и z при выкручивании будут

$$v + (z_0 - z) \varphi \quad \text{и} \quad w - (y_0 - y) \varphi.$$

Взяв вторые производные этих выражений по x и рассмотрим элемент dx волокна, найдем по-прежнему, что сжимающие усилия σds , действующие на слегка повернутые концы элемента dx , дают следующие усилия в направлениях y и z :

$$\begin{aligned} -\sigma t ds \frac{d^2}{dx^2} [v + (z_0 - z) \varphi] dx, \\ -\sigma t ds \frac{d^2}{dx^2} [w - (y_0 - y) \varphi] dx. \end{aligned}$$

Опять обозначая черточками производные по x и взяв моменты указанных выше усилий относительно оси центров сдвига, получим (как долю одной полоски) следующий крутящий момент, приходящийся на единицу длины стержня:

$$dm_x = -\sigma t ds [v'' + (z_0 - z) \varphi''] (z_0 - z) + \\ + \sigma t ds [w'' - (y_0 - y) \varphi''] (y_0 - y)$$

Интегрируя по всей площади поперечного сечения и замечая, что

$$\begin{aligned} \sigma \int_F t ds &= P, \quad \int_F z t ds = 0, \quad \int_F y t ds = 0, \\ \int_F z^2 t ds &= J_z, \quad \int_F y^2 t ds = J_y. \end{aligned}$$

1955; J. N. Goodier, Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bull., № 27, 1941 и № 28, 1942; и книгу В. Э. Власова «Тонкостенные упругие стержни», Москва, 1940. Относительно экспериментов на выкручивание при кручении см. статью A. S. Niles, Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 733, 1939.

¹⁾ Величина ds есть элемент длины по средней линии поперечного сечения.

получаем

$$m_x = (y_0 w'' - z_0 v'') P - r_0^2 P \varphi'', \quad (a)$$

где

$$z_0^2 = y_0^2 + z_0^2 + \frac{J_y}{F} \frac{J_z}{F}.$$

Здесь r_0 — полярный радиус инерции площади поперечного сечения относительно центра сдвига. Подставляя вычисленное значение m_x (уравнение (a)) в уравнение (237), получаем

$$C_1 \varphi'''' - (C - r_0^2 P) \varphi'' - P(y_0 w'' - z_0 v'') = 0. \quad (243)$$

Это уравнение совместно с уравнениями (242) используем теперь для определения критического значения сжимающей силы P ¹⁾.

Видно, что угол поворота φ входит во все три уравнения, указывая на то, что в общем случае выкручивание при кручении сопровождается изгибом оси, и мы имеем сочетание крутильной и изгибной форм потери устойчивости. В частном случае, когда $y_0 = z_0 = 0$, т. е. когда ось центров сдвига совпадает с центральной осью, каждое из уравнений (242) и (243) содержит только одну неизвестную и может быть решено отдельно. Тогда уравнения (242) дают два значения критической нагрузки, соответствующие потере устойчивости в двух главных плоскостях, как дастся теорией Эйлера, а уравнение (243) дает критическую нагрузку для чисто крутильного выкручивания, уже рассмотренного в п. 51. Из этих трех значений критической нагрузки естественно принять в расчет для практических приложений наименьшее значение.

Возвращаясь к общему случаю, предположим, что концы сжатого стержня не могут поворачиваться относительно оси x (рис. 163), но они свободно могут корчиться и поворачиваться относительно осей y и z (свободно опертые концы). В таком случае условия на концах будут

$$\left. \begin{aligned} v = w = \varphi = 0, \\ v'' = w'' = \varphi'' = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x=0 \quad \text{и} \quad x=l.$$

Все эти условия будут удовлетворяться, если взять решения уравнений (242) и (243) в виде

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w = A_2 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (244)$$

¹⁾ Система уравнений, эквивалентная уравнениям (242) и (243), была впервые получена Robertom Карр и сом; см. Jahrb. deut. Luftfahrtforsch., 1937 и Luftfahrtforsch., т. 14, стр. 444, 1938.

Подставляя эти выражения в уравнения (242) и (243), получаем уравнения для вычисления постоянных A_1 , A_2 и A_3

$$\left. \begin{aligned} (P - EJ_z \frac{\pi^2}{l^2}) A_1 - Pz_0 A_3 &= 0, \\ (P - EJ_y \frac{\pi^2}{l^2}) A_2 - Py_0 A_3 &= 0, \\ Pz_0 A_1 - Py_0 A_2 + \left(-C_1 \frac{\pi^2}{l^2} - C + r_0^2 P \right) A_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Эти уравнения удовлетворяются, если взять $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, что соответствует прямолинейной форме равновесия сжатого стержня. Чтобы иметь выпученную форму равновесия, уравнения (245) должны дать для A_1 , A_2 и A_3 решения, отличные от нуля, что возможно лишь в том случае, если детерминант уравнений (245) обращается в нуль. Для простоты записи введем здесь обозначения

$$P_1 = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}, \quad P_2 = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad P_3 = \frac{1}{r_0^2} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2} \right), \quad (246)$$

в которых P_1 и P_2 — Эйлеровы нагрузки для продольного изгиба в двух главных плоскостях, а P_3 означает критическую нагрузку для чисто крутильного выпучивания, определяемую формулой (241). Тогда приравняв нулю детерминант уравнений (245), получим

$$\begin{vmatrix} P - P_1 & 0 & z_0 P \\ 0 & P - P_2 & -y_0 P \\ z_0 P & -y_0 P & r_0^2 (P - P_3) \end{vmatrix} = 0,$$

что после раскрытия дает следующее кубическое уравнение для вычисления критических значений силы P :

$$\begin{aligned} (-r_0^2 + y_0^2 + z_0^2) P^3 + [(P_1 - P_2 + P_3) r_0^2 - y_0^2 P_1 - z_0^2 P_2] P^2 - \\ - r_0^2 (P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_1 P_3) P + P_1 P_2 P_3 r_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (247)$$

Это уравнение позволяет сделать одно важное заключение. Прелюбляя, что $P_1 < P_3$, т. е. что меньшая Эйлерова нагрузка соответствует изгибу в плоскости xz , исследуем знак левой части уравнения (247) для различных значений P . Если P весьма мало, то мы можем пренебречь всеми членами, содержащими P , и левая часть уравнения сводится к $P_1 P_2 P_3 r_0^2$, которое положительно. Если P приближает значение P_1 , то левая часть уравнения (247) сводится к $z_0^2 P_2^2 (P_1 - P_3)$, которое отрицательно, так как $P_1 < P_3$. Это указывает на то, что уравнение (247) имеет корень меньший чем P_1 . Поэтому мы заключаем, что когда рассматривается возможность кручения при выпучивании, мы всегда получаем критическую нагрузку меньшую Эйлерову.

Чтобы найти критическую нагрузку в любом частном случае, мы вычисляем, используя обозначения (246), численные значения коэффициентов в уравнении (247) и решаем это кубическое уравнение¹⁾. Таким образом, мы получаем три значения для P , из которых будет принято для практических приложений наименьшее. Подставляя критические значения в уравнение (245), мы находим для каждой возможной критической формы отношения $A_1 : A_3$ и $A_2 : A_3$. Эти отношения, устанавливающие зависимость между вращением и переносом поперечных сечений, определяют для каждой критической формы положение оси центров сдвига и вращение вокруг этой оси.

Если стержень имеет весьма тонкие стенки и малую длину l , P_3 может получиться меньшим, чем P_1 и P_2 . В таком случае наименьший корень уравнения (247) приближается к значению P_3 . Подставляя это значение в уравнение (245), находим, что A_1 и A_2 малы по сравнению с перемещениями от вращения, что указывает на то, что форма потери устойчивости приближается к чисто крутильной, рассмотренной в п. 51. В случае толстой стенки и большой длины l обычно P_3 больше, чем P_1 и P_2 , и наименьший корень уравнения (247) приближается к значению P_1 . Влияние кручения на критическую нагрузку мало в этом случае, и обычная формула для расчета колонн дает удовлетворительные результаты.

Если поперечное сечение имеет ось симметрии, вычисление $P_{кр}$ упрощается. Пусть ось y будет осью симметрии; тогда $z_0 = 0$ и член, содержащий φ в первом из уравнений (242), обращается в нуль. Выпучивание стержня в плоскости симметрии не зависит от кручения, и соответствующая критическая нагрузка дается формулой Эйлера. Мы должны рассмотреть лишь изгиб, перпендикулярный плоскости симметрии, и кручение. Соответствующие уравнения будут

$$\begin{aligned} EJ_y \varphi'' = -P(\varphi - y_0 \varphi), \\ C_1 \varphi''' - (C - r_0^2 P) \varphi' = P y_0 \varphi''. \end{aligned}$$

Поступая по-прежнему и пользуясь уравнением (244), получаем для вычисления критической нагрузки

$$\begin{vmatrix} P - P_1 & -y_0 P \\ -y_0 P & r_0^2 (P - P_3) \end{vmatrix} = 0,$$

что дает

$$r_0^2 (P - P_3) (P - P_1) - y_0^2 P^2 = 0. \quad (248)$$

Это квадратное уравнение дает два решения. Вместе с Эйлеровой нагрузкой для продольного изгиба в плоскости симметрии они определяют три критических значения для P , из которых для практических приложений должно быть принято наименьшее. Рассматривая левую

¹⁾ Это решение можно значительно упростить при помощи номограммы, показанной в статье Каппа, цит. на стр. 233.

часть уравнения (248), мы видим, что для осей малых значений P эта часть сводится к значению $r_0^2 P_2 P_3$, которое является положительным. Мы видим также, что она является отрицательной для $P = P_2$ и $P = P_3$, так как обращается в $-y_0^2 P^2$. Она отрицательна также для всех значений P между $P = P_2$ и $P = P_3$, так как первый член становится отрицательным, а второй — всегда отрицателен. Из этих рассуждений мы заключаем, что один корень уравнения (248) меньше чем P_2 или P_3 , в то время как другой — больше любого из них. Меньший из этих корней, или эйлерова нагрузка, для продольного изгиба в плоскости симметрии дает требуемую критическую нагрузку.

Все приведенные выводы основываются на уравнениях (244). Не осложняя вопроса, мы можем принять решение в более общем виде и предположить

$$v = A_1 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad w = A_2 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (249)$$

что соответствует допущению, что при потере устойчивости стержень разделится на n полуколеб. Наши предыдущие заключения будут также справедливы и в этом случае; мы должны только подставить в выражения (246) значения $n^2 \pi^2 / l^2$ вместо π^2 / l^2 . Соответствующие критические значения нагрузки, естественно, будут большими, чем получаемые при вычислении в одну полуколебу, и будут представлять практический интерес лишь в том случае, если стержень имеет промежуточные равноотстоящие боковые опоры.

Если концы стержня зашпанды, то условия на концах будут

$$\left. \begin{aligned} v = w = \varphi = 0, \\ v' = w' = \varphi' = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Так как при выпучивании появятся моменты на концах, то мы будем иметь вместо уравнений (242) следующие:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -P(v + z_0 \varphi) + EJ_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{x=0} \\ EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -P(w - y_0 \varphi) + EJ_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Эти уравнения совместно с уравнением (243)¹⁾ определяют формы выпучивания стержня и соответствующие критические нагрузки. Все эти уравнения и условия на концах будут удовлетворены, если принять

$$\left. \begin{aligned} v = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad w = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \\ \varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

¹⁾ Уравнение (243) было выведено из рассмотрения элемента стержня между двумя смежными поперечными сечениями и не учитывает влияния изменения условий на концах.

Подставляя эти выражения в уравнения (243) и (250), получим то же уравнение (247) для вычисления критических нагрузок; необходимо лишь в обозначениях (246) воспользоваться величиной $4\pi^2/l^2$ вместо π^2/l^2 .

53. Продольные нормальные напряжения в скручиваемых стержнях

При рассмотрении кручения круглых валов (т. I, стр. 238) предположилось, что расстояние между любыми двумя поперечными сечениями вала при кручении остается неизменным. Теперь будет показано, что это допущение весьма точно для малых деформаций, как это наблюдается в стальных валах. Но для таких материалов, как каучук, непластичная деформация сдвига при кручении может быть значительной. Тогда изменение расстояний между поперечными сечениями вала при кручении нужно принять во внимание, если мы желаем найти точные значения напряжений. Также заключение справедливо также для стальных скручиваемых стержней узкого прямоугольного поперечного сечения или тонкостенных поперечных сечений, какие показаны на рис. 154.

Начнем рассмотрение со случая сплошного круглого вала и предположим сначала, что расстояние между двумя последовательными поперечными сечениями (рис. 166) остается неизменным при кручении. Если γ — деформация сдвига на поверхности вала, то удлинение продольного волокна ac получится из треугольника ace , в следующем виде:

$$ac = \frac{ac_1}{\cos \gamma} = ac_1 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right).$$

Выражая γ через угол закручивания на единицу длины, получим

$$ac = ac_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta d}{2} \right)^2 \right],$$

относительное же удлинение волокна ac будет

$$\epsilon_{\max} = \frac{ac - ac_1}{ac_1} = \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{1}{8} \delta^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}. \quad (a)$$

Соответствующее растягивающее напряжение равняется

$$\sigma_{\max} = \epsilon_{\max} \cdot E = \frac{E}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}.$$

Для любого другого волокна, находящегося на расстоянии r от оси вала, относительный сдвиг меньше γ в отношении $r : d/2$, и растягивающее напряжение равно

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{2r}{d} \right)^2 = E \frac{2r^2}{d^2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}. \quad (b)$$

Предположение, что расстояние между поперечными сечениями остается неизменным при кручении, приводит нас, следовательно, к заключению, что к концам должна быть приложена продольная сила, вызывающая растягивающие напряжения (уравнение (b)), чтобы сохранить длину неизменной. Если такая сила не приложена, то скручивание при чистом кручении будет

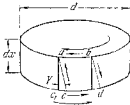


Рис. 166.

сопровождаться укорочением вала. Пусть ϵ_0 будет соответствующее относительное укорочение. Тогда вместо формулы (b) получим

$$\sigma = \frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} - \epsilon_0 E. \quad (c)$$

Величина ϵ_0 определится из того условия, что продольная сила, соответствующая распределению напряжений по уравнению (c), должна быть равна нулю. Разделив поперечное сечение на элементарные кольца и просуммировав усилия, соответствующие напряжениям (c), получим¹⁾

$$\int_0^{d/2} 2\pi r \sigma dr = 2\pi \int_0^{d/2} \left(\frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} - \epsilon_0 E \right) r dr = \frac{\pi}{4} \frac{d^2 E}{4G^2} (\tau_{\max}^2 - \epsilon_0 G) = 0,$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{\tau_{\max}^2}{4G^2},$$

и распределение напряжений на основании уравнения (c) получится в виде

$$\sigma = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right). \quad (232)$$

Наибольшее напряжение имеет место на наружной поверхности, где $r = d/2$, и мы получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (233)$$

В центре поперечного сечения мы получаем сжимающее напряжение той же величины.

Интересно отметить, что напряжение σ пропорционально τ_{\max}^2 ; следовательно, значение этого напряжения растет с ростом τ_{\max} , т. е. с увеличением угла закручивания. Для такого материала, как сталь, τ_{\max} всегда очень мало по сравнению с G , и величина σ_{\max} поэтому мала по сравнению с τ_{\max} и ею можно пренебречь. Но для материала, подобного каучуку, τ_{\max} может быть того же порядка, что и G ; следовательно, σ_{\max} уже не будет мало по сравнению с τ_{\max} и должно быть принято в расчет.

Первое исследование осевой деформации от кручения круглого вала было сделано Томасом Юнгом²⁾. Он показал, что благодаря растяжению наклонных волокон, как, например, волокно *ac* на рис. 166, будет наблюдаться дополнительное сопротивление вала кручению, пропорциональное b^2 .

Если вместо круглого поперечного сечения мы имеем узкое прямоугольное сечение, то можно показать³⁾, что даже для таких материалов, как сталь, напряжение σ может получиться того же порядка величины, что τ_{\max} . Если длинная сторона b поперечного сечения велика по сравнению с корот-

кой стороной c , то наибольшее удлинение наиболее удаленного волокна вследствие только кручения получается из уравнения (a) путем подстановки b вместо d :

$$\epsilon_{\max} = \frac{b^2}{8} \theta^2.$$

Для любого волокна, находящегося на расстоянии y от оси, удлинение меньше чем ϵ_{\max} в отношении $(2y/b)^2$. Складывая это удлинение с продольным относительным укорочением ϵ_0 , получаем

$$\epsilon = \frac{b^2}{8} \theta^2 \left(\frac{2y}{b} \right)^2 - \epsilon_0 = \frac{\theta^2 y^2}{2} - \epsilon_0.$$

Соответствующее растягивающее напряжение будет равняться

$$\sigma = E \left(\frac{\theta^2 y^2}{2} - \epsilon_0 \right). \quad (d)$$

Постоянная ϵ_0 определяется по-прежнему из того условия, что растягивающая продольная сила равна нулю; следовательно,

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \sigma dy = cE \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{\theta^2}{2} y^2 - \epsilon_0 \right) dy = cE \left(\frac{\theta^2}{2} \frac{b^3}{12} - \epsilon_0 b \right) = 0,$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12},$$

и мы получаем из выражения (d)

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right). \quad (e)$$

Наибольшее растягивающее напряжение для наиболее удаленного волокна ($y = b/2$) равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{E\theta^2 b^2}{12}. \quad (f)$$

Наибольшее сжимающее напряжение в центре ($y = 0$) равно

$$\sigma_{\min} = -\frac{E\theta^2 b^2}{24}. \quad (g)$$

Чтобы сравнить эти продольные напряжения с τ_{\max} , можно воспользоваться формулами (221) и (222). Для узкого прямоугольного сечения из них мы получаем

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{cG}. \quad (h)$$

Подставляя это значение в формулы (f) и (g), находим

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2 b^2}{12G^2 c^2}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{E\tau_{\max}^2 b^2}{24G^2 c^2}. \quad (254)$$

Видно, что когда b/c велико, напряжения σ_{\max} и σ_{\min} могут быть не малы по сравнению с τ_{\max} . Распределение напряжений (см. уравнение (e))

¹⁾ Предполагается, что косинус углов между волокнами и осью стержня можно принять равным единице.

²⁾ См. Thomas Young, A Course of Lectures on Natural Philosophy, etc., London, 1807.

³⁾ См. статью Вискейу, Phil. Mag., стр. 778, 1914; см. также С. Вебст, инж. на стр. 213, и также его статью в Festschrift zum Geburtstage August Föppl, Berlin, 1924.

показано ⁴⁾ на рис. 167. Эти напряжения имеют направление продольных волокон скрученной полоски и направлены в одну полосу под углом θ . Их проекция на плоскость, перпендикулярную оси стержня, будут

$$\sigma \cdot \theta y = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^2}{12} \right). \quad (f)$$

Составляющая (f) напряжения σ для элемента cdy поперечного сечения дает момент относительно оси стержня, равный

$$\frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^2}{12} \right) cy dy.$$

Следовательно, равнодействующий крутящий момент этих напряжений равенся

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^2}{12} \right) cy dy = \frac{Ecb^3}{360} \theta^3.$$

Складывая этот крутящий момент с крутящим моментом от касательных напряжений (формула (221), стр. 201), получаем следующее выражение для полного крутящего момента:

$$M_k = \frac{1}{3} bc^3 G \theta + \frac{1}{360} E c b^3 \theta^3 = \frac{1}{3} bc^3 G \theta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^3}{c^2} \theta^2 \right). \quad (255)$$

Можно видеть, что в случае узкого, прямоугольного поперечного сечения и сравнительно больших углов закручивания напряжение σ может поглощать значительную часть крутящего момента, так как эта часть, представленная вторым членом в уравнении (255), пропорциональна θ^3 , а во время как часть момента от касательных напряжений σ пропорциональна θ . Когда величина крутящего момента дана, соответствующий угол закручивания можно найти из уравнения (255). Тогда наибольшее касательное напряжение τ_{\max} определяется по формуле (f), а τ_{\max} и τ_{\min} — из формулы (254).

В качестве примера возьмем стержень узкого прямоугольного поперечного сечения со следующими размерами: $b = 10$ см, $c = 0,125$ см, $E/G = 2,6$, $G = 7,7 \cdot 10^6$ кг/см² и $M_k = 1,3bc^3 \cdot 1000 = 52$ кг·см. Если нормальными напряжениями σ пренебречь, то формула (222) дает $\tau_{\max} = 1000$ кг/см², а (221) —

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{cG} = 0,0104 \text{ см}^{-1}.$$

Принимая во внимание продольные напряжения, мы должны воспользоваться уравнением (255). Из него после деления на $1,3 bc^3 G$ получим

$$0,0104 = \theta (1 + 13870 \theta^2),$$

откуда $\theta = 0,00636 \text{ см}^{-1}$. Тогда из формул (f) и (254) имеем

$$\tau_{\max} = cG\theta = 620 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}}{12G^2} \frac{b^2}{c^2} = 700 \text{ кг/см}^2.$$

⁴⁾ Это распределение напряжений имеет место на некотором расстоянии от концов стержня. Вблизи концов имеется более сложное распределение напряжений, чем данное уравнением (f). Оно таково, что исключает совершенно нормальные напряжения на концах. Такой род распределения напряжений рассмотрен в книге: Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 167, 1951; в русском переводе, стр. 304, 1937.

Можно видеть, что при большом угле закручивания тонкой металлической полоски, как в этом примере, нормальные напряжения σ будут того же порядка, что и касательные напряжения τ , и ими нельзя пренебречь при вычислении угла закручивания. Из приведенного обсуждения можно также заключить, что равномерное продольное растяжение будет иметь известное влияние на угол закручивания тонкой прямоугольной полоски. Предположим, например, что равномерное продольное растягивающее напряжение σ_0 приложено к полоске, которую только что мы рассматривали. В таком случае уравнение для вычисления σ_0 будет

$$cE \left(\frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12} - \tau_0 b \right) = \sigma_0 bc,$$

и мы получаем

$$\sigma_0 = \frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12} - \frac{\tau_0}{E}.$$

Тогда выражение для продольного напряжения получится в таком виде:

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right) + \sigma_0.$$

а соответствующий крутящий момент будет

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \sigma y cy dy = \frac{Ecb^3}{360} \theta^3 + \frac{\sigma_0 b^2 c}{12}.$$

Тогда вместо уравнения (255) для полного крутящего момента получим

$$M_k = \frac{1}{3} bc^3 G \theta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^3}{c^2} \theta^2 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{G} \frac{b^2}{c^2} \right). \quad (256)$$

Видно, что когда b/c — большое число, т. е. в случае тонкой полоски, растягивающее напряжение может значительно уменьшить угол закручивания θ .

54. Цилиндрическая пружина с большим шагом витка

В предыдущем изложении задачи о винтовых пружинах (т. I, стр. 216) предполагалось, что угол α между витками и плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, был весьма мал. Пренебрегая величиной угла, мы получили, что деформация сводится лишь к кручению проволоки. В пружинах с большим шагом витка угол α уже не является малым, и деформация, вызванная осевыми грузами P , состоит из деформаций кручения и изгиба (рис. 168). В произвольной точке A касательная к витковой осевой линии пружины не перпендикулярна силе P , и поэтому эта сила вызывает в поперечном сечении A изгибающий момент относительно оси l , и крутящий момент. Силу P разложим на две составляющие: $P \cos \alpha$, перпендикулярную к касательной в точке A , и $P \sin \alpha$, параллельную касательной в точке A . В поперечном сечении A составляющая $P \cos \alpha$ вызывает крутящий момент, равный

$$M_k = PR \cos \alpha, \quad (a)$$

где R — радиус витковой линии, составляющей $P \sin \alpha$ вызывает изгибающий момент

$$M = PR \sin \alpha. \quad (b)$$

Максимальное главное напряжение (см. т. I, стр. 282) равно

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \left(M + \sqrt{M^2 + M_k^2} \right) = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha), \quad (257)$$

где d — диаметр проволоки. Максимальным касательным напряжением является ¹⁾

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_k^2} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad (258)$$

Рассмотрим теперь деформацию пружины в предположении, что она закреплена верхним концом и нагружена осевой нагрузкой в нижнем конце. Элемент ds между двумя смежными поперечными сечениями в точке A закручивается крутящим моментом M_k на угол, равный

$$d\varphi = \frac{PR \cos \alpha}{GJ_p} ds. \quad (с)$$

Как результат этого кручения нижняя часть пружины поворачивается вокруг касательной, проведенной у точки A , на угол $d\varphi$. Этот малый поворот представлен на рис. 168 вектором \mathbf{n} , отложенным по касательной. Положительное направление вектора таково, что между направлением вектора и направлением вращения существует та же зависимость, что и между перемещением и вращением винта с правой нарезкой. Малый поворот \mathbf{n} может быть разложен на две составляющие: 1) поворот $\mathbf{n} \cos \alpha$ вокруг горизонтальной оси и 2) поворот $\mathbf{n} \sin \alpha$ вокруг вертикальной оси. Последний не вызывает никакого понижения конца пружины и поэтому здесь не рассматривается. Снижение конца B вследствие поворота на $\mathbf{n} \cos \alpha$ оценивается так же, как и для пружины с малым шагом витка. В результате этого точка B перемещается в B_1 (рис. 168), и мы имеем $\overline{BB_1} = \overline{AB} n \cos \alpha$. Вертикальная составляющая этого перемещения равна

$$\overline{BB_2} = \overline{BB_1} \frac{R}{AB} = Rn \cos \alpha. \quad (д)$$

Полное опускание конца B вследствие кручения равно сумме элементарных снижений, определенных выражением (д) или

$$b_2 = \int_B^C Rn \cos \alpha, \quad (е)$$

где суммирование принято по всей длине пружины от нижнего конца B до верхнего закрепленного конца C .

¹⁾ Если диаметр d проволоки не очень мал по сравнению с диаметром $2R$ витковой линии, то это значение можно умножить на поправочный коэффициент, который при $\alpha < 20^\circ$ можно принять таким же, как для пружины с малым шагом витка (т. 1, стр. 247). Дальнейшее изложение этого вопроса дано О. Сёбнером, Z. Ver. deut. Ing., т. 76, стр. 269, 1932. См. также Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 391, 1951.

Опускание вследствие изгиба можно вычислить таким же способом. Угловое перемещение благодаря изгибу элемента ds моментом M (выражение (b)) является

$$d\varphi_1 = \frac{PR \sin \alpha}{EJ} ds. \quad (f)$$

Соответствующее вращение нижней части пружины показано на рис. 168 вектором \mathbf{n}_1 . Таким же образом, как и выше, можно показать, что только его горизонтальная составляющая $n_1 \sin \alpha$ вызывает вертикальное перемещение конца B и что величина этого перемещения равна

$$b_2 = \int_B^C Rn_1 \sin \alpha. \quad (г)$$

Складывая выражения (е) и (г), получаем полное опускание конца B

$$b = b_1 + b_2 = R \int_B^C (n \cos \alpha + n_1 \sin \alpha).$$

Подставляя выражение (с) вместо n и выражение (f) вместо n_1 , получаем

$$b = PR^2 \int_B^C \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right) ds$$

или, замечая, что выражение в скобках постоянно, и обозначая длину проволоки пружины через s , имеем

$$b = PR^2 s \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (259)$$

Если диаметр d проволоки не мал по сравнению с $2R$, то жесткость при кручении GJ_p в уравнении (259) должна быть умножена на поправочный коэффициент

$$\beta = 1 + \frac{3 \left(\frac{d}{2R} \right)^2}{16 \left[1 - \left(\frac{d}{2R} \right)^2 \right]}.$$

Этот же коэффициент можно использовать для пружины с квадратным поперечным сечением ¹⁾.

Уравнения (257), (258) и (259) дают полное решение задачи о витковой пружине с большим шагом витка, подверженной действию осевой силы ²⁾.

Растяжение пружины сопровождается поворотом конца B относительно вертикальной оси витковой линии. Для того чтобы определить этот поворот, рассмотрим олеат деформацию элемента ds на рис. 168, а. Благодаря кручению этого элемента будет происходить вращение нижней части пружины на угол ³⁾

$$n \sin \alpha = \frac{M_k ds}{GJ_p} \sin \alpha.$$

¹⁾ О. Сёбнер, цит. на стр. 242.

²⁾ Теория витковых пружин была разработана Сен-Венаном; см. Compt. rend., т. 17, стр. 1020, 1843. Ряд частных случаев был рассмотрен Thompson and Taiton, Nat. Phil., ч. 2, стр. 139; I. Perry, Applied. Mechanics, New York, стр. 613, 1907; G. W. Shearer, Engineering, т. 93, стр. 206, 1912.

³⁾ Предполагается круговое поперечное сечение проволоки.

Изгиб элемента вызывает угловое перемещение n_1 (рис. 168, а), и результирующий поворот нижней части пружины относительно вертикальной оси будет

$$-n_1 \cos \alpha = -\frac{M ds}{EJ} \cos \alpha.$$

Следовательно, полный поворот вокруг оси винтовой линии нижней части пружины вследствие деформации элемента ds будет

$$ds \left(\frac{M_k \sin \alpha}{GJ_p} - \frac{M \cos \alpha}{EJ} \right). \quad (b)$$

Сумма этих элементарных поворотов равняется полному углу вращения φ конца B относительно закрепленного конца C пружины:

$$\varphi = s \left(\frac{M_k \sin \alpha}{GJ_p} - \frac{M \cos \alpha}{EJ} \right) = sPR \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ} \right), \quad (260)$$

где s есть полная длина проволоки. В случае других форм поперечного сечения проволоки в формулу (260) нужно подставить соответствующее значение жесткости при кручении C вместо GJ_p .

Осевое кручение. Пусть вектор \vec{AD} представляет крутящий момент M_z , приложенный на конце B пружины (рис. 169). Изгибающий и крутящий моменты, действующие на элемент ds в точке A , будут

$$M = M_z \cos \alpha, \quad M_k = M_z \sin \alpha.$$

Поворот конца B пружины вокруг оси z вследствие деформации элемента ds равен

$$ds \left(\frac{M_k}{GJ_p} \sin \alpha + \frac{M}{EJ} \cos \alpha \right) = M_z ds \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (i)$$

Полный поворот конца B относительно оси z , вызываемый крутящим моментом M_z , равняется

$$\varphi_1 = sM_z \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (261)$$

Так как растягивающая сила P вызывает поворот φ конца B пружины, то из теоремы о взаимности пересечений (см. гл. I, стр. 206) можно заключить, что крутящий момент M_z будет вызывать удлинение пружины. Величина δ этого удлинения получается из уравнения

$$P\delta = M_z\varphi,$$

откуда

$$\delta = \frac{M_z}{P} \varphi = M_z s P \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ} \right). \quad (262)$$

Изгиб в продольной плоскости. Уголку необходимо рассмотреть чистый изгиб винтовой пружины в ее продольной плоскости (рис. 170). Пусть M_b , представленный вектором \vec{AB} (рис. 170, б), будет величина изгибающего момента в плоскости уг. Рассматривая элемент ds пружины в точке A , определенной углом θ , разложим вектор \vec{AB} на две составляющие: $\vec{AC} = M_b \cos \theta$ и $\vec{AD} = M_b \sin \theta$. Первая составляющая представляет пару сил, которая находится в плоскости, касательной к цилиндрической поверхности радиуса R , и вызывает изгиб проволоки в этой плоскости. Вторая составляющая

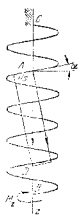


Рис. 169.

представляет пару, действующую в продольной плоскости пружины, и может быть разложена на крутящий момент $M_b \sin \theta \cos \alpha$ и изгибающий момент в плоскости витка $M_b \sin \theta \sin \alpha$. Следовательно, элемент ds испытывает изгиб под действием равнодействующего изгибающего момента, равного

$$\sqrt{M_b^2 \cos^2 \theta + M_b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}, \quad (f)$$

и кручение под действием крутящего момента, равного $M_b \sin \theta \cos \alpha$. Энергия

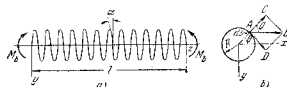


Рис. 170.

деформации элемента, в предположении кругового поперечного сечения проволоки, равняется

$$dU = ds \left[\frac{M_b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha)}{2EJ} + \frac{M_b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right]. \quad (k)$$

Подставляя $ds = R d\theta / \cos \alpha$ и интегрируя от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi n$, где n — число витков, получаем

$$U = \frac{\pi n R}{\cos \alpha} \left[\frac{M_b^2 (1 + \sin^2 \alpha)}{2EJ} + \frac{M_b^2 \cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right]. \quad (l)$$

Угловое перемещение одного конца пружины относительно другого равно $l\varphi$, где l — длина пружины (рис. 170, а) и R — радиус кривизны упругой кривой оси пружины. Длина l определяется из выражения

$$l = s \sin \alpha = \frac{2\pi R n}{\cos \alpha} \sin \alpha.$$

Приравняв работу, совершаемую изгибающими моментами M_b , энергии деформации (уравнение (l)), получаем

$$\frac{M_b l}{2} = U,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = M_b \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right). \quad (263)$$

Следовательно, величина

$$B = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2GJ_p}} \quad (m)$$

должна быть принята за жесткость изгиба в случае осевого изгиба винтовой пружины с проволокой кругового поперечного сечения. Если угол α мал, то мы можем допустить с достаточной точностью, что $\sin^2 \alpha = 0$ и $\cos^2 \alpha = 1$. Но так как $\sin \alpha = l/s$, жесткость изгиба винтовой пружины можно

представить формулой

$$B = \frac{2EJ}{s} \frac{1}{1 + \frac{E}{2G}}. \quad (264)$$

При рассмотрении изгиба витковой пружины поперечной нагрузкой (рис. 171) надо принять во внимание не только прогиб, вызываемый изгибающим моментом, но также и прогиб, вызываемый поперечной силой. Предполагая, что конец O пружины заделан и что угол α мал, мы найдем перемещение δ_1 верхнего конца A пружины под действием изгибающего момента по обычной формуле для консоли, с подстановкой значения (264) вместо жесткости изгиба. Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3} \frac{s}{2EJ} \left(1 + \frac{E}{2G}\right). \quad (a)$$

Для выяснения влияния поперечной силы на прогиб рассмотрим искажение одного витка в его плоскости⁴⁾, вызванное поперечной силой Q (рис. 172).

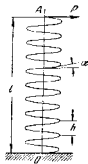


Рис. 171.

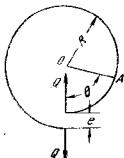


Рис. 172.

Изгибающий момент, возникающий от Q в какой-либо точке A , равен $QR \sin \theta$, а соответствующая энергия деформации одного витка будет равна

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M^2 R d\theta}{2EJ} = \frac{Q^2 R^3 \pi}{2EJ}.$$

Относительное перемещение e тогда будет

$$e = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\pi Q R^3}{EJ}.$$

Разделив это перемещение на шаг h пружины, получаем дополнительный угол наклона γ оси витковой оси благодаря действию поперечной силы

$$\gamma = \frac{e}{h} = \frac{\pi Q R^3 n}{EJ}. \quad (b)$$

Формулы, выведенные ранее (см. т. I, п. 39) для прогиба сплошных бочок, производимого сдвигом, можно применить к расчету поперечного переме-

⁴⁾ При этом рассуждении предполагается, что угол α мал.

нения витковых пружин. Необходимо лишь подставить угол наклона, данный выражением вместо ранее принятого выражения $\alpha Q/P$. В случае, показанном на рис. 171, поперечная сила постоянна по длине l и равна P ; следовательно, прогиб вследствие сдвига равен

$$\delta_2 = \gamma l = \frac{\pi n P R^3}{EJ}. \quad (p)$$

Складывая выражения (a) и (p) и принимая $s = 2\pi R n$, получаем

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi n P R^3}{3EJ} \left(1 + \frac{E}{2G} + \frac{3R^2}{\rho}\right). \quad (265)$$

Последний член в скобках представляет влияние сдвига. Им можно пренебречь, если радиус R пружины мал по сравнению с длиной l ⁵⁾.

⁵⁾ Поперечное выпучивание витковых пружин под действием осевого сжатия рассмотрено в книге: Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 165, 1936; русский перевод, 1946, 1955. Там же приведена библиография по этому вопросу.

в котором θ есть угол между осью x и радиусом OA , r — расстояние точки A от O и $k = 1 / \left(a + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ — коэффициент, зависящий от угла 2α клина.

Распределение нормальных напряжений σ_x по какому-либо поперечному сечению mn , перпендикулярному оси симметрии клина, является неравномерным. Пользуясь уравнением (17) т. 1, стр. 41, и подставляя $r = \frac{a}{\cos \theta}$ в формулу (а), находим

$$\sigma_x = \sigma_0 \cos^2 \theta = \frac{kP \cos^4 \theta}{ah}. \quad (b)$$

Это показывает, что нормальное напряжение является наибольшим в центре поперечного сечения ($\theta = 0$) и наименьшим при $\theta = \alpha$. Разность между наибольшим и наименьшим напряжениями увеличивается с увеличением угла α . При $\alpha = 10^\circ$ эта разность составляет около 6% от среднего напряжения, полученного путем деления нагрузки P на площадь поперечного сечения ah . Аналогичные заключения можно также вывести для конического стержня. Можно показать, что распределение нормальных напряжений по поперечному сечению приближается к равномерному, если угол конуса уменьшается.

Эти рассуждения показывают, что предположение о равномерном распределении нормальных напряжений по поперечному сечению непризматического стержня дает удовлетворительные результаты, если изменение поперечного сечения по длине стержня происходит не резко. Однако условия будут совершенно отличны, когда имеются резкие изменения в поперечном сечении. В таких местах распределение напряжений весьма далеко от равномерного, и результаты, полученные при допущении равномерного распределения напряжений, совершенно неправильны. В следующих параграфах будет рассмотрено несколько примеров резкого изменения поперечного сечения.

56. Напряжения в пластинке с круглым отверстием

Если в пластинке, подвергнутой действию равномерно растягивающих напряжений σ_0 , сделать малое круглое отверстие¹⁾, то в точках na (рис. 174, а) имеет место высокая концентрация напряжений. Точная теория²⁾ показывает, что растягивающее напряжение в этих точках равняется $3\sigma_0$. Теория также показывает, что эта концентрация носит чисто местный характер и ограничивается непосредственной близостью к отверстию. Если начертить концентрический круг с отверстием и притом сравнительно большого радиуса c , как показано на рис. 174, а пунктиром, можно предположить, что на напряженное состояние во окрестности этого круга наличие отверстия не оказывает существенного влияния. Пусть рис. 174, б представляет круглое кольцо, вырезанное из пластинки круглой цилиндрической поверхностью радиуса c . В каждой точке наружной поверхности этого кольца мы приложим вертикально направленные напряжения величин $\sigma_0 \cdot \sin \theta$, равные напряжению на соответствующей элементарной площадке dF пластинки (см. уравнение (16) т. 1, стр. 40). Тогда напряжения в кольце будут приблизительно

ГЛАВА VIII КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

55. Концентрация напряжений в растянутых или сжатых элементах

При изучении простого растяжения или сжатия предполагалось, что стержень был призматической формы. Тогда для центрально приложенных сил напряжения будут равномерно распределены по поперечному сечению. Равномерное распределение напряжений предполагалось также в случае стержня переменного поперечного сечения (см. рис. 14 т. 1, стр. 24), но это есть приближение, которое дает удовлетворительные результаты лишь в том случае, когда изменение поперечного сечения происходит постепенно. Резкие изменения поперечного сечения признают большие неправильности в распределении напряжений. Эти неправильности имеют особенно важное значение при проектировании машинных частей, подверженных действию переменных внешних сил и знакопеременных напряжений. Неправильности в распределении напряжений сводятся к тому, что в некоторых точках напряжения значительно выше среднего значения и под действием знакопеременных напряжений возможно образование все возрастающих трещин. Большинство поломок машинных частей во время работы можно приписать таким прогрессирующим трещинам.

Для иллюстрации распределения напряжений в стержне переменного поперечного сечения, находящегося под действием растягивающих сил, рассмотрим симметричный клин постоянной толщины h , нагруженный, как показано на рис. 173. Точное решение показывает (см. сноску 2) стр. 219), что здесь будет простое радиальное распределение напряжений. Элемент в радиальном направлении в какой-либо точке A находится в условиях простого

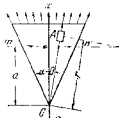


Рис. 173.

радиального растяжения. Величина этого радиального растягивающего напряжения дается уравнением

¹⁾ Диаметр отверстия меньше, скажем, 1/5 ширины пластинки.

²⁾ Эта теория была предложена Kirsch'ом, Z. Ver. deut. Ing., 1898. См. также Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 78, 1951; русский перевод, 1937, стр. 107.

такие же, как в части пластинки, ограниченной окружностью радиуса e (рис. 174, а). Таким образом, задача о распределении напряжений вблизи отверстия в пластинке сводится к задаче о круглом кольце, подверженном действию вертикальной нагрузки интенсивности $\sin \varphi$, непрерывно распределенной по его внешнему контуру¹⁾. Эта задача может быть решена методом, предложенным в т. 1, стр. 319. Рассматривая один квадрант кольца, сводим выражения, действующие по поперечному сечению mn , к продольной растягивающей силе N_0 , приложенной в центре тяжести поперечного сечения, и к изгибающей паре M_0 . Продольная сила может быть определена из уравнения статики и равняется

$$N_0 = \pi e. \quad (в)$$

Момент M_0 является статически неопределимой величиной и вычисляется при помощи теоремы о наименьшей работе. Для вычисления потенциальной энергии применяется выражение (228) т. 1, стр. 322, для которого продольная сила и изгибающий момент в произвольном поперечном сечении кольца, определяемом углом φ (рис. 174, б), будут $N = \pi e \cos^2 \varphi$:

$$M = M_0 + \pi e \left(1 - \cos \varphi\right) \left[\frac{e}{2} (1 - \cos \varphi) + \frac{h}{2} \cos \varphi \right] - \pi e \left(e - \frac{h}{2} \right) (1 - \cos \varphi). \quad (б)$$

Здесь h — высота прямоугольного поперечного сечения. Тогда

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{M d\varphi}{FE} - \int_0^{\pi/2} \frac{N d\varphi}{FE} = 0,$$

откуда после интегрирования получаем

$$M_0 = \frac{2\pi e^2}{\pi} \left[1 - \frac{3}{8} \pi - \frac{h}{2e} \left(1 - \frac{1}{4} \pi \right) + \frac{\pi e}{4c} + \frac{R}{FE} (\pi - 2) \right]. \quad (с)$$

Здесь по-прежнему R — радиус осевой линии и e — расстояние нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения.

Напряжение в точке n поперечного сечения mn кольца состоит из двух частей: 1) растягивающего напряжения, вызываемого продольной силой N_0 и равного

$$\sigma_1 = \frac{N_0}{h} = \frac{\pi e}{h}, \quad (д)$$

и 2) напряжения от изгиба, вызываемого M_0 , которое на основании формулы (212) т. 1, стр. 308, равняется

$$\sigma_2 = \frac{M_0 \left(\frac{h}{2} - e \right)}{F \pi a} = \frac{M_0}{2\pi e a} \left(1 - \frac{2e}{h} \right), \quad (е)$$

где a — радиус отверстия.

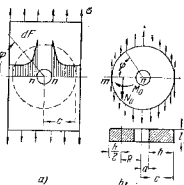


Рис. 174.

Расстояние e вычисляется (см. т. 1, п. 79, стр. 311) для различных значений отношения c/a , и тогда величины σ_1 и σ_2 определяются из формул (д) и (е). Наибольшее напряжение равняется

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Результаты этих вычислений приведены в табл. 18.

Таблица 18

Значения местных напряжений в пластинке у круглого отверстия

c/a	3	4	5	6	8	10
$2e/h$	0,1796	0,2238	0,2574	0,2838	0,3239	0,3536
σ_1/σ	1,50	1,33	1,25	1,20	1,14	1,11
σ_2/σ	2,33	1,93	1,83	1,83	1,95	2,19
σ_{\max}/σ	3,83	3,26	3,08	3,03	3,09	3,30

Сравнение цифр последней строки табл. 18 с точным решением $\sigma_{\max} = 3\sigma$ для очень малого отверстия показывает, что при $5 < c/a < 8$ результаты приближенного вычисления хорошо согласуются с точным решением. Когда $c/a < 5$, отверстие нельзя рассматривать очень малым, и оно имеет заметное влияние на распределение напряжений по кругу радиуса e (рис. 174, а), в котором наше допущение относительно распределения сил по внешнему контуру кольца (рис. 174, б) не является вполне точным. Отклонение от точной теории для $c/a > 8$ объясняется несоответствием точностью элементарной теории кривых брусков для случая, когда внутренний радиус очень мал по сравнению с наружным. Назвав какую-либо точку n поперечного сечения mn (рис. 174, б) на расстоянии r от центра отверстия, найдем из точной теории, что нормальное напряжение в этой точке равняется

$$\sigma = \frac{\pi e}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right), \quad (f)$$

где σ есть радиальное растягивающее напряжение, приложенное к концам пластинки. Это распределение напряжений показано на рис. 174, а заштрихованными площадями. Видно, что концентрация напряжений в этом случае имеет глубоко местный характер. В точках n , т. е. при $r = a$, мы имеем $\sigma_{\max} = 3\sigma$. Напряжения быстро уменьшаются, когда расстояние от этой периферийной точки увеличивается; на расстоянии от края отверстия, равном радиусу отверстия, т. е. при $r = 2a$, мы получаем из уравнения (f) нормальное напряжение, равное $1 \frac{7}{32} \sigma$. Напряжение также быстро уменьшается с увеличением угла φ (рис. 174, б); и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. для сечения, параллельного приложенным растягивающим напряжениям σ , мы находим на краю отверстия сжимающее напряжение в окружном направлении, равное растягивающему напряжению σ , приложенному на концах пластинки.

Если вместо растяжения мы имеем сжатие пластинки (рис. 175, а), то должны лишь изменить знак напряжений, полученных в предыдущем изложении, и мы заключаем, что в точках n будет сжимающее напряжение величиной 3σ , а в точках m — растягивающее напряжение величиной σ . В случае хрупкого материала, как, например, стекло, которое очень прочно при

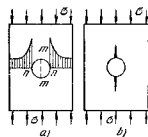


Рис. 175.

¹⁾ Толщина пластинки предполагается равной единице.

сжатия и слабо при растяжении, трещины обычно начинаются в точках m , как показано на рис. 176, b .

Имея напряжения для простого растяжения и сжатия и пользуясь методом наложения, мы легко получим концентрацию напряжений для случая сложного растяжения или сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Например, в случае, показанном на рис. 176, мы находим, что тангенциальное напряжение в точках n равняется $3\sigma_y - \sigma_x$, а в точках m напряжения равняются $3\sigma_x - \sigma_y$. В частном случае чистого сдвига мы имеем $\sigma_x = -\sigma_y = \tau$ и получаем для точек n напряжение -4τ , а для точек m напряжение $+4\tau$; таким образом, в этом случае наибольшее напряжение в четыре раза больше напряжений, приложенных по краям пластины. Такое условие большой концентрации напряжений получается при кручении тонкостенной круглой трубы с малым круглым отверстием (рис. 177). Если приложенный крутящий момент имеет направление, указанное на рисунке, то наибольшее растягивающее напряжение, которое в четыре раза больше касательных напряжений, приложенных на конце, вызывается на краю отверстия в точках, отмеченных знаком плюс, и сжимающее напряжение такой же величины, отмеченных знаком минус.

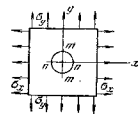


Рис. 176.



Рис. 177.

Приближенный метод, описанный выше для вычисления напряжений у круглого отверстия, можно также применить для случая отверстия с ребордой (рис. 178). Результаты этого вычисления ⁴⁾ при $\frac{b}{t_1} = 11$, $\frac{t_2}{2a} = 0,01$ дают следующие значения отношения $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$ для различных значений c/a :

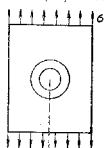


Рис. 178.

В рассматриваемой области отношение $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$ изменяется, но незначительно, с изменением c/a , так что дальнейшие вычисления будут проделаны только для случая $c/a = 5$. Влияние излома поперечного сечения реборды на $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$ можно изучить путем изменения размера b реборды. Если $P_1 = 2t_1 a$ означает уменьшение поперечного сечения пластины вследствие наличия отверстия и $P_2 = (b - t_1)t_2$ означает площадь поперечного сечения реборды, то отношение $\frac{P_2}{P_1}$ равно:

$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{t_2}{2a}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$		2,53	2,17	1,90	1,69	1,53

⁴⁾ Рассмотрение этой задачи дано в статье автора, J. Franklin Inst., т. 197, стр. 505, 1924. Предпологается, что все поперечное сечение реборды является полемем. О дальнейшем исследовании задач см. L. Beskin, J. Appl. Mech., т. II, стр. 140, 1914. См. также C. Gurney, Air Ministry Repts. and Mem. (London) № 1831, 1938.

Приведенные численные данные можно применить также в случае других форм поперечного сечения реборды при условии, что размер t_2 реборды в радиальном направлении можно рассматривать малым по сравнению с радиусом a отверстия. Возьмем, например, широкую пластинку, подверженную растяжению, толщиной 10 мм, с круглым отверстием диаметром 1 мм. Пусть край отверстия усилен двумя уголками $100 \times 100 \times 10$ мм. В таком случае $\frac{P_2}{P_1} = 0,40$, и вычисленная таблица дает $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = 1,69$.

57. Другие случаи концентрации напряжений в растянутых элементах

Имеется лишь несколько случаев, в которых, как в случае круглого отверстия, задача о концентрации напряжений строго теоретически решена¹⁾. В большинстве случаев сведения относительно наибольших напряжений в точках резкого изменения поперечного сечения получаются из опытов²⁾. В дальнейшем изложении представлены лишь некоторые окончательные результаты теоретических и экспериментальных исследований, которые могут иметь практическое значение³⁾.

В случае малого эллиптического отверстия в пластинке⁴⁾ (рис. 179, a) наибольшее напряжение будет на концах горизонтальной оси отверстия; оно определяется формулой

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (a)$$

где σ — растягивающее напряжение, приложенное на концах пластины. Это напряжение увеличивается с возрастанием отношения a/b , так что очень узкое отверстие, перпендикулярное к направлению растяжения, вызывает большую концентрацию напряжений. Этим объясняется, почему трещины, перпендикулярные к направлению приложенных сил, имеют тенденцию к распространению. Это распространение может быть остановлено путем высверливания отверстий на концах трещины для того, чтобы усмирить острые углы, которые вызывают высокую концентрацию напряжений.

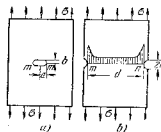


Рис. 179.

¹⁾ Теоретические решения задач о концентрации напряжений для отверстий различной формы даны в книге Л. Н. Санина «Концентрация напряжений у отверстий», 1951.

²⁾ Различные экспериментальные методы для определения наибольших напряжений описаны в ш. 61 и 62. См. также Е. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, 1934.

³⁾ Весьма полное собрание сведений относительно концентрации напряжений дано в книге R. E. Peterson, Stress Concentration Design Factors, 1953.

⁴⁾ См. Л. Колосов, Диссертация, 1910, Петербург; см. также С. E. H. G. H., Engineering, т. 95, стр. 415, 1913 и Trans. Inst. Naval Architects, 1913.

Малые полукруглые выточки¹⁾ в пластинке, подверженной растяжению (рис. 179, б), также вызывают высокую концентрацию напряжений. Опыты²⁾ показывают, что в точках *m* и *n* напряжения

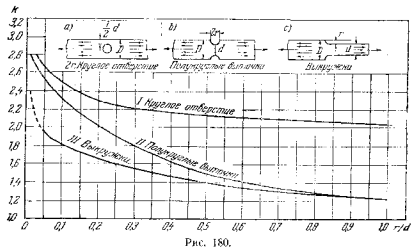


Рис. 180.

приблизительно в три раза больше напряжений, приложенных по концам пластинки, если радиус *r* выточки весьма мал по сравнению с

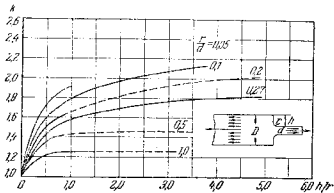


Рис. 181.

шириной *d* наименьшего сечения. Вообще наибольшее напряжение в точках *m* и *n* является функцией отношения *r/d*. Отношение наиболь-

¹⁾ О теоретическом решении этой задачи см. статью F. G. Mauseil'a, Phil. Mag., т. 21, стр. 765, 1930.

²⁾ См. M. M. Frocht, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 67, 1935.

шего напряжения к среднему напряжению в наименьшем сечении *m* обычно называется коэффициентом концентрации напряжений и обозначается через *k*. Значения *k* для различных значений отношений *r/d* даны на рис. 180 кривой II¹⁾. На том же рисунке даны также коэффициенты концентрации напряжений для случая круглого отверстия (кривая I) и для случая выкружки (кривая III). На рис. 181 приве-

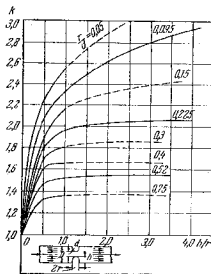


Рис. 182.

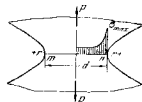


Рис. 183.

дены более подробные данные относительно концентрации напряжений в выкружках. На рис. 182 коэффициенты *k* даны для выточек различной глубины, имеющих круглую форму на дне. Видно, что для глубоких выточек коэффициенты концентрации напряжений больше, чем для полукруглых с тем же отношением *r/d*.

Случай пластинки весьма большой ширины с гиперболическими выточками (рис. 183) можно исследовать теоретически³⁾. Решение показывает, что коэффициент концентрации напряжений, т. е. отношение наибольшего напряжения в точках *m* и *n* к среднему растягивающему напряжению по поперечному сечению *m* можно представить следующей приближенной формулой⁴⁾:

$$k = \sqrt{0,8 \frac{d}{r} + 1,2} - 0,1, \quad (b)$$

где *d* — ширина наименьшего сечения и *r* — радиус кривизны дна выточки. Интересно отметить, что значения *k*, получаемые из этой формулы, весьма хорошо согласуются с результатами опытов, полученных для глубоких выточек (*h/r* = 4), полукруглых на дне (рис. 182).

¹⁾ Кривые, приведенные в последующем изложении, взяты из статьи M. M. Frocht'a, там же (см. стр. 254).

²⁾ H. Neuber, Z. angew. Math. u. Mech., т. 13, стр. 439, 1933. См. также книгу: Neuber, Kerbspannungslchre, 1937.

³⁾ В выражениях (b), (c) и (d) коэффициент Пуассона взят равным 0,3.

Предположим теперь, что рис. 184 представляет собой продольное сечение круглого цилиндра большого диаметра с глубокой выточкой гиперболического профиля, находящегося под действием осевого растяжения. Наибольшее растягивающее напряжение опять имеет место на дне выточки, и значение коэффициента концентрации напряжений будет ¹⁾

$$k = \sqrt{0,5 \frac{a}{r} + 0,85} + 0,08. \quad (c)$$

Сравнение этой формулы с формулой (b) показывает, что в случае цилиндра с выточкой концентрации напряжений меньше, чем в случае пластики. Дальнейшее обоснование этого сравнения дано ниже (см. п. 60).

В случае растянутого цилиндра с эллипсоидальной выточкой на оси, для которого рис. 179, а можно рассматривать как продольное сечение, наибольшее растягивающее напряжение имеет место в точках *m*. Его значение дает следующая приближенная формула:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(\sqrt{0,8 \frac{a}{r} + 0,05} + 0,78 \right), \quad (d)$$

где σ — равномерное растягивающее напряжение, приложенное по концам цилиндра, и r — радиус кривизны эллипса в точках *m*.

Стандартный образец для испытания на растяжение цемента (рис. 184) представляет другой пример растянутого элемента с режимом изменения поперечного сечения. Силы показывают ²⁾, что наибольшее напряжение имеет место в точках *m* и *n* и что это напряжение приблизительно в 1,75 раза больше среднего напряжения по поперечному сечению *mn*.

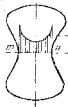


Рис. 184.

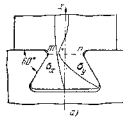


Рис. 185.



Рис. 185 представляет *соединение в виде ласточкиного хвоста*, которое часто применяется в электрических машинах для удержания магнитных полюсов в ободке якоря. Центробежная сила, действующая на полюс, вызывает по поперечному сечению *mn* большие растягивающие напряжения. Распределение этих напряжений показано на рис.

185, б¹⁾. Вследствие резкого изменения поперечного сечения в точках *m* и *n* имеет место высокая концентрация напряжений. Растягивающие напряжения σ_x сопровождаются напряжениями σ_y в поперечном направлении. Распределение этих напряжений по *mn* показано на рис. 185, б, а распределение их по вертикальной плоскости симметрии показано на рис. 185, а.

Все предыдущие выводы относительно распределения напряжений сделаны в предположении, что наибольшее напряжения не превосходят предела пропорциональности материала. За пределом пропорциональности распределение напряжений зависит от *пластичности* материала. *Пластический материал* может испытывать за пределом текучести значительное удлинение без большого увеличения напряжения. Благодаря этому обстоятельству при дальнейшем растяжении материала за пределом текучести распределение напряжений получается все более и более равномерным. Этим объясняется, почему при статическом испытании образца из пластического материала отверстия и выточки не понижают *предела прочности*. Более того, при испытании образцов из мягкой стали с глубокими выточками обычно получается некоторое увеличение предела прочности благодаря тому обстоятельству, что выточки препятствуют образованию шейки образца в месте разрыва (см. гл. X).

Однако в случае *хрупкого материала*, как, например, стекло, высокая концентрация напряжений сохраняется до момента разрушения. Это оказывает существенно ослабляющее влияние на прочность, что подтверждается уменьшением предела прочности брусков из хрупких материалов с любыми надрезами. Интересно отметить, что очень тонкие царинки на поверхности образца, изготовленного из стекла, не вызывают уменьшения прочности, хотя на две царинки должна быть весьма большая концентрация напряжений²⁾. Для объяснения этого явления предполагают, что обыкновенное стекло в своем естественном состоянии имеет множество внутренних микроскопических трещин, и немного дополнительных трещин на поверхности не изменяет прочности образца.

Таким образом, предыдущие рассуждения показывают, что применение выточек и входящих углов при проектировании требует большой осмотрительности. В случае пластического материала, как, например, строительной стали, большая концентрация напряжений не опасна при условии, что нет осреженных напряжений. Например, в

¹⁾ См. статью E. G. Coker, J. Franklin Inst., т. 199, стр. 289, 1925. Т-образные головки, которые также имеют частное применение при проектировании машин, были испытаны M. Hetényi, J. Appl. Mech., т. 6, стр. 151, 1919.

²⁾ Это явление было исследовано A. A. Griffith'ом, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 221, стр. 163, 1920. См. также статью: I. N. Sveddon, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 187, стр. 229, 1946.

¹⁾ H. Neuber, Z. angew. Math. u. Mech., см. список стр. 255.
²⁾ См. E. G. Coker, Proc. Congr. Internat. Assoc. Testing Materials, N. Y., 1913.

соединении ласточкиным хвостом, показанном на рис. 185, напряжения опись часто бывают настолько высокими, что происходит текучесть в точках m и n , но эта текучесть не считается опасной, потому что конструкция подвергается действию постоянной силы. В случае хрупкого материала значительно уменьшают прочность те точки, в которых имеет место концентрация напряжений, и такие места должны быть устранены, или концентрация напряжений должна быть уменьшена при помощи соответствующих размеров выкружек.

В элементах, изготовленных даже из пластических материалов, но подверженных действию повторных усилий, необходимо принимать во внимание влияние концентрации напряжений, так как в перенапряженных точках появляются трещины, которые стремятся к дальнейшему расширению (см. п. 87).

58. Концентрация напряжений при кручении

При рассмотрении кручения стержней переменных поперечных сечений (см. ш. 46 и 47) указывалось, что входящие углы или другие резкие изменения в контуре поперечного сечения вызывают большую концентрацию напряжений. Продольные отверстия производят подобный эффект.

В качестве первого примера рассмотрим случай наличия *малого круглого отверстия* в скручиваемом круглом вале ¹⁾ (рис. 186).

При исследовании этого вопроса весьма полезно применить *гидродинамическую аналогию* ²⁾. Задача кручения стержня постоянного поперечного сечения математически идентична с задачей движения *совершенной жидкости*, перемещающейся с постоянной угловой скоростью внутри цилиндрической оболочки, имеющей такое же поперечное сечение, как и стержень. Окружная скорость циркулирующей жидкости в какой-либо точке может быть принята за изображение касательного напряжения в той же

точке поперечного сечения скручиваемого стержня. Влияние малого отверстия в валу круглого поперечного сечения подобно тому, какое окажет сплошной цилиндр тех же размеров, введенный в поток гидродинамической модели. Такой цилиндр значительно изменяет скорости жидкости в непосредственной близости от себя. Скорости в передних

¹⁾ Этот случай был исследован J. Larmor'ом, Phil. Mag., т. 33, стр. 76, 1892.

²⁾ Эта аналогия была разработана Lord'ом Kelvin'ом and Tai'ом, Natural Philosophy, т. 2; J. Boussinesq'ом, J. math. (Liouville), т. 16, 1871; A. G. Greenhill'ом, статья «Hydro-mechanics», Encyclopaedia Britannica, изд. 9. Относительно приложения аналогии в опытах см. статью: J. P. Den Hartog and J. G. McGivern, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 46, 1935.

и задних точках обращаются в нуль, в то время как в боковых точках m и n они удваиваются, следовательно, отверстие такого рода удваивает наибольшее напряжение в той части вала, где оно расположено. *Малая полукруглая канавка*, на поверхности вала, параллельная его длине (рис. 186), оказывает то же влияние. Касательные напряжения вблизи точки t будут почти в два раза больше касательных напряжений, вычисленных для точек на поверхности вала, значительно удаленных от канавки.

Та же гидродинамическая аналогия объясняет влияние отверстия *эллиптического поперечного сечения* или *канавки полуэллиптического поперечного сечения*. Если одна из главных осей эллипса равна a и расположена в радиальном направлении, а другая равна b , то напряжения у краев отверстия на концах оси a увеличиваются в отношении $[1 - a/b]:1$. Таким образом, наибольшие напряжения, возникающие в этом случае, зависят от величины отношения a/b . Влияние эллиптического отверстия на величину напряжений будет больше в том случае, когда большая ось эллипса имеет радиальное направление, а не направление касательной к окружности. Этим объясняется, почему радиальные трещины оказывают такое вредное влияние на прочность вала. Подобные рассуждения можно применить также и в случае полуэллиптической канавки на поверхности вала, параллельной его оси.

В случае *шпоночной канавки* с острыми углами (рис. 187) гидродинамическая аналогия указывает на то, что скорости циркулирующей жидкости в наружных углах (точки $m - n$) равны нулю; следовательно, касательные напряжения, соответствующие задаче кручения, равны нулю в тех же углах. В точках $n - n$, т. е. в вершинах входящих углов, скорости циркулирующей жидкости теоретически равны бесконечности. В соответствующей задаче кручения касательные напряжения в точках $n - n$ также равны бесконечности; это значит, что незначительный крутящий момент будет вызывать в этих точках остаточные деформации. Такая концентрация напряжений может быть уменьшена путем закругления углов $n - n$.

Опыты, произведенные ³⁾ над полым валом, имеющим висинный диаметр 25,4 см, внутренний диаметр 14,73 см, глубину шпоночной канавки 2,54 см, ширину шпоночной канавки 6,35 см и радиус закругления в вершинах углов канавки r , показали, что наибольшее напряжение в закругленных углах равняется наибольшему напряжению в таком же валу без канавки, умноженному на коэффициент k , значения которого даны в табл. 19.

³⁾ См. сборник работ The Mechanical Properties of Fluids, New York, D. Van Nostrand Company, Inc., стр. 245, 1924.

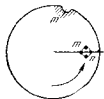


Рис. 186.



Рис. 187.

Таблица 19

Значения коэффициента k при выкручках
разных радиусов

r (см) =	0,25	0,51	0,76	1,01	1,27	1,52	1,78
k =	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

Эта таблица показывает, что концентрация напряжений может быть значительно уменьшена путем увеличения радиуса в вершинах углов λ .

Ослабляющее влияние концентрации напряжения в валах вследствие наличия отверстий и выточек зависит от того, пластичен ли материал или нет, и выводы, сделанные в предыдущем параграфе, применимы также и здесь.

Если трубчатый элемент имеет входящие углы, то концентрация напряжений будет иметь место в этих углах, и величина наибольшего напряжения будет зависеть от радиуса углов. Приближенное значение этого наибольшего напряжения можно получить по мембранной аналогии. Рассмотрим простой пример трубы постоянной толщины и предположим, что угол ограничивается двумя концентрическими окружностями (рис. 188) с центром в точке O и радиусами r_i и r_a . Поверхность мембраны в поперечном сечении можно рассматривать¹⁾ как поверхность вращения с осью, перпендикулярной плоскости рисунка в точке O . Мы видим, что наклон мембранной поверхности в какой-либо точке M численно равен касательному напряжению τ . Обращаясь к рис. 189, который показывает меридиональное сечение, проходящее через mn , находим, что главные кривизны

мембраны в этой точке будут $\frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\tau}{dr}$ для меридионального сечения

(принимая элемент ds по меридиану равным dr) и $\frac{1}{R_2} = \frac{\tau}{r}$ для сечения, перпендикулярного меридиану. Тогда уравнение равновесия мембраны на основании уравнения (122) стр. 104 будет

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = \frac{p}{S},$$

или на основании соотношения (а), стр. 198

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 2G\theta. \quad (а)$$

¹⁾ Это предположение удовлетворяется при условии, что r_i не мало по сравнению с r_a .

Пусть τ_s означает среднее касательное напряжение, полученное из выражения (226). Тогда из выражения (227) найдем

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 2G\theta = \frac{\tau_s s}{r}, \quad (б)$$

где s — длина осевой линии сечения трубчатого элемента. Общее решение уравнения (б) будет

$$\tau = \frac{C}{r} + \frac{\tau_s s r}{2F}. \quad (с)$$

Постоянная интегрирования C получится из условия¹⁾

$$\int_{r_i}^{r_a} \tau dr = \tau_s h.$$

Подставляя выражение (с) вместо τ , находим

$$C = \tau_s h \frac{1 - \frac{s}{4F}(r_a + r_i)}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

и из решения (с) получаем

$$\tau = \frac{\tau_s h}{r} = \frac{1}{4F} \frac{s}{r} (r_a + r_i) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{\tau_s s r}{2F}. \quad (266)$$

Во входящих углах $r = r_i$, подставляя это значение в формулу (266), мы можем вычислить наибольшее напряжение в этих углах²⁾. Возьмем, например, квадратную трубку (рис. 190) с наружными размерами 10×10 см, толщиной стенок $h = 1$ см и радиусами в углах $r_i = 0,5$ см, $r_a = 1,5$ см. Тогда

$$F = 9 \cdot 9 - 1^2 (4 - \pi) = 80,14 \text{ см}^2, \\ s = 4 \cdot 9 - 1 (8 - 2\pi) = 34,28 \text{ см}.$$

Среднее напряжение τ_s определяется по формуле (226). Напряжение же во входящих углах по формуле (266) равняется $\tau = 1,54 \tau_s$. Коэффициент концентрации напряжений в этом случае равен 1,54. Можно видеть, что этот коэффициент увеличивается с уменьшением внутреннего радиуса r_i .

Формулой (226) можно пользоваться также для приближенного вычисления напряжений в том случае, когда закруглен лишь входящий угол (рис. 190, б). Так как напряжения малы в выступающих углах, то мы можем принять $r_a = h + r_i$, как показано на рисунке пунктиром.

¹⁾ Это условие вытекает из гидродинамической аналогии (стр. 258). Если жидкость движется в канале, имеющем форму поперечного сечения трубчатого стержня, то ее количество, протекающее через любое поперечное сечение канала, должно оставаться постоянным.

²⁾ Такая формула дана С. Вебергом, цит. на стр. 213.



Рис. 188.

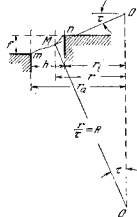


Рис. 189.

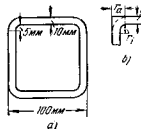


Рис. 190.

В случае прокатных профилей, таких, какие показаны на рис. 144, б и 144, с, стр. 204, наибольшее напряжение имеет место во входящих углах. Его значение получается путем умножения напряжения, вычисленного по формулам (222) или (225) (см. стр. 201, 205), на коэффициент концентрации, для которого можно воспользоваться выражением¹⁾

$$k = 1,74 \sqrt{\frac{c}{r}}, \quad (267)$$

в котором c — толщина полки и r — радиус выкружки. Более сложные вычисления дают для коэффициента концентрации напряжений значения, представленные на рис. 191 кривой AB ²⁾,

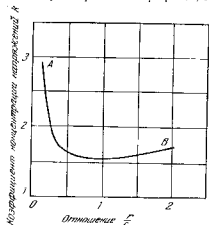


Рис. 191.

напряжений значения, представленные на рис. 191 кривой AB ²⁾,

59. Круглые вали переменного диаметра³⁾

Если диаметр вала постепенно изменяется по его длине, то наибольшее напряжение можно получить с достаточной точностью при помощи формулы (152) т. 1, стр. 241, выведенной для цилиндрического вала. Но если изменение диаметра происходит резко, как показано на рис. 192, то в точках $m - m$, т. е. у начала выкружек, имеет место большая концентрация напряжений. Величина наибольшего напряжения зависит от отношений ρ/d и D/d , где ρ есть радиус выкружки, а d и D — диаметры двух цилиндрических участков вала.

¹⁾ E. Trefftz, Z. angew. Math. u. Mech., т. 2, стр. 263, 1922. Формула (267) выведена для угла, для которого смежные части имеют одинаковую толщину, как на рис. 144, б. В случае разной толщины c_1 и c_2 , как на рис. 144, с, в формуле (267) нужно принять большую толщину. Дальнейшее обсуждение этого вопроса дано H. M. Westergaard'ом and R. D. Mindlin'ом, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., стр. 309, 1935.

²⁾ См. статью: J. H. Nutt, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 388, 1950. Результаты вычислений Nutt'a очень хорошо согласуются с результатами опытов N. S. Wapner'a и W. W. Sokol'a, полученными путем проведения листов аналогии; см. Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 19, 1953.

³⁾ Общее решение этой задачи принадлежит J. H. Michell'y, Proc. London Math. Soc., т. 31, 1899 и A. Förrp'l, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch., т. 35, стр. 249, 1905. Случай, показанный на рис. 192, был рассмотрен впервые A. Förrp'l'em, см. Z. Ver. deut. Ing., стр. 1032, 1906. Литература по этому вопросу приводится и кит.: Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 310, 1951; русский перевод, стр. 305, 1937.

Эти высокие местные напряжения, хотя и не опасные для статического нагружения вала из пластического материала при постоянной нагрузке, могут оказывать значительное влияние на понижение прочности в случае переменных усилий, какие наблюдаются в тропических и колебательных валах. Большинство поломок, происшедших во время работы, можно объяснить этой причиной. Теоретическое определение наибольшего напряжения в выкружке слишком сложно⁴⁾ для практических целей, и поэтому ниже изложен экспериментальный метод определения наибольшего напряжения. Этот метод основан на аналогии между распределением напряжений в скручиваемом валу и распределением электрического тока в пластинке⁵⁾.

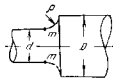


Рис. 192.

Рассмотрим сначала круглый вал постоянного диаметра. Представим себе такой вал разделенным на такие элементарные трубочки,

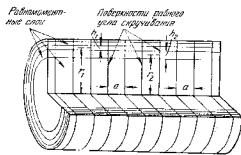


Рис. 193.

что каждая воспринимает одинаковую часть полного крутящего момента M_k . Например, на рис. 193 вал разделен на пять частей, каждая из которых несет $1/5 M_k$. Эти трубочки будем называть *трубочками равного момента*, а соответствующие линии диаметрального сечения вала — *линиями равного момента*. Обозначим через ΔM_k крутящий момент, приходящийся на трубочку, и допустим, что толщина каждой трубочки мала. Тогда угол закручивания на единицу длины, одинаковый для всех трубочек, будет равен

$$\theta = \frac{\Delta M_k}{GJ_p} = \frac{\Delta M_k}{G2\pi r^3 h}, \quad (a)$$

⁴⁾ Такие вычисления были сделаны F. A. Willers'ом при помощи приближенного метода интегрирования; см. Z. Math. u. Mech., т. 55, стр. 225, 1907; см. также R. Soldner'a, Dissertation, Munich, 1926.

⁵⁾ Эта аналогия была разработана L. S. Jacobsen'ом, см. Trans. A. S. M. E., т. 47, стр. 619, 1926.

где r — средний радиус трубочки и h — его толщина. Так как ΔM_x и θ^1) одинаковы для всех трубочек, то толщина трубочек изменяется обратно пропорционально кубу среднего радиуса. Среднее касательное напряжение в трубочке по формуле (226) равно

$$\tau = \frac{\Delta M_x r}{J_p} = \frac{\Delta M_x}{2\pi r^2 h} \quad (b)$$

На рис. 193 показана вторая система линий в диаметральной сечении. Эти линии перпендикулярны линиям равного момента и называются *линиями равного угла закручивания*. Они соответствуют сечениям вала, которые называются *поверхностями равного угла закручивания* и которые выбираются так, чтобы угол закручивания между двумя такими последовательными поверхностями был постоянным по длине вала. Пусть $\Delta\varphi$ — этот угол. Для рассматриваемого круглого вала поверхностями равного угла закручивания будут равноудаленные друг от друга плоскости; пусть a — расстояние между ними. Тогда на цилиндрической поверхности какого-либо радиуса r относительный сдвиг будет $\gamma = \frac{\Delta\varphi r}{a}$, а соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{G\Delta\varphi r}{a} \quad (c)$$

Обе взаимно перпендикулярные системы линий равного момента и равного угла закручивания разделяют диаметральное сечение вала на элементарные прямоугольники, как показано на рис. 193. Размеры этих прямоугольников можно использовать для сравнения касательных напряжений в соответствующих точках вала. Пользуясь формулой (b) и сравнивая касательные напряжения τ_1 и τ_2 в точках, находящихся соответственно на расстояниях r_1 и r_2 от оси вала, находим

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1^2 h_2}{r_2^2 h_1} \quad (d)$$

Из выражения (c) получаем

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1 a_2}{r_2 a_1} \quad (e)$$

В рассматриваемом случае $a_1 = a_2 = a$, но соотношение (e) и дальше не будет применено к более общему случаю. Очевидно, что каждой системой линий можно пользоваться для определения касательных напряжений. В одном случае (выражение (d)) отношение напряжений зависит от отношения расстояний между линиями равного момента h_2/h_1 , между тем как в другом случае (выражение (e)) оно зависит от отношения расстояний между линиями равного угла закручивания a_2/a_1 .

¹⁾ θ — угол закручивания для сплошного вала.

Рассмотрим вал переменного диаметра, изображенный на рис. 192. Неравномерность в распределении напряжений, происходящая у выкружек, имеет местный характер. На достаточном расстоянии от места сопряжения двух участков разных диаметров распределение напряжений практически такое же, как и в вале постоянного поперечного сечения, и две системы описанных выше линий могут быть построены в диаметральной сечении (рис. 194). Вблизи переходного сечения распределение напряжений получается довольно сложным, и линии равного момента и равного угла закручивания становятся кривыми. Исследование этого вопроса показывает¹⁾, что эти линии, будучи кривыми, все же остаются взаимно перпендикулярными и разделяют диаметральное сечение на криволинейные прямоугольники, подобные заштрихованным на рисунке. Выражения (d) и (e), выведенные для вала постоянного поперечного сечения, сохраняются также и здесь, нужно только за h и a принимать расстояния, измеряемые от середины каждого криволинейного прямоугольника. Тогда линии равного момента и равного угла закручивания дадут полную картину распределения напряжения в вале. Рассматривая, например,

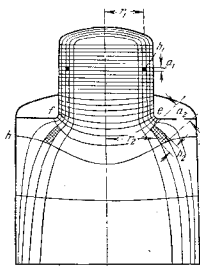


Рис. 194.

линии равного момента и пользуясь выражением (d), видим, что напряжения увеличиваются с уменьшением радиуса и толщины трубочек равного момента. Из рис. 194 видно, что напряжения достигают наибольшего значения у выкружек, где толщина h наружной трубочки равного момента наименьшая. К тому же заключению мы приходим также, если будем рассматривать линии равного угла закручивания. Из рисунка видно, что у выкружек расстояние a между этими линиями очень мало; следовательно, по выражению (e) напряжение будет большим. Из выражений (d) или (e) мы можем определить отношение наибольшего напряжения у выкружки к напряжению в какой-либо другой точке при условии, что нам известны линии равного момента или линии равного угла закручивания.

Упомянутая на стр. 263 элэстрическая аналогия указывает способ измерения расстояний a между линиями равного угла закручивания.

¹⁾ См. статью F. A. Willers'a, цит. на стр. 263.

Эти расстояния измеряются на поверхности вала меньшего диаметра d сначала у точки, удаленной от переходного сечения, а затем у выкружки. Отношение этих двух расстояний дает, как видно из соотношения (е), коэффициент, на который нужно умножить вычисленное по обычной формуле напряжения для того, чтобы получить наибольшее напряжение у выкружки. Рассмотрим электрической аналогии



Рис. 195.

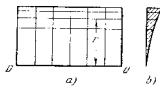


Рис. 196.

мы начнем со случая прямоугольной пластинки постоянной толщины (рис. 195). Если на концах пластинки поддерживается постоянная разность потенциалов, то по пластинке будет идти электрический ток, равномерно распределенный по ее поперечному сечению. Разделяя электрический ток на равные части, мы получим систему равноудаленных линий тока. Система этих линий будет перпендикулярна системе линий равного потенциала. В однородной

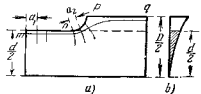


Рис. 197.

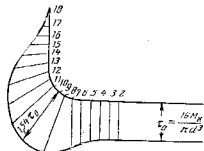


Рис. 198.

пластинке постоянного поперечного сечения падение потенциала будет происходить равномерно по направлению тока, и поэтому линии равного потенциала будут вертикальными равноудаленными друг от друга линиями. Для того чтобы получить две системы линий, аналогичных линиям на рис. 193, нужно взять пластинку, толщина которой изменяется пропорционально кубу расстояния r , как показано на рис. 196, б. Тогда расстояние между линиями тока будет обратно пропорцио-

нально кубу r^3), а расстояние между вертикальными линиями равного потенциала остается по-прежнему постоянным. Таким образом, мы можем получить такую же систему взаимно перпендикулярных линий, как и на рис. 193. Край $O-O$ пластинки соответствует оси вала. Линии равного потенциала соответствуют линиям равного угла закручивания, а линии тока — линиям равного момента в задаче кручения.

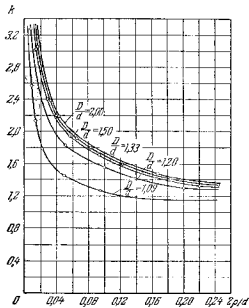


Рис. 199.

Исследование показывает²⁾, что эта аналогия сохраняется также в случае пластинки, имеющей участки различной ширины при толщине, изменяющейся пропорционально кубу расстояния r (рис. 197). Это дает возможность исследовать концентрацию напряжений у выкружки скрученного вала при помощи электрической аналогии. Будем поддерживать постоянную разность потенциалов на концах пластинки и измерять падение потенциала по краю $mnpq$. Таким образом, мы получим расстояния a_1 и a_2 между линиями равного потенциала соответственно у удаленной точки m и у выкружки n . Отношение a_1/a_2 этих

¹⁾ Предполагается, что ток, проходящий на единицу площади поперечного сечения, равномерно распределяется по сечению.

²⁾ См. статью Л. С. Давыдова, ит. на стр. 263.

расстояний дает коэффициент концентрации напряжений для выкружки у точки l .

Действительные измерения были произведены над стальной моделью длиной 61 см, наибольшей шириной 15,2 см и наибольшей толщиной по краю pq 2,54 см. Падение потенциала вдоль края $mnpq$ модели было исследовано при помощи очень чувствительного гальванометра, звонком которого были соединены с двумя острыми иглами, закрепленными в пластинке на расстоянии 2 мм одна от другой. Касаясь этими иглами пластинки, можно определить по гальванометру падение потенциала на расстоянии между острями иглол. При движении иглол вдоль выкружки можно найти место наибольшего градиента вольтажа и измерить этот максимум. Отношение этого максимума градиента вольтажа у удаленной точки m (рис. 197) дает величину коэффициента концентрации напряжений k в уравнении

$$\sigma_{\max} = k \frac{16Mk}{\pi d^3} \quad (268)$$

Результаты таких испытаний в одном частном случае представлены на рис. 198, где падение потенциала, измеренное в каждой точке, показано длиной перпендикуляра к краю пластинки в этой точке. Из этого рисунка видно, что коэффициент концентрации напряжений найден равным 1,54. Значения этого коэффициента, полученные при разных соотношениях размеров валов, даны на рис. 199, где абсциссы изображают отношения радиуса выкружки к наименьшему радиусу вала $2r/d$, а ординаты — коэффициент k для различных отношений D/d .

60. Концентрация напряжений при изгибе

Формулы для нормальных и касательных напряжений при изгибе, выведенные для призматических балок, очень часто применяют также в случае балок переменного поперечного сечения. Это будет давать удовлетворительные результаты при условии, что изменение поперечного сечения происходит не слишком быстро (см. п. 9).

Если же поперечное сечение резко изменяется, то в переходном сечении имеет место значительное нарушение в распределении напряжений. Наибольшее напряжение обычно гораздо больше, чем напряжение, даваемое простой формулой изгиба балки, и оно может быть представлено формулой

$$\sigma_{\max} = k\sigma, \quad (a)$$

где σ — напряжение в рассматриваемой точке, полученной по формуле для призматической балки, и k — коэффициент концентрации напряжений. Лишь в немногих случаях этот коэффициент получается при помощи уравнений теории упругости¹⁾.

¹⁾ H. Neuber, *Ingenieur-Archiv*, т. 5, стр. 288, 1934 и т. 6, стр. 133, 1935.

Пластинка большой ширины с гиперболическими выточками (рис. 183), представляет один из случаев, где мы имеем строгое решение при изгибе для распределения напряжений в выточках. Это решение показывает, что в случае чистого изгиба пластинки парами сил, действующими в срединной плоскости, наибольшее напряжение имеет место в точках m и n , и коэффициент концентрации напряжений в формуле (a) можно представить следующей приближенной формулой:

$$k = \sqrt{0,355 \frac{d}{r} + 0,85} + 0,08, \quad (b)$$

где d — наименьшая ширина пластинки и r — радиус кривизны дна выточки.

В случае круглого вала с гиперболической выточкой, для которого рис. 183 представляет продольное сечение, коэффициент концентрации напряжений при чистом изгибе будет

$$k = \frac{3}{4N} \left(\sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + 1 \right) \left[\frac{3d}{2r} - (1 - 2\nu) \sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + 1 + \nu \right], \quad (c)$$

где

$$N = 3 \left(\frac{d}{2r} + 1 \right) + (1 + 4\nu) \sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + \frac{1 + \nu}{1 + \sqrt{\frac{d}{2r} + 1}}. \quad (d)$$

По-прежнему d — диаметр наименьшего поперечного сечения и r — наименьший радиус кривизны дна выточки. Для больших значений отношения $d/2r$ уравнение (c) можно заменить с достаточной точностью приближенной формулой

$$k = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{d}{2r}}. \quad (e)$$

Большинство сведений относительно величин коэффициента k в уравнении (a) получается опытным путем при помощи оптического метода¹⁾. Коэффициенты концентрации напряжений для чистого изгиба пластинок с полукруглыми выточками и с выкружками в виде четверти окружности, и с диаметром $D = d + 2r$ даны кривыми на рис. 200. На рис. 201 даны коэффициенты концентрации напряжений для выкружек с различными значениями отношения D/d . На рис. 202 даны коэффициенты концентрации напряжений для выточек разной глубины при чистом изгибе.

Для сравнения коэффициентов концентрации напряжений при растяжении и изгибе для пластинок и для круглых валов даны кривые на рис. 203²⁾. Кривые 1 и 2, которые дают коэффициенты концентрации напряжений для гиперболической выточки в пластинке и в круглом вале при растяжении, вычислены из уравнений (b) и (c) стр. 255. Кривые 3 и 4, показывающие подобные значения для выточек при чистом изгибе, вычислены из уравнений (b) и (c) стр. 269.

¹⁾ Кривые, данные в последующем изложении, взяты из статьи M. M. Frocht'a, *итт* на стр. 254. См. также статью: M. M. Leven and M. M. Frocht, *J. Appl. Mech.*, т. 19, стр. 560, 1952.

²⁾ Этот рисунок в следующие взят из статьи: R. E. Peterson and A. M. Wahl, *J. Appl. Mech.*, т. 3, стр. 15, 1936.

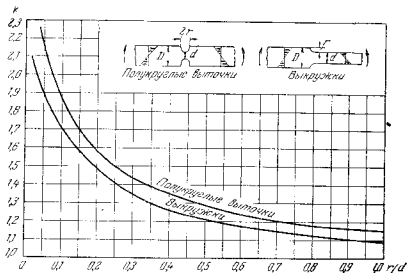


Рис. 200.

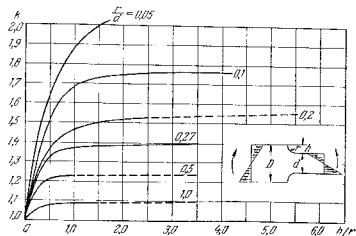


Рис. 201.

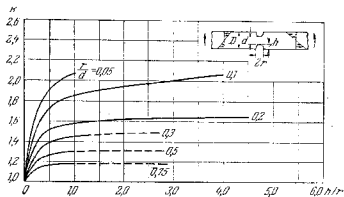


Рис. 202.

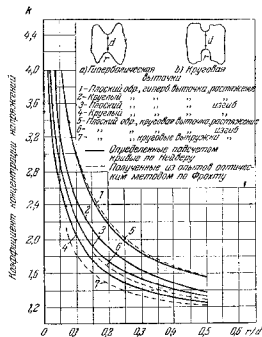


Рис. 203.

По этим кривым можно установить, что коэффициенты концентрации напряжений выше для пластинок, чем для круглых валов; и случае растяжения разница становится более заметной. В случае чистого изгиба, что имеет большое практическое значение, разница между двумя случаями мала, около 6–8% для выточек практических размеров. Пунктирные кривые 5 и 6 на рис. 203 получаются из кривых на рис. 182 и 202 путем экстраполирования этих кривых к большим значениям отношения h/r , которое соответствует глубокой выточке полукруглой на дне. Можно видеть, что кривые 5 и 6 удовлетворительно согласуются с кривыми 1 и 3 для гиперболических выточек

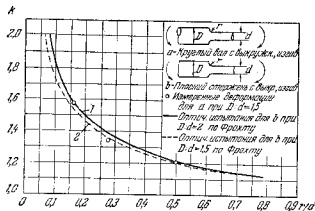


Рис. 204.

для отношений r/d между 0,15 и 0,50. Это указывает на то, что в случае глубоких выточек величина коэффициента концентрации напряжений зависит главным образом от величины отношения r/d и не зависит от формы выточки.

Пунктирная кривая 7 получается из кривых, изображенных на рис. 201 и представляет коэффициенты концентрации напряжений в выкружках пластинок при чистом изгибе с отношением $D/d=2$. Видно, что для выкружек коэффициенты концентрации напряжений несколько ниже, чем для глубоких выточек (кривые 4 и 6) с тем же отношением r/d .

Для того чтобы получить коэффициенты концентрации напряжений для выкружек в круглых валах, были сделаны в исследовательской лаборатории Вестингауза испытания больших стальных валов с отношением диаметров $D/d=1,5$ ¹⁾. Значения этих коэффициентов, полученные путем непосредственного измерения деформаций в выкружках, даны кружочками на рис. 204. Для сравнения на том же рисунке

¹⁾ Westinghouse Research Laboratories.

кривыми 1 и 2 даны ¹⁾ результаты фотоупругих опытов над плоскими моделями с $D/d=2$ и $D/d=1,5$. Из этих опытов можно сделать весьма важное заключение, что коэффициенты концентрации напряжений для круглых валов очень хорошо согласуются со значениями, полученными при помощи фотоупругого метода испытания плоских образцов.

61. Исследования концентрации напряжений с помощью моделей

Уже указывалось, что полное теоретическое решение вопроса о распределении напряжений в местах резких изменений поперечных сечений имеется лишь для немногих простейших случаев, как, например, для круглого или эллиптического отверстия и гиперболической выточки. В большинстве случаев сведения относительно концентрации напряжений получаются из опытов. С этой целью иногда удается произвести измерения деформаций в местах резких изменений поперечных сечений при помощи чувствительных экстензометров. Таким путем, например, была исследована ²⁾ концентрация напряжений при растяжении образцов с выточками. При пользовании этим методом возникают большие затруднения из-за чисто локального характера распределения напряжений в указанном месте, поскольку необходимо получить удовлетворительные результаты ³⁾ при очень малой длине датчика и, следовательно, при очень большом увеличении.

Грубое значение коэффициентов концентрации напряжений можно получить, если образец или модель конструкции нагружать до начала текучести в наиболее напряженных точках. Эту текучесть можно ясно видеть на полированных поверхностях образцов на мягкой стали. Рис. 205 представляет фотографии линий текучести на полосе из мягкой стали. Эти линии текучести (называемые линиями Людерса, см. главу 10) впервые появляются в местах, соответствующих наибольшему напряжению. Распределение этих линий дает весьма ценные указания относительно напряжений в местах резких изменений поперечных сечений ⁴⁾.

¹⁾ Эти кривые были построены на основании данных, приведенных на рис. 201.

²⁾ См. E. Preuss, Z. Ver. deut. Ing., т. 56, стр. 1349, 1912; т. 57, стр. 664, 1913 и Forsch. Ing., № 134, 1913, см. также Th. W. yss, Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, стр. 354, 1924 и его диссертация, Цюрих, 1923. См. также F. Röttscher und J. Stambiegel, Z. Ver. deut. Ing., т. 76, стр. 508, 1932.

³⁾ Для увеличения деформаций в местах резких изменений сечений также применяются, в некоторых случаях резинные модели: см. A. Stodola, Z. Ver. deut. Ing., т. 51, стр. 1272, 1907; Hummel, Schweiz. Bauzeitung, стр. 143, 1924; L. Chisty and A. J. S. Phippard, Proc. Roy. Soc. (London), А, т. 136, стр. 518, 1935. Об увеличении точности измерения деформаций см. статью: James A. Miller, Proc. Soc. Exp. Stress. Anal., т. 10, стр. 29, 1952.

⁴⁾ См. статью М. А. Воропаева, Известия Киевского политехнического института, 1910 и статью автора и Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 419, 1926.

Рис. 206 показывает линии Людерса у выкружки модели, изготовленной из мягкой стали (рис. 181) при соотношении $r/d = 0,157$ и $D/d = 2,5$. Линия начинается от той точки на выкружке, в которой, согласно предварительным опытам, при помощи поляризованного света следовало ожидать наибольшей концентрации напряжений. Коэффициент концентрации напряжений по кривой, взятой из рис. 181, равняется 1,85. Следовательно, текучесть должна начаться в наиболее слабой части, когда среднее растягивающее напряжение в более узком участке модели будет составлять лишь $1/1,85$ того напряжения, которое необходимо для появления линий Людерса в призматическом стержне

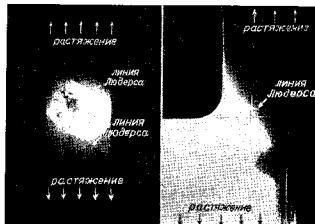


Рис. 205.

Рис. 206.

(рис. 205) из того же материала. Опыт показал, что нагрузка, при которой началась текучесть у выкружки, равнялась $1/1,8$ нагрузки призматического стержня.

На рис. 207 изображены линии Людерса у края круглого отверстия в полосе из мягкой стали. Снова эти линии точно указывают места наибольшей концентрации напряжений. Среднее напряжение по кощевому поперечному сечению у пластинки, при котором произошла текучесть, равнялась $1/2,3$ напряжения, необходимого для текучести в призматическом стержне.

В обоих предыдущих примерах текучесть в местах наибольших напряжений появлялась при среднем напряжении, которое выше указанного действительными коэффициентами концентрации. Это можно объяснить следующим образом. Небольшая область перенапряженного материала окружена участками, где напряжение не превосходит предела

пропорциональности. Это препятствует скольжению, показанному на рис. 205, по плоскостям, перпендикулярными плоскости рисунка и наклоненным под углом 45° к направлению растяжения. В случаях, изображенных на рис. 206 и 207, линии Людерса начинаются на полированных поверхностях пластинок в виде тонких линий, перпендикулярных наибольшему растягивающему напряжению. Это указывает на то, что в этих случаях скольжение происходит по плоскостям, проходящим через эти линии и наклоненным под углом 45° к плоскостям пластинок. В таком случае толщина пластинки играет

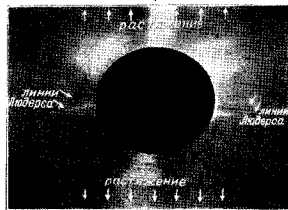


Рис. 207.

важную роль. Эта толщина должна быть очень мала по сравнению с радиусом отверстия или выкружки для того, чтобы поверхность скольжения полностью находилась в области сильно перенапряженного материала. То обстоятельство, что поверхность скольжения, начинающаяся в точках наибольших напряжений, должна пересечь область с меньшими напряжениями, объясняет ¹⁾ запаздывание в появлении линий Людерса. В указанном выше случае круглого отверстия ширина пластинки была 15,24 см, диаметр отверстия 2,54 см, а толщина пластинки — лишь 0,32 см. При испытании моделей, у которых толщина и диаметр отверстия были одного порядка, невозможно было обнаружить какое-либо существенное влияние концентрации напряжений на величину нагрузки, вызывающей линии Людерса. Другой причиной запаздывания в появлении линий Людерса может служить то обстоятельство, что прежде чем линии Людерса станут заметными, может иметь место некоторая остаточная деформация.

¹⁾ Это объяснение было предложено автору L. H. Donnell'ом.

Метод определения слабых мест в конструкциях, основанный на изучении линий Людерса, не ограничивается каким-либо частным типом задачи и имеет перед оптическим методом, описанным в следующем параграфе, то преимущество, что он применим к пространственным задачам, т. е. к таким, в которых рассматриваются напряжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Для того чтобы сделать текучесть металла видимой на шероховатой поверхности при исследовании напряжений в линиях котлов¹⁾ и в составных сжатых стержнях²⁾ поверхность покрывают хрупким лаком. Делая после испытания разрез образцов и моделей и применяя специальный способ протравливания поверхностей разреза, можно обнаружить внутренние области, в которых имела место текучесть, и таким образом получить указание относительно текучести металла в наиболее напряженных точках³⁾.

62. Оптический метод измерения напряжений

Имеется много задач о напряженном состоянии, когда деформации, по существу, происходит в одной плоскости. Это так называемые *двумерные задачи*. Примерами служат: изгиб балок узкого прямоугольного поперечного сечения, изгиб ферм, арки, зубчатых колес или вообще пластинок какой угодно формы, но постоянной толщины, на которые действуют силы или моменты в плоскости пластинки. Форма пластинок может быть такой, что становится весьма затруднительным аналитическое определение закона распределения напряжений; для таких случаев оказывается весьма полезным *фотоупругий метод*. В этом методе применяются модели, вырезанные из пластинок изотропного прозрачного материала, как, например, стекло, целлулоид или бакелит. Хорошо известно, что под действием напряжений эти материалы становятся *двоичнолучепреломляющими*, и если луч *поляризованного света* проходит через прозрачную модель, находящуюся в напряженном состоянии, то при этом можно получить окрашенное изображение, по которому удастся найти закон распределения напряжений⁴⁾.

¹⁾ См. статью: F. Koerber und E. Siebel, Mittell. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 8, стр. 63, 1926 и т. 9, стр. 13, 1927.

²⁾ R. S. Johnston, Iron and Steel Inst., т. 112, стр. 341, 1925. См. также статью: William F. Stokey, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 10, стр. 179, 1952.

Метод был применен к исследованию напряжений в машинах частях Dietrich und Leht, Z. Ver. deut. Ing., т. 76, 1932. См. также H. Kayser, Bautechnik, 1936; A. V. de Forest and Geer Ellis, J. Aeronaut. Sci., т. 7, стр. 205, 1940 и M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, стр. 636, 1950.

³⁾ См. статью: A. Fry, Krupp'sche Monatsh., июль 1921, также Stahl u. Eisen, 1921.

⁴⁾ Явление двойного лучепреломления под действием напряжений было открыто D. Brewster'ом, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1816 и в дальнейшем изучено F. E. Neuman'ом, Berlin Abh., 1841 и J. C. Maxwell'ом,

На рис. 208 *abcd* представляет прозрачную пластинку постоянной толщины, а *O* — точку пересечения пластинки с лучом поляризованного света, перпендикулярным к плоскости пластинки. Предположим, что *OA* изображает плоскость световых колебаний, а длина *OA* = *a* представляет амплитуду этих колебаний. Предположим, что свет совершает простое гармоническое колебание; тогда перемещение может быть представлено уравнением

$$s = a \cos pt, \quad (a)$$

где *p* пропорционально частоте колебаний, которая зависит от угла светового луча.

Представим, что к краям пластинки приложены разные по величине напряжения σ_x и σ_y . Вследствие разности напряжений оптические свойства пластинки также получаются различными в двух перпендикулярных направлениях. Пусть v_x и v_y соответственно означают скорости распространения света в плоскостях Ox и Oy . Разложим простое колебание в плоскости *OA* на два компонента в плоскостях *Ox* и *Oy* с соответствующими амплитудами $\overline{OB} = a \cos \alpha$ и $\overline{OC} = a \sin \alpha$. Тогда соответствующие перемещения будут

$$x = a \cos \alpha \cos pt, \quad y = a \sin \alpha \cos pt. \quad (b)$$

Если *h* — толщина пластинки, то промежутки времени, потребные для прохождения сквозь пластинку двух указанных составляющих колебаний, соответственно будут

$$t_1 = \frac{h}{v_x} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{h}{v_y}, \quad (c)$$

Trans. Roy. Soc. (Edinburgh), т. 20, 1853, см. также его научные статьи, т. 1, стр. 30. Применение этого явления к решению технических задач было начато C. Wilson'ом, Phil. Mag. (сер. 5), т. 32, 1891 и в дальнейшем развито A. Mesnager'ом, Ann. ponts et chaussées, 1901 и 1913; и E. G. Coker'ом, General Electric Co. Mag., 1930 и J. Franklin Inst., 1925. О дальнейшем развитии оптического метода см. статью: Henry Favier, Schweiz. Bauzeitung, т. 20, стр. 291, 1927; см. также его диссертацию «Sur une nouvelle méthode optique de détermination de tensions intérieures», Париж, 1929. Применение монохроматического света (так называемый метод полос) было введено Z. Tuzi, Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo), т. 8, стр. 247, 1928. Этот вопрос освещен подробно в книге E. G. Coker and L. N. G. Filon, Photo-Elasticity, 1931; и также в книге: M. M. Frocht, Photo-Elasticity, 1941. Точность оптического метода исследования разобрана в статье M. M. Frochta R. G. G. Fieser und D. Landsberg'a, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 105, 1953.

и перемещения (уравнения (b)) после прохождения света сквозь пластинку представится уравнениями

$$x_1 = a \cos \alpha \cos p(t - t_1), \quad y_1 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2). \quad (d)$$

Из-за разности скоростей эти составляющие колебания имеют разность фаз, равную $p(t_2 - t_1)$. Опыты показывают, что разность скоростей распространения света пропорциональна разности напряжений, т. е.

$$t_2 - t_1 = \frac{h}{v_y} - \frac{h}{v_x} = \frac{h(v_x - v_y)}{v_x v_y} \approx \frac{h(v_x - v_y)}{v^2} = k(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad (e)$$

где v есть скорость распространения света при напряжении, равно нулю, и k — численный коэффициент, зависящий от физических свойств материала пластинки. Мы видели, что разность двух главных напряжений может быть найдена путем измерения разности фаз двух колебаний. Это может быть проделано, если колебания будут интерферировать в одной и той же плоскости. С этой целью за пластинкой помещают призму Николя (называемую *анализатором*) так, чтобы она пропускала лишь колебания в плоскости mn , перпендикулярной плоскости OA . Составляющие колебания (d), которые пройдут сквозь призму, будут иметь амплитуды $OB_1 = OB \sin \alpha = \left(\frac{a}{2}\right) \sin 2\alpha$ и $OB_2 = OB \cos \alpha = \left(\frac{a}{2}\right) \sin 2\alpha$. Следовательно, результирующее колебание в плоскости mn будет

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_1) - \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_2) = \\ = \left(\frac{a}{2} \sin 2\alpha \sin p \frac{t_2 - t_1}{2}\right) \sin p \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2}\right). \quad (f) \end{aligned}$$

Таким образом, получается простое гармоническое колебание, амплитуда которого пропорциональна $\sin p(t_2 - t_1)/2$; следовательно, интенсивность освещения является функцией разности фаз $p(t_2 - t_1)$. Если напряжения ε_x и ε_y равны между собой, то t_1 и t_2 также будут равны и амплитуда результирующего колебания будет равна нулю. В этом случае мы будем наблюдать затемнение. Это же будет и в том случае, если разность напряжений такова, что

$$p \frac{t_2 - t_1}{2} = n\pi, \quad (g)$$

где n — целое число. Наибольшая интенсивность освещения получится и в том случае, когда разность напряжений такова, что

$$\sin p \frac{t_2 - t_1}{2} = \pm 1.$$

Вообразим, что вместо элемента $abcd$ (рис. 208) мы имеем пластинку из прозрачного материала, находящуюся в состоянии простого

растяжения. Путем постепенного увеличения растягивающего напряжения мы получим темную картину изображения пластинки на экране каждый раз, когда уравнение (g) выполнится. Таким образом, мы можем установить опытным путем для данного материала данной толщины напряжения, соответствующее промежутку между двумя последовательными темными изображениями образца. Например, для одного рода фенолиновой пластинки толщиной 1 мм это напряжение было найдено равным 108 кг/см^2 . Следовательно, для пластинки толщиной 6,35 мм соответствующее напряжение ¹⁾ будет равняться $108/6,35 = 17 \text{ кг/см}^2$. Имея эти сведения, мы можем получить напряжения в пластинке, находящейся в состоянии растяжения, считая число промежутков между последовательными темными изображениями, имеющими место при постепенном нагружении образца.

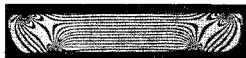


Рис. 209.

Если мы возьмем пластинку, находящуюся в состоянии чистого изгиба, то получим картину, подобную показанной на рис. 209. Параллельные темные полоски указывают на то, что в части полосы, находящейся на достаточном расстоянии от точек приложения грузов, распределение напряжений одинаково во всех вертикальных поперечных сечениях. Считая число полосок, мы можем определить величины напряжений, поскольку напряжение между двумя последовательными темными изображениями при простом растяжении. Наблюдая за пластинкой при постепенном приложении нагрузки, мы можем видеть, что число темных полосок увеличивается с возрастанием нагрузки. Новые полоски всегда появляются сверху и внизу полосы и постепенно движутся к нейтральной плоскости, так что полоски становятся все более близкими друг другу. Тогда напряжение в какой-либо точке получится путем отсчитывания числа полосок, которые проходят через эту точку.

Метод подсчета числа темных полосок, проходящих через выбранную точку, можно применить также в любом случае плоского распределения напряжений. Как видно из наших предыдущих рассуждений, это число даст разность между двумя главными напряжениями в точке. Для полного определения напряжения в точке остается найти направления главных напряжений и их сумму. Уравнение (f)

¹⁾ Z. T. et al., Sci. Papers, Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo), т. 12, стр. 247, 1929.

показывает, что интенсивность света, проходящего через анализатор, пропорциональна $\sin 2\alpha$, где α — угол между плоскостью поляризации и плоскостью одного из главных напряжений (рис. 208). Если эти две плоскости совпадают, то $\sin 2\alpha$ равен нулю, и мы получим темное пятно на экране. Следовательно, при исследовании напряженной прозрачной модели в поляризованном свете мы получаем не только темные полоски, рассмотренные ранее, но также темные линии, соединяющие точки, в которых одно из направлений главного напряжения совпадает с плоскостью поляризации. Вращая обе призмы Николя, поляризатор и анализатор, и отмечая темные линии на изображении напряженной пластинки для различных направлений плоскости поляризации, мы находим систему *изоклинных линий*, которые соединяют вместе точки с одинаковыми направлениями главных напряжений. Имея эти линии, мы можем начертить линии, которые будут касательными в каждой точке к осям главных напряжений. Эти последние линии называются *траекториями* главных напряжений (см. т. I, стр. 115). Таким образом, направления главных напряжений в каждой точке пластинки можно получить оптическим путем.

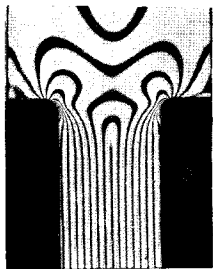


Рис. 210.

Сумма главных напряжений может быть также получена из опыта измерением изменений Δh толщины h пластинки, происходящих под действием напряжений σ_x и σ_y ¹⁾, и применив известное соотношение

$$\Delta h = \frac{\mu h}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (h)$$

Имея разность двух главных напряжений из оптического метода изгибаний и их сумму по выражению (h), мы можем легко вычислить величины главных напряжений. Полоски, полученные в пластинке

¹⁾ Этот метод был предложен А. Мешагертом, цит. на стр. 277. Необходимый боковой экстензиометр был разработан и успешно применен А. М. Вайтом. См. статьи: R. E. Peterson and A. M. Wahl, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 1, 1935.

с выкружками, подверженной действию чистого изгиба, показаны для изгибности на рис. 210. Из того обстоятельства, что полоски сгущены у выкружек, можно заключить, что в этих точках имеет место значительная концентрация напряжений. На рис. 211 показаны полоски для центрально нагруженной балки, лежащей на двух опорах.



Рис. 211.

В приведенном изложении оптического метода при анализе напряжений предполагалось, что мы имеем дело с плоскими задачами. В последнее время были сделаны значительные усилия к тому, чтобы распространить оптический метод на пространственные задачи, и уже получены некоторые многообещающие результаты¹⁾.

63. Напряжения при касании шаров и цилиндров

Если два упругих тела, скажем два шара, давят один на другой, то образуется малая поверхность соприкосновения как результат местной деформации. Давления, распределенные по этой поверхности, называются контактными давлениями.

Величина этих давлений и напряжения, возникающие в телах, могут быть вычислены при помощи уравнений теории упругости²⁾. Здесь мы дадим лишь окончательные результаты таких исследований.

В случае *двух шаров*, сжатых силами P (рис. 212), давления распределяются по малому *кругу контакта* mn , радиус которого определяется формулой

$$a = 0,88 \sqrt{\frac{P(E_1 + E_2)d_1 d_2}{2E_1 E_2 (d_1 + d_2)}}. \quad (269)$$

В этом выражении E_1 и E_2 — модули упругости двух шаров и d_1 и d_2 — соответствующие диаметры. Наибольшее давление имеет место в центре круга контакта и дается формулой

$$P_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2}. \quad (270)$$

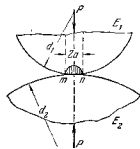


Рис. 212.

¹⁾ См. статью: M. Hetényi, J. Appl. Mech., т. 5, стр. 149, 1938; см. также R. Wellen, J. Appl. Phys., т. 10, стр. 266, 1939 и параграф D. C. Drucker'a в M. Hetényi, ed., Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950.

²⁾ Эта задача была решена H. Hertz'em, Gesammelte Werke, т. 1, 1895. Разбор задачи и библиография даны в книге: Timoshenko and Goodier

Вследствие местной деформации центры шаров приближаются один к другому на расстояние

$$\lambda = 0,77 \sqrt{2\rho^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)} \quad (271)$$

Когда диаметры шаров и модули упругости равны между собой, то вышеприведенные формулы получаются в следующем виде:

$$a = 0,88 \sqrt{\frac{P d}{2E}}, \quad P_{\max} = 0,62 \sqrt{\frac{4PE^2}{d^2}}, \quad \lambda = 1,34 \sqrt{\frac{2P\rho^2}{E^2 d}} \quad (272)$$

Когда шар диаметром d прижимается к упругому телу, имеющему плоскую поверхность, требуемые формулы получаются путем подстановки $d_1 = d$, $d_2 = \infty$ в формулы (269)–(271). Полагая $E_1 = E_2 = E$, находим для этого случая:

$$a = 0,88 \sqrt{\frac{P d}{E}}, \quad P_{\max} = 0,62 \sqrt{\frac{PE^2}{d^2}}, \quad \lambda = 1,34 \sqrt{\frac{P\rho^2}{E^2 d}} \quad (273)$$

В случае шара в сферическом углублении (рис. 213) знак d_2 в выражениях (269)–(271) должен быть изменен. Тогда для случая $E_1 = E_2 = E$ находим

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,88 \sqrt{\frac{P}{E} \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1}}, \\ P_{\max} &= 0,62 \sqrt{PE^2 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 d_1} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

Необходимо заметить, что в случаях, представленных формулами (272) и (273), наибольшее сжимающее напряжение в центре поверхности соприкосновения зависит от величины отношения P/d^2 , т. е. наибольшее напряжение остается постоянным, если это отношение не меняется. Так оправдывается обычная практика определения безопасного диаметра шара назначением определенной величины нагрузки на квадратный сантиметр диаметрального сечения шара. Так как материал в центре поверхности соприкосновения удерживается от поперечного расширения, он находится в состоянии сжатия со всех сторон и может выдерживать очень высокие давления без разрушения (см. п. 81).

В опытах ⁴⁾ с закаленной титановой сталью допускаемая сжимающая сила P в случае давления шара на плоскую поверхность иногда принималась по формуле

$$P_{\max} = 49 d^2,$$

в которой d в сантиметрах и P в килограммах. Подставляя во второе из выражений (273), находим P_{\max} равным приблизительно 37 000 кг/см².

⁴⁾ Theory of Elasticity, стр. 372, 1951; русский перевод, 1937, стр. 96. См. также И. Ш. Гагарман, Контактные задачи, 1949; И. М. Беляев, Сопротивление материалов, 1945.

⁵⁾ С. M. Stiebeck, Z. Ver. deut. Ing., стр. 73, 1901. Schwinning, там же, стр. 332 и A. Bauschlicher, там же, стр. 1185, 1903.

Для общего случая сжатия двух тел, имеющих одинаковые модули упругости E , пусть $1/r_1$ и $1/r_2$ являются главными кривизнами в точке соприкосновения одного из тел, а $1/r_2'$ и $1/r_2''$ — кривизнами другого ⁴⁾, и пусть θ означает угол между нормальными плоскостями, содержащими кривизны $1/r_1$ и $1/r_2''$. Поверхность контакта в общем случае представляет эллипс, полуоси которого даются формулами

$$a = \alpha \sqrt{\frac{3Pm}{\pi}}, \quad b = \beta \sqrt{\frac{3Pm}{\pi}}, \quad (275)$$

в которых P — сжимающая сила, а

$$m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'}}, \quad \alpha = \frac{4E}{3(1-\mu^2)},$$

Постоянные α и β берутся из табл. 20 для каждого частного случая. Угол θ в первой колонке таблицы вычисляется из соотношения

$$\cos \theta = \frac{B}{A}, \quad (a)$$

в котором $A = \frac{2}{m}$;

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} \right) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'} \right) \cos 2\theta'}$$

Выражение для наибольшего давления в центре поверхности соприкосновения в этом случае будет

$$P_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (276)$$

Таблица 20

Постоянные для вычисления полуосей эллипса контакта

θ градусы	α		θ градусы	β		θ градусы	γ	
	α	β		α	β		α	β
20	3,778	0,408	50	1,754	0,641	75	1,202	0,846
30	2,731	0,493	55	1,611	0,678	80	1,128	0,893
35	2,397	0,530	60	1,486	0,717	85	1,061	0,944
40	2,136	0,567	65	1,378	0,759	90	1,000	1,000
45	1,925	0,604	70	1,284	0,802			

В случае сжатия цилиндрических катков (рис. 214) площадь контакта представляет собой узкий прямоугольник, ширина которого b дается ⁵⁾ формулой

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{P\rho^2}{2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}, \quad (277)$$

⁴⁾ Главные кривизны представляют собой наибольшую и наименьшую кривизны и находятся в перпендикулярных плоскостях. Кривизна тела рассматривается положительной, если соответствующий центр кривизны находится внутри тела.

⁵⁾ См. А. Форрл, Technische Mechanik, т. 5, стр. 351, 1907.

в которой P означает сжимающую силу, приходящуюся на единицу длины катки. Наибольшее единичное давление в середине прямоугольника соприкасания будет

$$p_{\max} = 0,59 \sqrt{\frac{2P(d_1 + d_2)E_1E_2}{d_1d_2(E_1 + E_2)}}. \quad (278)$$

В частном случае, в котором модуль упругости для двух катков равен между собой, имеем

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{Pd_1d_2}{E(d_1 + d_2)}}, \quad p_{\max} = 0,59 \sqrt{PE \frac{d_1 + d_2}{d_1d_2}}. \quad (279)$$

Если один из диаметров взят бесконечно большим, как в случае касания

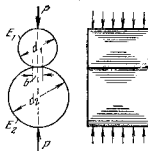


Рис. 214.

цилиндра с плоскостью, то формулы (279) сводятся к следующим:

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{Pd}{E}}, \quad p_{\max} = 0,59 \sqrt{\frac{PE}{d}}. \quad (280)$$

Видно, что наибольшее напряжение остается постоянным, если P изменяется пропорционально d . Это оправдывает практику определения безопасных размеров по диаметральной площади поперечного сечения катка. Допускаемая сжимающая сила P в случае обычных стальных цилиндрических катков, в мостах например, получается по формуле

$$P = 49d.$$

Подставляя в уравнение (280), мы находим, что наибольшее давление будет приблизительно равняться 6000 кг/см^2 .

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее давление на поверхности контакта C в процент шариковом подшипнике, показанном на рис. 215. Диаметр шариков $d = 38 \text{ см}$, радиус поверхности канавки $r_1 = 2,5 \text{ см}$, диаметр ободья равен 20 см , а наибольшая сжимающая шарик сила $P = 2000 \text{ кг}$.

¹⁾ Об испытании стальных цилиндров см. W. M. Wilson, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 162, 1927; № 191, 1929; № 263, 1934. См. также V. P. Jensen, Iowa Eng. Exp. Sta. Bull., № 138, 1937. Испытания на упругость катков рассмотрены в п. 89.

Решение. Пользуясь обозначениями на стр. 283, получаем

$$r_1 = r_1' = \frac{38}{2} = 1,9 \text{ см}, \quad r_2 = -2,5 \text{ см}, \quad r_2' = -10 \text{ см};$$

$$m = \frac{4}{\frac{1}{1,9} + \frac{1}{1,9} - \frac{1}{2,5} - \frac{1}{10}} = 7,25, \quad n = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 0,91} = 3,22 \cdot 10^6;$$

$$2A = \frac{4}{m} = \frac{4}{7,25} = 0,553, \quad 2B = \frac{1}{2,5} - \frac{1}{10} = 0,3.$$

Подставляя в уравнение (а), получаем

$$\cos \theta = \frac{0,3}{0,553} = 0,543, \quad \theta = 57^\circ.$$

Тогда из таблицы 20 путем интерполирования найдем

$$\alpha = 1,561, \quad \beta = 0,694.$$

Полуоси эллипса контакта вычисляем по формулам (275)

$$a = 1,561 \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 7,25}{3,22 \cdot 10^6}} = 0,258 \text{ см},$$

$$b = 0,694 \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 7,25}{3,22 \cdot 10^6}} = 0,115 \text{ см},$$

и из формулы (276) получим

$$p_{\max} = 1,5 \frac{2000}{\text{каб}} = 32260 \text{ кг/см}^2.$$

Такое высокое напряжение может выдерживать закаленная сталь благодаря тому, что в центре эллипса контакта материал сжимается не только в направлении действия силы P , но также и в боковых направлениях.

2. Определить поверхность контакта и наибольшее давление между двумя круглыми цилиндрами, оси которых взаимно перпендикулярны. Примером такой задачи может служить контактное давление колеса, имеющего цилиндрический бандаж, на рельс¹⁾.

Решение. Обозначая через r_1 и r_2 радиусы цилиндров и пользуясь обозначениями стр. 283, находим:

$$\frac{1}{r_1'} = 0, \quad \frac{1}{r_2'} = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad n = \frac{4E}{3(1-\mu^2)},$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1r_2}} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

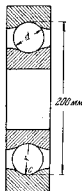


Рис. 215.

¹⁾ Вопрос о давлении в месте соприкосновения приобретает большое значение, поскольку нагрузки на оси в поезных локомотивах увеличиваются. О решении этой задачи см. статью Н. Фрошша, V. D. L., т. 73, стр. 957, 1929 и статью Н. М. Беляева, Известия Ленинградского института инженеров путей сообщения, 1929.

Знак нужно выбрать так, чтобы B было положительным. Из уравнения (а) находим

$$\cos \theta = \pm \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}.$$

Зная θ , мы определим полуоси эллипса контакта по формуле (275) и наибольшее давление по формуле (276).

В частном случае, когда цилиндры имеют одинаковые радиусы, $\cos \theta = 0$, и на основании табл. 20 можно заключить, что поверхность соприкосновения имеет круговой контур.

3. Найти наибольшее давление между колесом с цилиндрическим бандажом радиуса $r = 40$ см и рельсом с радиусом головки $r_2 = 30$ см, если $P = 400$ кг и коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$.

Ответ. Полуоси эллипса контакта равны $a = 0,236$ см, $b = 0,198$ см, а наибольшее давление

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \approx 4000 \text{ кг/см}^2.$$

ГЛАВА IX

ДЕФОРМАЦИИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

64. Системы из идеально пластических материалов

В предыдущем изложении всегда предполагалось, что материал конструкции следует закону Гука. На основании этого закона были проанализированы деформации и распределения напряжений в различных случаях. Однако имеются случаи, в которых необходимо исследовать деформацию сооружения за пределом пропорциональности. Для выполнения такого исследования нужно знать механические свойства материалов за пределом пропорциональности. Эти свойства обычно определяются при помощи диаграмм растяжения и сжатия.

Простейший вид диаграммы имеют в случае *идеально пластического материала*. Такой материал следует закону Гука до предела пропорциональности, и затем начинается текучесть при постоянном напряжении. Соответствующие диаграммы растяжения и сжатия даны на рис. 216. Строительные стали с резко выраженным пределом текучести и значительным при этом удлинением приближаются в известных границах по своим свойствам к идеально пластическим материалам, а анализ напряженного состояния сооружений на основании диаграммы на рис. 216 имеет большое практическое значение во многих случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим несколько задач такого рода.

Чистый изгиб. При рассмотрении чистого изгиба за пределом пропорциональности мы будем делать те же предположения, что и в случае упругого изгиба (см. т. I, п. 23, стр. 85). А именно, предположим: 1) что поперечные сечения балки при изгибе остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси и 2) что продольные волокна

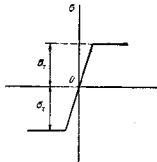


Рис. 216.

балки находятся в состоянии простого растяжения или сжатия и не давят друг на друга в поперечном направлении¹⁾. Рассмотрим балку с продольной плоскостью симметрии и предположим, что изгибающие моменты действуют в той же плоскости; мы будем наблюдать, что изгиб происходит в этой же плоскости и что при изгибе поперечные сечения балки будут поворачиваться вокруг своих нейтральных осей, перпендикулярных плоскости изгиба. Относительное удлинение волокна в расстоянии y от нейтральной оси (см. гл. I, стр. 86) при этом равно

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \quad (a)$$

Величина же изгибающего момента, при котором начнется текучесть, должна быть вычислена по формуле (см. т. I, стр. 88)

$$M_T = \sigma_T J_z, \quad (b)$$

в которой J_z — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно ее нейтральной оси, и c — расстояние от этой оси до наиболее удаленного волокна.

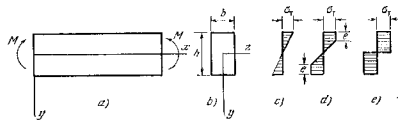


Рис. 217.

Рассматривая в качестве простейшего примера прямоугольную балку (рис. 217), получаем²⁾

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^3}{6}; \quad (c)$$

соответствующее распределение напряжений показано на рис. 217, e. Все волокна балки находятся в упругом состоянии и наиболее удаленные волокна как раз достигли напряжения, соответствующего пределу текучести. Если мы несколько увеличим изгибающий момент

¹⁾ Эти предположения хорошо согласуются с опытами; см. статью G. H. MacLoughlin, Trans. A. S. M. E., т. 55, стр. 55, 1935.

²⁾ Мы предполагаем, что σ_T при растяжении и сжатии одинаковы. Наши выводы можно легко обобщить, если σ_T имеет различное значение при растяжении и сжатии.

сверь величины M_T , то волокна вблизи верхней и нижней поверхностей балки начнут испытывать состояние текучести и распределение напряжений будет таким, как показано на рис. 217, d. Пластические деформации проникают все глубже в балку с увеличением изгибающего момента. Для каждого значения e глубины этого распространения соответствующий изгибающий момент, определяемый с помощью затрихованной площади на рис. 217, d, даст уравнение

$$M = \sigma_T be (h - e) + \sigma_T \frac{b(h - 2e)^3}{6} = \sigma_T \frac{bh^3}{6} \left[1 - \frac{2e}{h} \left(1 - \frac{e}{h} \right) \right]. \quad (d)$$

Соответствующая кривизна изогнутой оси балки найдется использованием уравнения (a). Применяя это уравнение к волокнам, находящимся на расстоянии $h/2 - e$ от нейтральной оси, и замечая, что напряжение в этих волокнах достигает предела пропорциональности σ_T , получаем

$$\sigma_T = \frac{E \left(\frac{h}{2} - e \right)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \frac{\sigma_T}{E \left(\frac{h}{2} - e \right)}. \quad (e)$$

Пользуясь уравнениями (d) и (e), мы можем представить зависимость между изгибающим моментом M и кривизной $1/r$ графически, как показано на рис. 218. До значения $M = M_T$ деформация является упругой и кривизна балки увеличивается пропорционально изгибающему моменту. Когда M увеличивается за M_T , то зависимость между M и $1/r$ становится нелинейной. Соответствующая кривая (рис. 218) становится круче по мере того, как глубина e распространения пластической деформации приближается к значению $h/2$, а распределение напряжений — таким, как показано на рис. 217, e. Подставляя $e = h/2$ в выражение (d), получаем наибольшее значение изгибающего момента, равное

$$M_{\text{пред}} = \sigma_T \frac{bh^3}{4}. \quad (f)$$

На рис. 218 значение $M_{\text{пред}}$ определяет положение вертикальной асимптоты к кривой. Когда M приближается к $M_{\text{пред}}$, малое увеличение M вызывает большое увеличение кривизны, так что $M_{\text{пред}}$ вызывает полное разрушение балки¹⁾.

¹⁾ Понятие о предельном моменте хорошо подтверждается опытными исследованиями; см. статью J. F. Walker, J. Inst. Aeronaut. Engng., т. 31, стр. 188, 1949.

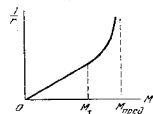


Рис. 218.

Формулы (с) и (f) были выведены для прямоугольных балок, и мы можем заключить, что при этой форме поперечного сечения для полного разрушения балки требуется изгибающий момент на 50%, больший того, при котором начинается пластическая деформация. Подобные же формулы можно легко вывести для симметричных поперечных сечений других форм.

Рассмотрим, например, двутавровую балку (рис. 219). Изгибающий момент, при котором начинается текучесть, получается путем умножения σ_T на момент сопротивления (см. формулу (b)), и мы получаем

$$M_T = \sigma_T \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} \right) \frac{2}{h}. \quad (g)$$

При вычислении $M_{\text{пред}}$ учтем, что распределение напряжений должно отвечать показанному на рис. 217, e. Момент внутренних растягивающих усилий относительно нейтральной оси получается умножением σ_T на статический момент половины поперечного сечения относительно этой же оси. Удваивая этот момент, находим

$$M = \sigma_T \left(\frac{bh^3}{4} - \frac{b_1 h_1^3}{4} \right). \quad (h)$$

Из выражений (g) и (h) теперь получим

$$\frac{M_{\text{пред}}}{M_T} = 3 \frac{1 - \frac{b_1 h_1^3}{bh^3}}{1 - \frac{b_1 h_1^3}{bh^3}}. \quad (i)$$

Мы видим, что для двутавровой балки отношение $M_{\text{пред}}/M_T$ меньше чем 3,2 и что его значение зависит от размеров поперечного сечения. Предполагая, например, $b_1/b = h_1/h = 0,9$, мы найдем из уравнения (i) $M_{\text{пред}}/M_T = 1,18$. В этом случае $M_{\text{пред}}$ на 18% больше M_T . В случае обычных прокатных двутавровых балок вычисления дают значения для $M_{\text{пред}}/M_T$, равные 1,15—1,17.

Из этого обсуждения видно, что если прямоугольная и двутавровая балки рассматриваются при одном и том же коэффициенте безопасности по отношению к пределу текучести, то прямоугольная балка будет прочнее двутавровой балки, если иметь в виду полное разрушение. После начала текучести прямоугольная балка имеет большую способность дополнительного сопротивления, чем двутавровая балка. В теоретическом случае двутавровой балки, у которой весь материал сосредоточен в тонких полках, найдем $M_{\text{пред}} = M_T$, и начало текучести совпадет с полным разрушением балки.

В случае прямоугольного и двутаврового поперечных сечений мы имеем две оси симметрии и нейтральная ось совпадает с одной из этих осей при упругой и пластической деформации. Если же мы

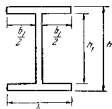


Рис. 219.

имеем только одну ось симметрии, например в случае таврового сечения (рис. 220), положение будет иным. При вычислении M_T все волокна балки находятся в упругом состоянии, и нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. При вычислении $M_{\text{пред}}$ примем распределение напряжений, как на рис. 220, b, и поскольку сумма внутренних растягивающих усилий должна равняться сумме сжимающих усилий, заключаем, что нейтральная ось делит площадь поперечного сечения на две равные части. Когда положение нейтральной оси найдено, величина $M_{\text{пред}}$ вычислится из выражения

$$M_{\text{пред}} = \frac{1}{2} \sigma_T F a,$$

в котором F — площадь поперечного сечения и a — расстояние между центрами тяжести двух частей поперечного сечения.

Изгиб поперечными силами. Рассмотрим для примера случай свободно опертой и центрально нагруженной прямоугольной балки (рис. 221). Эпюра изгибающих моментов представляется треугольной, и если $M_T < Pl/4 < M_{\text{пред}}$, то длина среднего участка балки, в котором имеет место пластическая деформация, может быть определена,

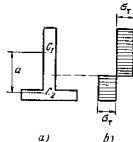


Рис. 220.

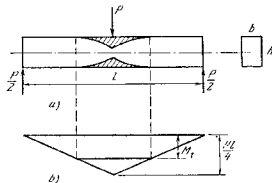


Рис. 221.

как показано на рис. 221, b. Пренебрегая влиянием касательных напряжений³⁾, глубину e распространения пластической деформации в каждом поперечном сечении можно вычислить из выражения (d) и таким путем определить области пластического течения, заштрихованные

³⁾ Опыты J. F. Baker'a and J. Roderick'a оправдывают это предположение; см. Trans. Inst. Welding, т. 3, стр. 83, 1940.

из рисунка. Когда наибольший изгибающий момент $P/4$ приближается к значению $M_{\text{пред}}$, то области пластичности приближаются к нейтральной оси среднего поперечного сечения балки. Сопротивление изгибу в этом поперечном сечении определится наибольшим значением момента, при котором балка начнет разрушаться. Две половины балки будут поворачиваться одна относительно другой вокруг нейтральной оси среднего поперечного сечения, как вокруг шарнира. Это сечение, называемое *пластическим шарниром*, противостоит вращению при действии постоянного предельного момента $M_{\text{пред}}$.

Чтобы исследовать прогиб балки, имеющей области пластической деформации (рис. 221, а), пренебрежем влиянием поперечных сил на прогиб и воспользуемся выражениями (д) и (е), выведенными для чистого изгиба. Исключая σ_r из этих уравнений, получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{kEJ_z}, \quad (j)$$

где

$$k = \left(1 - \frac{2e}{h}\right) \left[1 + \frac{2e}{h} \left(1 - \frac{e}{h}\right)\right]. \quad (k)$$

Величина k является функцией e и равна единице, когда $e=0$, и равна нулю, когда $e=h/2$. Для поперечного сечения любой формы в пластической области балки по рис. 221, а, e можно вычислить по выражению (д), и k — найти из формулы (к).

Уравнение (j) для кривизны имеет такой же вид, как и в случае упругого изгиба, при условии, что мы принимаем M/k вместо M . Для применения *графоаналитического метода* (см. т. I, стр. 131) при вычислении прогибов мы должны воспользоваться *видоизменной* эпюрой изгибающих моментов, в которой ординаты равны M/k . Когда M приближается к $M_{\text{пред}}$, k приближается к нулю; ординаты видоизменной эпюры увеличиваются неограниченно, и мы приближаемся к условию, когда образуется пластический шарнир.

В предидущем изложении была рассмотрена прямоугольная балка, но подобные выводы можно сделать для других форм поперечных сечений. Вообще прогиб балки в плоскости симметрии за пределом пропорциональности можно вычислить, пользуясь графоаналитическим методом при помощи видоизменной эпюры изгибающих моментов. Величину k в уравнении (j) должна быть выведена для каждой частной формы поперечного сечения.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношения $M_{\text{пред}}/M_T$ для балок, имеющих поперечные сечения, показанные на рис. 222.

Ответ. а) $\frac{16}{3\pi} = 1,70$, б) $\frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$, в) 2.

2. Найти $M_{\text{пред}}$ для балки таврового поперечного сечения, показанного на рис. 223, если $a = b$.

Ответ. $M_{\text{пред}} = \sigma_r a h \left(\frac{a+h}{2}\right)$.

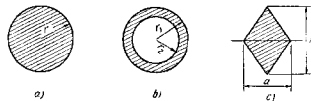


Рис. 222.

3. Найти $M_{\text{пред}}/M_T$ для поперечного сечения, представляющего равносторонний треугольник.

Ответ. $M_{\text{пред}}/M_T = 2,343$.

4. Найти прогиб f в середине прямоугольной балки, показанной на рис. 224, если $Pc = 1,4 M_T$.

Ответ. $f = \frac{l^3}{8r} = \frac{l^3}{8} \frac{Pc}{kEJ_z}$, $k = 0,626$.

5. Решить предыдущую задачу для тавровой балки рис. 223, если $Pc = 0,90 M_T$.

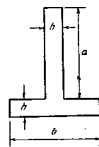


Рис. 223.

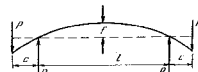


Рис. 224.

6. Найти $q_{\text{пред}}$ для равномерно нагруженной квадратного сечения балки (рис. 225), если площадь поперечного сечения $F = 56,25 \text{ см}^2$, $l = 120 \text{ см}$ и $\sigma_r = 2400 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $q_{\text{пред}} = 140 \text{ кг/см}$.

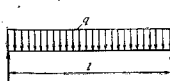


Рис. 225.

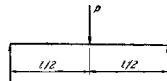


Рис. 226.

7. Показать общий вид видоизменной эпюры изгибающих моментов и найти приближенное значение прогиба посредине пролета равномерно

нагруженной квадратного сечения балки (рис. 225), если $q l^2/8 = 1,4 M_0$, а прочие данные те же, что и в предыдущем задании.

8. Найти прогиб последней прямоугольной балки, показанной на рис. 226, если $P l \approx 3,6 M_{\text{пред}}$. Показать контуры пластических областей балки.

65. Предельное сопротивление систем

Обычная практика проектирования металлических конструкций, воспринимающих статические нагрузки, сводится к выбору безопасных размеров конструкции при том условии, чтобы рабочая нагрузка, умноженная на коэффициент безопасности, вызвала незначительное напряжение, равное пределу текучести материала¹⁾. Однако в большинстве случаев начало текучести не означает полного разрушения, и сооружение обычно будет выдерживать нагрузку, большую той, при которой начинается текучесть. Чтобы использовать эту дополнительную способность сопротивления, было предложено²⁾ при выборе надлежащих размеров сооружения вычислять предельное значение нагрузки для предполагаемых размеров сооружения. Тогда безопасная нагрузка на сооружение может быть получена как некоторая определенная часть того предельного значения, которое представляет нагрузку, вызывающую полное разрушение сооружения. Коэффициент безопасности в этом случае, естественно, будет выше, чем в случае, если нагрузка при пределе текучести принята за основу расчета. Процесс расчета, который принимает предельную нагрузку за основу для выбора безопасных размеров сооружения, называется *расчетом по предельному состоянию*. В последующем изложении будет рассмотрено несколько примеров приложения такого расчета к различным сооружениям.

Начиная со статически определенных систем, мы заключаем, что усилия, действующие на элементы таких сооружений, определяются из уравнения статики и не зависят от механических свойств материала при условии, что деформации остаются малыми. Если такая система сое-

¹⁾ Случаи, в которых размеры выбираются на основании рассмотрения упругой устойчивости, не изучаются в этом параграфе.

²⁾ Этот метод определения безопасных размеров стальных сооружений был предложен N. C. Kistrom, Eisenbau, т. 11, 1920. Опыты для определения предельных нагрузок были проделаны M. A. E. Leibnitz, Vaucesnik, 1928 и K. Girkman'om, Vaucesnik, 1932. Теоретическое изложение изгиба балок за пределом текучести было дано J. Fritzsche, Bauingenieur, 1930 и 1931. Сочетание изгиба и сжатия было рассмотрено K. Girkman'ом, Sitzungsber. Akad. Wissensch., Wien, ч. II, т. 140, 1931. В последнее время важная работа в этой области была выполнена в Кембриджском университете, Англия, под руководством J. F. Clark'a, см. J. Inst. Civil Engrs., т. 31, стр. 188, 1949 и статью B. G. Neal'a and P. S. Symonds'a Proc. Inst. Civil Engrs., 1952. В США вопрос расчета на основании предельной нагрузки рассматривался J. A. van den Broeck'ом, Trans. Am. Soc. Civil Engrs., т. 105, стр. 638, 1940. См. также статью H. J. Greenberg'a and W. Prager'a, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., т. 77, 1951.

тоит из стержней, испытывающих растяжение или сжатие, как в случае фермы с шарнирными узлами, нагрузка, при которой начинается текучесть, является также и предельной нагрузкой, так как при идеально пластичном материале (рис. 216) текучесть продолжается при постоянном напряжении. В случае изгиба балок отношение предельной нагрузки к нагрузке, при которой начинается текучесть, будет равняться отношению $M_{\text{пред}}/M_T$ и будет зависеть, как мы видели, от формы поперечного сечения балки.

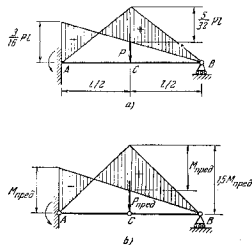


Рис. 227.

В статически неопределимых системах вопрос об анализе напряженного состояния становится более сложным, так как усилия, действующие на элементы системы, зависят в этом случае не только от величин внешних сил, но также и от упругих и пластических свойств элементов системы, и требуется рассмотрение деформаций конструкции. Методы, применяемые при исследовании деформаций в пределах упругости, отличны от методов, применяемых при изучении пластических деформаций. Разница в этих двух методах будет теперь пояснена на нескольких примерах.

Перейдем к рассмотрению статически неопределимых случаев изгиба балок постоянного поперечного сечения. Возьмем, например, балку с одним защемленным концом и другим свободно опертым (рис. 227). Рассматривая сначала изгиб, происходящий в пределах упругости, и учитывая, что конец А балки защемлен, мы находим эпюру изгибающих моментов, которая показана на рис. 227, а заштрихованной площадью (см. т. I, стр. 158). Если мы возьмем за основу

расчета нагрузки, при которой начинается текучесть, то установим, что наибольший изгибающий момент имеет место в конце A балки, и значение P_T определяется условием

$$\frac{3}{16} P_T l = M_T,$$

которое дает

$$P_T = \frac{16}{3} \frac{M_T}{l}. \quad (a)$$

При вычислении $P_{\text{пред}}$ мы замечаем, что, когда нагрузка увеличивается за P_T , текучесть начинается в защемленном конце A . При несколько большей нагрузке чем P_T , текучесть начинается в поперечном сечении C , где имеется другая вершина в эпюре изгибающих моментов. Продолжая увеличивать нагрузку, найдем, что условие образования пластического шарнира достигается на конце A балки, но это условие не вызывает полного разрушения балки. Сооружение будет сопротивляться далее с увеличением нагрузки до тех пор, пока изгибающий момент в поперечном сечении C также достигнет значения $M_{\text{пред}}$. Тогда возникнут пластические шарниры в A и C при свободном повороте в B . Это и есть предельное состояние, соответствующее полному разрушению балки. Изгибающие моменты в A и C для этого случая будут численно равны $M_{\text{пред}}$, а эпюра изгибающих моментов станет такой, как на рис. 227, *b*. Отсюда видим, что наибольшая ордината треугольника в точке C , соответствующая нагрузке $P_{\text{пред}}$ равняется $1,5 M_{\text{пред}}$ и $P_{\text{пред}}$ вычисляется по условию

$$\frac{P_{\text{пред}} l}{4} = 1,5 M_{\text{пред}}$$

которое дает

$$P_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пред}}}{l}. \quad (b)$$

Из условий (a) и (b) теперь получаем

$$\frac{P_{\text{пред}}}{P_T} = \frac{9}{8} \frac{M_{\text{пред}}}{M_T}, \quad (c)$$

т. е. отношение нагрузок $P_{\text{пред}}:P_T$ больше в статически неопределимом случае, чем значение отношения $M_{\text{пред}}:M_T$, которое получается в статически определимом случае.

Видно также, что путем введения пластических шарниров в A и C (рис. 227, *b*) мы имеем задачу, которая может быть легко решена уравнениями статики, что значительно проще, чем в статически неопределимой задаче на рис. 227, *a*. Таким образом, вычисление $P_{\text{пред}}$ по предельному состоянию проще, чем вычисление P_T в расчете, основанном на предположении упругого поведения сооружения. Это более правдоподобно, так как результаты, получаемые на основании

допущения о совершенной упругости, зависит от точности предполагаемых условий на концах балки. Незначительное же вращение заданного конца A или небольшое понижение опоры B может значительно изменить величину P_T , в то время как несовершенство такого рода не оказывает влияния на значение $P_{\text{пред}}$, вычисленное для статически определимой системы по рис. 227, *b*. Таковы два главных преимущества метода предельного расчета.

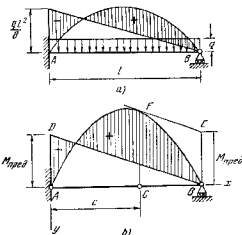


Рис. 228.

В качестве второго примера рассмотрим случай равномерно нагруженной балки с одним защемленным концом и с другим свободно открытым (рис. 228). В упругой стадии эпюра изгибающих моментов будет такой, как показано, рис. 228, *a*. Численно наибольшее значение изгибающего момента будет в защемленном конце, и величина нагрузки q , найдется из уравнения

$$\frac{q_1 l^2}{8} = M_T,$$

которое дает

$$q_1 = \frac{8M_T}{l^2}. \quad (d)$$

Если мы будем продолжать увеличивать нагрузку сверх значения q , текучесть в защемленном конце A будет продолжаться, а соответствующий изгибающий момент будет увеличиваться до значения $M_{\text{пред}}$ когда в точке A образуется пластический шарнир. Чтобы довести балку до полного разрушения, следует продолжать увеличение нагрузки до значения $q_{\text{пред}}$, при котором образуется пластический шарнир

в некотором промежуточном поперечном сечении C балки (рис. 228, б). Положение поперечного сечения C и значение $q_{\text{пред}}$ будут найдены из условий, что изгибающий момент в C является наибольшим и что он равен $M_{\text{пред}}$. Пользуясь заштрихованной эпюрой изгибающих моментов на рис. 228, б, запишем эти условия в следующем виде:

$$M = \frac{q_{\text{пред}} l}{2} x - \frac{q_{\text{пред}} x^2}{2} - \frac{M_{\text{пред}}(l-x)}{l} = M_{\text{пред}} \quad (е)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_{\text{пред}} l}{2} - q_{\text{пред}} x - \frac{M_{\text{пред}}}{l} = 0. \quad (ф)$$

Из этих уравнений получим

$$x = c = l(2 - \sqrt{2}), \quad q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{l^2(3 - 2\sqrt{2})} \quad (г)$$

а на основании выражений (д) и (г) заключаем, что

$$\frac{q_{\text{пред}}}{q_1} = 1,46 \frac{M_{\text{пред}}}{M_T} \quad (и)$$

При рассмотрении более общих случаев пластической деформации конструкций замечаем, что за пределом упругости принцип наложенной непряимости и деформация сооружения зависит не только от окончательных значений нагрузок, но также

и от порядка, в котором нагрузки приложены к сооружению. Возьмем, например, случай, показанный на рис. 229, а. Если обе силы приложены одновременно, то соответствующая эпюра изгибающих моментов будет иметь форму, показанную на рис. 229, б, и наибольший изгибающий момент равен $P/9$. Мы видим, что деформация будет совершенно упругой, если

$$P < \frac{9M_T}{l}. \quad (и)$$

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка P сначала приложена в поперечном сечении B , а нагрузка в C приложена после. После того как нагрузка приложена в B , соответствующая эпюра изгибающих моментов имеет вид, показанный на рис. 229, в; наибольший изгибающий момент будет в два раза больше, чем в предыдущем случае, и может произойти пластическая деформация, хотя условие (и) удовлетворяется. Эта пластическая деформация не будет устранена

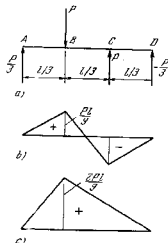


Рис. 229.

последующим приложением силы P в поперечном сечении C , и окончательная деформация балки будет отлична от случая одновременного приложения сил в поперечных сечениях B и C . В подобных дальнейших рассуждениях мы будем всегда предполагать, что силы приложены одновременно и что в процессе нагружения отношения между силами остаются постоянными и равными отношению окончательных значений сил. Все силы будут обозначены одним и тем же символом, умноженным на числовые коэффициенты, указывающие требуемые отношения между величинами сил.

В ранее разобранных задачах, например показанных на рис. 227 и 228, была только одна возможность размещения пластических шарниров, и приходилось рассматривать только одну форму разрушения балки. Но если на балку действует несколько сил, то будет несколько различных возможных положений пластических шарниров и несколько возможных форм разрушения балки. Естественно, проектировщик должен выбрать из всех возможных форм разрушения ту, которая отвечает наименьшему значению нагрузок. Тогда эти нагрузки будут рассматриваться как предельные нагрузки для сооружения.

В качестве примера выбора надлежащих положений для пластических шарниров рассмотрим балку на рис. 230, которая заделана в A , свободно опирается в B и несет два груза P и $2P$. Эпюры изгибающих моментов в этом случае будем изображать пунктиром, шарниры же, соответствующие наибольшим изгибающим моментам, будут падать на вертикалих, проходящих через поперечные сечения A , C и D . При условии полного разрушения пластические шарниры будут образовываться в двух из этих трех поперечных сечений. Все возможные положения этих шарниров и соответствующие формы разрушения показаны на рис. 230, б — д. Замечая, что в каждом пластическом шарнире моменты $M_{\text{пред}}$ направлены так, чтобы препятствовать взаимному повороту частей балки, мы можем написать уравнение равновесия для каждого участка балки и определить величину P , соответствующую предполагаемой форме разрушения. Например, для формы, показанной на рис. 230, б, соответствующие

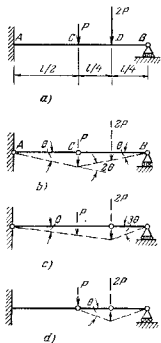


Рис. 230.

нагрузки P и $2P$ будут направлены так, чтобы препятствовать взаимному повороту частей балки, мы можем написать уравнение равновесия для каждого участка балки и определить величину P , соответствующую предполагаемой форме разрушения. Например, для формы, показанной на рис. 230, б, соответствующие

силы показаны на рис. 231, а, и уравнения равновесия будут

$$\frac{Ql}{2} - 2M_{\text{пред}} = 0, \quad \frac{(Q-P)l}{2} + M_{\text{пред}} - \frac{Pl}{2} = 0,$$

откуда мы находим

$$P_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{l}.$$

Вместо того чтобы применять уравнения равновесия, подобные приведенным выше, удобно при вычислении $P_{\text{пред}}$ использовать принцип виртуальных перемещений¹⁾. Рассматривая опять форму разрушения, показанную на рис. 230, б, мы видим, что путем введения

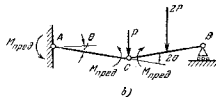
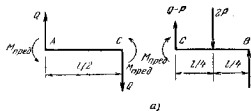


Рис. 231.

пластических шарниров в А и С мы получаем механизм, состоящий из двух шарнирных частей (рис. 231, б). Чтобы написать условие равновесия этого механизма, рассмотрим виртуальное перемещение, определяемое малым углом поворота θ . При этом повороте моменты $M_{\text{пред}}$ в поперечных сечениях А и С, препятствуя вращению, будут производить работу, равную $-\theta M_{\text{пред}}$ и $-2\theta M_{\text{пред}}$. В то же самое время грузы P и $2P$ произведут работу, равную $P\theta l/2$ и $2P\theta l/4$, так что уравнение виртуальных перемещений получается в следующем виде:

$$-\theta M_{\text{пред}} - 2\theta M_{\text{пред}} + \frac{P\theta l}{2} + \frac{2P\theta l}{4} = 0,$$

¹⁾ Этот метод вычисления был рассмотрен J. F. Baker'ом, J. Inst. Structural Engrs., т. 27, стр. 397, 1949.

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{l}. \quad (j)$$

Поступая таким же путем и в случаях, показанных на рис. 230, с и 230, д, получаем следующие результаты:

$$P_{\text{пред}} = \frac{2,5M_{\text{пред}}}{l}, \quad P_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пред}}}{l}. \quad (k)$$

Сравнивая результаты выражений (j) и (k), заключаем, что для балки, представленной на рис. 230, а, предельная нагрузка равна $P_{\text{пред}} = 2,5M_{\text{пред}}/l$, а соответствующая форма разрушения показана на рис. 230, с.

Метод вычисления предельных нагрузок, который был применен в предыдущих задачах о балках, можно использовать также при рассмотрении предельного сопротивления рам. Рассмотрим раму, показанную на рис. 232, а, которая имеет три лишних неизвестных усилия.

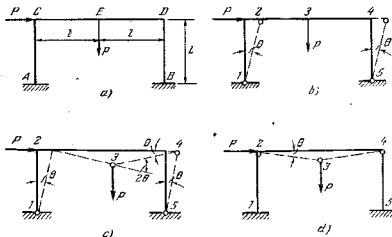


Рис. 232.

Мы можем взять, например, за три лишних неизвестные изгибающий момент и две составляющие реактивной силы в В. Если эти три величины известны, то момент и две составляющие усилия в любом поперечном сечении рамы можно легко найти из уравнений статики. Мы можем сделать систему также статически определимой, если наметим в ней три шарнира. Например, принимая шарниры в А, В и Е, получаем систему, которую можно легко рассмотреть как трехшарнирную арку. Для того чтобы сделать из рамы подвижную систему

(или механизм), мы должны ввести четыре пластических шарнира. Чтобы определить положения этих шарниров, замечаем, что эпюра изгибающих моментов будет иметь вершины в поперечных сечениях 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 232), где действуют сосредоточенные силы. Пластические шарниры должны быть помещены в некоторых из этих поперечных сечений, так как изгибающий момент достигает своих наибольших численных значений в этих точках. Два возможных способа помещения четырех пластических шарниров, которые соответствуют двум различным формам разрушения рамы, показаны на рис. 232, б и 232, в¹⁾.

На рис. 232, д мы имеем особый случай разрушения. Вводя только три пластических шарнира, мы, естественно, не получим механизма такого же типа, как в двух предыдущих случаях. Когда образовались пластические шарниры в поперечных сечениях 2, 3 и 4, то не происходит неограниченного относительного поворота в этих шарнирах при дальнейшем увеличении нагрузки P . Два стержня 2—3 и 3—4 после некоторого вращения будут в состоянии сопротивляться дальнейшему увеличению нагрузки P , работая на растяжение. Но соответствующие перемещения будут большими, и придется рассмотреть также и эту деформацию, как представляющую полное разрушение рамы.

Чтобы вычислить значения $P_{\text{пред}}$ соответствующие трем различным формам разрушения, показанные на рис. 232, используем размеры, показанные на рисунке, и предположим, что поперечное сечение горизонтального стержня CD больше поперечного сечения вертикальных стержней, а $M_{\text{пред}}$ представляет предельный момент для вертикальных стержней, а $1,5M_{\text{пред}}$ является предельным моментом для горизонтального стержня²⁾. Виртуальные перемещения будут определяться малым углом θ . Тогда уравнение равновесия для случая, показанного на рис. 232, б, будет

$$P\theta l - 4\theta M_{\text{пред}} = 0,$$

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{4M_{\text{пред}}}{l}.$$

Для случая рис. 232, в уравнение равновесия будет

$$P\theta l + P\theta l - 2\theta M_{\text{пред}} - 1,5(2\theta)M_{\text{пред}} - 2\theta M_{\text{пред}} = 0,$$

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{3,5M_{\text{пред}}}{l}.$$

¹⁾ По вопросу о выборе всех возможных форм разрушения рамных конструкций см. статью P. S. Symonds'a and B. G. Ne'efa, J. Inst. Civil Engrs., т. 35, стр. 21, 1950.

²⁾ Пластические шарниры в узлах будут образовываться в слабейших стержнях, как показано кружками на рис. 232, б, в и д.

для случая же на рис. 232, д получаем таким же путем

$$P_{\text{пред}} = \frac{5M_{\text{пред}}}{l}.$$

По этим результатам заключаем, что действительной формой разрушения будет показанная на рис. 232, в и что предельная нагрузка равняется

$$P_{\text{пред}} = \frac{3,5M_{\text{пред}}}{l}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти значения $P_{\text{пред}}$ и $q_{\text{пред}}$ для балок, показанных на рис. 233.

Ответ. а) $P_{\text{пред}} = \frac{8M_{\text{пред}}}{l}$, б) $q_{\text{пред}} = \frac{16M_{\text{пред}}}{l^2}$, в) $P_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пред}}}{l}$.

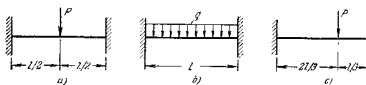


Рис. 233.

2. Двухпролетная балка постоянного поперечного сечения равномерно нагружена (рис. 234). Найти $q_{\text{пред}}$, предположим, что $l_1 > l_2$.

Ответ. $q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{l_1^2(3-2\sqrt{2})}$.

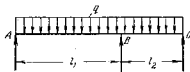


Рис. 234.

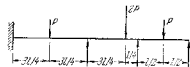


Рис. 235.

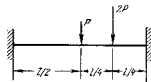


Рис. 236.



Рис. 237.

3. Найти значение $P_{\text{пред}}$ для неразрезной балки постоянного поперечного сечения, показанной на рис. 235. Показать форму разрушения.

Ответ. $P_{\text{пред}} = \frac{16M_{\text{пред}}}{3l}$.

4. Балка с заземленными концами подвергается действию двух сил P и $2P$ (рис. 236). Найти $P_{\text{пред}}$ и показать соответствующую форму разрушения.

$$\text{Ответ. } P_{\text{пред}} = \frac{4\sqrt{3}}{l} P \cdot d.$$

5. Найти $P_{\text{пред}}$ и соответствующую форму разрушения рамы, показанной на рис. 237.

66. Чистый изгиб балок, материал которых не следует закону Гука

В предыдущих параграфах предполагалось, что материал балок был идеально пластичным (рис. 216). Рассмотрим теперь более общий случай, в котором механические свойства материала представлены кривой σ - ϵ диаграммы на рис. 238. При рассмотрении чистого изгиба таких балок будем предполагать по-прежнему, что поперечные сечения балки остаются плоскими при изгибе; следовательно, удлинения и укорочения продольных волокон пропорциональны их расстояниям от нейтрального слоя. Взяв это за основу дальнейших выводов и предположив, что при изгибе существует такое же соотношение между напряжением и деформацией, как и в случае простого растяжения и сжатия, мы сможем легко найти напряжения, возникающие в балке от изгибающего момента любой заданной величины¹⁾.

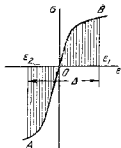


Рис. 238.

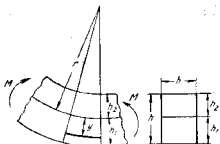


Рис. 239.

Начнем с балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 239) и предположим, что радиус кривизны нейтрального слоя при действии изгибающих моментов M равен r . В таком случае относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, равно

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \quad (\text{а})$$

¹⁾ Эта теория была разработана Сен-Венаном в его примечаниях к книге Navier, *Résumé des leçons*, 3-е изд., стр. 173, 1864. См. также статью: E. Mauger, *Phys. Z.*, 1907 и H. Herberich, *Диссертация*, Гёттинген, 1909.

Обозначив через h_1 и h_2 расстояния от нейтральной оси соответственно до нижней и верхней поверхностей балки, находим, что удлинения в крайних волокнах будут

$$\epsilon_1 = \frac{h_1}{r}, \quad \epsilon_2 = -\frac{h_2}{r}. \quad (\text{б})$$

Видно, что удлинение или укорочение какого-либо волокна легко получается при условии, что известно положение нейтральной оси и радиус кривизны r . Эти две величины можно найти из двух уравнений статики:

$$\int_F \sigma dF = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = 0, \quad (\text{с})$$

$$\int_F y \sigma dF = b \int_{-h_2}^{h_1} y \sigma dy = M. \quad (\text{д})$$

Первое из этих уравнений устанавливает, что сумма нормальных усилий, действующих по любому поперечному сечению балки, обращается в нуль, так как эти усилия образуют пару сил. Вторым уравнением устанавливается, что момент тех же сил относительно нейтральной оси равен изгибающему моменту M .

Применим уравнение (с) для определения положения нейтральной оси. Из выражения (а) имеем

$$y = r\epsilon, \quad dy = r d\epsilon. \quad (\text{е})$$

Подставляя в уравнение (с), получаем

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = r \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0. \quad (\text{ф})$$

Следовательно, положение нейтральной оси таково, что интеграл $\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon$ обращается в нуль. Чтобы определить это положение, воспользуемся кривой AOB на рис. 238, которая представляет собой диаграмму испытания на растяжение и сжатие материала балки: обозначим через Δ сумму абсолютных значений наибольшего удлинения и наибольшего укорочения, т. е.

$$\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r} = \frac{h}{r}. \quad (\text{г})$$

Чтобы решить уравнение (ф), мы должны так отметить длину Δ на горизонтальной оси (рис. 238), чтобы две заштрихованные на рисунке площади стали равными. Таким образом, мы найдем деформации ϵ_1 и

ε_2 в крайних волокнах. Выражения (b) тогда дадут

$$\frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right|, \quad (h)$$

чем и определится положение нейтральной оси. Замечая, что удлинения ε пропорциональны расстояниям от нейтральной оси, заключаем, что кривая AOB также представляет распределение напряжений при изгибе по высоте балки, если вместо Δ подставить h .

Для определения радиуса кривизны r воспользуемся уравнением (d). Подставляя вместо u и du их значения из выражений (e), представим уравнение (d) в форме

$$br^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = M. \quad (i)$$

Замечая, что по формуле (g) $r = h/\Delta$, можем уравнение (i) после простого преобразования привести к виду

$$\frac{bh^3}{12} \frac{1}{r} \frac{12}{\Delta^2} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = M. \quad (j)$$

Сравнивая этот результат с известным уравнением

$$\frac{EJ}{r} = M \quad (k)$$

для изгиба балок, следующих закону Гука, заключаем, что за пределом пропорциональности кривизна, вызываемая моментом M , может быть вычислена из уравнения

$$\frac{E_r J}{r} = M, \quad (281)$$

в котором E_r — приведенный модуль упругости, определяемый выражением

$$E_r = \frac{12}{\Delta^2} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon. \quad (282)$$

Интеграл этого выражения представляет собой момент относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат O заштрихованной площади, показанной на рис. 238. Так как ординаты кривой на рисунке представляют напряжения, а абсциссы — относительные деформации, то интеграл, а также E_r имеют размерность кг/см^2 , т. е. ту же, что и модуль упругости E .

Величина E_r для данного материала, соответствующая данной на рис. 238 кривой, является функцией Δ или h/r . Взяв ряд значе-

ний Δ и воспользовавшись кривой на рис. 238, как уже объяснено, мы получим для каждого значения Δ соответствующие крайние значения ε_1 и ε_2 , и по выражению (282) определим соответствующие значения E_r . Таким образом, получится кривая, представляющая E_r как функцию $\Delta = h/r$. На рис. 240 такая кривая показана для строительной стали с $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ и пределом пропорциональности, равным 2100 кг/см^2 . В этом случае при $\Delta < 0,002 E_r$ остается

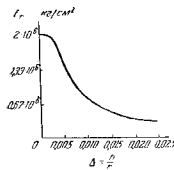


Рис. 240.

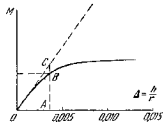


Рис. 241.

постоянным и равным E . При помощи такой кривой, соответствующая любой предполагаемой кривизне, можно легко вычислить из уравнения (281), и мы можем начертить кривую (рис. 241), считая момент функцией Δ . Для малых значений Δ материал следует закону Гука, и кривизна пропорциональна изгибающему моменту M , как показано на рис. 241 прямой линией OC . За пределом пропорциональности скорость изменения кривизны увеличивается с увеличением момента.

Если вместо прямоугольника мы имеем какую-либо другую симметричную форму поперечного сечения с переменной шириной b поперечного сечения, то уравнения (c) и (d) должны быть написаны в следующем виде:

$$\int_{-h_2}^{h_1} b \sigma dy = r \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b \sigma d\varepsilon = 0, \quad (l)$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} b \sigma y dy = r^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b \sigma \varepsilon d\varepsilon = M. \quad (m)$$

Возьмем в качестве примера случай таврового сечения (рис. 242). Если обозначить через ε продольную деформацию в месте сопряжения стенки и полки, то уравнения (l) и (m) можно написать в

следующем виде:

$$\int_{y_2}^{y_1} \sigma dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{b_1}{b} \sigma dy = 0, \quad (n)$$

$$br^2 \left(\int_{y_2}^{y_1} \sigma dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{b_1}{b} \sigma dy \right) = M. \quad (o)$$

Видно, что в этом случае ординаты кривой растяжения AOB (рис. 243) в области, соответствующей полке поперечного сечения, должны быть увеличены в отношении b_1/b . Для определения положения нейтральной оси поступим, как в предыдущем случае, пользуясь диаграммой растяжения — сжатия (рис. 243), и так отметим на горизонтальной оси положение предполагаемой длины $\Delta = h/r$, чтобы две заштрихованные площади получились численно равными одна другой. В результате найдутся деформации ϵ_1 и ϵ_2 крайних волокон. Деформация ϵ' в месте сопряжения стенки и полки получится из уравнения

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon'}{\Delta} = \frac{c}{h},$$

в котором c есть толщина полки (рис. 242). Определив положение нейтральной оси и замечая, что выражение в скобках уравнения (o) представляет собой момент заштрихованных на рис. 243 площадей относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат O , мы можем легко вычислять по уравнению (o) момент M , соответствующий принятому значению $\Delta = h/r$. Таким образом, для балки таврового сечения можно построить кривую, подобную показанной на рис. 241. Аналогично можно поступить и с двутавровой балкой.

В предыдущих примерах для определения положения нейтральной оси и величины радиуса кривизны r была использована диаграмма испытания на растяжение и сжатие. Если существует аналитическое выражение для кривой AOB , то приведенные выше величины можно получить только вычислением, не применяя графического метода, разъясненного на рис. 238 и 243. Наиболее общее уравнение для кривых напряжения — деформации было

применено Сен-Венаном¹⁾. Он предположил, что для изгиба за пределом пропорциональности распределение растягивающих и сжимающих напряжений

по высоте балки можно представить следующими уравнениями:

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{a} \right)^m \right], \quad (p)$$

$$\sigma' = \sigma'_0 \left[1 - \left(1 - \frac{y_1}{b} \right)^n \right],$$

в которых σ_0 и σ'_0 , а также a и b являются некоторыми постоянными, которые вместе с показателями степени m и n определяют кривые распределения напряжений, показанные на рис. 244. Для очень малых расстояний y и y_1 мы можем допустить, что

$$\left(1 - \frac{y}{a} \right)^m \approx 1 - \frac{my}{a}$$

и

$$\left(1 - \frac{y_1}{b} \right)^n \approx 1 - \frac{ny_1}{b},$$

и уравнения (p) дают

$$\sigma = \frac{\sigma_0 my}{a} = \frac{\sigma_0 nr y}{a} \quad \text{и} \quad \sigma' = \frac{\sigma'_0 ny_1}{b} = \frac{\sigma'_0 nr y}{b}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma_0 nr}{a} = E_1 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma'_0 nr}{b} = E_2, \quad (q)$$

где E_1 и E_2 — модули упругости материала соответственно для очень малых растяжения и сжатия. Если эти два модуля упругости материала равны между собой, то две кривые, определяемые уравнениями (p), имеют общую касательную на нейтральной оси, и мы имеем

$$\frac{\sigma_0 m}{a} = \frac{\sigma'_0 n}{b}. \quad (r)$$

Используя уравнения (p) и уравнения равновесия (c) и (d), можно вычислить в каждом частном случае положение нейтральной оси и радиус кривизны. Взяв, например, $m = n = 1$ и воспользовавшись выражениями (q), получим на основании уравнений (p)

$$\sigma = \frac{E_1 y}{r}, \quad \sigma' = \frac{E_2 y_1}{r}. \quad (s)$$

Это случай, в котором материал балки следует закону Гука, но имеет разные модули упругости при растяжении и сжатии. Подставляя выражения (s) в уравнение (c) и предполагая, что балка имеет прямоугольное поперечное сечение, получаем

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2,$$

что совместно с равенством $h_1 + h_2 = h$ дает

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}.$$

Тогда из уравнения (d) найдем

$$\frac{E_1 h_1 b h_1^2}{r} \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{12r} \frac{1}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^3} \frac{4E_1 E_2}{r}.$$

¹⁾ Цит. на стр. 304. См. также статью W. R. Osgood'a, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 213, 1944.

Видно, что в этом случае кривизна получается из уравнения (281) при следующем значении приведенного модуля упругости:

$$E_r = \frac{4E_1 E_2}{(V E_1 + V E_2)^2} \quad (283)$$

Этим модулем упругости иногда пользуются для вычисления нагрузки, которая вынуждает колонну, сжатую за пределом пропорциональности материала (см. стр. 153).

В качестве другого примера предположим, что кривые напряжение—деформация при растяжении и сжатии одинаковы. Тогда в уравнениях (р) $m = n$, $a = b$ и $a_1 = a_2$. Предполагая также, что $a = b = h/2$, находим из уравнения (д) для прямоугольной балки

$$M = \sigma_{\max} \frac{bh^3}{6} \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)} \quad (284)$$

Нейтральная ось в этом случае проходит через центр тяжести поперечного сечения. Кривые, дающие распределение напряжений для различных значений показателя степени m , показаны на рис. 245. С возрастанием m момент приближается к значению

$$M = \frac{3}{2} \sigma_{\max} \frac{bh^3}{6}$$

67. Изгиб балок поперечной нагрузкой за пределом упругости

В случае изгиба балок поперечной нагрузкой мы пренебрегаем действительным сдвигом (или прогибом) и предполагаем, что зависимость между изгибающим моментом и кривизной представляется уравнением (281), выведенным для чистого изгиба. Тогда для вычисления прогибов за пределом пропорциональности можно применить графоаналитический метод (см. т. I, стр. 131). Необходимо лишь заметить, что жесткость при изгибе в этом случае непостоянна, изменяясь с величиной изгибающего момента. Чтобы установить зависимость между этими двумя величинами для прямоугольных балок, воспользуемся кривой на рис. 241. Для любого значения $\Delta = h/r$ ордината AB дает соответствующее значение изгибающего момента, а ордината AC — момент при условии, что материал следует закону Гука. В результате

$$\overline{AB} : \overline{AC} = E_r : E$$

Таким путем мы получим для каждого предполагаемого значения изгибающего момента отношение E_r/E приведенной жесткости изгиба к начальной жесткости изгиба балки. Обозначая это отношение

через β , представим его в функции изгибающего момента M кривой, приведенной на рис. 246.

Чтобы показать, как можно пользоваться этой кривой при вычислениях прогибов, рассмотрим случай свободно опертой балки, нагруженной посредине (рис. 247). Эпюра изгибающих моментов в этом случае представляет треугольник ACB . Пусть M_0 будет величина изгибающего момента, до которого материал следует закону Гука. В таком случае участок m балки будет напряжен за пределом пропорциональности, и для вычисления прогиба вместо начальной жесткости изгиба нужно воспользоваться приведенной жесткостью, которая меняется на этом участке балки. Поступая, как в случае балок переменного поперечного сечения (см. т. I, стр. 183), разделим ординаты эпюры изгибающих моментов на соответствующие значения β ,

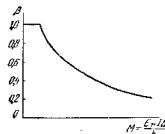


Рис. 246.

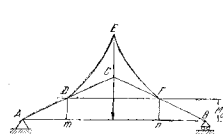


Рис. 247.

взятые из рис. 246. Таким образом, получится измененная эпюра изгибающих моментов $ADEFB$. Рассматривая площадь измененной эпюры изгибающих моментов как фиктивную нагрузку и поступая обычным путем, получаем прогиб в любом сечении балки делим на EJ изгибающего момента, возникающего в этом сечении от фиктивной нагрузки.

Здесь мы рассматривали только случай прямоугольной балки, но тот же метод применим и в других случаях, при условии, что получена кривая для коэффициента β , подобная показанной на рисунке 246. Такую кривую можно построить с помощью метода, иллюстрированного на рис. 243; ее ординаты можно вычислить, если дана аналитическая зависимость между напряжениями и деформациями за пределом пропорциональности материала, подобная уравнениям (р) в п. 66.

В нашем обсуждении изгиба балок поперечными нагрузками предполагалось, что задача была статически определенной, следовательно, построение эпюры изгибающих моментов не требовало рассмотрения изогнутой оси. В статически неопределимых случаях задача становится более сложной, так как за пределом пропорциональности линии силы и моменты уже не пропорциональны действующим нагрузкам, и

⁴ Взаимное сдвига было рассмотрено А. Eichinger'ом, Final Report, 2d Congr. Intern. Assoc. Bridge and Struct. Engng., Berlin, 1938.

принцип наложения неприменим. Однако иногда задачу можно упростить на основании соображений о симметрии. Предполагая, например, что концы балки на рис. 247 заделаны, мы заключаем из симметрии, что изгибающий момент обращается в нуль в точках, соответствующих четвертям пролета и изогнутая ось состоит из четырех одинаковых участков, которые можно получить таким же путем, как и для консоли, нагруженной на конце. В случае равномерно нагруженной балки с заделанными концами мы на основании симметрии заключаем, что моменты на концах равны между собой. Величину этих моментов можно получить методом последовательных попыток. Необходимо принять некоторое значение для этих моментов и построить измененную эпюру изгибающих моментов, как показано для случая, изображенного на рис. 247. Точным значением моментов, очевидно, будет то, при котором полная фиктивная нагрузка, представленная площадью измененной эпюры изгибающих моментов, обращается в нуль.

Из предыдущих рассуждений можно видеть, что в случае изгиба за пределом пропорциональности вычисление лишних сил и лишних моментов обычно требует более сложных исследований. Однако в случае материалов, которые имеют ясно выраженный предел текучести, как, например, строительная сталь, расчет статически неопределимых сооружений можно значительно упростить, если ограничить наши рассуждения стадией нагружения, при которой сооружение достигает предельной нагрузки и текучесть происходит без дальнейшего увеличения нагрузки (см. п. 65).

68. Остаточные напряжения, вызываемые неупругим изгибом

Если балка изгибается за пределом упругости, возникает некоторая непрерывная текучесть, и деформация не исчезает после удаления нагрузки. Волокна, которые претерпели текучесть, препятствуют упруго напряженным волокнам восстанавливать свою первоначальную длину после разгрузки, и таким путем появляются некоторые *остаточные напряжения*. Чтобы определить распределение этих напряжений по поперечному сечению, начнем с простейшего

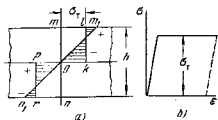


Рис. 248.

случая прямоугольной балки, в которой распределение напряжений при изгибе за пределом текучести можно представить двумя прямоугольниками Okm и Onp , показанными на рис. 248. Предположим также, что материал, будучи растянут за предел текучести и затем разгружен, следует за-

кону Гука при разгрузке, как показано на рис. 248, *b* пунктиром. В результате этого предположения можно заключить, что напряжения при изгибе, которые накладываются во время разгрузки балки, следуют линейному закону, показанному на рис. 248, *a* линией m_1n_1 . Наложение этих двух распределений напряжений — прямоугольного во время нагрузки и треугольного во время разгрузки, показанное заштрихованными площадями на рис. 248, *a*, представляет напряжения, которые остаются в балке после разгрузки. Эти остаточные напряжения вызваны в балке пластической деформацией¹⁾. Знаки этих напряжений, как показано на рисунке, были получены при допущении, что начальный изгиб вызывает кривизну выпуклостью вниз.

Так как прямоугольное и треугольное распределения напряжений (рис. 248) оба представляют изгибающие моменты той же величины, можно заключить, что момент относительно оси POk треугольника Om_1n_1 равен моменту прямоугольника Okm относительно той же оси. Следовательно, напряжение, представленное на рисунке длиной mm_1 должно быть равно $1,5 \sigma_T$, и наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения, которые остаются в наиболее удаленных волокнах после разгрузки балки, равны $0,5 \sigma_T$. Остаточные напряжения в волокнах области нейтрального слоя имеют величину σ_T . Можно видеть, что распределение напряжений, представленное на рисунке заштрихованными площадями, сводится к двум равным и противоположным парам сил величины $\sigma_T bh^2/27$, которые находятся в равновесии. Существование этих остаточных напряжений можно показать экспериментально путем распыливания балки вдоль нейтрального слоя. Тогда каждая половина балки получает некоторую кривизну.

Если балка с остаточными напряжениями, как указано на рис. 248, *a*, вновь изгибается моментами той же величины и в том же направлении, как и в предыдущем опыте, напряжения, вызываемые этими моментами и представленные прямой линией m_2n_2 , будут накладываться на остаточные напряжения, даваемые заштрихованными площадями, так что результирующее распределение напряжений будет представлено прямоугольниками Okm и Onp . Наибольшее результирующее напряжение равно σ_T , и во время этого второго изгиба никакой текучести не наблюдается. Следовательно, остаточные напряжения, вызываемые первым изгибом, таковы по природе, что увеличивают изгибающий момент, который может выдерживаться брусом в упругом состоянии, при условии, что направление изгиба неизменно. Это явление улучшения упругой способности сооружения путем предварительного нагружения и создания подходящих остаточных напряжений

¹⁾ Кажется, что А. Вöhler был первым, который обратил внимание инженеров на остаточные напряжения, вызываемые пластическим изгибом балок; см. S. Timoshenko, History of Strength of Materials, New York, стр. 172, 1953; русский перевод, История науки о сопротивлении материалов, Гостехиздат, 1957, стр. 202.

иногда применяется на практике. Некоторые частные случаи будут разобраны ниже (см. п. 78).

В более общем случае неупругого изгиба прямоугольной балки распределение напряжений дается кривой, подобной n_1Om_1 на рис. 249, а. Предполагая опять, что при разгрузке материал следует закону Гука, мы находим, что остаточные напряжения, вызываемые пластическим

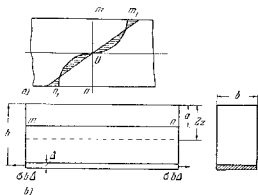


Рис. 249.

течением, распределяются, как показано на рисунке, заштрихованными площадями. Если кривая n_1Om_1 определена, как объяснено в п. 66, то величину остаточного напряжения можно легко получить для каждого волокна. Если же кривая n_1Om_1 неизвестна, то распределение остаточных напряжений можно исследовать опытным путем, снимая в балке один за другим тонкие слои, параллельные нейтральному слою, и измеряя после каждого среза упругую деформацию, которая происходит в балке.

Предположим, что остаточное напряжение на нижней поверхности балки растягивающее, величиной σ_a . Тогда удаление тонкого слоя толщиной Δ , показанного на рис. 249, б, очевидно, вызовет деформацию в остальной части балки, такая была бы вызвана приложением двух равных и противоположных сил $\sigma_a \Delta$, показанных стрелками внизу рис. 249, б. Мы найдем, что после срезавания тонкого слоя ось балки получит удлинение и кривизну, согласно формулам

$$d(\epsilon) = \frac{\sigma_a \Delta}{E b h}, \quad d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sigma_a \Delta (h - \Delta) 12}{2 E b (h - \Delta)^3} \approx \frac{\sigma_a \Delta h}{2 E J}. \quad (a)$$

Отсюда ясно, что если кривизна $d(1/r)$ измерена, то величину остаточного растягивающего напряжения σ_a в наиболее удаленном волокне легко вычислить по выражению (а).

Определение остаточного напряжения σ_a в волокне m_1 , находящемся в расстоянии a от верхней грани балки (рис. 249, б), оказывается более трудным. Снимая один слой за другим, мы, наконец, достигнем слоя m_1

и можем определить напряжение в нем при помощи выражения, подобного выражению (а). Однако это напряжение будет иметь величину σ_a' , отличную от начального остаточного напряжения σ_a , так как удаление предыдущих слоев вызывало изменение напряжений в оставшихся частях балки. Очевидно, что только после исследования этих изменений будет возможно определение требуемого остаточного напряжения σ_a . Предположим, что путем снятия одного слоя за другим мы достигнем волокна, показанного пунктиром на рис. 249, б на расстоянии $2z$ от верхней грани балки. Если мы теперь снимем тонкий слой толщиной Δ , то напряжение σ_a' в этом слое вычислится из уравнения

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sigma_a' b z \Delta}{E J z},$$

где

$$J z = \frac{b (2z)^3}{12},$$

откуда

$$\sigma_a' = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right) E J z}{b z \Delta}. \quad (b)$$

Удаление этого слоя вызовет в волокне m_1 напряжение растяжения

$$\frac{\sigma_a' b \Delta}{2 b z} \quad (c)$$

и напряжение изгиба

$$\frac{\sigma_a' b z \Delta (a - z)}{J z}. \quad (d)$$

Уравнения (c) и (d) дают изменения напряжения в волокне m_1 благодаря удалению одного лишь слоя. Принимая теперь во внимание все слои, отвечающие изменению $2z$ от h до a , получим полное изменение остаточного напряжения в волокне m_1 в следующем виде:

$$\sum \frac{\sigma_a' \Delta}{2z} + \sum \frac{\sigma_a' b z \Delta (a - z)}{J z}, \quad (e)$$

где σ_a' для каждого слоя вычисляется по формуле (b) при помощи измеренных значений $d(1/r)$. Искомое остаточное напряжение σ_a в волокне m_1 получится теперь вычитая величины (e) из напряжения σ_a' , которое определяется подстановкой a вместо $2z$ в формулу (b). Следовательно,

$$\sigma_a = \sigma_a' - \sum \frac{\sigma_a' \Delta}{2z} - \sum \frac{\sigma_a' b z \Delta (a - z)}{J z}. \quad (f)$$

Этот метод экспериментального определения продольных остаточных напряжений можно применить не только в случае изгиба, но также в других случаях пластических сдвигов, претерпевающих продольную пластическую деформацию (см. п. 70). Он был, например, успешно применен при измерении остаточных деформаций в холодногнутых лагунных трубах¹⁾.

¹⁾ Этот метод был разработан Н. Н. Давиденковым, цит. на стр. 325 и Z. Metallkunde, т. 24, стр. 25, 1932. См. также докторскую диссертацию: C. G. Anderson, University of Michigan, 1935 и статью D. J. Demorest and D. O. Leseur, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 45, 1953. Описание

Чтобы снимать тонкие слои металла, был применен в этой работе специальный химический раствор. Изменения кривизны были измерены оптическим методом. Таким путем можно было получить полные сведения относительно остаточных напряжений в холодотянутых трубах. Такие сведения имеют большое практическое значение для разработки процесса надлежащей горячей обработки труб при их изготовлении.

69. Кручение за пределом упругости

Начнем с рассмотрения кручения круглых валов и предположим, что за пределом упругости поперечные сечения скручиваемого вала продолжают оставаться плоскими, а их радиусы остаются прямыми¹⁾. В таком случае относительный сдвиг γ в расстоянии r от оси вала определяется той же формулой, что и в случае кручения в пределах упругости (см. т. I, стр. 239), т. е.

$$\gamma = r\theta, \quad (a)$$

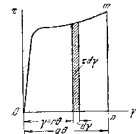


Рис. 250.

где θ есть угол закручивания на единицу длины вала. Чтобы определить величину крутящего момента, который требуется для закручивания вала на угол θ , необходимо знать зависимость между относительным сдвигом γ и касательным напряжением τ за пределом пропорциональности. Предположим, что диаграмма на рис. 250 дает требуемую зависимость²⁾. Если a есть внешний радиус вала, то наибольшая касательная деформация сдвига равна $a\theta$, а соответствующее наибольшее касательное напряжение будет ординатой $m\theta$ на диаграмме рис. 250. Таким же путем можно легко получить из диаграммы касательное напряжение на любом расстоянии r от оси.

Крутящий момент M_k , который должен вызвать закручивание на угол θ , будет найден из уравнения статики

$$\int_0^a 2\pi r^2 \tau dr = M_k. \quad (b)$$

некоторых методов анализа остаточных напряжений дано в статье С. S. Vargrett'a, там же, т. 21, стр. 147, 1944; см. также статью О. J. Hoeger'a в издании M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950.

¹⁾ Эта теория была разработана Сен-Венаном, J. de math., т. 16, стр. 373, 1871. См. также J. Todhunter and K. Pearson, History of the Theory of Elasticity, т. 2, ч. 1, стр. 170. О дальнейшем рассмотрении этого вопроса см. A. Nádai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, стр. 347, 1950.

²⁾ Такую диаграмму можно получить опытным путем, если произвести испытание на кручение тонкой трубы. Чтобы исключить возможность вычисления, толщину стенки можно довести местным утонением до малой величины, сделав круговую выточку прямоугольной формы в толстой трубе.

Подставляя в это уравнение из выражения (a)

$$r = \frac{\gamma}{\theta}, \quad dr = \frac{d\gamma}{\theta},$$

получаем

$$\frac{2\pi}{\theta^2} \int_0^{a\theta} \gamma^2 \tau d\gamma = M_k. \quad (c)$$

Интеграл левой части этого уравнения имеет простой геометрический смысл: он представляет собой момент инерции относительно вертикальной оси Oz площади $OmnO$ из рис. 250. После вычисления этого момента инерции для любого принятого значения $a\theta$ соответствующий крутящий момент легко получим по выражению (c). Следовательно, можно начертить кривую, представляющую зависимость между M_k и θ , если дана диаграмма на рис. 250. Так как абсциссы на рис. 250 пропорциональны радиальным расстояниям, то кривая $O\theta$ также представляет в некотором масштабе распределение касательных напряжений по радиусу вала. Если при кручении материал все время следует закону Гука, то мы имеем $\tau = \gamma G = r\theta G$, и выражение (b) дает

$$2\pi\theta G \int_0^a r^2 dr = \theta G J_p = M_k, \quad (d)$$

что является известным уравнением для кручения круглых валов в пределах упругости.

Если материал вала имеет ясно выраженный предел текучести, то криволинейный участок диаграммы на рис. 250 можно заменить горизонтальной линией с абсциссой τ_y . Следовательно, для большого угла закручивания распределение касательных напряжений по радиусу вала приближается к равномерному распределению. Соответствующую величину крутящего момента обозначают черес $(M_k)_{\text{пред}}$. Его значение получается путем подстановки в уравнение (b) τ_y вместо τ , что дает

$$(M_k)_{\text{пред}} = \frac{2\pi a^3}{3} \tau_y. \quad (e)$$

Когда крутящий момент достигает этого значения, дальнейшее скручивание вала происходит без увеличения крутящего момента, пока не станет заметным упрочнение материала. Для сравнения вычислим также значение крутящего момента $(M_k)_r$, при котором начинается текучесть. Для этой цели воспользуемся формулой (d) и подставим в нее то значение θ , при котором начинается текучесть. Это последнее значение получается из формулы (a), если принять $r = a$ и $\gamma = \gamma_y$, что дает

$$\theta_y = \frac{\gamma_y}{a} = \frac{\tau_y}{aG}.$$

Следовательно, из формулы (d) найдем

$$(M_k)_T = \theta_r G J_p = \frac{\pi a^3}{2} \tau_r. \quad (f)$$

Сопоставляя формулы (e) и (f), видим, что

$$(M_k)_{\text{пред}} : (M_k)_T = \frac{4}{3}.$$

Если после приложения крутящего момента $(M_k)_{\text{пред}}$ мы разгрузим вал, то в нем останутся некоторые остаточные напряжения. Величину этих напряжений можно получить, повторив те же рассуждения, которые были применены в случае изгиба (стр. 312). Пусть ординаты горизонтальной линии mn на рис. 251 представляют касательное напряжение τ_r , вызываемое моментом $M_{\text{пред}}$ равномерно распределенно по радиусу вала. При разгрузке вала материал следует закону Гука, и напряжения от кручения должны быть вычтены, подчинены линейному закону, показанному на рис. 251 линией m_1n_1 . Разность между двумя распределениями напряжений — прямоугольного во время нагружения и

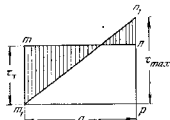


Рис. 251.

треугольного во время разгрузки — представляет те, которые остаются в вале после разгрузки. Распределение этих напряжений по радиусу вала показано на рис. 251 заштрихованными площадями. Величина ординаты n_1p , обозначаемая через τ_{max} , найдется из тех соображений, что прямоугольное и треугольное распределения напряжений представляют крутящий момент той же величины $M_{\text{пред}}$. Для прямоугольного распределения напряжений этот момент определяется выражением (e). Формула для того же крутящего момента при треугольном распределении напряжений получается путем подстановки в выражение (f) τ_{max} вместо

$$\frac{2\pi a^3}{3} \tau_r = \frac{\pi a^3}{2} \tau_{\text{max}}$$

или

$$\tau_{\text{max}} = 1 \frac{1}{3} \tau_r.$$

Видно, что остаточное напряжение от кручения на поверхности вала равно $1,3 \tau_r$, а у центра — τ_r .

Распределение остаточных напряжений при кручении можно также исследовать опытным путем. Для этой цели необходимо снимать последовательно тонкие слои металла с вала и измерять после удаления каждого слоя изменение угла закручивания вала.

В случае идеально пластических материалов (см. стр. 287) можно с успехом применить мембранную аналогию для изучения кручения за пределом текучести. Когда величина крутящего момента несколько больше чем $(M_k)_T$, внешний участок вала находится в условиях текучести, а то время как внутренний участок продолжает деформироваться упруго. Чтобы распространить мембранную аналогию на этот случай, необходимо применить одновременно с мембраной жесткий конус ACB (рис. 252), наклон поверхности которого в надлежащем масштабе представляет напряжение при пределе текучести τ_r . Если на мембрану действует небольшое давление p , ее перемещения будут также небольшими и коническая поверхность не препятствует свободному смещению мембраны. Следовательно, ее поверхность определяет распределение напряжений для случая упругого кручения, как было разобрано ранее (см. стр. 198). С увеличением давления перемещения мембраны также увеличиваются и, наконец, внешний участок мембраны приходит в соприкосновение с жестким конусом, как показано на рис. 252. Это состояние определяет кручение за пределом текучести. Внешний участок мембраны, совпадающий с конусом, имеет постоянный наклон поверхности, соответствующий пределу текучести τ_r . Внутренний участок mn мембраны

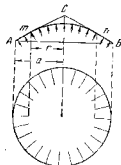


Рис. 252.

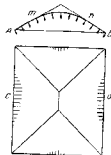


Рис. 253.

соответствует внутреннему участку вала, который находится в упругом состоянии. Удвоенный объем, заключенный между мембраной и плоскостью контура AB , продолжает представлять крутящий момент. Из этого мы заключаем, что удвоенный объем конуса должен дать нам значение $M_{\text{пред}}$. Так как наклон конуса равен τ_r , то его высота равна $a\tau_r$, а его удвоенный объем равен $\frac{2}{3} \pi a^2 a \tau_r$, что совпадает с выражением (e).

Подобный метод может быть применен и в случае некруговых поперечных сечений валов; он весьма полезен при определении участков вала, в которых начинается текучесть. Рассмотрим для примера прямоугольный вал. При исследовании кручения этого вала за пределом текучести нужно воспользоваться мембраной совместно с жесткой поверхностью в виде крышки (рис. 253), которая во всех точках имеет постоянный наклон, представляющий в некотором масштабе напряжение предела текучести τ_r . Очевидно, что мембрана, деформируемая под действием увеличивающегося равномерного давления, касается крышки сначала у c и d — средних точек длинных сторон прямоугольника. В этих точках начинается текучесть, в при более высоком давлении некоторые участки мембраны будут совпадать с крышей,

как указано на рисунке заштрихованными площадями. Эти площадки определяют области, где материал течет. В оставшемся виде мы имеем только упругую деформацию. Дальнейшее увеличение давления на мембрану увеличивает участки сжатия с краями, так же как и области пластической деформации. Двойной объем, заключенный между кривой и плоскостью AB , очевидно, даст величину $M_{пред}$ для прямоугольного вала.

Если прямоугольный стержень из сварочного железа закручивается за пределом текучести, то области пластического течения можно выявить надлежащим протравливанием поперечного сечения. После травления в пластических областях поперечного сечения появляются темные параллельные линии с направлениями, показанными на рис. 253. Эти линии свидетельствуют о скольжении металла вдоль слоев, параллельных оси вала, вызываемом напряжениями, соответствующими пределу текучести¹⁾.

70. Пластические деформации толстостенных цилиндров под действием внутреннего давления²⁾

При рассмотрении упругой деформации толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления p мы нашли (см. стр. 175), что радиальное и окружное напряжения в радиальном расстоянии r от оси цилиндра выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \quad (a)$$

где a и b — соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра. Наибольшее окружное растяжение и наибольшее радиальное сжатие имеют место на внутренней поверхности цилиндра. На этой поверхности действует также наибольшее касательное напряжение; его величина равна

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)_{r=a} = \frac{pb^2}{b^2 - a^2}. \quad (b)$$

Постепенным увеличением внутреннего давления мы, наконец, достигнем момента, когда материал на внутренней поверхности начинает течь. Это происходит, когда наибольшее касательное напряжение (b) становится равным пределу текучести τ_t ³⁾. Подставляя это значение в формулу (b), находим, что давление, при котором начинается теку-

¹⁾ Интересные фотографии этих линий, полученные для различных форм сжимаемых стержней, показаны в статье A. N. D. A. I., Trans. A. S. M. E., т. 53, стр. 29, 1931; см. также его книгу «Theory of Flow and Fracture of Solids», стр. 494, 1950; русский перевод, изд-во ИЛ, 1954, стр. 538.

²⁾ Исследование пластического течения в толстостенных цилиндрах, подверженных внутреннему давлению, было произведено Сен-Венаном; см. Compt. rend., т. 74, стр. 1009, 1872; см. также I. Todhunter and K. Pearson, History of Theory of Elasticity, т. 2, ч. 1, стр. 172 и статью L. V. T. I. g. e. 'a, Cambridge Phil. Soc. Trans., т. 21, стр. 377, 1913.

³⁾ Вопрос о текучести материала при различных напряженных состояниях рассмотрен в п. 82. Мы допускаем здесь, что τ_t имеет то же значение, что и в случае кручения (см. стр. 317).

чь, равно

$$p_t = \tau_t \frac{b^2 - a^2}{b^2}. \quad (c)$$

Полагая, например, $b = 2a$, мы находим, что в этом частном случае $p_t = 0,75 \tau_t$. При дальнейшем увеличении давления пластическая деформация проникает все глубже и глубже в стенки цилиндра и, наконец, при некотором давлении, которое назовем $p_{пред}$, вся стенка цилиндра придет в состояние текучести. Распределение напряжений в стенке при этом состоянии текучести можно исследовать без особого затруднения, если предположить, что материал является идеально пластичным; это означает, что течение происходит под действием постоянного касательного напряжения, равного τ_t . Тогда для каждой точки в области пластической деформации справедливо условие

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \tau_t. \quad (d)$$

Второе условие для определения главных напряжений σ_t и σ_r получится рассмотрением равновесия элемента стенки, показанного на рис. 127. На основании предыдущего изложения (см. стр. 174) уравнением равновесия будет

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (e)$$

Подставляя вместо разности главных напряжений его значение по условию (d), получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\tau_t}{r}. \quad (f)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\sigma_r = 2\tau_t \ln r + C. \quad (g)$$

Постоянная интегрирования C найдется из условия, что на наружной поверхности цилиндра, т. е. при $r = b$, радиальное напряжение обращается в нуль. Это дает

$$0 = 2\tau_t \ln b + C, \quad C = -2\tau_t \ln b.$$

Подставляя это значение постоянной C в уравнение (g), получаем

$$\sigma_r = 2\tau_t \ln \frac{r}{b}. \quad (285)$$

Тогда для внутренней поверхности цилиндра находим

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2\tau_t \ln \frac{a}{b}, \quad (286)$$

а давление, которое требуется для того, чтобы привести всю стенку цилиндра в состояние пластической деформации, равно

$$P_{\text{пред}} = -(\sigma_r)_{r=a} = -2\tau_0 \ln \frac{a}{b}.$$

Взяв опять $b=2a$, найдем

$$P_{\text{пред}} = 2\tau_0 \ln 2 = 0,693 (2\tau_0).$$

Имея уравнение (285) для радиальных напряжений, мы получаем окружные напряжения по выражению (d), что дает

$$\sigma_r = 2\tau_0 \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right). \quad (287)$$

Если $b=2a$, то отсюда находим

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2\tau_0 \left(1 + \ln \frac{a}{b}\right) = 0,307 (2\tau_0),$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = 2\tau_0.$$

Распределение напряжений σ_r и σ_t по толщине стенки для частного случая $b=2a$ показано на рис. 254 соответственно кривыми m и st . Если после приведения материала цилиндра к состоянию текучести мы удалим внутреннее давление, то в стенке цилиндра сохранятся

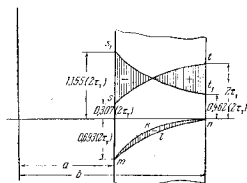


Рис. 254

некоторые остаточные напряжения. Эти напряжения можно легко вычислить, если предположить, что при разгрузке материал цилиндра следует закону Гука. В таком случае напряжения, которые должны вычитаться при разгрузке цилиндра, определяются формулами (а), если мы подставим в эти выражения $P_{\text{пред}}$ вместо p . Эти напряжения для частного случая $b=2a$ показаны на рис. 254 кривыми s_1t_1 и mkn . Тогда заштрихованные площади дадут остаточные напряжения в стен-

ке цилиндра. Видно, что благодаря пластической деформации в части стенки цилиндра возникают значительные сжимающие окружные напряжения⁴⁾. Если цилиндр с такими остаточными напряжениями снова нагружается внутренним давлением, равным $P_{\text{пред}}$, то вызываемые этим давлением окружные напряжения, определяемые кривой s_1t_1 , будут наложены на остаточные напряжения, определяемые заштрихованными площадями, так что результирующее распределение напряжений будет отвечать кривой st . Наибольшее результирующее напряжение равно $2\tau_0$, и никакой текучести при этом втором приложении внутреннего давления не происходит. Следовательно, остаточные напряжения, вызываемые пластическим расширением цилиндра, по природе таковы, что увеличивают давление, которое может выдержать цилиндр в упругом состоянии. Этим обстоятельством иногда пользуются при изготовлении орудий, когда они должны выдерживать высокое внутреннее давление газов⁵⁾.

В нашем изложении было допущено, что приложенное внутреннее давление может привести весь цилиндр в состояние текучести, но этот же метод можно применить без затруднения к случаям, в которых только внутренняя часть стенки цилиндра находится в состоянии текучести, и то время как наружная часть находится в упругом состоянии. Допустим, что приложено давление p' большее, чем p_0 , но меньшее, чем $P_{\text{пред}}$, и пусть c будет радиусом цилиндрической поверхности, отделяющей пластическую область стенки от упругой области. Между этими двумя областями будет действовать радиальное давление, которое мы назовем X . Величина этого давления может быть найдена на рассмотренной упругой наружной части стенки. Наибольшее касательное напряжение τ_{max} в этой части найдется на выражении (b) подстановкой в него c вместо a и X вместо p , что дает

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}.$$

Так как цилиндрическая поверхность при $r=c$ разделяет упругую и пластическую зоны, то материал на этой поверхности как раз достигает предела текучести. Следовательно, $\tau_{\text{max}} = \tau_0$. Тогда уравнением для определения давления X будет

$$\tau_0 = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}. \quad (h)$$

⁴⁾ Предполагается, что это сжимающее напряжение меньше, чем напряжение, соответствующее пределу текучести, и что при разгрузке не происходит текучести. Случай текучести при разгрузке был изучен Л. В. Таггетом, цит. на стр. 320.

⁵⁾ Описание этого применения начальной пластической деформации можно найти в книге: L. Jacob, Résistance et construction des bouches à feu: Autofretage, Paris. См. также S. J. Brown, U. S. Naval Inst. Proc., т. 46, стр. 1941, 1920.

и мы получим

$$X = \frac{\tau_r (b^2 - c^2)}{b^2} \quad (i)$$

Имея это давление, мы можем легко вычислить напряжения в любой точке в упругой области стенки, пользуясь формулами, подобными формулам (а)¹⁾.

Для вычисления напряжений в пластической области стенки воспользуемся выражением (g). Постоянная интегрирования C найдется из условия, что при $r=c$, $\sigma_r = -X$; это даст

$$-X = 2\tau_r \ln c + C, \quad C = -X - 2\tau_r \ln c.$$

Подставляя значение C в выражение (g) и пользуясь формулой (i), получаем

$$\sigma_r = 2\tau_r \ln \frac{r}{c} - \frac{\tau_r (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (288)$$

Приняв r равным внутреннему радиусу a цилиндра, мы получим величину p' давления, которое должно быть принято для того, чтобы произвели пластическую текучесть в стенке до глубины, соответствующей радиусу $r=c$. Это давление будет

$$p' = -2\tau_r \ln \frac{a}{c} + \frac{\tau_r (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (289)$$

Обратившись к нашему предыдущему примеру, где $b=2a$ и положив $c=1,5a$, мы найдем из уравнения (289), что $p'=0,624(2\tau_r)$.

Распределение окружных напряжений σ_t получается из выражения (d), которое дает

$$\sigma_t = 2\tau_r + \sigma_r = 2\tau_r \ln \frac{r}{c} + \tau_r \frac{b^2 + c^2}{b^2}. \quad (290)$$

При $r=c$ первый член правой части уравнения обращается в нуль, и значение σ_t становится равным значению окружного напряжения, вызываемого давлением X в смежной упругой зоне стенки. Выражения (289) и (290) дают напряжения, возникающие во внутренней части стенки цилиндра, которая претерпевает пластическую деформацию. Для наружной части, которая остается упругой, нужно использовать формулы, подобные формулам (а). Таким путем задача о распределении напряжений для случая цилиндра, который претерпевает лишь частичную пластическую деформацию, полностью решена.

Если после частичной текучести стенки цилиндра удалить внутреннее давление p' , то в стенке цилиндра удержатся некоторые остаточные напряжения. Внутренняя часть стенки, в которой имела место пластическая деформация, не возвращается к ее первоначальному

¹⁾ Нужно принять в этих уравнениях радиус c вместо a и X вместо p .

диаметру и испытывает давление со стороны упругой наружной части стенки. Распределение напряжений, возникающее в результате этого, подобно распределению напряжений, вызываемых горячей посадкой в составных цилиндрах (см. п. 41). Чтобы вычислить эти напряжения, мы постулируем точно так же, как пояснено ранее и показано на рис. 254.

Все эти вычисления основываются на допущении, что за пределом текучести материал течет без увеличения напряжений. В противном случае остаточные напряжения не могут быть вычислены так просто, как пояснено выше, и нужно обратиться к опытному определению остаточных напряжений. В таких случаях можно использовать метод, подобный тому, который применяется при определении остаточных напряжений при изгибе. Мы снимаем тонкие слои металла, начиная с внутренней поверхности цилиндра¹⁾, и после каждого среза измеряем деформацию, вызванную в осевом и окружном направлениях на наружной поверхности цилиндра. Такие измерения дают достаточные сведения для вычисления остаточных напряжений.

Остаточные напряжения в цилиндрах можно вызвать не только пластической деформацией, описанной выше, но также и неравномерным охлаждением и изменением объема металла при рекристаллизации в различных процессах горячей обработки. Иногда эти напряжения приобретают первостепенное значение, как, например, в больших поковках, и уже разработано несколько методов их определения²⁾.

¹⁾ Были проделаны некоторые опыты с отслаиванием с наружной стороны: см. H. Bühler und W. Schreiber, Metallwissensch. u. Techn., сентябрь 1954, и статью Буллера в книге «Residual Stresses in Metals and Metal Construction», 1954.

²⁾ Первое исследование этого рода было сделано И. Каалакуним, Петербург, 1887. См. также N. Kalakoutzky, Investigation into the Internal Stress in Cast Iron and Steel, London, 1888. Полное решение задачи было дано G. Sachs'om, Metallkunde, т. 19, стр. 352, 1927 и Z. Ver. deut. Ing., т. 71, стр. 1511, 1927. Эти две статьи содержат полную библиографию предмета. Дальнейшие улучшения методов измерения остаточных напряжений в трубах были сделаны Н. Н. Давиденковым, Журнал технической физики (Ленинград), т. 1, 1931. См. также G. Sachs, Trans. A. S. M. E., стр. 821, 1939. Библиография по пластической деформации металлов и остаточным напряжениям дана в книге: G. Sachs, Handbuch der Metallphysik, Leipzig, т. 3, ч. 1, 1937. См. также статью O. J. Høegera, цит. на стр. 316. Остаточные напряжения в шатунах нефтяных насосов рассмотрены в статье R. E. Hanley, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 10, стр. 97, 1952.

где $F = \pi d^2/4$ есть площадь поперечного сечения образца¹⁾. В случае прямоугольных образцов предпочтительно иметь то же соотношение между длиной и площадью поперечного сечения, как и для круглых образцов.

ГЛАВА X МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

71. Общие соображения

В предыдущих главах излагались методы анализа распределения напряжений, вызываемых различного рода силами в конструкциях. Зная напряжения, проектировщик должен затем выбрать материал и размеры конструкции так, чтобы в работе она безопасно выдерживала различные сочетания нагрузок. В этих целях необходимо иметь сведения относительно упругих свойств и прочностных характеристик строительных материалов при различных напряженных состояниях. При анализе напряжений обычно предполагают, что материал следует закону Гука, и тогда для решения задачи достаточно знать упругие характеристики материала. Но для выбора безопасных размеров сооружения этих сведений недостаточно. Проектировщик должен не только знать пределы, при которых материал можно рассматривать как совершенно упругий при различных напряженных состояниях, но и изучить поведение материала за этими пределами. Сведения такого рода можно получить только в опытных исследованиях. Лаборатории для испытания материалов должны быть снабжены машинами¹⁾ для выполнения некоторых типичных деформаций опытных образцов, таких, как растяжение, сжатие, кручение и изгиб.

Чтобы сделать результаты испытаний сравнимыми, были установлены определенные размеры испытываемых образцов, которые признаны стандартными. Наиболее широко применяемыми механическими испытаниями строительных материалов, несомненно, являются испытания на растяжение. Стандартный образец для испытания на растяжение в США принимается круглым, диаметром 0,5 дюйма и расчетной длиной 2 дюйма, так что

$$\frac{l}{d} = 4 \quad \text{или} \quad l = 4,51 \sqrt{F},$$

¹⁾ Описание испытательных машин и библиографию по предмету см. в статье J. Marin'a в издании M. Hetenyi, Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950; см. также статью A. Eichinger'a в издании E. Stebel, Handbuch der Werkstoffprüfung, Stuttgart, 1940.

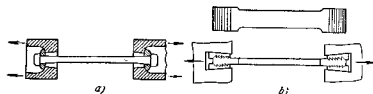


Рис. 255.

Длина цилиндрической части образца всегда несколько больше, чем расчетная длина l и обычно равняется по меньшей мере $l + d$. Концы образца вообще изготавливаются большего поперечного сечения для того, чтобы предохранить образец от разрушения в зажимах испытательной машины, где условия напряженности более сложные, так как здесь имеются местные несправильности и распределение напряжений. На рис. 255, а показан цилиндрический образец при $l = 10d$; здесь показаны также сферические гнезда в зажимах машины, имеющие целью обеспечить центральное приложение нагрузки. На рис. 255, б приведен плоский прямоугольный образец.

Испытательные машины на растяжение обычно снабжаются устройством, которое автоматически вычерчивает диаграмму растяжения, представляющую зависимость между нагрузкой P и удлинением $\Delta l = \delta$ образца. Такой диаграммой обнаруживаются важные характеристики материала. Например, рис. 256¹⁾ приводит ряд кривых растяжения для углеродистой стали с различным содержанием углерода. Можно видеть, что по мере увеличения содержания углерода предел прочности стали также увеличивается, но в то же время удлинение при разрыве уменьшается, и материал имеет меньшую пластичность. Высокоуглеродистая сталь является относительно хрупкой. Она следует закону Гука до высокого значения напряжения и затем разрывается при очень малом

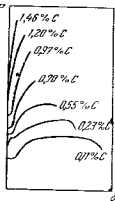


Рис. 256.

¹⁾ В Центральной Европе применяются двух разных размеров круглые образцы: 1) длинные образцы, для которых $l = 10d = 11,3 \sqrt{F}$ и 2) короткие образцы, для которых $l = 5d = 5,65 \sqrt{F}$.

удлинения. С другой стороны, являясь сталь с малым содержанием углерода является эластичной и значительно вытягивается перед разрывом. В последующем изложении мы сначала рассмотрим испытания на растяжение хрупких материалов.

72. Испытания на растяжение хрупких материалов

Начнем с рассмотрения стекла, являющегося примером хрупкого материала. Стекло практически следует закону Гука до разрушения, и диаграмма испытания может быть представлена приблизительно прямой линией OA (рис. 257). Обычные испытания на растяжение стекла дают очень низкие значения предела прочности, а соответствующее количество работы, требуемое для того, чтобы произвести разрушение (представлено на рис. 257 заштрихованной площадью OAB), весьма мало по сравнению с количеством энергии, теоретически требуемой для отделения молекул друг от друга. Эта последняя величина может быть получена опытным путем — плавлением и затем выравниванием стекла. Работа, требуемая для того, чтобы отделить молекулы, будет тогда того же порядка величины, как количество теплоты, требуемой для выпаривания. Эксперименты показывают, что эта величина в тысячи раз больше, чем работа, требуемая при испытаниях на растяжение (рис. 257).

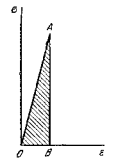


Рис. 257.

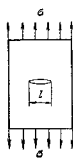


Рис. 258.

Чтобы объяснить это несоответствие, Гриффис предложил теорию¹⁾, согласно которой энергия, требуемая для разрушения стеклянного образца, неравномерно распределяется по объему, и в образце имеются области концентрации энергии, вызываемой микроскопическими трещинами, которые действуют как концентраторы напряжений. Рассматривая одну из этих микроскопических трещин как узкое эллиптическое отверстие в пластинке, которая равномерно растягивается (рис. 258), и пользуясь известными выражениями для напряжений вокруг эллиптического отверстия (см. п. 57), мы можем показать, что энергия деформации пластинки (на единицу толщины) уменьшается благодаря наличию отверстия на величину²⁾

$$\frac{\pi l^2 \sigma^2}{4E} \quad (a)$$

¹⁾ A. A. Griffith, Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 221, стр. 163—198, 1921. См. также Proc. Internat. Congr. Appl. Mech. Delft, стр. 55—63, 1924.

²⁾ Предполагается, что расстояния между трещинами сравнительно велики, так что нарушения в распределении напряжений из-за трещин можно

В этом выражении l есть длина трещины, σ — равномерно распределенное растягивающее напряжение и E — модуль упругости материала.

Рассмотрим теперь величину напряжения, при котором трещина начнет распространяться поперек пластинки и вызовет разрушение. Такое распространение трещины становится возможным без какой-либо дополнительной работы только при условии, если увеличение *поверхностной энергии* вследствие приращения dl длины трещины компенсируется соответствующим уменьшением энергии деформации пластинки. Обозначая поверхностное натяжение через S , мы получаем таким путем следующее уравнение для состояния на пределе прочности:

$$d \left(\frac{\pi l^2 \sigma^2}{4E} \right) dl = 2Sdl, \quad (b)$$

или

$$l = \frac{4SE}{\pi \sigma^2}. \quad (c)$$

Для того чтобы определить поверхностное натяжение S , Гриффис сделал ряд испытаний с расплавленным стеклом при различных температурах. Температуры были таковы, что стекло вело себя, как вязкая жидкость. Значение S при комнатной температуре при этом было получено экстраполированием в предположении линейного изменения S с изменением температуры. Предел прочности $\sigma_{пр}$ стекла находился из обычных испытаний на растяжение, и длина l трещины теперь могла быть вычислена¹⁾ из уравнения (c). Из уравнения (c) вместе с тем видно, что предел прочности при растяжении обратно пропорционален квадратному корню из l .

Чтобы проверить теорию, Гриффис проделал опыты с тонкими стеклянными трубками, подверженными внутреннему давлению. Делая алмазом искусственные трещины, параллельные оси цилиндра, различной при этом длине, он нашел предел прочности $\sigma_{пр}$ опытным путем. Эти опыты удовлетворительно согласовались с теоретическими выводами, вытекающими из уравнения (c). Гриффис продел далее опыты с тонкими стеклянными волокнами и нашел предел прочности при растяжении равным $3,5 \cdot 10^4$ кг/см² для волокна $3,3 \cdot 10^{-3}$ мм в диаметре. Это было приблизительно в двадцать раз выше, чем ранее найденное значение для более толстых образцов. Такая значительная прочность тонких волокон может быть объяснена также на основании теории Гриффиса, если заметить, что в процессе вытягивания тонких волокон исчезают любые трещины, которые были первоначально перпендикулярны длине волокон. Гриффис отметил, что спустя некоторое время волокна теряют часть своей прочности. Производя

рассматривать независимо одно от другого. Тогда достаточно рассмотреть лишь одну трещину, перпендикулярную напряжениям, как наиболее неблагоприятную.

¹⁾ Опыты Гриффиса дали для l значение порядка $1 \cdot 10^{-3}$ см.

опыты с волокнами немедленно после того, как они были вытянуты, он получил громадный предел прочности, равный $6,3 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$ для диаметра 0,5 мм. Это значение составляет приблизительно половину теоретической прочности, определенной путем рассмотрения молекулярных сил.

Другие исследования прочности при растяжении хрупких материалов были сделаны с образцами из монокристалла, вырезанными из большого кубика кристаллической соли¹⁾. Эти опыты показывали, что предел прочности этого материала равнялся только 45 кг/см^2 в испытаниях на воздухе при комнатной температуре. Когда тот же образец испытывался в процессе погружения в горячую воду, он достигал предела текучести при напряжении 80 кг/см^2 , а затем растягивался пластически до окончательного разрушения, происходившего при напряжении, равном $16\,000 \text{ кг/см}^2$. Такое значение предела прочности близко к теоретической прочности $20\,000 \text{ кг/см}^2$, вычисленной Ф. Цвикки²⁾. Эти опыты показали, что сглаживание поверхности испытываемого образца оказывает большое влияние на прочность при растяжении образца.

Интересные опыты, относящиеся к прочности при растяжении листов слюды, были проделаны Е. Оравом³⁾. Вместо применения стандартных образцов на растяжение (рис. 255, б), вырезанных из листов слюды, он пользовался листами слюды, подвергавшимися растяжению на участке mn с помощью захватов А (рис. 259). В этом

случае предел прочности получался приблизительно в десять раз большим, чем для стандартных образцов при испытании на растяжение. Это указывает на то, что несовершенство, имеющееся по краям стандартных образцов (рис. 255, б), значительно уменьшало прочность и что, устраняя их влияние с помощью приспособления, приведенного на рис. 259, можно получать высокие значения предела прочности. Все описанные опыты подтверждают гипотезу Гриффиса, что низкие значения прочности при растяжении хрупких материалов обусловлены такими несовершенствами, как микроскопические трещины и царапины на поверхности испытываемого образца.

Если на прочность хрупких материалов оказывает значительное влияние наличие несовершенств, то кажется логичным ожидать, что

¹⁾ См. статью А. Иоффе, Z. Phys., т. 22, стр. 286, 1924; см. также Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, стр. 64, 1924. Дальнейший разбор работы Иоффе дан в книге: E. Schmid und W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, стр. 271, 1935.

²⁾ См. Z. Phys., т. 24, стр. 131, 1928.

³⁾ См. Z. Phys., т. 82, стр. 285, 1933.

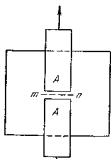


Рис. 259.

предел прочности будет зависеть от размеров образца и будет становиться все меньшим с увеличением размеров, так как тогда возможность наличия слабых мест увеличивается. Влияние размера было заменено в случае хрупкого разрушения, которое производится ударом¹⁾ или при испытаниях на усталость²⁾. Объяснение на основе статистического метода было дано Вейбуллом³⁾. Он показал, что для данного материала в геометрически подобных образцах с объемами V_1 и V_2 значения предела прочности, определяемые испытанием на растяжение, будут находиться в отношении

$$\frac{(\sigma_{пред})_1}{(\sigma_{пред})_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/m}, \quad (d)$$

где m — постоянная материала. После определения m из уравнения (d) можно найти значение $\sigma_{пред}$ для любого иного размера образца. Затем такие опыты были проделаны Н. Давиденковым⁴⁾, использовавшим сталь с высоким содержанием фосфора. Производя опыты с образцами двух разных диаметров ($d=10 \text{ мм}$ и $d=4 \text{ мм}$) и с двумя разными длинами ($l=50 \text{ мм}$ и $l=20 \text{ мм}$), он нашел для $\sigma_{пред}$ соответственные значения ($57,6 \text{ кг/мм}^2$ и $65,0 \text{ кг/мм}^2$). Величина $m=23,5$ была затем определена из уравнения (d). Для этого m предел прочности образца с $d=1 \text{ мм}$ и $l=5 \text{ мм}$ найден равным $77,7 \text{ кг/мм}^2$. Опыты же дали значение $75,0 \text{ кг/мм}^2$, так что теория оказалась в хорошем согласии с опытами.

Пользуясь статистическим методом, Вейбулл вычислил также⁵⁾ предел прочности для прямоугольного стержня при чистом изгибе и нашел отношение

$$\frac{(\sigma_{пред})_{чистый}}{(\sigma_{пред})_{растяжение}} = (2m+2)^{1/m}. \quad (e)$$

Эта формула была также проверена опытами Давиденкова. Его испытания дали для этого отношения значение 1,40, в то время как теоретическая цифра была 1,41, вычисленная для $m=24$.

Некоторые другие общие виды распределения напряжений были рассмотрены в статье Вейбулла. Он упоминает также различные опытные исследования, которые показали удовлетворительное совпадение со статистической теорией. Эта теория применима только к материалам, имеющим хрупкое разрушение, но не к тем, которые получают зна-

¹⁾ M. Ch a r p y, Assoc. Internat. essais matériaux, 6th Congr., New York, m. 4, стр. 5, 1912.

²⁾ R. E. Peterson, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 79, 1933.

³⁾ W. Weibull, Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Research (Stockholm), № 151, 1930.

⁴⁾ В английском переводе его статью смотри J. Appl. Mech., т. 14, стр. 63, 1947.

⁵⁾ W. Weibull, цит. здесь же.

чательно пластическую деформацию перед разрушением. Пластическая деформация будет смягчать местные концентрации напряжений в местах несовершенств, и поэтому только средние напряжения становятся важными при анализе состояния разрушения.

73. Испытания на растяжение пластических материалов

Механические свойства пластических материалов, например стали и других металлов, применяемых в конструкциях, обычно определяются опытами на растяжение. Рис. 260 представляет диаграмму растяжения для мягкой строительной стали. Из этой диаграммы можно получить такие важные характеристики, как *предел текучести*, *предел прочности* и величина *пластического удлинения*.

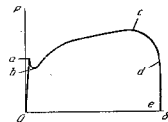


Рис. 260.

При определении *предела пропорциональности* нужны чувствительные экстензометры для того, чтобы обнаружить малейшее отклонение от прямой линии на диаграмме растяжения. Очевидно, положение этого предела на диаграмме в значительной степени зависит от чувствительности инструмента. Чтобы получить большее однообразие результатов, за основу для определения

предела пропорциональности часто принимают определенную величину остаточной деформации или определенную степень отклонения от пропорциональности. Международный конгресс по испытанию материалов в Брюсселе (1906 г.) определил предел пропорциональности как растягивающее напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,001%. Позднее наметилась тенденция повысить это предельное значение остаточной деформации до 0,01%.

Предел текучести является весьма важной характеристикой для таких материалов, как строительная сталь. При напряжении, соответствующем пределу текучести, образец удлиняется на значительную величину без какого-либо увеличения нагрузки. В случае мягкой стали это удлинение может быть больше двух процентов. Иногда текучести сопровождается резким уменьшением нагрузки, и диаграмма растяжения имеет форму, показанную на рис. 260. В таком случае верхний и нижний пределы нагрузки в *a* и *b*, разделенные на первоначальную площадь поперечного сечения, называются соответственно верхним и нижним пределами текучести. Положение верхнего предела текучести зависит от скорости испытания, формы образца и формы поперечного

сечения (см. п. 77). Нижний предел текучести обычно рассматривается как истинная характеристика материала и поэтому принимается за основу для определения рабочих напряжений.

Благодаря относительно большому удлинению материала на пределе текучести нет необходимости пользоваться чувствительными экстензометрами для определения этой точки. Ее можно определить с помощью простейших инструментов или можно взять непосредственно из диаграммы растяжения. Для строительной углеродистой стали напряжение, соответствующее пределу текучести, приблизительно составляет 55—60% от предела прочности. Строительная сталь приблизительно с 1% кремния имеет напряжение предела текучести, равное до 70—80% предела прочности. Предел прочности для кремниевой стали приблизительно такой же, как и для углеродистой стали; высокое же значение для предела текучести оправдывает обычную практику применения более высоких рабочих напряжений для кремниевой стали.

Резко выраженный предел текучести является характеристикой не только строительной стали, но также и таких материалов, как бронза и латунь. Однако существуют другие материалы, которые не имеют вполне определенного предела текучести. Для этих материалов за предел текучести иногда принимается напряжение, при котором остаточная деформация (пластическое удлинение) достигает значения 0,2%. Нужно помнить, что предел текучести, определяемый таким образом, не представляет определенной физической характеристики материала, но зависит от произвольно выбранной величины остаточной деформации. В случае строительной стали с ясно выраженным пределом текучести величина удлинения на пределе текучести обычно значительно больше 0,2%, и в таком случае действительный предел текучести совпадает с пределом текучести, найденным по величине 0,2% остаточной деформации.

Предел прочности обычно определяется как напряжение, получаемое путем деления наибольшей нагрузки образца (точка *c* на рис. 260) на первоначальную площадь поперечного сечения. Эта величина часто принимается за основу для определения рабочих напряжений.

Площадь, ограниченная диаграммой растяжения *abcde* (рис. 260), представляет работу, необходимую для того, чтобы произвести разрушение. Этой величиной также пользуются как характеристикой свойств материала, зависящей не только от прочности, но также и от пластичности материала.

Пластичность металла обычно характеризуется *удлинением* расчетной длины образца при испытании на растяжение и *уменьшением площади* поперечного сечения, где происходит разрушение. В первой стадии пластического удлинения от *a* до *c* на рис. 260 образец удлиняется равномерно по своей длине. Это равномерное удлинение сопровождается равномерным поперечным сокращением, так что объем

¹⁾ См. статью P. Ludwika's, Bruchgefahr und Materialprüfung, Schweiz. Verband f. Materialprüf. u. Technik (Zürich), Ber., № 13, 1928.

образца остается практически постоянным¹⁾. В точке с растягивающей силой достигает наибольшего значения; дальнейшее растяжение образца сопровождается уменьшением нагрузки. В этой стадии пластического удлинения деформация становится местной, т. е. сосредотачивается в некотором месте, и начинается образование *шейки*, причем образец принимает форму, показанную на рис. 261.

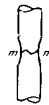


Рис. 261. Трудно определить точно момент, когда начинается образование шейки, и поэтому трудно установить отдельно величину равномерного удлинения и отдельно величину удлинения, вызванного образованием шейки. Поэтому обычно измеряют полное увеличение расчетной длины после разрыва образца. Тогда *относительное удлинение* определяется как отношение этого полного удлинения расчетной длины к ее первоначальной длине. На практике удлинение при разрыве обычно дается в процентах. Если l есть начальная расчетная длина и δ — полное удлинение, то относительное удлинение при разрыве в процентах будет

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \cdot 100. \quad (a)$$

Это удлинение обычно принимается за меру пластичности материала. Относительное удлинение, полученное таким образом, зависит от размеров образца. Увеличение δ расчетной длины вследствие образования шейки представляет большую часть полного удлинения и практически оно одно и то же как для короткой расчетной длины, так и для длинной расчетной длины. Следовательно, относительное удлинение, определяемое уравнением (a), оказывается больше по мере уменьшения расчетной длины. Для стали относительное удлинение образцов при $l = 5d$ приблизительно в 1,22 раз больше удлинения образца из того же материала при $l = 10d$. Опыты также показывают, что форма поперечного сечения влияет на местную деформацию в шейке и, следовательно, влияет на удлинение образца. Из этого следует, что сравнимые результаты в отношении удлинения можно получить, лишь применяя геометрически подобные образцы.

Относительное сужение площади поперечного сечения при разрыве определяется формулой

$$q = \frac{F_0 - F_1}{F_0}, \quad (b)$$

в которой F_0 есть первоначальная площадь поперечного сечения и F_1 — конечная площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Таблица, дающая результаты большого количества статических испытаний на растяжение различных сталей, приведена в конце главы.

¹⁾ Малая упругая деформация изменения объема значительно меньше сравнительно большой пластической объемной деформации, и поэтому ее можно не учитывать.

74. Испытания образцов из монокристалла в упругой области

Металлы, которые используются в инженерной практике, обычно имеют кристаллическую структуру. Кусок металла состоит из большого числа мелких кристаллов, и механические свойства материала можно лучше понять, если изучить сначала свойства монокристалла.

Рентгеновский анализ позволяет установить, что каждый кристалл любого материала состоит из большого числа атомов, расположенных в характерном для него геометрическом порядке. Порядок этот образуется повторением *единичной ячейки*, два типа которой показаны на рис. 262. Рис. 262, a изображает *объемноцентрированную* ячейку кристаллической структуры железа при комнатной температуре;

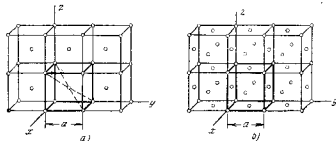


Рис. 262.

рис. же 262, b показывает *гранцентрированную* ячейку, представляющую кристаллическую структуру для алюминия, меди и некоторых других металлов. Размеры решетки, например длина a на рис. 262, постоянны для каждого материала и имеют порядок $1 \cdot 10^{-8}$ см.

Были разработаны¹⁾ различные методы для получения металлических кристаллов больших размеров для того, чтобы образцы для механических испытаний можно было вырезать из одиночного кристалла. Рис. 263 показывает²⁾ процесс получения образцов из одиночного кристалла алюминия путем рекристаллизации. Если мелкозернистый алюминиевый образец, какой показан на фотографии сверху, равномерно вытянуть на величину $1-2\%$ и затем отжечь медленным увеличением температуры ($11-28^\circ\text{C}$ в день) с последующим медленным охлаждением, мы обычно получим образец, состоящий только из немногих кристаллов, как показано на фотографии внизу.

¹⁾ См. С. F. Eism, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, 1936.

²⁾ Фотографии 263 и 264 взяты из E. Schmid and W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, 1935; английский перевод: F. A. H. Gher, London, 1950.

Тщательно отбирая материал с большим единообразием размеров зерна и опытным путем устанавливая необходимую величину удлинения при надлежащем режиме нагрева и охлаждения, можно после отжига



Рис. 263.

получить образцы из монокристаллов. Ориентировка кристалла относительно оси образца не поддается контролю, и главные оси кристалла (оси x , y , z на рис. 262) будут обычно составлять различные углы с осью образца для каждого отдельного образца.



Рис. 264.

При помощи опытных данных о поведении монокристалла были в такой мере разработаны¹⁾ приемы определения средних значений модулей упругости для поликристаллических образцов, что стало возможным предсказывать с известной точностью результаты опытов.

Используя чувствительный экстензометр, можно показать, что при испытании на растяжение образца из монокристалла даже в упругой стадии существует некоторое отклонение от закона Гука. На показавших экстензомера сказывается также влияние времени. Чтобы объяснить это явление, нужно рассмотреть термический эффект.

Если испытания на растяжение выполняются²⁾ с очень медленным увеличением нагрузки, то температура образца остается равной тем-

пература окружающей среды и зависимость между напряжением и деформацией можно представить прямой линией OA (рис. 265, а). Наклон этой линии дает величину модуля упругости E при *изотермическом* состоянии. Если же растягивающая нагрузка прикладывается так быстро, что нет достаточного времени для теплообмена, то получается прямая линия OB вместо OA и обычно модуль упругости E при *адиабатическом* состоянии больше модуля, получаемого изотермически. Вследствие своего внезапного вытягивания образец охладится³⁾ ниже комнатной температуры. Если образец остается под постоянной нагрузкой в течение достаточного времени, он постепенно

согревается до тех пор, пока не будет достигнута комнатная температура. В результате возникнет дополнительное удлинение образца (представленное на рисунке горизонтальной линией BA). Это есть *упругое последствие*, обнаруживаемое благодаря термоупругим свойствам материалов. Если после полного уравнивания температуры образец будет внезапно разгружен, то его адиабатическое сокращение будет представлено на рис. 265, а линией AC , параллельной OB . Благодаря этому внезапному укорочению образец согреется, и последующий процесс охлаждения до комнатной температуры будет вызывать дальнейшее сокращение, представленное линией CO . Видно, что деформированным образцом адиабатически с последующим предоставлением достаточного времени для температурного уравнивания описывается полный цикл, представленный параллелограммом $OBA C$. Площадь этого параллелограмма представляет потерю механической энергии за один цикл. В наших рассуждениях мы предполагаем адиабатическую деформацию, тогда как на практике всегда происходит в течение цикла известный теплообмен. Таким образом, вместо параллелограмма получается петля, как показано на рис. 265, б.

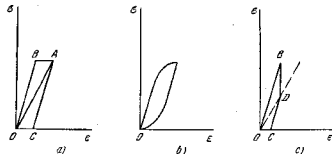


Рис. 265.

согревается до тех пор, пока не будет достигнута комнатная температура. В результате возникнет дополнительное удлинение образца (представленное на рисунке горизонтальной линией BA). Это есть *упругое последствие*, обнаруживаемое благодаря термоупругим свойствам материалов. Если после полного уравнивания температуры образец будет внезапно разгружен, то его адиабатическое сокращение будет представлено на рис. 265, а линией AC , параллельной OB . Благодаря этому внезапному укорочению образец согреется, и последующий процесс охлаждения до комнатной температуры будет вызывать дальнейшее сокращение, представленное линией CO . Видно, что деформированным образцом адиабатически с последующим предоставлением достаточного времени для температурного уравнивания описывается полный цикл, представленный параллелограммом $OBA C$. Площадь этого параллелограмма представляет потерю механической энергии за один цикл. В наших рассуждениях мы предполагаем адиабатическую деформацию, тогда как на практике всегда происходит в течение цикла известный теплообмен. Таким образом, вместо параллелограмма получается петля, как показано на рис. 265, б.

¹⁾ См. Boas and Schmid, Helv. phys. acta. т. 7, стр. 628, 1934.
²⁾ См. Lord Kelvin, Elasticity and Heat, Edinburgh, стр. 18, 1880.

³⁾ Изменение температуры можно измерить путем присоединения термометра к образцу.

Разница между адиабатическим и изотермическим модулями упругости обычно мала¹⁾, и потеря механической энергии за один цикл также весьма мала. Но если происходит последовательно много циклов, как, например, при колебаниях, то потери механической энергии становятся значительными и должны быть приняты во внимание. Они называются так называемым *внутренним трением* и являются причиной затухания колебательного движения. Петля, подобная показанной на рис. 265, *b*, называется *петлей гистерезиса*, и так как после полного цикла образец возвращается к своему первоначальному состоянию, то иногда употребляется термин *упругий гистерезис*.

Выше предполагалось, что после внезапного удлинения образец продолжает оставаться под действием постоянно приложенной нагрузки. Теперь предположим, что образец будет сохранять постоянную длину. Тогда сжатие образца будет иметь результатом некоторое уменьшение первоначально приложенной силы. Это процесс *релаксации*, представленный на рис. 265, *c* вертикальной линией *BD*. В таком случае после внезапной разгрузки образца наблюдается участок *DC*, а позже, вследствие охлаждения, получается замыкающая линия *CO* цикла *OBDC*.

В предыдущем изложении мы касались испытаний на растяжение, однако в действительности большинство сведений относительно отклонений от закона Гука и влияния времени в упругой стадии было получено при испытаниях на изгиб полосок, вырезанных из кристалла кварца. При этом было показано, что все отклонения от совершенной упругости можно вполне объяснить путем рассмотрения термоупругих и пьезоэлектрических свойств материала²⁾.

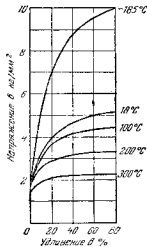


Рис. 266.

75. Пластическое растяжение образцов из монокристалла

Путем увеличения нагрузки при испытании образца на растяжение, наконец, достигается состояние, при котором образец начинает течь и пластически удлиняться. Диаграммы³⁾ для образцов из монокристалла алюминия, испытанных на растяжение при различных температурах, показаны на рис. 266. Видно, что предел пропорциональности очень низок и за этим пределом образец вытягивается пластически. Вследствие пластической

деформации материал становится жестче, и с увеличением растяжения напряжения, необходимые для продолжения деформации, становятся все большими. Это — явление *наклепа*; оно особенно ясно выражается при низких температурах. С увеличением температуры явление наклепа уменьшается, при 300°С кривая приближается к горизонтальной линии и удлинение образца продолжается при практически постоянном напряжении.

деформации материал становится жестче, и с увеличением растяжения напряжения, необходимые для продолжения деформации, становятся все большими. Это — явление *наклепа*; оно особенно ясно выражается при низких температурах. С увеличением температуры явление наклепа уменьшается, при 300°С кривая приближается к горизонтальной линии и удлинение образца продолжается при практически постоянном напряжении.

Наблюдение за линиями (полосами скольжения), которые появляются на поверхности образцов из монокристалла во время пластической деформации, обнаруживает, что эта деформация сводится к скольжению матрицы по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенных направлениях. Например, при испытании образца из монокристалла алюминия, который имеет структуру границентрированной кубической решетки (рис. 267), скольжение будет происходить параллельно одной из октаэдральных плоскостей (как, например, плоскости *abc*) и направление скольжения будет параллельным одной из сторон треугольника *abc*. В растянутом образце скольжение будет происходить по наиболее неблагоприятно ориентированной октаэдральной плоскости скорее, чем по плоскостям под углом 45°, по которым действуют наибольшие касательные напряжения. Этим объясняется, почему при испытании образцов из монокристалла мы получаем рассеивание результатов для значений растягивающей нагрузки, при которой начинается текучесть. Эти значения зависят не только от механических свойств материала, но также и от ориентировки осей кристалла относительно оси образца.

Предположим, например, что в образце из монокристалла (рис. 268), испытываемом на растяжение и имеющем площадь поперечного сечения *F*, направление наиболее неблагоприятно ориентированной октаэдральной плоскости скольжения определяется нормалью *n*, а направление скольжения линией *pq*. Касательное напряжение, которое действует по плоскости скольжения, равно

$$\tau = \frac{P}{F} \cos \alpha \sin \alpha. \quad (a)$$

Опыты показывают, что начало скольжения происходит не при напряжении τ , а от действия составляющей $\tau \cos \alpha$ этого напряжения в направлении скольжения *pq*. Скольжение начинается, когда эта составляющая достигает определенного значения τ_{cr} . Тогда из выражения

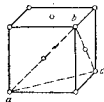


Рис. 267.

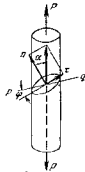


Рис. 268.

¹⁾ Для стали он составляет 1/3%.

²⁾ См. статью А. И. Ф. Ф. С., Журнал физики (серия 4, т. 20, 1906).

³⁾ Рис. 266 взят из Schmid and Boas, цит. на стр. 335.

(а) мы получим

$$\tau_{кр} = \tau \cos \varphi = \frac{P}{F} \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi. \quad (b)$$

Видно, что в то время как $\tau_{кр}$ постоянно для данного материала, нагрузка P , при которой начинается текучесть образца, зависит от значений углов α и φ .

Процесс, при котором образец удлиняется вследствие скольжения по кристаллографическим плоскостям, иллюстрирован рис. 269. Мож-

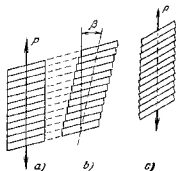


Рис. 269.

но допустить, что растяжение выполняется в два этапа: 1) поступательным движением по плоскостям скольжения (рис. 269, б) и 2) вращением образца на угол β к его первоначальному направлению (рис. 269, в). Из такого представления о механизме растяжения следует, что угол между направлением растягивающей силы P и плоскостями скольжения изменится при растяжении. Более того, первоначально круговое поперечное сечение образца становится эллиптическим с отношением длин главных осей, равным $1 : \cos \beta$. Многочисленные опыты с монокристаллами дали результаты,

которые подтверждают эти заключения. Например, рис. 270 представляет вытянутый образец из монокристалла¹⁾ меди — алюминия.

Опыты также показали, что величина $\tau_{кр}$, при которой начинается скольжение, обычно очень мала²⁾. Однако вычисления значения $\tau_{кр}$



Рис. 270.

основанные на рассмотрении молекулярных сил³⁾, дают большие значения — порядка $G/30$. Это указывает на то, что процесс скольжения не состоит только в жестком поступательном движении атомных

¹⁾ См. С. Ф. Египам, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, стр. 182, 1936.

²⁾ Там же.

³⁾ См. И. Френкель, Журнал физики, т. 37, стр. 572, 1926.

плоскостей одной относительно другой. Необходимо допустить существование местных несовершенств, которые позволяют начать скольжение под действием малой силы и затем распространиться по всей плоскости скольжения. Модель, показывающая возможность скольжения, которая начинается в месте несовершенства, была описана Л. Прандтлем¹⁾. Другая механическая модель была предложена Г. И. Тейлором²⁾. Допуская местную неправильность в распределении атомов, называемую *дислокацией*, он показал, что эта неправильность, распространяясь по плоскости скольжения в кристалле под влиянием малого напряжения $\tau_{кр}$, вызывает относительное перемещение одной части кристалла относительно другой. Пользуясь своей моделью, Тейлор был в состоянии объяснить не только начало скольжения при очень малых значениях $\tau_{кр}$, но также и явления наклепа³⁾.

76. Испытания на растяжение мягкой стали в упругой области

Ограничившись приведенным в шп. 74 и 75 кратким описанием механических свойств монокристаллов, перейдем теперь к рассмотрению испытаний на растяжение поликристаллических образцов, например образцов из строительной стали. На рис. 260, стр. 332, показана типичная диаграмма испытания на растяжение стали. Для области низких напряжений соответствующий участок диаграммы можно представить с удовлетворительной точностью прямой линией; наклон этой линии определяет значение модуля упругости E . Как результат различных ориентировок, модули упругости отдельных кристаллов по осевому направлению образца будут различными. Поскольку же зерна весьма малы, мы можем игнорировать этот факт и рассматривать материал как изотропный. Значение E является, таким образом, средним из полученных в испытаниях на растяжение поликристаллического образца.

С помощью чувствительного экстензометра можно наблюдать некоторое отклонение от закона Гука и обнаружить явление последельствия в упругой стадии испытания на растяжение. Объяснение сводится к учету термоупругого влияния, как и в случае образца из монокристалла (см. стр. 336). Однако нужно заметить, что термоупругие свойства кристалла зависят от ориентировки кристалла, и поэтому

¹⁾ Модель была рассмотрена Прандтлем на семинаре по теории упругости в Геттингене в 1909 г., и ее описание было опубликовано в Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 85—106, 1928.

²⁾ G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 145, стр. 362—404, 1934.

³⁾ Работа Тейлора вызвала интерес у физиков, и в настоящее время имеется большая литература по дислокациям. О подробней библиографии этого предмета см. А. П. Сатлелл, Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Oxford, 1956.

изменения температуры, вызываемые растяжением поликристаллического образца, колеблются от зерна к зерну. Это значит, что мы должны рассматривать не только теплообмен между образцом и окружающей средой, но также теплоты между отдельными кристаллами. Так как теплота, образованная в зерне, пропорциональна его объему, и теплообмен зависит от величины его поверхности, то очевидно, что уравнивание температуры будет облегчено и потери механической энергии увеличатся при уменьшении размеров зерен. Это имеет большее практическое значение, так как имеются случаи, в которых затухание колебаний в упругой системе зависит главным образом от внутреннего трения материала. Для того чтобы увеличить затухание в такой системе, должны применяться материалы с малым размером зерна.

В проведенном анализе предполагалось, что деформация образца идеально упруга, как и надо было ожидать при малых напряжениях. Явление внутреннего трения при больших напряжениях становится более сложным, так как мы должны рассмотреть не только потери механической энергии вследствие теплообмена, как описано выше, но также и потери, вызванные пластической деформацией в отдельных зернах¹⁾.

Путем полирования и травли поверхности поликристаллического образца можно увидеть кристаллическую структуру материала и обнаружить, что при нагрузках меньших той, которая соответствует пределу текучести, появляются полосы скольжения на поверхности некоторых зерен. Полосы указывают на скольжение по определенным кристаллографическим плоскостям в этих зернах, причем они того же типа, что и рассмотренные ранее при испытаниях монокристаллов. Так как упругие свойства монокристалла различны в разных направлениях и так как кристаллы ориентированы случайно, то напряжения в растянутом образце распределяются неравномерно и скольжение может произойти в наиболее неблагоприятно ориентированных отдельных кристаллах прежде, чем среднее растягивающее напряжение достигнет значения предела текучести. Если такой образец разгрузить, то кристаллы, которые испытывали скольжение, не могут свободно вернуться к своей первоначальной форме, и в результате этого и разгруженный образец будет оставаться некоторыми остаточными напряжениями. Такая неоднородность отдельных кристаллов содействует

¹⁾ Значительное количество исследовательской работы по измерению деформирующей способности различных материалов выполнено Rowlettom, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 89, стр. 528, 1913 и O. Förstl'ем и его сотрудниками по Wohler-Institut, Braunschweig; см. Z. Ver. deut. Ing., т. 70, стр. 1291, 1926; т. 72, стр. 1293, 1928; т. 73, стр. 796, 1929. Важное значение термодиффузной причины внутреннего трения было показано исследованиями C. Zen e'ra и его сотрудников; см. Phys. Rev., т. 52, стр. 230, 1937; т. 53, стр. 90, 1938; т. 60, стр. 455, 1941. Результаты этих исследований представлены в книге: C. Zener, Elasticity and Inelasticity of Metals, 1948.

также потерям энергии при нагрузке и разгрузке и будет увеличивать площадь петли гистерезиса (см. рис. 265, в, стр. 337).

Если после разгрузки образец подвергнется испытанию на растяжение во второй раз, то зерна, в которых произошло скольжение при первом испытании, не будут испытывать текучести до тех пор, пока растягивающая нагрузка не достигнет значения нагрузки, приложенной при первом нагружении. Когда же нагрузка превзойдет это значение, снова начнется скольжение. Если образец подвергнется сжатию после предыдущего нагружения при растяжении, то приложенные сжимающие напряжения в сочетании с остаточными напряжениями, созданными предыдущим испытанием на растяжение, будут вызывать

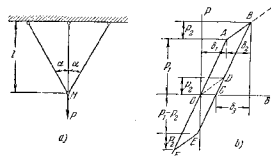


Рис. 271.

текучесть в наиболее неблагоприятно ориентированных кристаллах прежде, чем среднее сжимающее напряжение достигнет значения, при котором полосы скольжения вызывались в образце в его первоначальном состоянии. Таким образом, цикл испытания на растяжение вызывает возрастание предела упругости при растяжении, но понижает предел упругости при сжатии. Это явление было изучено Баушингером¹⁾ и называется *эффектом Баушингера*. Мы видим, что эффект Баушингера объясняется скольжением в отдельных кристаллах и остаточными напряжениями, вызываемыми этим скольжением.

Появление остаточных напряжений, введенных в материал текучестью наиболее неблагоприятно ориентированных зерен, а также эффект Баушингера можно иллюстрировать с помощью модели, изображенной на рис. 271. Модель состоит из трех стержней, сделанных из одного и того же материала, с одной и той же площадью F поперечного сечения. Материал имеет один и тот же предел текучести σ_t при растяжении и сжатии. Если вертикальная нагрузка P

¹⁾ См. Mitt. Mech.-tech. Lab. München, 1886; см. также Dinglers Polytech. J., т. 266, 1886.

приложена к модели, то будут появляться растягивающие усилия S_1 и S_2 соответственно в вертикальном и наклонном стержнях. В упругой стадии эти усилия будут (см. г. I, стр. 27):

$$S_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad S_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}. \quad (a)$$

Благодаря упругой деформации шарнир H модели передвинется вертикально вниз на величину

$$\delta = \frac{Pl}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (b)$$

Зависимость между нагрузкой и перемещением представлена на рис. 271, *b* линией OA . Из выражений (а) следует, что усилие в вертикальном стержне больше, чем усилие в каждом наклонном стержне. Вертикальный стержень модели соответствует наиболее неблагоприятно ориентированному кристаллу поликристаллического образца. Постепенным увеличением нагрузки мы достигаем состояния, при котором вертикальный стержень начинает течь, в то время как наклонные стержни продолжают упруго деформироваться. Соответствующее значение P_1 груза и соответствующее перемещение δ_1 найдутся из выражений

$$S'_1 = F\sigma_1 = \frac{P_1}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad \delta_1 = \frac{P_1 l}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}, \quad (c)$$

что дает

$$P_1 = F\sigma_1(1 + 2 \cos^2 \alpha), \quad \delta_1 = \frac{\sigma_1 l}{E}. \quad (d)$$

Это состояние соответствует точке A на рис. 271, *b*.

Если мы будем продолжать увеличивать нагрузку, то вертикальный стержень будет вытягиваться пластически ¹⁾ при постоянном напряжении σ_1 и дополнительная нагрузка P_2 будет воспринята упругими наклонными стержнями. Дополнительные усилия S'_2 в этих стержнях и дополнительное вертикальное перемещение δ_2 будут

$$S'_2 = \frac{P_2}{2 \cos \alpha}, \quad \delta_2 = \frac{P_2 l}{2FE \cos^2 \alpha}. \quad (e)$$

Зависимость между P_2 и δ_2 показана на рис. 271, *b* наклонной линией AB . Если мы начнем разгружать модель после достижения точки B на диаграмме, то все три стержня будут вести себя упруго, и зависимость между снимаемой нагрузкой и перемещением узла H вверх будет определяться выражением (b). Поэтому на диаграмме мы получим линию BC , параллельную OA , полное же вертикальное

¹⁾ При этом рассмотрении наклепом пренебрегаем.

перемещение вверх при разгрузке будет

$$\delta_3 = \frac{(P_1 + P_2)l}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (f)$$

Мы видим, что вследствие пластического вытягивания вертикального стержня модель не возвращается в свое первоначальное положение, и создается остаточная деформация OC . Величина остаточной деформации находится из формулы

$$\overline{OC} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 = \frac{P_2 l}{2FE \cos^2 \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (g)$$

Благодаря этой остаточной деформации в наклонных стержнях возникают растягивающие усилия S''_2 , причем эти усилия будут уравновешиваться сжимающим усилием S''_1 в вертикальном стержне. Таковы усилия, которые остаются в системе после полной разгрузки модели и которые иллюстрируют остаточные напряжения в поликристаллическом образце после цикла испытания на растяжение.

Чтобы найти значения остаточных усилий в модели, отметим прежде всего, что наклонные стержни оставались в упругой стадии на протяжении всего цикла нагружения. Поэтому зависимость между усилием S_2 в наклонных стержнях и перемещением δ можно получить путем использования выражений (а) и (b), что даст

$$S_2 = \frac{\delta FE \cos^2 \alpha}{l}. \quad (h)$$

Подставляя вместо δ значение остаточной деформации (уравнение (g)), получаем остаточное растягивающее усилие S''_2 в наклонных стержнях

$$S''_2 = \frac{P_2}{2 \cos \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (i)$$

Уравновешивая вертикальные силы в шарнире H , найдем остаточное сжимающее усилие S''_1 в вертикальном стержне

$$S''_1 = 2S''_2 \cos \alpha = \frac{P_2}{1 + 2 \cos^2 \alpha}. \quad (j)$$

Чтобы иллюстрировать эффект Баушингера, рассмотрим второй цикл нагружения. При малых значениях нагрузки все три стержня деформируются упруго, и на рис. 271, *b* график процесса второго нагружения будет начат в точке C и пойдет по прямой CB . Когда он дойдет до точки D , вертикальный стержень будет освобожден от остаточного сжимающего усилия S''_1 и в течение дальнейшего нагружения будет испытывать растяжение. Соответственно точке B растягивающее напряжение в этом стержне достигнет значения σ_1 , и начнется пластическая деформация стержня. Видно, что предел

пропорциональности модели возрастает благодаря остаточным напряжениям. В первом цикле предел пропорциональности был при нагрузке P_2 , а во втором цикле — при нагрузке P_1 и P_2 . Процесс разгрузки во втором цикле полностью упругий и следует линии BC .

Теперь изменим направление силы на обратное, приложив нагрузку P вверх. Тогда деформация будет происходить в соответствии с прямой CE графика, являющейся продолжением линии BC . Сжимающее усилие в вертикальном стержне создается нагрузкой P , направленной вверх и остаточным сжимающим усилием S_1 . Точке E отвечает направленная вверх полная сила $P_1 - P_2$, а сжимающее усилие в вертикальном стержне будет вызывать напряжение, равное пределу текучести. Если нагрузка увеличивается, процесс деформации соответствует линии EF . Если модель разгружается после достижения на графике точки F , то она вернется в первоначальное положение, представленное точкой O . Видно, что нагружение модели на растяжение до точки B графика повышает ее предел пропорциональности при растяжении от P_2 до $P_1 + P_2$. В то же самое время предел пропорциональности при сжатии уменьшается от P_1 до $P_1 - P_2$. Это иллюстрирует эффект Баушингера.

Если модель подвергается циклическим усилиям, изменяющимся от $P_1 + P_2$ при растяжении до P_1 при сжатии, то мы получаем петлю гистерезиса, представленную на рис. 271, в параллелограмме $OABCEFO$. Площадь этого параллелограмма дает величину потери механической энергии за один цикл¹⁾.

В этом параграфе мы касались испытаний на растяжение образцов из мягкой стали, в которых деформации малы и измеряются чувствительными экстензометрами. В следующем параграфе мы рассмотрим большие деформации, приводящие к пластической деформации не только отдельных неблагоприятно ориентированных кристаллов, но и всего материала образца.

77. Предел текучести

Изучая прочность строительной стали при растяжении, инженеры особенно интересуются явлением внезапного удлинения образцов на пределе текучести. Хорошо известно, что при некотором значении растягивающего напряжения имеет место внезапное падение растягивающей нагрузки, сопровождаемое значительным удлинением металла при несколько более низком напряжении. К. Бах ввел²⁾ термины верхнего и нижнего пределов текучести для этих двух значений на-

пряжения, обозначенных на рис. 272 точками A и B . Дальнейшие опыты показали, что на нижний предел текучести форма образца оказывает меньшее влияние, чем на верхний предел текучести. Таким образом, большее практическое значение придается нижнему пределу текучести.

Форма диаграммы напряжение — деформация (рис. 272) у предела текучести зависит в значительной степени от технических особенностей испытательной машины. Если растяжение образца вызывается увеличением расстояния между захватами машины, сдвигающимися с постоянной скоростью, то внезапное пластическое удлинение будет несколько уменьшать растягивающее усилие в образце и на диаграмме получится острая вершина A . Если вставить упругую пружину между образцом и захватом, то угол наклона кривой AB диаграммы можно уменьшить, как показано пунктирной линией AB_1 . С другой стороны, если растягивающая нагрузка приложена непосредственно к образцу, то растягивающее усилие при текучести будет зависеть от малого перемещения груза при внезапном удлинении и на диаграмме могут отразиться малые вибрации.

Чтобы изучить более подробно деформации, которые имеют место на пределе текучести, применяют образцы с полированными поверхностями. Такие опыты показывают, что за время падения растягивающего напряжения от точки A к точке B (рис. 272) на поверхности образца начинают появляться тонкие темные линии. Эти линии наклонены приблизительно под углом 45° к направлению растяжения и называются линиями Людерса¹⁾ (см. рис. 205, стр. 274). При дальнейшем удлинении линии увеличиваются по ширине и по числу, и за время удлинения от B до B_1 (рис. 272) они покрывают всю поверхность образца. Первые линии обычно начинаются в точках концентрации напряжений. На рис. 206 (стр. 274) показана, например, линия Людерса, которая начинается у точки наибольшей концентрации напряжений в выкружке. Вместо полирования иногда применяют специальные краски (называемые покрытием для напряжений), чтобы выявить линии Людерса. Краски эти хрупки и не могут выдержать больших деформаций; они растрескиваются при нагружении, причем образуется сетка линий Людерса.

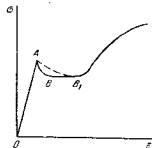


Рис. 272.

¹⁾ Другая модель для иллюстрации петли гистерезиса и эффекта Баушингера была предложена С. F. Jenkin'ом, см. Engineering, т. 114, стр. 603, 1922.

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., т. 58, стр. 1040, 1904; т. 59, стр. 615, 1905.

¹⁾ Эти линии впервые были описаны Lueders'ом, Dinglers Polytech. J., 1854. См. также L. Hartmann, Distribution des déformations, etc., Paris, 1896 и A. Nádai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, 1950; русский перевод: Пластичность и разрушение твердых тел, Москва, 1954.

Исследование с помощью микроскопа показывает, что линии Людера образуют пересечения у боковой поверхности образца тонких слоев материала, в которых имеет место пластическая деформация, между тем как смежные участки материала остаются совершенно упругими. Путем разрезания образца и применения специального травявания¹⁾ можно сделать видимыми тонкие пластические слои внутри образца. Под микроскопом видно, что эти слои состоят из кристаллов, которые были разрушены скольжением, как описано ранее (см. п. 75).

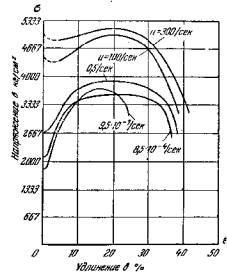


Рис. 273.

Для объяснения внезапного удлинения стали на пределе текучести высказывалось мнение²⁾, что поверхность зерен состоит из хрупкого материала и образуют жесткий скелет, который претерпевает пластической деформации зерен при низком напряжении. Без такого скелета диаграмма растяжения была бы похожа на обозначенную пунктирной линией на рис. 274. Благодаря наличию жесткого скелета материал остается совершенно упругим и следует закону Гука до точки *A*, где скелет разрушается. Тогда пластический материал зерен внезапно

¹⁾ См. статью А. Fry, цит. на стр. 276.

²⁾ M. J. Manjoine, J. Appl. Mech., т. 11, стр. 211, 1944; см. также R. C. Smith, T. E. Pardue and I. Vigness, U. S. Naval Research Lab. Rept. 4468, 1954.

³⁾ См. P. Ludwik und Scheu, Werkstoffanschuss, Ver. deut. Ing. Ber., 70, 1925; W. Köster, Archiv Eisenhüttenw., 47, 1929. См. также Н. Н. Давиденков, Некоторые проблемы механики материалов, Ленинград, 1943.

получает остаточную деформацию *AB*, после чего следует обычной для пластического материала кривой *BC*. Эта теория объясняет состояние неустойчивности материала при верхнем пределе текучести. Теория объясняет также тот факт, что материалы с малым размером зерна обычно показывают более высокие значения напряжения на пределе текучести. В результате такие материалы претерпевают большее удлинение на пределе текучести, определенное длиной горизонтальной линии *AB* на рис. 274. Кроме того, теория объясняет и то явление, что при высокой скорости испытаний увеличение напряжения при пределе текучести сопровождается увеличением пластического удлинения текучести, что показано кривыми на рис. 273.

Линии Людера появляются в стальных образцах, испытываемых на сжатие так же точно, как и в случае растяжения. Кроме того, опыты на изгиб и кручение показывают, что линии Людера наблюдаются и в этих случаях, но при гораздо более высоком значении напряжения, чем при однородном распределении напряжений. На основании предположения, что текучесть начинается, когда хрупкий скелет (образованный поверхностями зерен) изламывается, была выдвинута³⁾ теория, что напряжение на пределе текучести зависит от размера образца. Опыты с малыми образцами показали более высокие значения напряжения предела текучести, чем было найдено для образцов обычного размера.

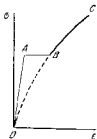


Рис. 274.

78. Растяжение стали за пределом текучести

При растяжении стального образца за пределом текучести материал упрочняется и напряжение, требуемое для вытягивания стержня, увеличивается, как показано участком *BC* диаграммы напряжения — деформации (рис. 275). Удлинение образца сопровождается равномерным сужением площади поперечного сечения, и объем образца остается практически постоянным. Работа, произведенная при удлинении, превращается в большую степень в тепло, образец становится горячим. Однако calorиметрические измерения показывают, что не вся механическая энергия превращается в тепло; часть ее остается в образце в форме энергии деформации. Вследствие разницы в ориентировке кристаллов напряжения неравномерно распределяются по поперечным сечениям и после разгрузки в образце остается некоторое остаточное напряжение и некоторое количество энергии деформации.

¹⁾ C. W. Richards, Статья, представленная 57-му Годичному собранию Американского общества испытаний материалов, 1954.

Если после разгрузки мы нагрузим образец во второй раз, то найдем, что его предел текучести повысился. Это характерное явление

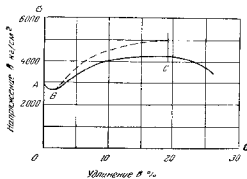


Рис. 275.

показано на рис. 276, который представляет диаграмму испытания на растяжение мягкой стали¹⁾. После растяжения стержня соответственно

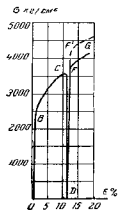


Рис. 276.

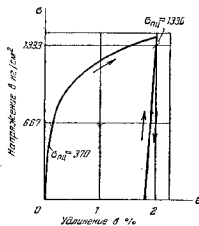


Рис. 277.

точке С он был разгружен. При разгрузке материал следовал приблизительно прямолинейному закону, как показано линией CD на диаграмме. Когда нагрузка была приложена к стержню во второй раз, материал снова следовал приблизительно закону Гука и была

¹⁾ См. Ewing, Strength of Materials, стр. 35, 1914.

получена линия DF. В точке F, которая соответствует точке C предварительной нагрузки, кривая резко изменила характер и вычертила участок FG, который можно рассматривать как продолжение кривой BC. Это указывает на *повышение предела текучести*, вызванное предварительным вытягиванием образца. Если после первой разгрузки пройдет несколько дней, то при повторной нагрузке можно получить еще большее повышение предела текучести, как это показано пунктиром у т. F' (рис. 276). Рис. 277 показывает результаты испытания на растяжение образца из литого алюминия²⁾. Первоначальный предел пропорциональности материала был равен 370 кг/см². После предварительного растяжения образца на 2% предел пропорциональности при повторной нагрузке был найден равным 1330 кг/см², а предел текучести — около 1400 кг/см².

Более подробные исследования показывают, что промежуток времени, протекающий между разгрузкой и повторной нагрузкой, значительно влияет на кривую напряжение — деформация при новом нагружении. Если повторное нагружение начинается немедленно после разгрузки, то, как показывают точные измерения, отклонение от прямолинейного закона происходит при очень низком напряжении, т. е. предел пропорциональности сильно понижается. Но если пройдет значительный промежуток времени между разгрузкой и повторной нагрузкой, то материал полностью восстанавливает свои упругие свойства. Рис. 278 изображает кривые, полученные³⁾ при испытании образцов из мягкой стали; из рассмотрения кривых видно, что если повторное нагружение происходит через 10 минут после перегрузки за предел упругости, то материал не следует закону Гука, но через 5 дней он частично восстанавливает свою упругость, а через 21 день — почти полностью восстанавливает ее.

Опыты также показывают, что если материал после разгрузки подвергнуть слабой термической обработке, например в ванне при 100°С, то восстановление упругих свойств происходит в гораздо более короткий промежуток времени. Рис. 279 показывает результаты таких испытаний, произведенных над стальным бруском⁴⁾. Первоначальное испытание на растяжение представлено кривой А. Кривая В представляет растяжение при повторном нагружении того же бруска через 10 минут после разгрузки и значительное отклонение



Рис. 278.

²⁾ Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse El. Corp.».

³⁾ См. Ewing, цит. на стр. 350.

⁴⁾ L. Muir, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, 1899.

от закона Гука. Кривая С получена для того же бруска после второй разгрузки и после нагревания его в продолжение 4 минут при температуре 100°C . В этом случае материал совершенно восстановил свои упругие свойства.

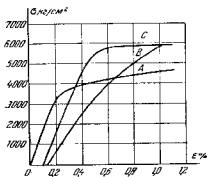


Рис. 279.

Явление наклепа в результате пластической деформации встречается во многих технологических процессах, как, например, прокатка стержней, вытяжка труб и волочение проволоки при низкой температуре, резание листового металла и протягивание, пробивание отверстий. Во всех этих случаях часть материала, которая подвергается пластической деформации, становится более жесткой и ее пластичность значительно уменьшается¹⁾. Для устранения этого нежелательного влияния наклепа обычно материал отжигают, после чего восстанавливается его пластичность²⁾.

Иногда наклеп пластических материалов находит себе практическое применение в производстве. Обычно на практике цели и задачи подъемных машин предварительно растягивают на некоторую остаточную величину для того, чтобы устранить нежелательное выгибание этих частей в работе. Цилиндры гидравлических прессов подвергают иногда предварительному внутреннему давлению, достаточному для того, чтобы произвести остаточную деформацию в стенках. Деформация наклепа и остаточные напряжения, вызываемые этим способом, препятствуют возникновению какой-либо остаточной деформации во время службы. Предварительное выгибание металла производится и при изготовлении артиллерийских орудий (см. стр. 179, 323). Растягивая металл в стенках орудия за первоначальный предел текучести и затем подвергая его умеренной термической обработке, можно улучшить упругие свойства материала; в то же самое время возникают первоначальные напряжения, которые в сочетании с напряжениями, возникающими при выстреле, дают более благоприятное распределение напряжений в стенках орудия. Турбинные диски и роторы подвергают иногда аналогичной обработке. При вращении этих частей

¹⁾ Об общем анализе свойств холодно обработанных металлов см. статью: Z. Jeffries and R. S. Archer, Chem. and Metallurg. Engrg., т. 27, стр. 747, 1922. См. также G. Masing and M. Polanyi, Kaltzirkung und Verfestigung, Berlin, 1923.

²⁾ См. статью Rees'a, Iron and Steel, Inst. J., 1923.

со скоростью, выше обычной, получают вокруг центрального отверстия остаточную деформацию, которая повышает предел текучести материала и вызывает первоначальные напряжения, действующие в благоприятном направлении³⁾. Литые алюминиевые лопасти пропеллера иногда подвергаются перенапряжению у гтулки, чтобы устранить какую-нибудь возможность их ослабления на валу во время работы. Значительное пластическое течение металла иногда вызывают при насаживании ступиц паровозных колес на оси и это, оказывается,

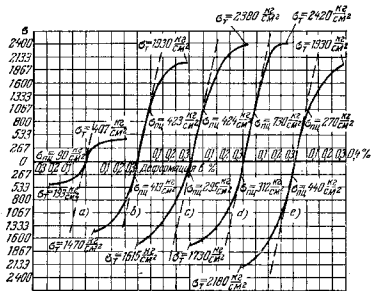


Рис. 280.

производит благоприятное действие. Медные стержни в коммутаторах электрических машин подвергают значительной холодной обработке путем вытягивания, чтобы дать им требуемую прочность.

Применяя подобное предварительное перенапряжение для повышения предела текучести и улучшения упругих свойств конструкции, необходимо иметь в виду: 1) что влияние наклепа исчезает, если конструкция подвергается отжигу и 2) что предварительное вытягивание металла в некотором направлении делает его прочнее при работе на растяжение в том же направлении, но не улучшает в такой же степени его механические свойства при работе на сжатие в этом же направлении. Это явление ясно показано на рис. 280, который

³⁾ См. A. N. d a i and L. H. D o n e l l, Trans. A. S. M. E., т. 51, стр. 173, 1929.

представляет результаты испытаний, произведенных над электролитической медью¹⁾. Кривая *a*) изображает механические свойства меди в отожженном состоянии. Предел пропорциональности и предел текучести²⁾ в этом состоянии очень низкие. Такой материал не может быть применен в конструкциях, которые подвергаются действию значительных напряжений. Кривая *b*) представляет результаты испытаний на растяжение и сжатие того же материала после предварительной пластической вытяжки на 15%. Предел пропорциональности и предел текучести значительно возросли, особенно при растяжении. Кривые *c*) и *d*) изображают результаты испытаний после предварительной вытяжки на 20 и 25%. Дополнительное вытягивание вызывает дальнейшее улучшение механических свойств, особенно при растяжении. В то же самое время предел пропорциональности при сжатии несколько уменьшается. Кривая *e*) представляет результаты испытаний на растяжение и сжатие стержня, который протянули сквозь матрицу, уменьшая площадь его поперечного сечения на 15%. В процессе выдолбления материал подвергается не только продольному растяжению, но также поперечному сжатию. Этому обстоятельству нужно приписать разницу между кривыми *b*) и *e*). Хотя в обоих случаях брусок получил одно и то же уменьшение площади поперечного сечения, тем не менее материал, протянутый сквозь матрицу, показал лучшие механические свойства в отношении сжатия, чем материал, подверженный равномерному продольному растяжению на испытательной машине.

То обстоятельство, что предварительная вытяжка металла в некотором направлении не улучшает механических свойств при сжатии в таком же отношении, как при растяжении, нужно иметь в виду в тех случаях, когда материал подвергается действию переменных напряжений (см. п. 84). Необходимо также упомянуть имеющиеся указания³⁾ на то, что материал, который имел текучесть в некоторой области, является более чувствительным в этой области к химическому воздействию, и что наблюдается тенденция к коррозии металла по поверхностям скольжения. Это явление имеет важное значение для паровых котлов и других сосудов, подверженных одновременно химическим и силовым воздействиям.

При построении диаграммы растяжения в виде, например, кривой *ABC* на рис. 275, растягивающую нагрузку обычно делят на первоначальную площадь поперечного сечения F_0 образца для того, чтобы полу-

¹⁾ Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse El. Corp. Research Laboratory».

²⁾ Предел текучести определяется как напряжение, при котором относительное удлинение или относительное укорочение составили 0,2%.

³⁾ См. F. K. B. H. e. r. t. und A. P. o. l. t. r. Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 8, стр. 135, 1928; см. также S. W. P. a. r. r. and F. G. S. t. r. a. u. b. Engineering, т. 124, стр. 216, 1927.

чить условное напряжение. Однако при большом удлинении будет иметь место значительное уменьшение площади поперечного сечения; поэтому, чтобы получить *истинное напряжение*, необходимо считаться с действительной площадью F вместо F_0 . Из условия постоянства объема образца имеем

$$l_0 F_0 = l F, \quad F = \frac{F_0 l_0}{l} = \frac{F_0}{1 + \varepsilon}, \quad (a)$$

и истинным напряжением будет

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon). \quad (b)$$

Чтобы получить диаграмму истинных напряжений, нужно ординаты условной диаграммы умножить на $1 + \varepsilon$. На рис. 275 такая диаграмма показана пунктиром. Она простирается до вертикали, проходящей через точку C , где нагрузка достигает своего наибольшего значения. При дальнейшем вытягивании образца начинается местное уменьшение поперечного сечения (образование шейки), и ε уже больше не является постоянным по длине образца. Тогда выражение (b) более уже неприменимо, так как напряжения по наименьшей площади поперечного сечения распределяются неравномерно (см. стр. 360). В таком случае выражение (b) дает среднее значение σ . Среднее относительное удлинение ε в наименьшем сечении можно найти из выражения (a), которое дает

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F} - 1. \quad (c)$$

Пользуясь символом q для относительного сужения площади поперечного сечения (см. стр. 334), получаем

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = q, \quad F = F_0 (1 - q);$$

из выражения (c) находим

$$\varepsilon = \frac{q}{1 - q}, \quad (d)$$

т. е. относительное удлинение в наименьшем сечении можно легко вычислить, если измерить сужение площади этого сечения. Это ε называется¹⁾ *эффективным удлинением*; оно гораздо больше, чем удлинение $\varepsilon = \delta/l$, определяемое из полного удлинения δ расчетной длины.

Рассмотрим теперь более подробно понятие об относительном удлинении ε . Для его вычисления обычно пользуются выражением $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, так что приращение относительного удлинения

¹⁾ См. P. L. u. d. w. i. k. Elemente der technologischen Mechanik, Berlin, 1909.

определяется формулой

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l_0}, \quad (e)$$

в которой приращение длины делится на первоначальную длину l_0 . Кажется более логичным во многих случаях определять приращение относительного удлинения по уравнению

$$d\varepsilon' = \frac{dl}{l}, \quad (f)$$

где l есть длина, к которой добавлено приращение dl . Тогда полное относительное удлинение получается в таком виде:

$$\varepsilon' = \int_{l_0}^l d\varepsilon' = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) = \ln \frac{F_0}{F}. \quad (g)$$

Это удлинение называется *естественной деформацией*¹⁾. Для малых удлинений естественная деформация ε' очень близка к ε . Но для больших деформаций, как в случае каучука или пластического удлинения стального образца, разница между ε' и ε становится значительной и имеется некоторое преимущество в использовании понятия естественной (истинной) деформации.

Рассмотрим в качестве примера изменение объема куба из материала, имеющего первоначальный объем, равный 1 кубическому сантиметру и претерпевающего равномерные удлинения $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ по направлению его сторон. После деформации объем куба будет равен

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z).$$

Если деформация такова, что объем не изменяется, как в случае пластической деформации металлов, то условие постоянства объема будет

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = 1. \quad (h)$$

Если деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ не малы, так что их степенями пренебречь нельзя, то условие в уравнении (h) будет очень сложно. Но если мы воспользуемся понятием естественной деформации, то это же условие принимает очень простой вид. Для этой цели мы возьмем логарифм от обеих частей уравнения (h) и получим

$$\ln(1 + \varepsilon_x) + \ln(1 + \varepsilon_y) + \ln(1 + \varepsilon_z) = 0.$$

Используя определение естественной деформации (формулу (g)), получаем условие постоянства объема в простом виде

$$\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = 0. \quad (i)$$

¹⁾ Это было впервые предложено Mesnager'ом; см. Proc. Congr. Internat. Phys., Paris, т. 1, стр. 348, 1900.

Диаграммы испытания на растяжение для наименьшего сечения в шейке растянутого¹⁾ образца можно строить, откладывая истинное напряжение (выражение (b)) в зависимости от естественной деформации ε' . Эти диаграммы (рис. 281) показывают, что за напряжением, при котором начинается образование шейки, зависимость между истинным напряжением и естественной деформацией является практически линейной.

Рис. 282 иллюстрирует приемы измерения условной деформации ε и истинной деформации ε' . Экстензометр на рис. 282, а прикреплен к образцу в двух фиксированных точках А и В. Расстояние между А и В изменяется при растяжении образца в пределах от начальной длины l_0 до конечной длины l . Экстензометр на рис. 282, б (называемый *экстензометром Баушингера*) прикреплен к образцу в А и имеет каток в В, так что длина АВ остается равной l_0 . Если два одинаковых образца (рис. 282) растянуты от l_0 до l , а затем к ним приложены два одинаковых приращения нагрузки, то изменения в

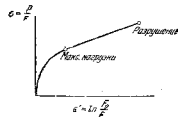


Рис. 281.

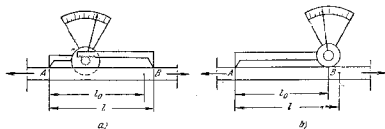


Рис. 282.

показаниях двух инструментов, являясь, очевидно, неравными, будут находиться в отношении $l/l_0 = 1 + \varepsilon$. Но это отношение (на основании выражений (e) и (f)) равно отношению $ds/d\varepsilon'$. Следовательно, инструмент на рис. 282, а дает условное относительное удлинение, в то время как экстензометр Баушингера дает естественную деформацию ε' .

¹⁾ Такие диаграммы были применены С. W. МэсГегер'ом, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 40, стр. 508, 1940; см. также его статью в издании М. Неймана, Handbook of Experimental Stress Analysis, 1950.

79. Типы разрушений при растяжении¹⁾

Имеются два рода разрушений, которые необходимо различать при испытаниях на растяжение образцов из монокристалла. Для таких материалов, как каменная соль, например, мы имеем хрупкие разрушения без существенной пластической деформации, причем оно наблюдается, когда величина нормального напряжения на одной из главных плоскостей кристалла достигает критического значения. Такой вид разрыва называется *разрушением отрывом*. Монокристаллические образцы металла обычно показывают перед разрушением большую пластическую деформацию, состоящую из скольжения по определенным кристаллографическим плоскостям. Разрушение этого типа называется *разрушением сдвигом*.

Зависимость между сопротивлением *разъединению* (при разрушении отрывом) и сопротивлением *скольжению* (при разрушении сдвигом) не остается постоянной для одного и того же материала. Она зависит от температуры образца и от скорости, при которой производилось испытание. Очевидно, что сопротивление скольжению возрастает с понижением температуры и с повышением скорости деформации. Однако сопротивление *разъединению* не зависит в одной и той же степени от этих двух факторов. Этим объясняется, почему каменная соль, которая является хрупкой при комнатной температуре, показывает разрушение вследствие сдвига, если испытывать ее в теплой воде, когда сопротивление скольжению уменьшается вследствие более высокой температуры. Этим объясняется также, почему брусок из такого металла, как цинк, может быть согнут при медленном деформировании подобно бруску из пластического материала, между тем как тот же самый брусок оказывается хрупким и разрушается без пластической деформации, если нагрузка приложена внезапно²⁾.

В случае поликристаллических материалов необходимо рассмотреть опять два рода разрушения: 1) *хрупкое разрушение*, как в случае чугуна или стекла, и 2) *разрушение сдвигом*, как в случае мягкой стали, алюминия и других металлов. В первом случае разрушение происходит практически без пластической деформации по поперечному сечению, перпендикулярному оси образца. Во втором случае разрушение происходит после значительной пластической вытяжки, и место разрыва имеет приблизительно форму «чашки и конуса» (рис. 283). При обсуждении этих двух типов разрушения была снова выдвинута теория, что прочность материала может быть описана двумя характеристиками — сопротивлением материала *разъединению* и сопро-

тивлением *скольжению*. Если сопротивление скольжению больше, чем сопротивление *разъединению*, то мы имеем хрупкий материал, и разрушение будет происходить в результате преодоления сил сцепления без какой-либо заметной деформации. Если сопротивление *разъединению* больше, чем сопротивление скольжению, то мы имеем пластический материал. Тогда сначала начинается скольжение по наклонным плоскостям, и разрушение в форме «чашки и конуса» происходит лишь после значительной равномерной вытяжки и последующего местного уменьшения площади поперечного сечения (образования шейки) образца.

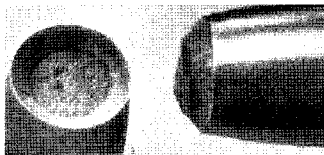


Рис. 283.

Распределение напряжений в наименьшем сечении шейки¹⁾ для типа разрушения «чашка и конус» было исследовано, и найдено, что вблизи шейки растягивающие усилия в продольных волокнах имеют направления, указанные стрелками на рис. 284, а. Горизонтальные составляющие этих усилий в шейке вызывают радиальные и окружные напряжения, так что каждый бесконечно малый элемент, выделенный у плоскости наименьшего поперечного сечения, находится в трехмерном напряженном состоянии, показанном на рис. 284, б. Предполагая, что пластическое течение требует постоянного наибольшего касательного напряжения, мы заключаем, что осевые растягивающие напряжения неравномерно распределяются по наименьшему поперечному сечению образца, но имеют наибольшее значение в центре поперечного сечения, где σ_x и σ_r являются также наибольшими. Распределение осевых напряжений показано на рис. 284, а заштрихованной площадью. Величины σ_{max} и σ_{min} зависят от радиуса R наименьшего поперечного сечения и радиуса кривизны R' шейки, и

¹⁾ Полная библиография по этому предмету дана в статье P. L. и D. W.: K'a, Edg. Materialprüfungsanstalt (Zürich) Ber., № 35, 1928. См. также Forschungs-ber., № 295, 1927.

²⁾ P. L. и D. W.: K'a, Stahl u. Eisen, т. 43, стр. 1427, 1923.

¹⁾ См. статью Н. Н. Давиденкова, английский перевод, Proc. Am. Soc. Test. Mat., 1946. См. также P. Bridgman, Trans. Am. Soc. Metals, т. 32, стр. 553, 1944.

даются формулами

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \frac{1 + \frac{a}{2R}}{1 + \frac{a}{4R}}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_n \frac{1 - \frac{a}{2R}}{1 + \frac{a}{4R}},$$

где $\sigma_n = P/\pi a^2$ есть среднее напряжение.

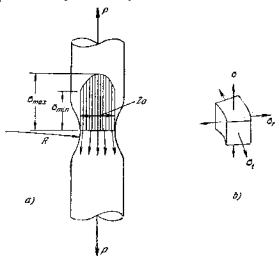


Рис. 284.

Вследствие трехмерного напряженного состояния материал вблизи центра наименьшего поперечного сечения обладает настолько пониженной способностью к пластической деформации, что при растяжении в этой области¹⁾ начинается образование трещины (рис. 285). Между тем как материал вблизи поверхности продолжает растягиваться пластически. Этим обстоятельством объясняется, почему центральная часть области разрушения по типу «чашка и конус» имеет хрупкий характер, между тем как вблизи поверхности наблюдается пластический тип разрушения.



Рис. 285.

Вследствие неравномерного распределения напряжений в области шейки в образце имеют место остаточные напряжения, если он разрушен до появления трещины. Эти напряжения были исследова-

¹⁾ См. P. Ludwиг, Z. Ver. deut. Ing., т. 71, 1927.

ны¹⁾ методом, применяемым в случае толстостенных цилиндров (см. стр. 322). Было вычислено распределение напряжений, имеющихся в образце перед разгрузкой, и установлено, что оно удовлетворительно согласуется с результатами теории Н. Н. Давиденкова (рис. 284). Кроме того, изучение разрушений с помощью микроскопа показало, что они происходили поперек зерен и были разрушениями сдвигом по типу «чашка и конус» как во внутренней, так и во внешней частях шейки.

Предыдущие рассуждения относятся к испытаниям на растяжение стандартных круглых образцов цилиндрической формы. Результаты, полученные с другими формами образцов, совершенно иные, что можно показать на образце с выточкой²⁾, изображенном на рис. 286. При испытаниях на растяжение наблюдается, что уменьшению площади поперечного сечения у выточки частично препятствует наличие участков

Таблица 21

Предел прочности ($\text{кг}/\text{см}^2$) цилиндрических образцов и образцов с выточками

d	Углеродистая сталь		Хромоникелевая сталь	
	вычислен по первоначальной площади	вычислен по уменьшенной площади	вычислен по первоначальной площади	вычислен по уменьшенной площади
дюймы мм				
1,52 = 0,8	11 450	12 350	13 550	16 650
1/16 = 1,6	11 550	12 450	12 950	16 300
1/8 = 3,2	10 050	11 100	10 850	14 000
Норм. образец	7 150	15 950	7 600	24 450

большого диаметра D . Естественно, что это действие должно возрастать с уменьшением ширины δ выточки. В табл. 21 даны результаты, полученные в испытаниях образцов из двух различных материалов³⁾: 1) *углеродистой стали* при пределе пропорциональности $3950 \text{ кг}/\text{см}^2$, пределе текучести $4550 \text{ кг}/\text{см}^2$, пределе прочности $7150 \text{ кг}/\text{см}^2$, удлинении 26,5%, сужении площади 55% и 2) *хромоникелевой стали*

¹⁾ См. статью E. R. Parker's, H. E. Davis'a и A. E. Planig'an'a, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 46, стр. 1139, 1946.

²⁾ Первые опыты с образцами с выточками были проделаны Д. Киркальди. Таким путем он показал, что хрупкий тип разрушения можно произвести в пластическом материале. См. его книгу Results of an Experimental Inquiry, etc., Glasgow, 1862.

³⁾ Эти испытания были проведены в Исследовательской лаборатории фирмы Вестингауза. См. также испытания, проделанные P. Ludwиг'ом и R. Scheu, Stahl und Eisen, т. 43, стр. 999, 1923.

при пределе пропорциональности 5600 кг/см^2 , пределе текучести 5900 кг/см^2 , пределе прочности 7600 кг/см^2 , удлинении 27% , сужении площади 69% . Эти цифры были получены из обычных испытаний на растяжение нормальных цилиндрических образцов диаметра $0,5$ дюйма и расчетной длины 2 дюйма. При вычислениях напряжений была принята первоначальная площадь поперечного сечения. Образцы с выточками тина, показанного на рис. 286, имели $d=0,5$ дюйма и $D=1,5$ дюйма.

Таблица показывает, что во всех случаях разрушающая нагрузка для образцов с выточками была большей, чем для соответствующих цилиндрических образцов. В образцах с выточками имели место лишь незначительное уменьшение площади, и по внешнему виду разрушение было подобно характерному для хрупких материалов. *Истинный* предел прочности цилиндрических образцов был больше, чем для образцов с выточками, потому что разрушение цилиндрических образцов происходило после значительного пластического течения. В результате этого появились наклеп и увеличилось не только сопротивление скольжению, но также и сопротивление раздвиганию.

Подобные условия иногда встречаются в инженерной практике. Влияние аналогичное влиянию узкой выточки по рис. 286, можно вызвать внутренними раковинами в больших покояхках, например в турбороторах. Термические и остаточные напряжения могут сочетаться с влиянием концентрации напряжений у раковины и вызвать появление трещины. Последующее затем разрушение будет иметь характер хрупкого разрыва без заметного пластического течения, хотя материал мог оказаться пластичным при обычных испытаниях на растяжение.

Так как большинство образцов с выточками (рис. 286), оставшаяся упругим при испытании на растяжение до разрушения, будет иметь малое удлинение, то только малое количество работы потребуется, чтобы произвести разрушение. Малая сила удара может легко создать работу, необходимую для разрушения. Образец оказывается хрупким вследствие его формы, но не вследствие каких-либо механических свойств материала. В машинных частях, подверженных удару, все резкие изменения в поперечных сечениях опасны, и их нужно избегать.

80. Испытания на сжатие

Испытания на сжатие производят обычно над хрупкими материалами, как-то: камень, бетон и чугун. Образцы, применяемые при испытаниях, обычно выполняются либо кубической, либо цилиндрической формы. При сжатии образцов между плоскими поверхностями

испытательной машины обычно предполагается, что сжимающее усилие равномерно распределяется по поперечному сечению. Действительное же распределение напряжений значительно сложнее, если даже поверхность приходится в полное соприкосновение, а нагрузка приложена центрально. Благодаря трению на поверхностях соприкосновения между образцом и плитами машины поперечное расширение, которое сопровождает сжатие, устраняется на этих поверхностях, и материал в этой области находится в более благоприятном напряженном состоянии. В результате получается тип разрушения при испытании на сжатие кубического образца из бетона, показанный на рис. 287¹⁾. Материал, находящийся в соприкосновении с машиной, остается нетронутым, в то время как материал на границах крошится.

Чтобы получить истинное сопротивление сжатию такого материала, как бетон, нужно исключить или уменьшить влияние трения на поверхностях соприкосновения. Для этой цели А. Фелль покрывал эти поверхности парафином²⁾ и выяснил, что предел прочности тогда значительно уменьшался. Тип разрушения был совершенно иным, и кубические образцы разрушались путем разделения на пластинки, параллельные одной из боковых граней. Другой метод устранения влияния сил трения заключается в использовании образцов в форме призм, имеющих длину в направлении сжатия в несколько раз большую, чем поперечные размеры. Тогда средняя часть призмы находится примерно в условиях равномерного сжатия³⁾. Очень интересный метод воспроизведения равномерного сжатия цилиндрических образцов, разработанный в Институте К. Вильгельма⁴⁾, показан на рис. 288. Опорные плиты испытательной машины и концы цилиндрического образца сделаны таким образом, что образуют конические поверхности с углом наклона α , равным углу трения. Таким образом, влияние трения компенсируется расклинивающим действием клин, и в результате наблюдается равномерное сжатие.



Рис. 287.

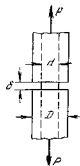


Рис. 286.

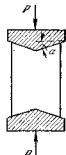


Рис. 288.

¹⁾ См. C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, 6-е изд., Berlin, стр. 160, 1911.

²⁾ A. Föppel, *Mitt. Mech.-tech. Lab., München*, № 27, 1900.

³⁾ См. Prandtl und Rinne, *Neu. Jahrb. Mineral.*, 1907; см. также W. Schler, *Baugenieur*, т. 9, стр. 21, 1928. Цилиндрические образцы высотой в два раза больше диаметра применялись при испытании бетона.

⁴⁾ *Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf)*, т. 9, стр. 157, 1927.

Испытания на сжатие таких материалов, как бетон, камни и чугун, показывают, что эти материалы имеют очень низкий предел пропорциональности¹⁾. За пределом пропорциональности деформация увеличивается быстрее, чем нагрузка, и диаграмма сжатия имеет форму, показанную на рис. 289. Иногда желательно иметь аналитическое выражение для такой диаграммы. В этих целях Бах предложил²⁾ показательный закон в форме уравнения

$$\epsilon = \frac{\sigma^n}{E}, \quad (a)$$

где n — число, зависящее от свойств материала. Бах нашел значения $n=1,09$ для чистого цемента и $n=1,13$ для гранита.

Испытания на сжатие пластических материалов показывают, что форма диаграммы зависит от размеров образца. Если размер в направлении сжатия уменьшается, то влияние трения на концах становится более резко выраженным и диаграмма испытания на сжатие получается круче. На рис. 290 для примера приведены результаты испытания

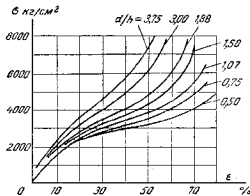


Рис. 290.

на сжатие³⁾ медных цилиндров с различным отношением d/h диаметра к высоте образца. При испытаниях на сжатие таких пластических материалов, как медь, разрушение наблюдается редко. Сжатие сопровождается поперечным расширением, и сжатый цилиндр в конечном

¹⁾ Предел пропорциональности для чугуна при растяжении был определен Гробиенном; см. Ver. deut. Physik. Ges., 1906.

²⁾ С. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5-е изд., Берлин, стр. 67, 1906.

³⁾ См. G. Sachs, Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig, стр. 36, 1925.

счете получает форму плоского диска. Чтобы уменьшить влияние сил трения на поверхностях соприкосновения и, следовательно, получить удовлетворительную диаграмму испытания на сжатие, иногда применяется метод проведения сжатия по стадиям¹⁾. После того как образец приобретает благодаря поперечному расширению форму боченка, он подвергается обработке до своего первоначального диаметра. Далее прикладывается сжимающая сила, и процесс повторяется в каждой стадии. Таким образом, испытание происходит при непрерывном уменьшении высоты образца.

81. Испытания материалов при сложном напряженном состоянии

Заключив обсуждение вопросов об испытаниях на простое растяжение и сжатие, рассмотрим теперь случаи, когда материалы находятся под действием сложных напряжений. Мы начнем с рассмотрения материалов, испытываемых при всестороннем *равномерном гидростатическом давлении*²⁾. Такие испытания показывают, что под действием равномерного давления однородные материалы могут противостоять громадным сжимающим напряжениям и оставаться упругими. Испытания показывают, что относительное изменение объема при наличии гидростатического давления p можно представить уравнением³⁾

$$\frac{\Delta V}{V_0} = ap + bp^2.$$

Значения постоянных a и b для некоторых материалов (p измеряется в кг/см^2) даны в табл. 22. Видно, что большие давления вызывают лишь малое изменение объема.

Было сделано несколько попыток осуществить всестороннее *равномерное растяжение* материалов, но до сих пор не было получено удовлетворительного решения этой интересной задачи.

¹⁾ См. G. J. Taylor and H. Quinn, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 143, стр. 307, 1933—1934.

²⁾ Обширные испытания такого рода были проведены П. В. Бриджманом, который разработал технику для получения огромных давлений; см. его книги The Physics of High Pressure, New York, 1931 и Studies in Large Plastic Flow and Fracture, New York, 1952; см. русский перевод, Исследования больших пластических деформаций и разрыва, 1953, ИЛ, Москва. Новые испытательные машины для трехосного напряженного состояния были описаны Н. А. В. Wiseman'ом и Joseph, Martin'ом, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 54, 1954.

³⁾ Bridgman, Studies in Large Plastic Flow and Fracture.

Таблица 22
Значения постоянных a и b для оценки изменения объема при всестороннем сжатии

Материал	$a \cdot 10^7$	$b \cdot 10^{14}$
Железо	5,87	-2,10
Медь	7,32	-2,70
Алюминий	13,34	-8,50
Кварц	27,74	+7,17
Стекло	30,08	+4,86

Испытания на растяжение различных сталей в сочетании с боковым давлением показали¹⁾, что это давление оказывает большое влияние на форму шейки и на уменьшение площади в наименьшем поперечном сечении. На рис. 291 изображено приспособление из скоб, создающее растягивающее усилие в образцах, помещаемых внутрь сосуда, в котором создается давление. Фотографии 292, а и 292, б иллюстрируют разрушения среднеуглеродистой стали (0,45% углерода) соответственно при атмосферном давлении и при поперечном давлении 10 200 кг/см². В первом случае естественное удлинение было равно $\ln F_0/F = 0,92$, а среднее истинное напряжение 8000 кг/см². Во втором случае соответствующие значения были 2,37 и 33 300 кг/см². Было найдено, что с увеличением поперечного давления относительный размер плоской части на дне «чашки и конуса» уменьшался; при определенном давлении плоское дно совершенно исчезало и разрушение полностью происходило от дна.

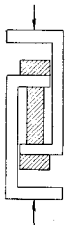


Рис. 291.

Сочетание осевого сжатия и поперечного давления было применено Т. Карманом²⁾ в испытаниях на сжатие мрамора. Эти испытания показали, что с увеличением поперечного давления мрамор становится все более и более пластичным, и первоначально цилиндрические образцы могут получить форму боченка, как показано на рис. 293.

При изучении плоского напряженного состояния были испытаны тонкостенные цилиндрические трубы. Подвергая трубы осевому растяжению в сочетании с внутренним давлением, исследователи установили³⁾ предел текучести для различных отношений двух главных

напряжений для некоторых материалов, включая железо, медь и никель. Результаты, полученные таким путем, удовлетворительно согласовались с теорией энергии формоизменения (см. стр. 375). Дальнейшие опыты⁴⁾ с тонкими трубами из мягкой стали, подверженными внутреннему давлению в сочетании с растяжением, сжатием или кручением, также дали результаты, согласующиеся с той же теорией. Испытания на одновременное действие растяжения и кручения тонких труб из стали, меди и алюминия показали⁵⁾, что начало текучести можно

¹⁾ Bridgman, там же; см. список ⁵⁾, стр. 365. Русский перевод, стр. 94.

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., стр. 1749, 1911.

³⁾ Такие опыты были проделаны В. Лоде под руководством А. Надаи; см. Forschungsber., № 303, 1928; см. так же Z. Phys., т. 36, стр. 913—939, 1926.

⁴⁾ См. M. Roß and A. Eichinger, Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, 1926.

⁵⁾ G. I. Taylor and H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 230, стр. 323—362, 1931.



Рис. 292.



Рис. 293.

предскагать с хорошей точностью уравнением

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_1^2,$$

в котором σ есть осевое растягивающее напряжение, τ — касательное напряжение при кручении и σ_1 — напряжение на пределе текучести при простом растяжении. Это уравнение также вытекает из теории энергии формоизменения.

В практических приложениях не только напряжение на пределе текучести, но свойства пластичности и наклеп также имеют важное значение при сложном напряженном состоянии. Неожиданные случаи разрушений, например взрывы больших сферических резервуаров¹⁾ и внезапные трещины в корпусах сварных грузовых судов, в последнее время привлекли внимание к этим вопросам. В обоих из указанных типов разрушения были применены листы из малоуглеродистой стали, которые показывали удовлетворительную прочность и пластичность при обыкновенных испытаниях на растяжение. Но поверхности разрушения листов во взорванных от давления резервуарах и в поврежденных судах не показали пластической деформации и носили хрупкий характер. Большинство из этих разрушений произошло при низких внешних температурах в условиях двумерного напряженного состояния.

Для оценки влияния температуры и плоского напряженного состояния на прочность и пластичность малоуглеродистой стали в последнее время в различных лабораториях было проделано значительное количество экспериментальных работ. Чтобы осуществить плоское напряженное состояние, применялись тонкостенные трубы. Эти трубы подвергались одновременно осевому растяжению и внутреннему гидростатическому давлению, благодаря чему можно было вызвать растягивающее напряжение σ_r в окружном направлении и σ_a в осевом направлении при любом желательном отношении $\lambda = \sigma_a / \sigma_r$. Пользуясь трубами из среднуглеродистой стали (0,23% углерода) наружного диаметра 36,8 мм (1,450 дюйма) и с толщиной стенок 2,54 мм (0,1 дюйма), Е. А. Девис проделал испытания²⁾ для пяти различных значений отношения λ . На рис. 294 показаны получившиеся типы разрушений. При малых значениях отношения λ трещины были направлены по окружности, при больших же они были продольными. После ряда дополнительных испытаний было установлено, что переход от одного типа разрушения к другому имел место при значении $\lambda = 0,76$. Было найдено, что в случае трещин по окружности разрушение происходило по плоскостям наибольшего касательного напряжения и при истинных напряжениях приблизительно такой же величины, как и в случае плоских образцов, изгото-

товленных из того же материала, что и трубы. В случае продольных трещин тип разрушения оказывался более хрупким. Разрушение обычно начиналось по плоскостям наибольшего касательного напряжения, но благодаря высокой концентрации напряжений у концов трещины оно продолжалось как хрупкое в продольной плоскости без существенной пластической деформации. Наибольшее касательное

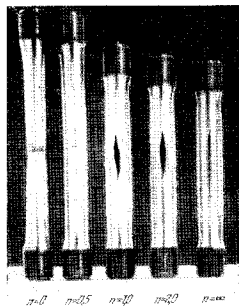


Рис. 294.

напряжение, при котором начинались продольные трещины, было всегда значительно меньшим, чем в случае трещин по окружности. По-видимому, разница в двух видах разрушения была обязана в значительной степени форме образцов. В случае трещин по окружности материал был более способен к образованию шейки, чем в случае продольных трещин, и поэтому последние происходили с меньшей местной деформацией и меньшим падением нагрузки за пределом прочности.

Опыты Калифорнийского университета¹⁾ над тонкостенными трубами из малоуглеродистой стали были проведены при двух

¹⁾ См. A. L. Brown and J. B. Smith, Mech. Engr., т. 66, стр. 392, 1944.

²⁾ См. E. A. Davis (Исследовательская лаборатория Westinghouse), J. Appl. Mech., т. 12, стр. 13, 1945 и т. 15, стр. 216, 1948.

¹⁾ См. H. E. Davis and E. R. Parker, J. Appl. Mech., т. 15, стр. 201, 1948.

различных температур. Диаметр труб был 133 мм (5 1/4 дюйма), температуры же равнялись 21,1°С и -94,4°С. Испытания при комнатной температуре всегда давали тип разрушения сдвигом со значительной пластической деформацией. Испытания при низкой температуре (при $n=1$) показали хрупкое разрушение с очень малой пластической деформацией. Эта хрупкость была приписана местным напряжениям в местах сварки концов труб.

Кроме описанных испытаний малых труб, исследовались¹⁾ больших размеров трубчатые образцы наружного диаметра 508 мм (20 дюймов) и длиной 3 м (10 футов), сделанные из корабельной обшивки толщиной в 19 мм (3/4 дюйма) при 21,1°С и -40°С. Испытания при низкой температуре, особенно при отношении $n=1$, показали хрупкое разрушение от изгибаний значительно меньших, чем напряжения, полученные в испытаниях на растяжение обычных цилиндрических образцов, сделанных из того же материала.

82. Теория прочности²⁾

Механические свойства строительных материалов обычно определяются опытами, которым подвергаются образцы при сравнительно простых напряженных состояниях. Большинство наших сведений относительно прочности металлов было получено, например, из испытаний на растяжение. Подобным же образом испытания на сжатие применялись для изучения хрупких материалов, в частности камня и бетона. Кроме того, небольшое количество полезных сведений относительно прочности материалов получено в испытаниях на сдвиг. Однако прочность материалов при более сложных напряженных состояниях была исследована лишь в немногих частных случаях, например таких, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Чтобы обоснованно определять допускаемые напряжения для сложных напряженных состояний, которые имеют место при практическом проектировании, были разработаны различные теории прочности. Цель этих теорий состоит в том, чтобы предугадать, когда произойдет разрушение при сложных напряжениях, в предположении, что поведение материала при простом растяжении или сжатии известно. Под разрушением материала разумют либо текучесть, либо появление излома в зависимости от того, что наступит раньше.

Наиболее общее напряженное состояние, которое может иметь место в теле, всегда вполне определяется величинами главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 (рис. 295). В последующем изложении растяжение

рассматривается положительным, а сжатие — отрицательным, причем оси на рис. 295 выбираются так, что зависимость между алгебраическими значениями главных напряжений будет

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (a)$$

Теория наибольших напряжений¹⁾ принимает за критерий прочности наибольшее или наименьшее главное напряжение. Для пластичных материалов это означает, что текучесть в элементе напряженного тела (рис. 295) начнется, когда наибольшее напряжение достигнет величины, соответствующей пределу текучести материала при простом растяжении, или когда наименьшее напряжение достигнет предела текучести при простом сжатии. Таким образом, условиями начала текучести будут

$$(\sigma_1)_t = \sigma_{t_1} \quad \text{или} \quad |(\sigma_3)_t| = \sigma_{c_3} \quad (291)$$

где σ_{t_1} и σ_{c_3} — соответственно напряжения предела текучести при простом растяжении и сжатии. Имеется много примеров, которые противоречат теории наибольших напряжений. Уже было указано (см. стр. 339), что при простом растяжении скольжение происходит по плоскостям, наклоненным на угол 45° к оси образца. Для этих плоскостей ни растягивающие, ни сжимающие напряжения не являются наибольшими, и разрушение вызывается касательными напряжениями. Также было указано (см. стр. 365), что однородный и изотропный материал, хотя бы и слабый при простом сжатии, может противостоять очень большим гидростатическим давлениям без появления текучести. Это указывает на то, что величина наибольшего напряжения недостаточна для определения условий текучести материала или его разрушения.

Вторая теория прочности — теория наибольших деформаций, обычно приписываемая Сен-Венану. По этой теории предполагается, что пластичный материал начинает течь, если наибольшая деформация (удлинение) равна деформации на пределе текучести при простом растяжении или когда наименьшая деформация (укорочение) равна деформации на пределе текучести при простом сжатии. Наибольшая и наименьшая деформации (см. т. I, уравнение (43), стр. 64) будут

$$\frac{\epsilon_1}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) = \epsilon_{t_1}, \quad \frac{\epsilon_3}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) = \epsilon_{c_3}$$

¹⁾ См. Welding J., т. 27, стр. 348, 1948.

²⁾ Описание этих теорий можно найти в статьях: Н. М. Westergaard, J. Franklin Inst., 1920; А. J. Becker, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 85; F. Schleicher, Z. angew. Math. u. Mech., т. 5, стр. 199, 1925; А. Nádai, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 111, 1933.

¹⁾ Это самая старая теория разрушения и иногда называется теорией Ренкина.

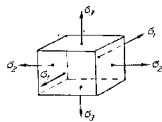


Рис. 295.

Подставляя деформации предела текучести, равные σ_i/E при растяжении и σ_i'/E при сжатии, вместо ϵ_1 и ϵ_2 , получим критерий разрушения согласно теории наибольших деформаций в следующем виде:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \tau_T \quad \text{или} \quad |\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)| = \sigma_i'. \quad (292)$$

Имеется много случаев, когда теория наибольших деформаций может также оказаться несостоятельной. Например, если пластину подвергать равным растягивающим напряжениям в двух перпендикулярных направлениях, то по теории наибольших деформаций следует, что напряжение предела текучести будет выше, чем при простом растяжении. Этот результат получается вследствие того, что удлинение в каждом направлении уменьшается из-за растяжения в перпендикулярном направлении. Однако это заключение не подтверждается опытами¹⁾. Результаты испытаний материалов под действием равномерного гидростатического давления также противоречат этой теории. Для такого случая второе из выражений (292) даст

$$|\sigma_3|_T = \frac{\sigma_i'}{1 - 2\mu},$$

где σ_3 представляет гидростатическое давление. Опыты показывают, что однородные материалы под действием равномерного всестороннего сжатия могут выдерживать более высокие напряжения и оставаться упругими (см. стр. 365).

Теория наибольших касательных напряжений дает лучшие соглашения с опытами, по крайней мере для пластических материалов, для которых $\sigma_i = \sigma_i'$. Эта теория предполагает, что текучесть начнется, когда наибольшее касательное напряжение в материале становится равным наибольшему касательному напряжению предела текучести при испытании на простое растяжение. Так как наибольшее касательное напряжение в материале равняется половине разности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями²⁾, и так как наибольшее касательное напряжение при испытании на растяжение равно половине нормального напряжения, то условием состояния текучести будет

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (293)$$

При проектировании машин теория наибольших касательных напряжений обычно применяется для пластических материалов³⁾. Эта теория хорошо согласуется с опытами⁴⁾ и очень проста в применении.

¹⁾ См. Wehage, Mitt. Tech. Versuchsanstalt. (Berlin), стр. 80, 1888.

²⁾ См. т. I, стр. 64.

³⁾ Сравнение различных теорий прочности, примененных при проектировании машин, дано J. Marinoni, Product Engng., май, 1937.

⁴⁾ Теория подтверждается опытами J. J. Guest'a, Phil. Mag., т. 50, стр. 60, 1900. См. также L. B. Turner, Engineering, т. 86, стр. 159; W. A. Scoble, Phil. Mag., декабрь 1906 и январь 1910; C. A. Smith, Engineering, т. 88, стр. 238.

В теории наибольшей энергии за основание для установления критерия разрушения принимается количество энергии деформации, накопленное в единице объема материала¹⁾. Пользуясь общим выражением потенциальной энергии деформации (выражение (195) т. I, стр. 277) и приравняв энергию для случая, показанного на рис. 295, энергии на пределе текучести при простом растяжении, находим критерий для начала текучести

$$U_i = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) = \frac{\sigma_T^2}{2E}. \quad (294)$$

Для сравнения описанных теорий прочности рассмотрим случай чистого сдвига. В этом особом случае двумерного напряженного состояния наибольшее растягивающее, наибольшее сжимающее и наибольшее касательное напряжения численно равны между собой (см. формулу (а) т. I, стр. 57), т. е.

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad \sigma_2 = 0.$$

Предполагая, что материал имеет один и тот же предел текучести при растяжении и при сжатии, найдем, что условиями текучести, согласно теории наибольших напряжений, теории наибольших деформаций и теории наибольших касательных напряжений, соответственно будут

$$\tau_1 = \sigma_i, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_i}{1 + \mu}, \quad \tau_3 = \frac{\tau_i}{2}.$$

Теория наибольшей потенциальной энергии дает зависимость

$$U_i = \frac{\tau_i^2(1 + \mu)}{E} = \frac{\sigma_i^2}{2E},$$

откуда

$$\tau_i = \sqrt{\frac{\sigma_i}{2(1 + \mu)}}.$$

Принимая для стали $\mu = 0,3$, приходим к следующим результатам: по теории наибольших напряжений $\tau_i = \sigma_i$; по теории наибольших деформаций $\tau_i = 0,77 \sigma_i$; по теории наибольших касательных напряжений $\tau_i = 0,50 \sigma_i$; по теории наибольшей энергии деформации $\tau_i = 0,62 \sigma_i$.

Видно, что разница между различными теориями в этом частном случае получается значительной²⁾. Например, при расчете на кручение

¹⁾ Эта теория впервые была предложена Бельтрами, Rendiconti, стр. 704, 1885; Mat. Ann., стр. 94, 1903; см. также Gittler, Sitzungsber. Wiener Akad., т. 116, 11а, стр. 509, 1907; B. P. Haigh, Engineering, т. 109, стр. 158, 1920 и Brit. Assoc. Adv. Sci. Repts. (Edinburgh), 1921.

²⁾ Сравнения теорий прочности, примененных к различным задачам проектирования, даны в статье Roth, Z. Math. u. Phys., т. 48, 1902.

круглого вала придется сначала установить допустимую величину рабочего напряжения при сдвиге $|\tau| = \tau_{\max} = \tau_c/k$. Тогда диаметр вала может быть найден по формуле (152) т. I, стр. 241. Пользуясь четырьмя теориями, разобранными выше, получаем следующие отношения диаметров:

$$1:1.09:1.26:1.17.$$

Другой способ сравнения рассмотренных выше четырех теорий прочности приведен на рис. 296. Рисунок начерпан для материала, который имеет одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии и находится в плоском напряженном состоянии¹⁾, следовательно, $\sigma_3 = 0$. Линии на рисунке определяют значения σ_1 и σ_2 , при которых начинается текучесть. Теория наибольших напряжений представлена квадратом 1 2 3 4, в котором длины OA и OB представляют напряжения на пределе текучести при простом растяжении и сжатии, соответствующих главным напряжениям. Таким же образом A' и B' соответствуют простому сжатию. Точкой I представлены равные растягивающие напряжения в двух перпендикулярных направлениях, причем каждое равно пределу текучести при простом растяжении. Согласно теории наибольших напряжений текучесть не имеет места при напряжениях, представленных точками внутри квадрата 1 2 3 4.

Теория наибольших деформаций представлена ромбом 5 6 7 8 (рис. 296). Так как растяжение в одном направлении уменьшает деформацию в перпендикулярном, эта теория указывает на то, что два равных растягивающих напряжения вызовут текучесть при гораздо больших значениях напряжений (точка 5), чем указано теорией наибольших напряжений (точка I). Координаты точки 5 на основании выражения (292) будут $\sigma_1/(1-\mu)$. Если два главных напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, то теория наибольших деформаций указывает, что текучесть начинается соответственно точкам 6 и 8, которые имеют координаты, численно равные $\sigma_c/(1-\mu)$. Значения напряжений в этих точках, следовательно, являются меньшими указываемых теорией наибольших напряжений (точки 2 и 4).

Теория наибольших касательных напряжений представлена неправильным шестиугольником $A'1A'3B'A$, который построен на

основании выражения (293). Пользуясь уравнением (293), можно установить, что в данном случае $\sigma_3 = 0$, и поэтому σ_2 должно быть принято вместо σ_3 , когда σ_2 отрицательно. Эта теория совпадает с теорией наибольших напряжений, когда оба главных напряжения имеют один и тот же знак, но они значительно расходятся, когда главные напряжения имеют противоположные знаки.

Для плоской задачи условие (294) теории наибольшей потенциальной энергии сводится к следующему:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_c^2.$$

Графиком этого уравнения является эллипс, показанный на рис. 296. Эллипс лишь незначительно отклоняется от шестиугольника, представляющего теорию наибольших касательных напряжений.

Когда материал подвергается равномерному гидростатическому давлению во всем направлении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$), теория наибольшей потенциальной энергии дает

$$p_1 = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3(1-\mu)}} \quad (b)$$

где p_1 — давление, при котором начинается текучесть материала. Однако этот результат не согласуется с испытаниями на всестороннее равномерное сжатие. Как уже отмечалось (см. стр. 365), однородные изотропные материалы могут противостоят большим гидростатическим давлениям, оставаясь упругими.

Чтобы получить лучшее согласование между теорией и опытом, Губер¹⁾ предложил разложить полную энергию деформации тела на два компонента: 1) энергию деформации при всестороннем равномерном растяжении или сжатии и 2) энергию деформации, соответствующую изменению формы. Затем он предложил использовать только *энергию формоизменения* для оценки состояния текучести и разрушения материала²⁾. Чтобы выполнить разделение энергии деформации на две части, начнем опять с рассмотрения объемного напряженного состояния, определяемого тремя главными напряжениями σ_1 , σ_2 и σ_3 (рис. 295). Закон Гука дает

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

¹⁾ М. Т. Huber, *Czasopismo techniczne, Львов (Лемберг), 1904*; см. также А. Föppel and L. Föppel, *Drang und Zwang, München, 2-е изд., т. I, стр. 50, 1924.*

²⁾ По-видимому, К. Максвелл был первым, который выразил мнение, что «когда (энергия формоизменения) достигнет определенного предела, тогда элемент начнет разрушаться». Это было сформулировано в письме Максвелла (1856 г.) к Вильяму Томсону и стало известным лишь после опубликования письма Максвелла.

¹⁾ См. статьи А. J. Vescega, цит. на стр. 370; В. R. Haigh, цит. на стр. 373.

Складывая эти уравнения, получаем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (c)$$

чем устанавливается, что относительное изменение объема пропорционально сумме трех главных напряжений. Если эта сумма равна нулю, то изменение объема отсутствует, и материал подвергается только деформации изменения формы.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} p. \quad (d)$$

В этом случае никакого искажения формы не будет и существует только всестороннее равномерное растяжение или сжатие.

Для общего случая введем обозначение

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = p \quad (e)$$

и затем разложим каждое из трех главных напряжений на два составляющих следующим образом:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1, \quad \sigma_2 = p + \sigma'_2, \quad \sigma_3 = p + \sigma'_3. \quad (f)$$

Складывая эти три выражения и пользуясь выражением (e), получаем

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Так как сумма σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 обращается в нуль, то эти напряжения вызывают лишь искажение формы, и выражения (f) обеспечивают разделение данной системы напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 на две: 1) равномерно растягивающее или сжимающее p , вызывающее лишь изменение объема, и 2) систему напряжений σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 , вызывающую лишь искажение формы.

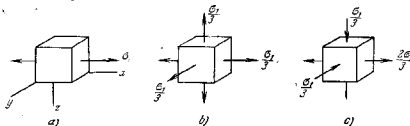


Рис. 297.

В качестве примера приложения выражений (f) рассмотрим случай простого растяжения (рис. 297, a). Подставив $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в формулы

(e) и (f), получим

$$p = \frac{\sigma_1}{3}, \quad \sigma'_1 = \frac{2\sigma_1}{3}, \quad \sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{\sigma_1}{3}.$$

Таким образом, простое растяжение в направлении x можно разложить на равномерное растяжение (рис. 297, b) и сочетание явлений чистого сдвига по плоскостям xy и xz (рис. 297, c). Можно видеть, что работа напряжений, вызывающая лишь искажение формы (рис. 297, c), на перемещениях, возникающих от равномерного растяжения (рис. 297, b), обращается в нуль. Энергии деформации случаев (b) и (c), таким образом, не зависят друг от друга, и полная энергия деформации при простом растяжении (рис. 297, a) получается путем сложения энергии деформации при всестороннем равномерном растяжении и энергии деформации изменения формы.

Это заключение также справедливо в общем случае, когда действуют все три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Из этого следует, что энергия искажения формы получается путем вычитания энергии деформации всестороннего равномерного растяжения из полной энергии деформации. Подставив

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

в выражение (294), получим для энергии деформации при всестороннем равномерном растяжении выражение

$$\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Таким образом, энергия деформации изменения формы в общем случае будет

$$U_i = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]. \quad (295)$$

Это выражение можно принять за основу для определения разрушения пластичных материалов, имеющих ясно выраженный предел текучести σ_T при простом растяжении. Согласно этой теории в общем случае действия напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 текучесть начинается, когда энергия формоизменения (выражение (295)) достигает значения энергии этого же вида на пределе текучести в случае простого растяжения. Последняя величина получается из выражения (295) подстановкой $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, что дает

$$U_i = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2.$$

Тогда условие для состояния текучести, основанное на теории энергии изменения формы, будет

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_T^2 \quad (296)$$

В частном случае плоской задачи мы подставим сюда $\sigma_3 = 0$, и условием текучести будет

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 \quad (297)$$

Рассматривая, например, сочетание осного растяжения и кручения тонких труб (см. стр. 369) и обозначая через σ и τ соответствующие напряжения, находим главные напряжения (см. формулы (31) и (32) т. I, стр. 51) в виде

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

и условием текучести (формула (297)) становится

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_T^2 \quad (298)$$

Это выражение, рассмотренное и ранее (стр. 368), хорошо согласуется с опытами. В случае одного только кручения мы имеем $\sigma = 0$, и выражение (298) дает

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_T \quad (299)$$

что опять хорошо согласуется с результатами опытов.

В настоящее время условие текучести (296) принимается вообще в качестве пригодного для пластичных материалов, причем предполагается, что материал начинает течь, когда энергия деформации изменения формы достигает определенного значения.

Эйнингером¹⁾ было показано, что то же условие текучести, определяемое теорией наибольшей энергии изменения формы (выражение (296)), можно также получить рассмотрением касательных напряжений, действующих по октаэдральной плоскости, например ABC на рис. 298, когда кубик подвергается действию главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . Из рисунка видно, что косинус угла между нормалью n к октаэдральной

плоскости и координатными осями x , y и z равняется $1/\sqrt{3}$. Разложив результирующее напряжение S , действующее по октаэдральной

¹⁾ A. Eichinger, Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 225, 1926.

плоскости, на три составляющие X , Y , Z и написав три условия равновесия, найдем

$$X = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad Y = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

Результирующее напряжение по октаэдральной плоскости равно

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

Нормальная составляющая N напряжения S может быть получена проецированием составляющих X , Y , Z на направление нормали n , что дает

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Тогда, касательное напряжение $\tau_{\text{окт}}$ по октаэдральной плоскости будет

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \sqrt{S^2 - N^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с выражением (296), видим, что условие текучести, основанное на теории энергии искажения формы, эквивалентно положению, что текучесть начинается, когда октаэдральное касательное напряжение достигает критического значения, равного

$$(\tau_{\text{окт}})_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T = 0,47 \sigma_T$$

Г. Захс принял критическое значение $\tau_{\text{кр}}$ для монокристалла (см. стр. 335) за основу для вычисления напряжения на пределе текучести для поликристаллического образца¹⁾. По выражению (b), стр. 340, мы знаем, что нагрузка на пределе текучести образца из монокристалла зависит от ориентировки кристалла. Рассматривая поликристаллический элемент как систему кристаллов, размещенных беспорядочно, Захс вычислил зависимость между σ_T для образца при растяжении и $\tau_{\text{кр}}$ для образца из монокристалла методом приближенного осреднения. В вычислениях пренебрегалось влиянием граничных поверхностей кристаллов и предполагалось, что на пределе текучести все кристаллы потекут одновременно. Для кристаллов с гранцентрированной решеткой кубической структуры (например, алюминий, медь

¹⁾ G. Sachs, Z. Ver. deut. Ing., т. 72, стр. 734, 1928. См. также H. I. Cox and D. G. Sorwith, Proc. Phys. Soc. (London), т. 49, стр. 134, 1937 и U. Dehlinger, Z. Metallkunde, т. 35, стр. 182, 1943.

и никель) он нашел

$$\sigma_t = 2,238 \tau_{кр.}$$

Повторяя вычисления для кручения, он нашел напряжение, соответствующее пределу текучести при сдвиге для поликристаллического образца, равное

$$\tau_t = 1,293 \tau_{кр.}$$

Из последних двух соотношений получаем

$$\tau_t = \frac{1,293}{2,238} \sigma_t = 0,577 \sigma_t,$$

что совпадает с результатами теории энергии искажения формы (см. формулу (299)). Захс предположил, что подобный результат может быть получен и для кристаллов с объемноцентрированной решеткой кубической структуры (как для железа). Таким образом, мы видим, что имеется некоторое физическое обоснование для результата, полученного ранее на основании предположения, что текучесть кристаллического материала начинается, когда количество энергии формоизменения достигает определенного значения для каждого материала.

В предыдущем изложении мы касались установления критериев для начала текучести пластичных материалов в общем случае напряженного состояния. В случае хрупких материалов, которые разрушаются без пластической деформации, мы также нуждаемся в критерии разрушения в общем случае действия напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . Такой критерий представлен *теорией прочности, разработанной Мором*¹⁾, в которой рассматривается не только текучесть, но также и собственно разрушение. При разработке своей теории Мор применил графическое изображение напряженных состояний в элементе тела с помощью кругов напряжений, как пояснено в п. 18, т. I, стр. 64. В этом изображении (круг Мора) нормальные и касательные составляющие напряжения, действующие по какой-либо площадке, определяются координатами некоторой точки в пределах заштрихованной площади (рис.

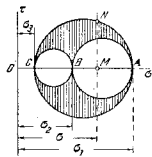


Рис. 299.

299). Точки, лежащие на одной и той же вертикальной линии (как, например, MN), представляют напряжения по площадкам с одинаковым нормальным напряжением σ и с различными касательными

напряжениями. Естественно предположить, что самая слабая из этих площадок — площадка с наибольшим касательным напряжением, представленная точкой N на внешнем круге. Повторяя те же рассуждения с точками на какой-либо другой вертикальной линии, мы окончательно приходим к заключению, что наиболее слабой площадкой должна быть одна из площадок, напряженное состояние которой представлено точками на внешнем круге ANC . Следовательно, один лишь внешний круг достаточен для определения *предельного напряженного состояния*, т. е. напряженного состояния, при котором имеет место либо начало текучести, либо разрушение в зависимости от того, пластичен ли материал или хрупок.

Начнем с определения напряжений текучести. Пусть на рис. 300 круг диаметром OA представляет условие текучести при простом растяжении. По тем же соображениям круг диаметром OC представит условие текучести при простом сжатии, а круг с диаметром OB представит условие текучести при чистом сдвиге. Если на основании проведенных с данным материалом опытов получить ряд кругов такого рода, то можно построить огибающие этих кругов (MN и M_1N_1). Мор далее допустил, что текучесть может начаться только при напряженных состояниях, представленных одним из кругов, касающихся этих огибающих кривых.

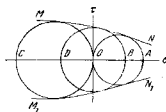


Рис. 300.

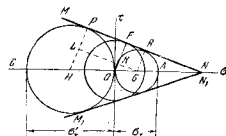


Рис. 301.

Предположим, например, что огибающие кривые MN и M_1N_1 можно заменить прямыми линиями (рис. 301). Тогда, зная предельные условия при простом растяжении ($\sigma_1 = \sigma_t$) и при простом сжатии ($\sigma_3 = -\sigma_t$), можно легко получить условия текучести при чистом сдвиге. Необходимо лишь найти радиус OF круга, построенного при центре в точке O и касающегося прямой MN . Из рис. 301 имеем $\overline{OK} = \overline{OF} - \overline{KF} = \tau_t - \sigma_1/2$ и $\overline{HL} = \overline{HP} - \overline{LP} = \sigma_1/2 - \tau_t/2$. Тогда из подобия треугольников OKO и GHL получим

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} \quad \text{или} \quad \frac{2\tau_t - \sigma_1}{\sigma_1 - \tau_t} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \tau_t},$$

¹⁾ O. Mohr, Z. Ver. deut. Ing., т. 44, стр. 1524, 1900. См. также его Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, 2-е изд., Берлин, стр. 192, 1914.

откуда

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_1'}{\sigma_1 + \sigma_1'} \quad (g)$$

Когда $\sigma_1 = \sigma_1'$, уравнение (g) совпадает с теорией наибольших касательных напряжений.

Теперь приложим теорию Мора к случаю хрупкого материала при условии плоского напряженного состояния и предположим, что на

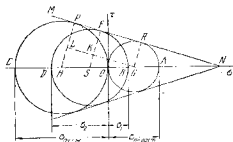


Рис. 302.

рис. 302 OA представляет предел прочности материала при растяжении $\sigma_{\text{пр.рост}}$ и OC представляет предел прочности при сжатии $\sigma_{\text{пр.сж}}$. Тогда для любого отношения $\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{min}} = \sigma_1/\sigma_2$. Крайние значения этих напряжений получаются путем построения круга диаметром $\overline{BD} = \sigma_1 - \sigma_2$, касающегося линии MN^1 . Из рис. 302 получим теперь следующие соотношения:

$$\overline{SK} = \overline{SF} \quad \overline{KF} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{2};$$

$$\overline{HL} = \overline{HP} - \overline{LP} = \frac{\sigma_{\text{пр.сж}}}{2} - \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{2};$$

$$\overline{OS} = \overline{OO} + \overline{OS} = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2};$$

$$\overline{OH} = \overline{OO} + \overline{OH} = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{2} + \frac{\sigma_{\text{пр.сж}}}{2};$$

из подобия же треугольников GSK и GHL находим

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OH}} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_{\text{пр.рост}}}{\sigma_{\text{пр.сж}} - \sigma_{\text{пр.рост}}} = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}} - \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{\text{пр.рост}} + \sigma_{\text{пр.сж}}},$$

откуда

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{пр.рост}}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{пр.сж}}} = 1, \quad (h)$$

¹⁾ Заметим, что σ_1 и σ_2 представляют алгебраические величины и, следовательно, расстояние $OD = -\sigma_2$.

Таким образом, для любого заданного значения отношения σ_1/σ_2 можно вычислить значения σ_1 и σ_2 при разрушении.

В предыдущем параграфе предполагалось, что σ_1 представляет наибольшее главное напряжение σ_{max} и что σ_2 — наименьшее главное напряжение σ_{min} . Так как третье главное напряжение равно нулю в случае плоского напряженного состояния, то σ_1 и σ_2 должны иметь противоположные знаки, как и показано на рис. 302, и отношение σ_1/σ_2 должно быть отрицательным. Однако в случае растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям третье главное напряжение $\sigma_3 = 0$ будет представлять σ_{min} и соответствующий круг Мора будет кругом диаметром OA на рис. 302. Тогда разрушение произойдет, когда большее из двух растягивающих напряжений достигнет значения $\sigma_{\text{пр.рост}}$. Подобным же образом в случае сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям напряжение $\sigma_3 = 0$ представляет σ_{max} и на рис. 302 получается круг диаметром OC . В этом случае разрушение произойдет, когда большее сжимающее напряжение достигнет значения $\sigma_{\text{пр.сж}}$.

Построив для теории Мора чертеж, подобный рис. 296, стр. 374, мы получим для растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям граничные линии AB и BC (рис. 303), указывающие на то, что в этом случае разрушение произойдет, если большее растягивающее напряжение достигнет значения $\sigma_{\text{пр.рост}}$. Подобным образом для сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям мы получим линии DE и FF . Если мы имеем σ_1 при растяжении и σ_2 при сжатии, то условия для разрушения будут представлены уравнением (h), которое даст линию AF на рис. 303. Линия CD получается подобным же образом. Никакого разрушения не будет происходить при напряженных состояниях, определяемых точками, лежащими внутри шестиугольника $ABCDEF$, предельные же напряжения можно получить из этого шестиугольника для любого значения отношений σ_1/σ_2 . Например, для того чтобы найти предел прочности хрупкого материала при чистом сдвиге, мы заметим, что в этом случае $\sigma_1 = -\sigma_2$, а соответствующая предельная точка будет являться точкой пересечения N линии OM (рис. 303) и стороны AF шестиугольника. Значение $\sigma_{\text{пр.рост}}$ можно определить из рисунка или вычислить из уравнения (h), которое для $\sigma_1 = -\sigma_2$

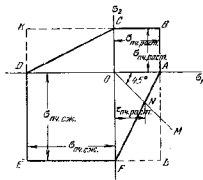


Рис. 303.

даст

$$\sigma_1 = \tau_{\text{пл.рост}} = \frac{\sigma_{\text{пл.рост}} \sigma_{\text{пл.см}}}{\sigma_{\text{пл.рост}} + \sigma_{\text{пл.см}}} \quad (i)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и условие (g) для текучести.

Если применить выражение (i) к такому материалу, как чугун, и допустить, что предел прочности при сжатии в четыре раза больше предела прочности при растяжении, то мы найдем предел прочности при сдвиге равным

$$\tau_{\text{пл.рост}} = 0,8\sigma_{\text{пл.рост}}$$

что удовлетворительно согласуется с опытами Баха¹⁾.

Квадрат *BKEL*, намеченный штриховыми линиями на рис. 303, представляет условия разрушения согласно теории наибольших напряжений. Видно, что, пользуясь теорией Мора, проектировщик обеспечит конструкции большой запас прочности, чем по теории наибольших напряжений, когда главные напряжения имеют противоположные знаки. Теория Мора может быть рекомендована в случае хрупких материалов, хотя предположение, что должен быть рассмотрен только внешний круг напряжений (рис. 299, стр. 380), не всегда подтверждается опытами²⁾.

83. Испытания на удар

Испытания на удар применяются для изучения вязкости материалов, т. е. способности материала поглощать энергию при пластической деформации. При статических испытаниях на растяжение эта энергия представляется площадью диаграммы кривой растяжения и можно заключить, что для того, чтобы иметь высокую вязкость, материал должен иметь высокую прочность и в то же время большую пластичность. Хрупкие материалы имеют низкую вязкость, так как они имеют лишь малую пластическую деформацию перед разрушением. Применение таких материалов в конструкциях является опасным, так как разрушение может произойти внезапно без значительной деформации.

При обсуждении вопросов о различных видах разрушений (см. п. 79) было указано, что один и тот же материал может вести себя как хрупкий или как пластический материал в зависимости от внешних условий. Испытание на растяжение образца из монокристалла каменной соли дает хрупкое разрушение (раскалывание) по одной из главных кристаллографических плоскостей при испытании в комнатной температуре. Тот же образец при испытании в горячей воде деформируется plasti-

чески путем скольжения по октаэдральным плоскостям. Подобные условия могут встретиться также в ответственных случаях применения мягкой строительной стали. При обычных испытаниях на растяжение сталь может иметь большую пластическую деформацию, в то время как в испытаниях при некоторой пониженной температуре разрушение может иметь вид, как у вполне хрупкого материала. Примеры кастрофических случаев таких разрушений наблюдались во время второй мировой войны в многочисленных разрушениях сварных торговых судов¹⁾. Последующие исследовательские работы показали, что температура охрупчивания стальных пластин, примененных в обшивках судов, была того же порядка, что и рабочая температура.

Для того чтобы пояснить переход от хрупкого разрушения к пластическому для образца из монокристалла каменной соли, испытываемого на растяжение, А. Ф. Иоффе²⁾ предложил различать два рода растягивающих напряжений: 1) растягивающее напряжение σ_n , вызывающее хрупкое разрушение отрывом по одной из главных кристаллографических плоскостей, и 2) растягивающее напряжение σ_s , соответствующее началу скольжения по одной из октаэдральных плоскостей кристалла³⁾. На рис. 304 эти две величины представлены в функции температуры t образца. В опытах Иоффе сопротивление отрыву оставалось практически независимым от температуры. На рис. 304 диаграмма для σ_n дана горизонтальной линией. В то же самое время сопротивление скольжению зависело в значительной степени от температуры образца, и ординаты кривой для σ_s уменьшались с увеличением температуры. Точка С пересечения двух кривых определяет критическое значение $t_{кр}$ температуры. Если температура при испытании выше $t_{кр}$, то сопротивление скольжению меньше, чем сопротивление отрыву, и образец будет течь пластически. Для температур ниже, чем $t_{кр}$, мы имеем $\sigma_n < \sigma_s$, и образец будет разрушаться отрывом без пластической деформации.

Имеются другие важные выводы, которые можно сделать на основании диаграммы, представленной на рис. 304. Рассмотрим влияние

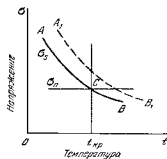


Рис. 304.

¹⁾ См. статью Finn Jonassen'a в W. M. Murray (изд.), *Fatigue and Fracture of Metals*, 1952.

²⁾ Z. Phys., т. 22, стр. 286, 1924.

³⁾ Предполагается, что ось образца параллельна одной из кристаллографических осей.

¹⁾ C. V a c h, *Elastizität und Festigkeit*, 7-е изд., стр. 362.

²⁾ Th. v. K á r m á n, *Forschungsarb.*, № 118 и *Z. Ver. deut. Ing.*, т. 53, 1911. См. также R. H ö k e r, *Forschungsarb.*, № 175/176.

скорости нагружения на результаты испытания. Известно, что с увеличением скорости сопротивления материала скольжению увеличивается, в то время как его сопротивление отрыву остается практически постоянным. В результате этого ординаты σ_n кривой будут увеличиваться и кривая будет смещаться в новое положение A_1B_1 (рис. 304), в то время как линия σ_n остается стационарной. Таким образом, точка пересечения двух кривых смещается вправо, указывая на то, что с увеличением скорости нагружения критическая температура растет. Это заключение подтверждается в испытаниях на удар, которые дают хрупкое разрушение при более высоких температурах, чем в статических испытаниях.

Предположим теперь, что образец подвергается кручению и что ось образца принята перпендикулярной к одной из осей деформационных плоскостей. Текучесть образца при сдвиге начнется приблизительно при том же значении касательного напряжения, как и при испытаниях на растяжение, но соответствующее значение наибольшего нормального напряжения σ_m , равного в этом случае наибольшему касательному напряжению, будет составлять приблизительно половину значения σ_n при испытании на растяжение. Следовательно, при построении диаграммы для испытания на кручение, подобной диаграмме на рис. 304, мы должны принять значения ординат σ_n кривой приблизительно вдвое меньшими, чем значения для испытаний на растяжение. В результате этого точка C пересечения кривых будет смещена влево, и мы заключаем, что при испытаниях на кручение критическая температура должна быть ниже, чем при испытаниях на растяжение. Это заключение согласуется с опытами.

Рассматривая далее влияние напряженного состояния на значение критической температуры, предположим, что равномерное растяжение по всем трем направлениям накладывалось на простое растяжение, так что мы получаем пространственное напряженное состояние. Известно (см. предыдущий параграф), что такое наложение не влияет на значение наибольшего касательного напряжения, при котором начинается текучесть. Однако значение σ_n увеличивается, ординаты σ_n кривой, представленной на рис. 304, увеличиваются, а точка C пересечения перемещается вправо. Таким образом, критическая температура для принятого пространственного напряженного состояния будет выше, чем для простого растяжения. Подобное трехмерное напряженное состояние возникает в надрезе образца с выточкой. Такие образцы имеют более высокие значения $t_{кр}$, чем гладкие образцы⁴⁾.

Фундаментальные идеи относительно критической температуры, при которой происходит переход от хрупкого к пластическому раз-

рушению, были развиты Н. И. Давиденковым и применены к кристаллическим материалам, особенно к различного рода сталям. Пользуясь диаграммой, подобной диаграмме, изображенной на рис. 304, он предусмотрел влияние различных факторов на значение критической температуры и показал своими экспериментальными работами, что предвычисления удельной энергии согласовывались с опытными фактами⁵⁾. Для определения критической температуры были использованы испытания на удар. Так как количество работы, необходимой для случая хрупкого разрушения, во много раз меньше, чем для пластического разрушения, опыты показали при критической температуре резкое изменение количества поглощенной энергии. Рис. 305 представляет результаты испытаний на растяжение при ударе гладких цилиндрических стальных образцов. Можно видеть, что имеет место резкое изменение поглощенной энергии в интервале от -130° до -110° C.

Изменением процесса тепловой обработки может варьироваться в значительной степени величина зерна стали, и исследование влияния размера зерна на величину критической температуры представит практический интерес. Вель известно, что с увеличением размера зерна сопротивление стали отрыву уменьшается. Следовательно, для крупнозернистых сталей горизонтальная линия для σ_n (рис. 304) будет понижаться, и критическая температура будет выше, чем для мелкозернистых сталей. Для того чтобы проверить это заключение, образцы из среднеуглеродистой стали (0,23% углерода) были подвергнуты двум различным температурным обработкам. В первом случае температура была поднята до 1100° C в течение двух часов, а затем образцы были медленно охлаждены в печи. Во втором случае после шреования образцов при температуре 950° C в течение двадцати минут, они были охлаждены на воздухе. В этом процессе в первом случае были получены крупные зерна, во втором — мелкие зерна. Затем были испытаны на удар гладкие цилиндрические образцы, и результаты опытов представлены на рис. 306. Видно, что критическая температура для крупнозернистой стали была приблизительно равна -95° C, в то время как в случае мелкозернистой она была равна -160° C.

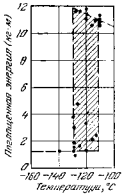


Рис. 305.

⁴⁾ О более подробных сведениях о напряжениях в канавках см. статью E. Osgood'a в изд. W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, 1932.

⁵⁾ См. в книге Н. И. Давиденкова «Динамические испытания металлов», 1936 и «Вопросы удара при изучении металлов», изд. Акад. наук, Москва, 1938. Результаты, приведенные в последующем изложении, если нет особых указаний, взяты из последней книги.

Было также исследовано влияние размера образца на значение критической температуры. Но здесь простая диаграмма на рис. 304 не дает ясного представления о результатах опытов. С увеличением размеров можно ожидать уменьшения сопротивления хрупкому разрушению, так как вероятность наличия решающих несовершенств увеличивается с увеличением объема¹⁾ (см. стр. 331).

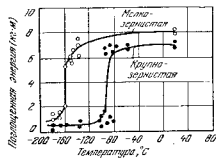


Рис. 306.

Следовательно, при больших объемах горизонтальная линия σ_n будет понижена на рис. 304, вызывая смещение точки С вправо. Но вместе с тем оказывается, что увеличение объема уменьшает значение σ_n (см. стр. 331), и соответствующее понижение кривой σ_n на рис. 304 повлечет за собой смещение С в противоположном направлении. Таким образом, окончательный результат зависит от относительного значения этих двух факторов. Опыты с гладкими цилиндрическими образцами показывают, что понижение линии σ_n является более важным, и точка С перемещается вправо, показывая, что критическая температура увеличивается с увеличением объема образца. Этот фактор нужно учитывать, когда применяют результаты испытаний над малыми образцами в процессе проектирования конструкций больших размеров.

В предыдущем изложении мы рассмотрели только испытания на растяжение цилиндрических образцов, в которых распределение напряжений было равномерным. Однако на практике при испытаниях на удар применяются образцы с надрезами и имеется палочкоконцентрация напряжений. Чтобы исследовать влияние неравномерного распределения напряжений на величину критической температуры, начнем со случая изгиба гладкого цилиндрического образца. Опыты на изгиб при статической нагрузке показывают, что текучесть стали начинается при более высоких напряжениях, чем в случае равномерного растяжения. Напряжение, соответствующее пределу текучести, сначала достигается в тонких слоях волокон, находящихся на наибольшем расстоянии от нейтральной оси, и образование участков текучести у этих волокон задерживается наличием смежного материала с более низким напряжением. Последующий затем рост величины предела текучести нужно рассмотреть, используя диаграмму рис. 304 приме-

нительно к испытаниям на изгиб. Ординаты σ_n кривой должны увеличиться, в результате чего происходит смещение точки С вправо. Критическая температура, полученная из испытаний на изгиб, будет тогда выше, чем значение, полученное из испытаний на растяжение. Это заключение согласуется с результатами опытов.

Подобные рассуждения можно применить и к случаям концентрации напряжений, вызываемых выточками и надрезами (см. стр. 254), причем надо ожидать увеличения $t_{кр}$ для стержней с надрезами. На рис. 307 даны результаты испытаний на удар при изгибе для тех же двух сталей (мелко- и крупнозернистых), рассмотренных ранее¹⁾ (см. рис. 306). Примененный тип выточки показан на рис. 308.

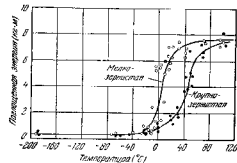


Рис. 307.

Сравнивая рис. 306 и 307, видим, что вследствие наличия выточки критическая температура значительно увеличилась. Мы видим также,

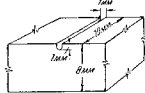


Рис. 308.

что интервал температуры, при котором происходит переход от хрупкого к пластическому разрушению, гораздо больше в случае образцов с надрезами, и критическая температура не так четко определяется, как для образцов без надрезов. Статические испытания образцов с надрезами в интервале²⁾ перехода показали, что характер разрушения изменялся постепенно, и часть поверхности разрушения, которая имела хрупкий характер, увеличивалась при понижении температуры. В то же самое время количество работы, потребное для того, чтобы произвести разрушение, уменьшалось. Рис. 309 представляет несколько диаграмм нагрузки — смещение, полученных при статических испытаниях на изгиб образцов с надрезами при различных температурах. Н. Н. Давиденков предложил принять за критическую такую температуру, при которой поглощаемая работа при испытаниях на удар составляет 40% наибольшей работы, получаемой

¹⁾ О распространении критерия Гриффиса на пластические материалы см. Е. О'Гован, цит. на стр. 396.

²⁾ См. Н. Н. Давиденков и Ф. Ф. Витман, Журнал технической физики, Ленинград, т. 7, стр. 343, 1937.

³⁾ Давиденков и Витман, там же.

при несколько более высокой температуре. Для того чтобы получить диаграммы нагрузки — смещение при испытаниях на удар, были сконструированы специальные вязкокалорные динамометры.

После этих общих рассуждений рассмотрим теперь тип испытаний на удар, который должен применяться на практике для определения $t_{кр}$. Точное определение $t_{кр}$ важно для того, чтобы избежать опасного положения, при котором критическая температура материала является такой же, как рабочая температура конструкции. Очевидно, что испытания на удар при комнатной температуре недостаточны, и в ответственных случаях должна быть проделана серия испытаний для ряда температур. Должна быть построена кривая перехода, подобная изображенной на рис. 307, и по ней должно быть определено $t_{кр}$. Испытания на изгиб стержней с надрезами предпочтительны, так как они дают переходную кривую при высоких температурах и этим самым уменьшают количество работы, затрачиваемой на проведение опытов при очень низких температурах. Если критическая температура определена и известна рабочая температура t_0 конструкции, то за меру безопасности Н. И. Давиденков рекомендует принять отношение

$$\frac{T_0 - T_{кр}}{T_0} \quad (a)$$

где T_0 и $T_{кр}$ являются абсолютными температурами, соответствующими t_0 и $t_{кр}$. Это отношение уменьшается и приближается к нулю, когда T_0 приближается к $T_{кр}$. Результат говорит о весьма опасном положении, при котором малый висхний импульс может вызвать хрупкое разрушение конструкции. С другой стороны, отношение приближается к единице, когда $T_{кр}$ приближается к абсолютному нулю. В этом случае хрупкие разрушения не будут иметь места, и необходимо лишь выбрать размеры конструкции так, чтобы она была достаточно прочной для несения нагрузки без пластической деформации.

При выборе приемлемого значения отношения (a) для использования при проектировании нужно рассмотреть условия, которые действительно существуют в конструкции. Такие факторы, подни-

мающие напряжения, как резкие входные углы и несовершенства при сварке, содействуют увеличению $t_{кр}$ температуры. Увеличение размеров конструкции имеет то же влияние. Для того чтобы иметь достаточную безопасность и сохранить отношение (a) по возможности большим, нужно использовать материалы с низким значением $t_{кр}$. Критическая температура может быть понижена не только путем изменения химического содержания материала, но также надлежащей тепловой обработкой. Мелкозернистая сталь имеет более низкое значение $t_{кр}$, чем крупнозернистая сталь. В последнее время проявился значительный интерес к хрупкому характеру металлов при низких температурах, и мы можем ожидать усовершенствования наших знаний по этому важному предмету ¹⁾.

84. Усталость металлов ¹⁾

Части машин часто подвергаются действию переменных усилий, поэтому важно знать прочность материалов при таких условиях работы ²⁾. Хорошо известно, что под действием повторной нагрузки и разгрузки или под действием знакопеременных напряжений материалы разрушаются при напряжениях меньших, чем предел прочности материала в условиях сто статического нагружения. Величина усилий, необходимого для того, чтобы произвести разрушение, уменьшается с увеличением числа циклов напряжений. Это явление уменьшения сопротивляемости материала повторным напряжениям называется *усталостью*, а испытание материала путем приложения таких напряжений называется *испытанием на выносливость*.

Если σ_{max} и σ_{min} представляют наибольшее и наименьшее значения повторного напряжения, то алгебраическая разность

$$R = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (a)$$

¹⁾ Библиографию по этому предмету можно найти в книге: Н. Н. Давиденков, Вопросы удара при изучении металлов, 1938. См. также статью С. W. MacGregor'а в издании W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, стр. 229, 1952.

²⁾ Этот предмет разобран у П. J. Gough, The Fatigue of Metals, London, 1924 и H. F. Moore and J. W. Kommer, The Fatigue of Metal, New York, 1927. Эти книги содержат библиографию по предмету. О дополнительных сведениях см. литографированное издание лекций Н. J. Gough'а в Массачусетском технологическом институте, лето 1937. См. также R. Szaiaid, Fatigue of Metals (английская перевод), London, 1953, Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New York, 1941, M. Roos and A. E. Lichinger, Die Bruchjahre fester Körper bei wiederholter Beanspruchung Ermüdung, Eidg. Materialprüfungsanstalt (Zürich) Ber., № 173, 1950.

³⁾ J. O. Roos нашел из испытаний большого количества разрушений частей машин, что 80% можно приписать усталости; см. Proc. Internat. Assoc. Test. Mat., 1912.

называется *диапазоном напряжений*. Цикл вполне определяется, если даны диапазон и наибольшее напряжение. Среднее напряжение равно

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}). \quad (b)$$

В частном случае симметричного цикла напряжений $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$, $R = 2\sigma_{\max}$ и $\sigma_m = 0$. Любой цикл переменных напряжений можно получить путем наложения симметричного цикла напряжений на постоянное среднее напряжение. Наибольшее и наименьшее значения переменного напряжения тогда определяются следующими формулами:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \frac{R}{2}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \frac{R}{2}. \quad (c)$$

Существуют различные способы приложения нагрузки при испытании на выносливость. Образец может подвергаться осевому растяжению и сжатию, изгибу, кручению или некоторым их сочетаниям. Простейшим способом деформирования является знакопеременный изгиб. На рис. 310 показан образчик для испытания на усталость

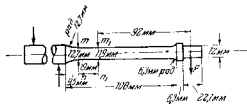


Рис. 310.

стержень¹⁾ в форме консоли. Поперечное сечение образца изменяется по длине таким образом, что наибольшее напряжение имеет место между сечениями m_1 и m_2 ; в практической исключено с помощью выкружки большого радиуса и увеличением диаметра стержня вблизи выкружки. Нагрузка P всегда направлена вниз, а образец вращается с постоянной скоростью. Поэтому напряжение изменяет знак через каждые оборота, и число циклов напряжения равно числу оборотов машины. Этот цикл напряжений является строго симметричным, знакопеременным при среднем напряжении, равном нулю, и диапазоне, равном удвоенному σ_{\max} .

Взяв несколько образцов и испытывая их при различных грузах P , можно получить кривую, подобную показанной на рис. 311. Здесь

¹⁾ См. McAdam, Chem. and Metallurg., Engng. 1921.

σ_{\max} представляло как функция числа циклов n , необходимого для того, чтобы произвести излом образца. Изображенная кривая была получена из опытов над образцами из мягкой стали. Вначале σ_{\max} уменьшается быстро с увеличением n , но после примерно четырех

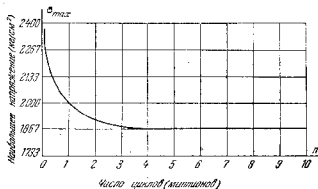


Рис. 311.

миллионов циклов нет уже какого-либо заметного изменения σ_{\max} и кривая асимптотически приближается к горизонтальной линии $\sigma_{\max} = 1900$ кг/см². Напряжение, соответствующее этой асимптоте, называется *пределом выносливости* материала. Теперь в обычной практике

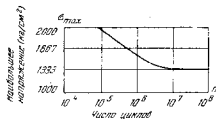


Рис. 312.

испытаний на выносливость вычерчивают σ_{\max} как функцию $\lg n$. В этом приеме величина предела выносливости обнаруживается определенным надломом кривой¹⁾. Пример такой кривой показан на рис. 312.

¹⁾ Результаты испытаний на усталость обычно весьма разноразны. Чтобы улучшить их изложение и использование, некоторыми исследователями было рекомендовано использование статистических методов. См. Симпозиум по статистическим аспектам усталости, Американское общество испытания материалов, 1951.

Существует значительная разница между разрушениями мягких стальных образцов, испытанных статически, и тех же образцов, испытанных при повторно переменных напряжениях. В первом случае значительное пластическое течение предшествует разрушению и поверхности разрушенного сечения имеют вследствие большой вытяжки кристаллов шелковистую волокнистую структуру. Трещина же усталости выглядит совершенно иначе. Она начинается в некоторой точке материала из-за местного дефекта или концентрации напряжений, вызванной резким изменением поперечного сечения. Раз образовавшись, трещина распространяется вследствие концентрации напряжений на ее концах. Это распространение прогрессирует под действием переменных напряжений до тех пор, пока в поперечном сечении площадь не уменьшится до такой степени, что оставшаяся ее часть разрушится внезапно под влиянием нагрузки.

Обычно можно различить две зоны в изломе усталости: одну, возникшую при постепенном развитии трещины, и другую, образовавшуюся при внезапном разрушении. Последняя зона походит на излом при испытании на растяжение образца с глубокой узкой выточкой (см. стр. 362), в которой форма образца принимает скользящую, и поэтому разрушение происходит в результате преодоления сил сцепления. Это разрушение имеет вид хрупкого, если даже материал является пластичным. В случае испытания консольных образцов (рис. 310) наибольшие напряжения будут в наружных волокнах. Следовательно, трещина усталости обычно начинается на периферии и распространяется к центру. Там, где имеется концентрация напряжений вследствие выточек, выкружек или отверстий, трещина обычно начинается в наиболее высоко напряженном месте и распространяется от него в стороны. В таких случаях на поверхности излома видны концентрические относительно этой начальной точки кольца. Это весьма общий тип разрушения в частях машин, которые подвергаются действию переменных напряжений. Таким образом, очевидно, что хрупкий тип усталостного разрушения обязан своеобразному механическому разрушению, но не кристаллизации материала, как думали ранее.

В. Ферберри первый установил на основании опытов над болкой из сварочного железа натуральных размеров¹⁾, что имеется *предельное напряжение*, которое можно прикладывать безопасно бесконечное число раз. Хотя это нельзя доказать непосредственным опытом, все опытные данные²⁾ подтверждают это положение, и теперь считается общепринятым, что для сталей и сплавов железа имеется определенный предельный диапазон напряжений, действием которого мож-

но сопротивляться в течение бесконечно большого числа циклов без разрушения.

Практически очень важно знать, как быстро кривая $\sigma - n$ приближается к асимптоте, так как это определяет число циклов, необходимых для установления предела выносливости. Опыты показывают, что для черных металлов предел выносливости можно установить с достаточной точностью на основании 6—10 миллионов циклов. Для цветных металлов, например алюминия, нет определенного предела выносливости, и ординаты $\sigma - n$ кривой уменьшаются беспредельно с возрастанием числа циклов.

Из предыдущих рассуждений следует, что определение предела выносливости для любого материала требует большого числа испытаний и значительного времени. Следовательно, практический интерес заключается в том, чтобы установить зависимость между пределом выносливости и другими механическими свойствами, которые можно определить при помощи статических испытаний. Но, хотя накоплено большое количество опытных данных, все еще нет возможности установить такую связь³⁾. В грубом приближении предел выносливости для черных металлов при симметричном цикле напряжений может быть принят равным от 0,40 до 0,55 предела прочности, полученного обычным испытанием на растяжение. Когда имеем дело с материалами, механические характеристики которых очень хорошо известны, например с углеродистыми сталями, оценки этого типа могут считаться достоверными. В противном случае такие оценки могут ввести в заблуждение, и необходимо пользоваться непосредственными испытаниями на выносливость. Некоторые результаты испытаний на выносливость сталей даны на рис. 313, а также в табл. 26 в конце главы.

В большинстве случаев испытания на выносливость выполняются для симметричного цикла напряжений ($\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$), в то время как во многих случаях расчета машин имеют дело с напряжениями, уменьшающимися не по симметричному циклу. Необходимо знать предел выносливости при этих переменных напряжениях. Велер — первый

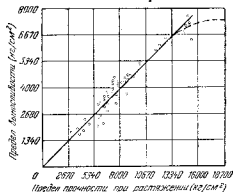


Рис. 313.

¹⁾ См. W. Fairbairn, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1864.

²⁾ Большое число кривых испытаний на выносливость было построено O. H. Basquin, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 10, 1910.

³⁾ См. книгу Н. J. Gough'a, цит. на стр. 391; см. его лекции, там же.

экспериментатор, систематически изучивший явление усталости¹⁾. Он показал, что диапазон напряжений R , необходимый для того, чтобы произвести разрушение, уменьшается с увеличением среднего напряжения σ_m . На основании этих опытов и работы Баушингера²⁾ Гербер предложил³⁾ параболический закон, связывающий диапазон напряжений R и среднее напряжение σ_m . Эта связь изображена параболическими кривыми на рис. 314, где среднее напряжение и диапазон напряжений выражены в долях предела прочности. Диапазон напряжений оказывается наибольшим при симметричном цикле напряжений

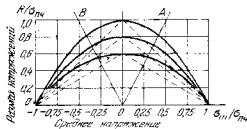


Рис. 314.

($\sigma_m = 0$) и приближается к нулю, когда среднее напряжение приближается к пределу выносливости для симметричного цикла напряжений и предел прочности известны, то предел выносливости для любого несимметричного цикла напряжений можно получить из приведенных кривых. Другие исследования показывают, что не существует общего закона, связывающего среднее напряжение и диапазон напряжений⁴⁾. Например, имеются материалы⁵⁾, для которых зависимость между R и σ_m представляется более точно пунктирными линиями (закон Гудмана) на рис. 314, а не параболой.

Прямые OA и OB на рис. 314 имеют уклон, равный 2, и определяют область AOB , в которой напряжение изменяет знак в течение цикла. Вне этой области напряжение всегда остается растягивающим или сжимающим. Определенные опытным путем значения вы-

¹⁾ A. Wohler, Z. Bauwesen, т. 8, 10, 13, 16 и 20, 1858—70. Оценка этой работы на английском языке дана в Engineering, т. 11, 1871; см. также Upton, The Testing of Materials of Construction, 3-е изд., 1910.

²⁾ J. Bauschinger, Mitt. Mech.-tech. Lab. München, № 13 и 25.

³⁾ W. Gerber, Z. bay. Architect. Ind.—Ver., 1874; см. также Upton, Elements of Machine Design, т. 1, гл. 2.

⁴⁾ Широкое обсуждение этого вопроса можно найти в книге H. J. Gough'a, цит. на стр. 391. См. также его лекции, там же.

⁵⁾ См. статью В. P. Haigh, J. Inst. Metals, т. 18, 1927.

три области AOB обычно лежат между параболой и соответствующими прямыми¹⁾. Если напряжение всегда растягивающее или всегда сжимающее, значения диапазона напряжений R , как найдено опытом, лежат иногда не только ниже параболы Гербера, но даже ниже и соответствующих прямых.

Вместо того чтобы представлять диапазон напряжений R как функцию σ_m (рис. 314), иногда вычерчивают σ_{max} и σ_{min} в функции σ_m (рис. 315). Напряжения σ_{max} и σ_{min} получаются из уравнения (с)

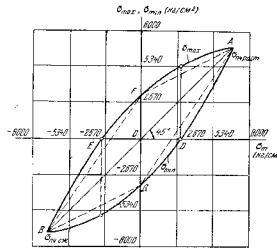


Рис. 315.

и изображаются графиком путем добавления $\pm R/2$ к ординатам прямой линии AOB , наклоненной под углом 45° . Вертикальная линия, проходящая через точку O (рис. 315), соответствует симметричному циклу напряжений. Вертикаль, проходящая через точку D , соответствует пульсирующему растягивающему напряжению, при котором нагрузка изменяется от нуля до максимума и затем возвращается к нулю.

Подобно этому, вертикальная линия, проходящая через E , соответствует пульсирующему сжимающему напряжению. Точка A представляет предел прочности материала при растяжении, а точка

¹⁾ Некоторые опыты с мягкой сталью указывают на то, что среднее напряжение σ_m имеет малое влияние на величину диапазона напряжений R . См. лекции H. J. Gough'a, цит. на стр. 391, и его статью в J. Appl. Mech., т. 17, стр. 113, 1956.

B — предел прочности при сжатии. Кривые для σ_{\max} и σ_{\min} представляют предельные состояния для переменных напряжений. Если точки, соответствующие некоторому действительному переменному напряжению, лежат внутри площади $AEBDA$, то материал может противостоять этому напряжению бесконечное число циклов без разрушения. Кривые для σ_{\max} и σ_{\min} (рис. 315) получены из параболической кривой, представленной на рис. 314. Но, как упомянуто ранее, парабола замещается во многих случаях двумя наклонными линиями, и область безопасности на рис. 315 тогда получается в виде параллелограмма $AFBGA$.

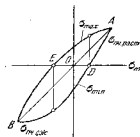


Рис. 316.

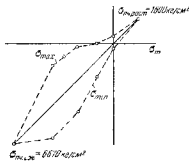


Рис. 317.

В предыдущем изложении предполагалось, что график диапазона напряжений является симметричной кривой, например в виде парабол рис. 314; однако многие опыты показывают, что диапазон напряжений зависит не только от величины, но также и от знака среднего напряжения $\sigma_{\text{д}}$. Когда это напряжение является сжимающим, то материал может противостоять большим значениям диапазона напряжений, чем в том случае, когда оно является растягивающим. Кроме того, часто предел прочности при сжатии $\sigma_{\text{вн.сж}}$ выше предела прочности при растяжении $\sigma_{\text{вн.раст}}$. Тогда вместо симметричных парабол (рис. 314) мы получаем несимметричные кривые¹⁾, и область безопасности для пластического материала имеет форму, показанную на рис. 316. Разность между $\sigma_{\text{вн.раст}}$ и $\sigma_{\text{вн.сж}}$ особенно велика для хрупких материалов, и график области безопасности имеет большую выпуклость на стороне сжатия, как показано на рис. 317 для чугуна²⁾.

¹⁾ См. статью R. E. Peterson'a в Fatigue and Fracture of Metals, 1952.

²⁾ A. Pomp und M. Hempel, Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 22, стр. 169, 1940.

85. Усталость металлов при сложном напряженном состоянии

Большинство наших опытных сведений по усталостной прочности материалов получено для случая одноосного напряженного состояния, как, например, в испытании на изгиб вращающихся образцов. Но в практических задачах мы часто встречаем случаи действия сложных напряжений, и весьма важно для этих условий также знать предел выносливости. Чтобы получить данные об усталостной прочности

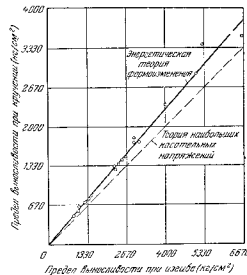


Рис. 318.

различных пластичных материалов при чистом сдвиге, были проделаны испытания на кручение, в которых угол закручивания был значокперменным. Результаты некоторых из этих испытаний показаны¹⁾ на рис. 318. С целью границы предела выносливости при изгибе здесь принят за абсциссу, а предел выносливости при сдвиге — за ординату. Видно, что отношение этих пределов для всех испытанных материалов весьма близко к $\sqrt{3}$. Это значение для отношения пределов текучести при изгибе и сдвиге (см. выражение (299)) даст теория наибольшей энергии изменения формы.

¹⁾ Этот рисунок взят из книги: R. E. Peterson, Stress Concentration Design Factors, New York, 1953.

Испытания на усталость под действием сложных напряжений, вызываемых одновременным действием переменных изгиба и кручения¹⁾, были также проведены, и результаты показаны²⁾ на рис. 319. Здесь снова результаты испытания хорошо согласуются с теорией наибольшей энергии формоизменения, что и можно было ожидать, поскольку сдвиг обычно предшествует развитию трещины усталости³⁾.

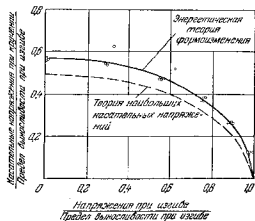


Рис. 319.

Для того чтобы получить уравнение для вычисления предела выносливости при одновременном действии изгиба и кручения следует лишь подставить в соответствующее условие текучести (см. уравнение (298)) значение предела выносливости σ_r для знакопеременного изгиба вместо σ_T , что дает

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_r^2. \quad (а)$$

Соответствующий эллипс показан на рис. 319, из которого видно, что результаты испытаний хорошо согласуются с уравнением.

Другие испытания⁴⁾ на усталость при двухосном растяжении или растяжении со сжатием для отношения σ_1/σ_2 , остающегося постоянным в течении цикла, также удовлетворительно согласуются с те-

рией наибольшей энергии формоизменения. Таким образом, мы можем воспользоваться для определения предела выносливости в случае симметричного цикла напряжений следующим уравнением (см. стр. 378):

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_r^2, \quad (б)$$

в котором σ_r — предел выносливости для одноосных напряженных состояний. Предполагая, что $\sigma_1 > \sigma_2$ и пользуясь обозначением $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$, из уравнения (б) получаем

$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} = \sigma_r. \quad (с)$$

В случае пульсирующих напряжений, в которых напряжение изменяется от нуля до некоторого наибольшего значения, соответствующее одноосное пульсирующее напряжение σ_{max} должно быть подставлено⁵⁾ в уравнение (с) вместо σ_r .

Чтобы установить предельные условия в случаях трехосного напряженного состояния, воспользуемся уравнением (296). Подставляя $\sigma_3 = \alpha\sigma_1$ и $\sigma_2 = \alpha_1\sigma_1$, получаем следующее уравнение для симметричного цикла напряжений:

$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha - \alpha_1 + \alpha^2 + \alpha_1^2 - \alpha\alpha_1} = \sigma_r. \quad (д)$$

Из этого уравнения можно вычислить предельное значение σ_1 для любых данных значений α и α_1 .

Имеется лишь небольшое количество достоверных сведений, которые можно приложить к примерам, в которых отношения σ_1/σ_2 и σ_1/σ_3 не остаются постоянными во время цикла нагружения. Гаф исследовал⁶⁾ случай, в котором статический изгиб и кручение были наложены на симметричный цикл напряжений. Было найдено, что влияние моментов статического нагружения на предельные значения перемещенных моментов было весьма мало⁷⁾ и что для вычисления предельных значений переменных напряжений можно воспользоваться эллипсом того же типа, что и на рис. 319. Оси эллипса равны диапазонам переменных напряжений⁸⁾ при изгибе и кручении. Диапазоны находятся в соответствии с приложенными статическими напряжениями, так как последние являются в этом случае средними напряжениями.

¹⁾ См. H. J. Gough and H. V. Pollard, Engineering, т. 140, стр. 566, 1935. См. также Nishihara and Kawamoto, Trans. Soc. Mech. Eng. (Japan), т. 6, стр. 2, 1940.

²⁾ См. R. E. Peterson, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 118, 1943.

³⁾ H. J. Gough, Proc. Am. Soc. Test. Mat. т. 33, стр. 3, 1933.

⁴⁾ A. F. Maier, Stahl u. Eisen, т. 54, стр. 289, 1934; C. W. MacGregor, J. Appl. Mech., т. 16, стр. 269, 1949.

⁵⁾ Если не имеется опытных данных, то для определения σ_{max} можно воспользоваться параболой Герберга или законом Гудмана.

⁶⁾ H. J. Gough, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 113, 1950.

⁷⁾ Использованным материалом был сплав стали при высоком значении отношения σ_1/σ_{max} .

⁸⁾ Эти диапазоны можно взять из рис. 318, если пределы выносливости для изгиба и кручения определяются порознь опытным путем.

Для хрупких материалов при вычислении предельных сложных напряжений от усталости применяется теория Мора. Если эти напряжения имеют один и тот же знак, нужно рассматривать только численно большее напряжение. Его предельное значение можно получить из диаграммы одноосных напряжений, показанной на рис. 317 для чугуна. Если напряжения имеют противоположный знак, то мы можем воспользоваться уравнениями (II) стр. 382, выведенными для статических нагрузок. Обозначая численно большее главное напряжение через σ_1 , а меньшее через $\sigma_2 = -\sigma_3$, получаем

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{пч. раст}} \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}}$$

Теперь можно допустить¹⁾, что для предельного значения σ_1 при переменных напряжениях будет пригоден

$$\sigma_1 = \sigma_r \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}}, \quad (e)$$

где σ_r — предел выносливости для одноосного напряженного состояния. Применяя это уравнение к случаю чистого сдвига ($\alpha = 1$), получаем

$$\tau_r = \sigma_r \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}},$$

которое удовлетворительно согласуется с результатами испытаний²⁾.

Имеются лишь скудные сведения относительно усталостной прочности хрупких материалов для случаев, в которых статические напряжения накладываются на переменные напряжения. Одноосные испытания по нульсирующему циклу, в которых напряжение меняется от нуля до максимума, были проделаны с чугуном³⁾. Испытания были произведены как при растяжении, так и при сжатии и показали, что предельные значения напряжений для этих двух случаев (обозначим их через $\sigma_{\text{пч. раст}}$ и $\sigma_{\text{пч. сж}}$) находятся в том же отношении, что и $\sigma_{\text{пч. раст}}$ и $\sigma_{\text{пч. сж}}$ при статических испытаниях. Таким образом, для нульсирующего крутящего момента, применяя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, мы можем написать

$$\tau_{\text{пч. сж}} = \sigma_{\text{пч. раст}} \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}}$$

Для чугуна $\sigma_{\text{пч. сж}}/\sigma_{\text{пч. раст}}$ находится обычно в пределах между 3 и 4.

¹⁾ Это равносильно предположению, что влияние σ_2 на значение σ_1 одинаково как при установившемся, так и статическом испытаниях.
²⁾ H. J. Gough and H. V. Pollard, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 131, стр. 1 и т. 132, стр. 549, 1935.
³⁾ H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 164, 1927. См. также статью A. P. Om'p'a and M. H. e'p'e'p'a, цит. на стр. 398.

86. Факторы, влияющие на предел выносливости

После общего обсуждения вопроса в предыдущих параграфах рассмотрим теперь различные факторы, которые влияют на результаты, получаемые при испытании на выносливость.

Влияние холодной обработки. При анализе поведения пластичных металлов в процессе вытяжки, волочения и прокатки при комнатной температуре было отмечено (см. п. 78), что благодаря холодной обработке материал становится более жестким, предел текучести повышается, несколько увеличивается и предел прочности. Следовательно, мы можем ожидать, что холодная обработка будет также влиять и на предел выносливости материала. Опыты, проделанные со стальными образцами, подвергнутыми холодной вытяжке¹⁾, показали, что умеренная степень вытяжки вызывает некоторое увеличение предела выносливости. При дальнейшем увеличении холодной обработки можно достичь положения, при котором имеет место падение предела выносливости вследствие перегрузки²⁾. Улучшение состояния холодно обработанного материала можно получить, подвергнув материал после холодной обработки слабой термической обработке, например, оставив материал в кипящей воде на некоторое время.

Влияние перенапряжения и недонапряжения. Были проделаны опыты, в которых циклы напряжений выше предела выносливости были приложены неоднократно, до начала обычного испытания на выносливость. Это перенапряжение образцов показало, что имеется предельное число циклов перенапряжения, зависящее от величины перенапряжения. Перенапряжение с числом циклов ниже предельного не оказывает влияния на предел выносливости, в то время как превышение этого числа влечет уменьшение предела выносливости. Построив график зависимости перенапряжения от предельного числа циклов, получим кривую ущерба³⁾ для испытываемого материала. В качестве примера на рис. 320 показана кривая⁴⁾ для материала, имеющего предел выносливости, равный 2340 кг/см². Площадь ниже этой кривой определяет все те степени перенапряжения, которые не причиняют ущерба (повреждения).

¹⁾ H. F. Moore and J. V. Kommers, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 124, 1921; O. J. Horger, Trans. A. S. M. E., т. 57, стр. A-128, 1935. В опытах Мура углеродисто-стальные образцы (0,18% углерода) были подвергнуты вытяжке на 8% и 18%. В опытах Хорджера был применен тот же процент вытяжки, но со сталью, содержащей 0,48% углерода.

²⁾ См. H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 136 и R. M. Brown, Trans. Inst. Engrs. Shipbuilders Scot., 1928.

³⁾ H. J. French, Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 21, стр. 899, 1933 и H. W. Russell and W. A. Welcker, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 36, 1936.

⁴⁾ См. H. F. Moore, Metals and Alloys, т. 7, стр. 297, 1936. О bibliографии по этому предмету см. Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New York, 1941.

Кривая усталости имеет практическое значение для частей машины, которые нормально действуют при циклах напряжения ниже предела выносливости, но подвергаются время от времени циклам перенапряжения. Если величина перенапряжения известна, то безопасное число циклов перенапряжения легко получить из кривой усталости¹⁾. По кривой на рис. 320 можно видеть, например, что циклы перенапряжения ± 2700 кг/см² не производят повреждения, если число циклов перенапряжения меньше чем 100 000.

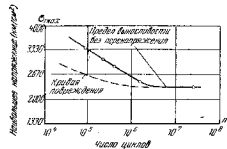


Рис. 320.

В области проектирования самолетов вопрос об усталостной прочности становится более сложным, так как части в работе подвергаются циклам напряжений различной интенсивности. При проведении необходимых испытаний на усталость применяются статистические методы. На основании измерений напряжения в ускорения, проделанных в полете, возможно установить вероятное число циклов каждой интенсивности. Затем производятся испытания на усталость, в которых интенсивность напряжения изменяется согласно статистическим данным²⁾.

Производя опыты на выносливость при нагрузке, несколько меньшей предела выносливости, а затем увеличивая ее малыми порциями, можно повысить предел выносливости. Это явление называется влиянием *недонапряжения*. Величина, на которую можно повысить предел выносливости таким путем, зависит от материала³⁾. Для мягкой стали эта величина иногда превышает 30% первоначального предела выносливости, в то время как на железо Армко и медь *недонапряжения* практически не оказывают влияния.

Влияние частоты. Воздействие частоты циклов было также изучено при испытаниях на выносливость, но заметного влияния не наблюдалось до частоты около 5000 циклов в минуту. Для более

высоких частот было выявлено некоторое увеличение наблюдаемого предела выносливости. Очень интересные опыты такого рода были проделаны К. Ф. Дженкином⁴⁾. Увеличивая частоту свыше миллиона циклов в минуту, он нашел увеличение предела выносливости более чем на 30% для таких материалов, как железо Армко и алюминий. Чтобы получить эти высокие частоты, Дженкин применял вынужденные колебания малых образцов. Машина, вращающая образец, была использована Г. Н. Кроусом⁵⁾ для высокоскоростных испытаний при 30 000 циклов в минуту. Для алюминия и латуни он нашел при этой скорости увеличение предела выносливости на 8%.

Влияние температуры. Выше мы рассматривали испытания на предел выносливости, сделанные при комнатной температуре. Однако имеются случаи, когда материалы подвергаются действию циклических напряжений при низкой температуре, как, например, некоторые части самолетов. Наоборот, в паровых турбинах и двигателях внутреннего сгорания, материалы подвергаются действию очень высоких температур. Следовательно, испытания на выносливость при низких и высоких температурах имеют практическое значение. Сравнительные испытания на выносливость, проделанные при $+20^{\circ}\text{C}$ и -40°C ⁶⁾ с монель-металлом, нержавеющей сталью, никелевой сталью и хромо-молибденовой сталью показали во всех случаях увеличение предела выносливости с уменьшением температуры. Подобные выводы были также получены для других материалов⁷⁾.

Испытания на выносливость при высоких температурах, проделанные с различного рода стальями на машинах, вращающих образец⁸⁾, а также на машинах, производящих знакопеременные осевые напряжения⁹⁾, указывают, что вплоть до $300-400^{\circ}\text{C}$ температура не оказывает большого влияния на предел выносливости. Наибольший предел выносливости обычно получается в промежутке от 300°C до 400°C , между тем как от 100°C до 200°C предел выносливости обычно несколько меньше, чем при комнатной температуре. Опыты также показывают, что кривые $\sigma-N$ не приближаются к своим асимптотам так быстро, как при комнатной температуре, и что для определения величины предела выносливости требуется более чем 10^7 циклов.

Усталость при коррозии. Явление усталости при коррозии также имеет практическое значение. Этот термин применяется для обозна-

¹⁾ В. F. Langer предложил формулу для вычисления числа циклов перенапряжения, которому часть машины может противостоять до разрушения. См. J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-160, 1937. См. также М. А. Минер, там же, т. 12, 1945.

²⁾ О библиографии см. статью: H. L. Dryden, R. V. Rode and P. Kuhn в изд. W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, 1952, см. также A. M. Freudenthal, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 53, стр. 856, 1953.

³⁾ H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 142, 1924; J. B. Kummer, Engg. News Record, 1932.

⁴⁾ C. F. Jenkin, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 109, стр. 119, 1925 и C. F. Jenkin and G. D. Lehmann, там же, т. 125, 1929.

⁵⁾ G. N. Krouse, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 34, 1934.

⁶⁾ H. W. Russel and W. A. Welcker, там же, т. 31, стр. 122, 1931. См. также Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 381, 1931.

⁷⁾ W. D. Boole and H. B. Wishart, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 35, 1935.

⁸⁾ H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 152, 1925 и H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, там же, № 164, 1927.

⁹⁾ H. J. Tapscott and J. Bradley, J. Inst. Metals, т. 35, 1926.

чения одновременного действия коррозии и усталости. В 1917 г. Хэг¹⁾ опубликовал результаты некоторых очень интересных испытаний на выносливость латуни, в которых он нашел понижение предела выносливости под действием переменных усилий, когда образец подвергался действию соленой воды, аммиака или соляной кислоты. Он также указал, что вредное действие аммиака на латунь не проявляется, если не было одновременного воздействия разъедающих веществ и переменных усилий.

Дальнейший прогресс в исследовании усталости при коррозии был достигнут Мак-Адамом²⁾, который исследовал одновременное действие коррозии и усталости на различные металлы и сплавы. Эти испытания показали, что в большинстве случаев сильная коррозия, предшествовавшая испытанию на выносливость, гораздо менее вредна, чем слабая коррозия, которая имеет место одновременно с испытанием. Испытания были проведены на сталях с различным содержанием углерода, имеющих пределы выносливости³⁾ в симметричных циклах нагружений от 1400 до 2800 кг/см². Когда образцы при испытаниях были подвергнуты действию пресной воды, пределы выносливости значительно уменьшились, варьируясь от 1120 до 1400 кг/см². Эти пониженные пределы выносливости называются *пределами усталости при коррозии*. Испытания показали, что, в то время как при испытании на воздухе предел выносливости стали растет приблизительно пропорционально росту предела прочности, результаты, полученные при испытаниях в пресной воде, оказываются иными. Предел выносливости при коррозии стали, имеющей углерода более 0,25%, не растет после горячей обработки⁴⁾, а может даже уменьшиться. Было также показано, что добавление хрома, достаточное для увеличения сопротивления стали обычной коррозии, увеличивает и предел выносливости при коррозии до значения большего предела выносливости углеродистой или никелевой сталей⁵⁾.

Испытания на выносливость в атмосфере сухого пара⁶⁾ показали, что сухой пар не оказывает влияния на предел выносливости, но в случае пара, содержащего воздух или воду, наблюдалось понижение предела выносливости. Опыты в вакууме⁷⁾ показали, что предел выносливости стали приблизительно такой же, как в воздухе, в то

время как опыты с медью и латушью в вакууме показали увеличение выносливости по меньшей мере на 14 и 16% соответственно.

Известно много случаев разрушений во время работы, которые можно приписать усталости при коррозии. Эти случаи включают поломки таких частей, как валы судовых двигателей, охлаждаемые водой поршневые шток судовых нефтяных двигателей внутреннего сгорания, лопатки турбин, рессоры локомотивов, шатны насосов нефтяных скважин, паровые котлы, трубы паропрегревателей и т. д. Во многих случаях разрушения от усталости при коррозии были устранены введением материалов, сопротивляющихся коррозии. Опыты Мак-Адама со сталями, сопротивляющимися коррозии, показали, что такие стали дают весьма удовлетворительные результаты при испытаниях на усталость при коррозии. Более поздние опыты со сплавными бронзами⁸⁾ показали, что фосфористая бронза и алюминиевая бронза, испытанные при крайне тяжелых коррозионных условиях, обладают значительным сопротивлением усталости при коррозии и выдерживают сравнение с лучшими нержавеющими сталями.

Защитные покрытия⁹⁾ и холодная обработка¹⁰⁾ поверхности элементов, подверженных усталости при коррозии, также были успешно применены для предупреждения разрушений.

Влияние остаточных напряжений. Остаточные напряжения обычно вызываются горячей обработкой частей машин и наблюдаются при сварке конструкций, причем возникает вопрос о влиянии этих напряжений на предел выносливости. Опыты с закаленными стальными образцами, испытанными на машине для испытания на усталость вращающихся образцов, показали¹¹⁾, что остаточные напряжения падают до значения, меньшего 1/4 их первоначальной величины в результате приложения симметричного цикла напряжений; влиянием остаточных напряжений на предел выносливости можно было пренебречь. Подобные же заключения были получены из испытаний на усталость сварных двугранных балок¹²⁾. Е. Е. Вейбель отметил неблагоприятное влияние остаточных напряжений, возникающих в литках пружин¹³⁾.

Влияние обработки поверхности. Влияние обработки поверхности на предел выносливости также было изучено. Были проведены испытания из стали, содержащей 0,49% углерода, имеющей

¹⁾ В. P. Haigh, там же, т. 18, 1917.

²⁾ D. J. MacAdam, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 26, 1926; т. 27, 1927; Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 2, 1927; Proc. Internat. Congr. Test. Mat., Amsterdam, т. 1, стр. 305, 1928. См. также H. F. Moore в Metals Handbook, Американское общество мет., стр. 147, 153, 1939.

³⁾ Определенные при помощи испытаний на воздухе.

⁴⁾ MacAdam, Proc. Internat. Congr. Test. Mat., Amsterdam, т. 1, стр. 308, 1928.

⁵⁾ См. MacAdam, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928.

⁶⁾ См. T. S. Fuller, Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 19, стр. 97, 1931.

⁷⁾ H. J. Gough and D. G. Sopwith, J. Inst. Met., т. 49, стр. 93, 1932.

⁸⁾ H. J. Gough and D. G. Sopwith, J. Inst. Metals, т. 60, стр. 143, 1937.

⁹⁾ D. G. Sopwith and H. J. Gough, J. Iron and Steel Inst., 1937.

¹⁰⁾ O. Föppel, O. Behrens and T. Dusold, Z. Metallkunde, т. 25, 1933.

¹¹⁾ C. H. Böhler and H. Buchholz, Stahl u. Eisen, т. 53, стр. 1330, 1933 и Mitt. Forsch.-Inst., Verein. Stahlwerke (Dortmund), т. 3, стр. 235, 1933.

¹²⁾ E. H. Schulz and H. Buchholz, Stahl u. Eisen, т. 53, стр. 545, 1933.

¹³⁾ Trans. A. S. M. E., т. 57, стр. 501, 1935. См. также E. Wever and G. Martin, Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 21, стр. 218, 1939 и C. W. MacGregor в изд. W. R. Osgood, Residual Stresses in Metals and Metal Construction, New York, 1951.

предел прочности, равный 6700 кг/см^2 , и обычный предел выносливости 3400 кг/см^2 . Если принять за 100 предел выносливости для тщательно полированных образцов, то были получены следующие результаты для образцов с различным качеством обработки¹⁾: с обработкой шлифовкой — 89; с обработкой гладкой обточкой — 84, с обработкой грубой обточкой — 81. Испытания стали, содержащей $0,02\%$ углерода (железо Армо), дали для последних двух типов обработки соответственно 92 и 88. Подобные опыты были проделаны В. Н. Томасом²⁾ со сталью, содержащей $0,33\%$ углерода; он измерял величину шаранин при различных обработках с помощью микроскопа. Другие опыты были проведены В. Цандером³⁾.

Табл. 26, помещенная в конце этой главы, дает результаты, полученные при статических испытаниях и испытаниях на выносливость некоторых сталей, применяемых в технике.

87. Усталость и концентрация напряжений

При обсуждении вопросов концентрации напряжений, вызываемой режками изменениями поперечных сечений стержней и валов (см. гл. VIII),



Рис. 321.

было указано, что такая концентрация напряжений особенно вредна в случае переменных напряжений. В машинах концентрация напряжений всегда имеет место из-за выточек, выкружек, отверстий, шпоночных канавок и т. д., и опыты показывают, что большинство трещин усталости начинается в местах концентрации напряжений. Несколько примеров таких разрушений будет теперь кратко разобрано.

Фото на рис. 321 дает⁴⁾ картину разрушений от усталости круглых валов с поперечными отверстиями, подверженных действию знакопеременного кручения. Наибольшее напряжение в этом случае имеет место по краю отверстия на площадке, наклоненной на 45°

¹⁾ См. H. P. Moore and J. V. Kottmers, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 124, стр. 683, 1921.

²⁾ Engineering, т. 116, стр. 483, 1923. Более поздние исследования шероховатости поверхности рассмотрены в статье S. W. а. и др. на стр. 423.

³⁾ Диссертация, Техническая высшая школа, Брауншвейг, 1928.

⁴⁾ См. статью A. Thoma's, Forschung, т. 9, стр. 57, 1933.

к оси вала (см. стр. 252). В этих точках трещины начинают и постепенно развиваются по винтовой линии, следуя направлению одного из главных напряжений.

Фото на рис. 322 показывает разрушение от усталости при кручении вала большого мотора-генератора, который плохо работал вблизи резонанса¹⁾. Трещина началась у шпоночной канавки, где имела место высокая концентрация напряжений, и постепенно развивалась по винтовой линии. Винтовую трещину, соответствующую направлению главного напряжения, можно видеть на фото. Фото на рис. 323 дает картину разрушения от кручения вала генератора дизельмашины. Высокая



Рис. 322.

Рис. 323.

концентрация напряжений у малой выкружки вызвала появление нескольких винтовых трещин, которые в целом придают трещине пилообразную форму. На фото рис. 324 показаны трещины усталости, которые развивались постепенно у корней зубьев зубчатой передачи. Места пунктов высокой концентрации напряжений отвечают характеру изгиба зубьев как консолей.

Наконец, фото на рис. 325 дает представление о характерном разрушении от усталости мощной винтовой пружины. Трещина началась изнутри, как предсказывает теория (см. т. 1, стр. 247), и опять-таки следует направлению одного из главных напряжений. Все эти фотоснимки ясно показывают вредное действие, вызываемое

¹⁾ Фотоснимки 322—323 взяты из статьи R. E. Peterson'a, представленной на конференции Массачусетского технологического института по проблемам сопротивления материалов — в промышленности, июль 1937. Механизм роста трещины также рассмотрен Петерсоном, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 157, 1933. Многие примеры разрушений от усталости двигателей описаны в статье L. W. Schuster'a, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), апрель 1933.

концентрации напряжений, и понятно, что этот фактор должен быть серьезно принят во внимание при проектировании частей машин¹⁾.

Более ранние испытания на усталость, проведенные с образцами, имеющими резкие изменения поперечного сечения, показали, что имело место уменьшение прочности вследствие концентрации напряжений, но это уменьшение было обычно меньше, чем следовало ожидать, исходя от величины вычисленного коэффициента концентрации напряжений. Например, в случае плоских стальных образцов с малыми

круглыми отверстиями, подверженных действию осевого напряжения, теоретический коэффициент концентрации напряжений равен 3 (см. стр. 249). Если величина наибольшего напряжения является определяющим фактором при испытаниях на выносливость, то следовало бы ожидать, что нагрузка рас-



Рис. 324.



Рис. 325.

тяжение — сжатие, необходимая для разрушения от усталости образца с отверстием, должна составлять около одной трети нагрузки для образца без отверстия. Однако опыты показали, что в этом случае уменьшение прочности от концентрации напряжений менее значительно (сравнительно с вычисленным²⁾).

Чтобы объяснить это расхождение и дать необходимые указания для проектировщиков, Р. Е. Петерсоном была проделана весьма большая серия испытаний в исследовательской лаборатории фирмы

¹⁾ Очень важно для практики иметь некоторые средства для обнаружения трещин, как только они появляются. Различные методы обнаружения трещин описаны Charles Lippson'ом в его статье в изд. M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, 1951.

²⁾ В. P. Haigh and J. S. Wilson, Engineering, т. 115, стр. 446, 1923,

«Вестингауз»³⁾. Геометрически подобные консольные опытные образцы, изменявшиеся в диаметре от 2,54 мм до 76,2 мм с выкружкой или с поперечным круглым отверстием, из разных материалов (см. табл. 23), были испытаны на усталость⁴⁾ в специальных испытательных машинах. Результаты этих испытаний для образцов с выкружками даны на рис. 326. Наименьшие диаметры образцов приняты за абсциссы, между тем как ординаты представляют отношения $\alpha_{кл}$ нагрузок при испытании на выносливость гладких образцов к нагрузкам при испытании на выносливость соответствующих образцов с концентратором напряжений. Подобные же результаты были получены для образцов с поперечными отверстиями.

Таблица 23

Материал, использованный Петерсоном при испытаниях на усталость

Сталь	Химический состав, %								Предел выносливости $\sigma_{кл}/\sigma_{т}$	Предел прочности $\sigma_{к}/\sigma_{т}$	Удлинение %
	C	Mn	Si	S	P	Ni	Cr	Mo			
Среднеуглеродистая ¹⁾	0,45	0,79	0,18	0,03	0,013	—	—	—	2300	5340	32
Молибдено-никелевая ²⁾	0,52	0,68	0,19	—	0,014	2,96	—	0,38	3200	6800	26
Хромо-никелевая ³⁾	0,45	0,65	—	—	—	1,38	0,64	—	6300	8400	24

¹⁾ Нормализованная: 849° С, охлажденная на воздухе.

²⁾ Нормализованная и подвергнутая выжигке: 954° С, охлажденная на воздухе; 793° С, охлажденная на воздухе; 627° С, охлажденная в печи.

³⁾ Закаленная и подвергнутая выжигке: 802° С, закаленная в масле; 649° С, охлажденная в печи.

Горизонтальные линии на рис. 326 дают значения коэффициентов концентрации напряжений, полученные для каждого параметра выкружки при непосредственном измерении деформации в точках наибольшей концентрации напряжений (см. стр. 254). Эти значения обозначаются через $\alpha_{кл}$ и называются в последующем изложении *теоретическими значениями* коэффициентов концентрации напряжений. Если бы усталостная прочность образца зависела только от наибольшего напряжения, то $\alpha_{кл}$ очевидно, было бы равно $\alpha_{ка}$.

⁴⁾ R. E. Peterson, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 79 и 157, 1933 и R. E. Peterson and A. M. Wahl, там же, т. 3, стр. 15, 1936. См. также Отчеты Комитета по исследованию усталости металлов, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 42, стр. 143, 1942 и т. 43, 1943.

⁵⁾ Описание этих машин дано в статье Р. Е. Петерсона, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 29, стр. 371, 1929.

На основании своих испытаний Петерсон пришел к следующим выводам:

1) В некоторых случаях результаты испытания на усталость очень близко согласуются с теоретическими значениями коэффициентов концентрации напряжений. Этот вывод имеет огромное практическое значение, так как существует общее представление, основанное на некоторых ранних опытах, что данные об усталости для случаев концентрации напряжений всегда ниже теоретических значений, и, значит, при проектировании это обеспечивает большой запас прочности.

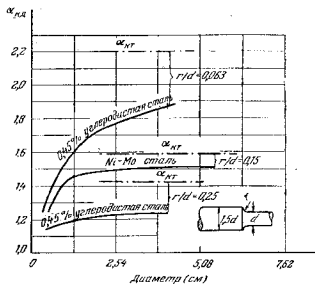


Рис. 326.

2) Результаты испытаний на усталость для стальных сплавов и закаленных углеродистых сталей обычно ближе к теоретическим значениям, чем соответствующие результаты на усталость для углеродистых не закаленных сталей. В этих испытаниях ожидалось, что теоретические значения должны быть достигнуты для всех сталей при том условии, что образцы сделаны достаточно большими, но рис. 326 показывает, что ординаты кривой для нормализованной стали, содержащей 0,45% углерода, очевидно, приближаются асимптотически к значению, лежащему гораздо ниже теоретического.

3) С уменьшением размера образца понижение усталостной прочности при наличии выкружки или отверстия становится несколько меньшим; для очень малых выкружек или отверстий уменьшение

усталостной прочности относительно мало. Это можно ясно видеть из кривых на рис. 326.

Другой путь представления результатов испытания на усталость, имеющей целью показать степень, с которой достигаются теоретические значения, состоит во введении параметра

$$q = \frac{\alpha_{кл} - 1}{\alpha_{кт} - 1}, \quad (a)$$

который называется коэффициентом чувствительности. Когда $\alpha_{кл}$ приближается к значению $\alpha_{кт}$, значение q приближается к единице,

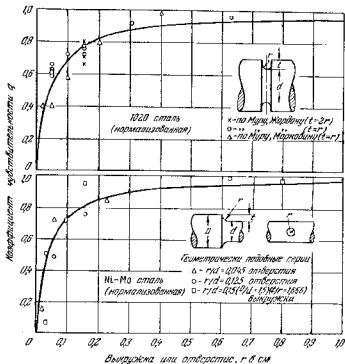


Рис. 327.

когда же концентрация напряжений имеет лишь малое влияние на усталостную прочность, $\alpha_{кл}$ близко к единице и q приближается к нулю. Значения q для некоторых видов концентрации напряжений и для двух родов стали представлены¹⁾ на рис. 327, где радиус

¹⁾ См. книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 411.

выкружки или отверстия принят за абсциссу. Видно, что коэффициент чувствительности неустойчив. Он зависит не только от рода материала, но также и от размеров образцов. В случае легированных сталей и для больших образцов q приближается к единице; в то же время, для крупнозернистой стали, содержащей 0,45% углерода, q приближается к несколько меньшему значению¹⁾.

На основании приведенных рассуждений можно рекомендовать при проектировании частей машин больших размеров применять теоретическое значение $\alpha_{кт}$ концентрации напряжений, как и в случае мелкозернистых сталей, легированных сталей, прошедших термообработку углеродистых сталей. Для частей малых размеров и для крупнозернистых материалов можно принять уменьшенное значение коэффициента концентрации напряжений. Это значение, основанное на выражении (а), будет

$$\alpha_{кд} = q(\alpha_{кт} - 1) + 1. \quad (б)$$

Значения q , полученные опытным путем для выкружек, отверстий и

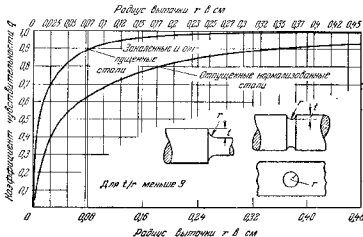


Рис. 328.

выточек, представленные на рис. 328, можно применять как руководящие при выборе надлежащих значений $\alpha_{кд}$ для других случаев концентрации напряжений²⁾.

¹⁾ Испытания чугуна показывают, что концентрация напряжений имеет малое влияние на результаты испытания на усталость; см. A. Thum and H. Ude, Z. Ver. deut. Ing., т. 74, стр. 257, 1930.

²⁾ См. книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 411, и С. Е. Phillips'a and R. В. He y w o o d'a, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), Appl. Mech., т. 163, стр. 113,

Изломы усталости имеют сходство со статическими разрушениями хрупких материалов в том отношении, что они происходят практически без пластической деформации. Трещина начинается у некоторого местного несовершенства и прогрессирует в направлении, нормальном к растягивающим напряжениям. Поэтому логично ожидать, что при испытаниях на усталость¹⁾ можно также применять теорию вероятностей, развитую при изучении разрушения хрупких материалов (см. стр. 331). Согласно этой идее нужно ожидать, что предел выносливости материала будет уменьшаться с увеличением размеров испытываемого образца. Работая над испытаниями на усталость при изгибе, некоторые экспериментаторы заметили уменьшение усталостной прочности с увеличением диаметра образцов²⁾. Гораздо большее влияние размера было выявлено при испытании образцов с различным рода концентрации напряжений, но кажется, что не было еще попытки изучить это явление при помощи теории вероятностей³⁾. Задача становится весьма сложной, потому что объем высоко напряженного материала в таких случаях обычно очень мал, и становится необходимым рассмотреть размер зерна кристаллического материала. Хотя мы говорим о геометрически подобных образцах из одного и того же материала, но очевидно, что их металлографические структуры не являются геометрически подобными, и это обстоятельство имеет влияние на результаты усталостных испытаний. При рассмотрении области наибольших напряжений можно ожидать различных результатов в зависимости от того, мало ли содержится зерен в этой области или в ней их содержится тысячи. Зависимость между коэффициентом чувствительности q , полученным из испытания на усталость, и размерами зерен материала рассмотрена в статье Р. Е. Петерсона⁴⁾.

88. Уменьшение влияния концентрации напряжений на усталость

Можно считать, что вопрос об уменьшении вредного влияния концентрации напряжений является вопросом первостепенного значения для проектировщиков. Некоторое понижение концентрации

1951. Испытания на усталость при кручении валов диаметром 247,7 мм, сделанные Т. W. В и у о n'ом and Н. Н. А t t l'а, Trans. Engrs. Shipbuilders Scot., 1953, показали для коэффициента чувствительности меньшие значения ($q = 2/3$), чем получаемые при испытаниях на изгиб Р. Е. Петерсоном.

¹⁾ См. статью: W. Weibull, Trans. Roy. Inst. Technol. (Stockholm), № 27, 1949.
²⁾ R. E. Peterson, Proc. Am. Soc. Test. Mat. т. 29, стр. 371, 1929; R. Faulhaber, Mitt. Forsch.-Inst. Verein. Stahlwerke (Dortmund), т. 3, стр. 153, 1933 и O. J. H o r g e r and H. R. N e i c f e r t, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 39, 723, 1939.

³⁾ Это явление было рассмотрено Р. Е. Петерсоном, Proc. Am. Soc. Metals, 1948.

⁴⁾ См. Contributions to the Mechanics of Solids, Dedicated to Stephen Timoshenko by His Friends, New York, стр. 179, 1938.

напряжений можно получить, внося подходящие видоизменения в проект. Например, проект может быть значительно улучшен устранением острых выходящих углов и введением выкружек большого радиуса, приданием выкружкам наиболее удобной формы, введением разгружающих выточек и т. д. На рис. 329 показаны приемы уменьшения концентрации напряжений у уступа вала с сохранением при этом линии

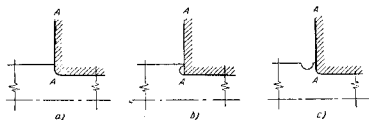


Рис. 329.

контура АА. Напряжение можно уменьшить, вырезав в уступе выкружку возможно большего радиуса и не нарушая целостности насаженного на вал элемента, как показано на рис. 329, б. Если же высота уступа слишком мала, то может быть применена, как показано на рис. 329, с разгружающая выточка.

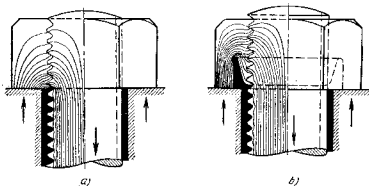


Рис. 330.

На рис. 330 показаны две различные конструкции соединения болта с гайкой. На рис. 330, а гайка испытывает сжатие, в то время как болт испытывает растяжение. Высокая концентрация напряжений имеет место в конце нарезки у поверхности гайки, и под действием переменных усилий разрушение от усталости происходит в этой

плоскости¹⁾. При наличии прокладки (рис. 830, б) наибольшее напряжение иногда ослабляется потому, что прокладка напряжена в том же направлении, что и болт. Испытания на усталость показывают²⁾, что конструкция с прокладкой прочнее приблизительно на 30%.

Иногда эти меры недостаточны для того, чтобы исключить разрушения от усталости. В качестве важного примера рассмотрим типичные разрушения, которые имеют место в подступичных частях локомотивных и железнодорожных вагонных осей, на поверхностях опирания колес или подшипников автомобильных осей, в напрессованных или насаженных сверлах длинных буровых штанг, применяемых при разработке нефтяных скважин. Во всех этих случаях насаженных элементов, подверженных действию переменных усилий, имеется

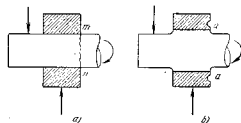


Рис. 331.



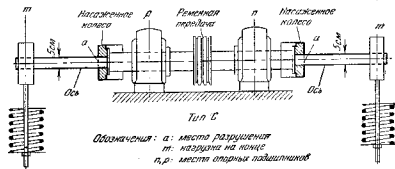
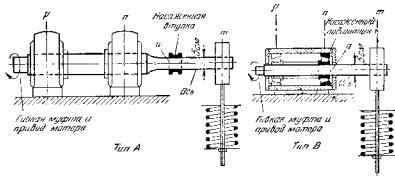
Рис. 332.

постоянный источник разрушения от усталости. Рассматривая, например, случай ступицы колеса, напрессованной на ось (рис. 331, а), мы можем видеть, что высокая концентрация напряжений в сочетании

¹⁾ J. H. Goodier, J. Appl. Mech., т. 62, стр. 11, 1940. См. также M. Heřtěl, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 1, стр. 147, 1943.

²⁾ H. Wiegand, Диссертация, Техническая высшая школа, Dargasadi, 1933. См. также S. M. Arnold, Mech. Engng., т. 63, стр. 497, 1943.

с трением¹⁾ возникает во входящих углах m и n . При вращении оси имеют место знакопеременные напряжения в точках m и n , и в конце концов разрушение от усталости по поперечному сечению может произойти, как намечено на рис. 332. Концентрацию напряжений можно несколько уменьшить утолщением места опирания



Обозначения: a - место разрушения
 m - надрез на конце
 n, p - места опорных подшипников

Рис. 333.

с устройством выкружек, как показано на рис. 331, b . Дальнейшее улучшение получается введением вспомогательной выточки (рис. 331, b). Хотя такие изменения и улучшают положение, в этом случае они недостаточны. Опыт показывает, что при просто напрессованной на ось ступице (рис. 331, a) усталостная прочность оси уменьшается до значения, меньшего половины ее первоначальной прочности, в то время как изменения, показанные на рис. 331, b , повышают усталостную прочность оси, может быть, не более чем на 20%.

¹⁾ Относительно изнашивания от коррозии и усталости см. G. A. Tomlinson, P. L. Thorpe and H. J. Gough, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 141, стр. 233, 1939; см. также O. J. Horgger, Symposium of Fretting Corrosion, Американское общество по испытанию материалов, 1933.

Чтобы улучшить это положение и исключить разрушения от усталости, была успешно применена холодная обкатка поверхности оси в области концентрации напряжений. Первые опыты¹⁾ при условии холодной обработки поверхностей были проведены на малых образцах, поэтому для получения достаточных данных для практических приложений, была выполнена обширная серия лабораторных испытаний с большими образцами. Три типа испытаний на усталость, сделанных О. Д. Хорджером в лаборатории Мичиганского университета²⁾, представлены на рис. 333. Свойства материалов, примененных в этих испытаниях, приведены в табл. 24. Пределы выносливости, полученные для стали S.A.E и для никелевой стали из обычных испытаний на усталость консольных стержней, соответственно были равны 2400 и 3400 $кг/см^2$. После прессовой посадки муфты в испытаниях по типу А (рис. 333) предел выносливости для стали S.A.E уменьшился до 1050 $кг/см^2$. В испытаниях по типам В и С пределы

Таблица 24

Материалы, примененные в испытаниях по рис. 333

Сталь	Химический состав, %							Предел текучести, $кг/см^2$	Предел прочности, $кг/см^2$	Удлинение, %
	C	Mn	P	S	Si	Cr	Ni			
S. A. E. ¹⁾ 1045 2,75% никеля ²⁾	0,47 0,24	0,72 0,86	0,015 0,034	0,034 0,021	0,23 0,24	0,03 —	0,05 2,79	3350 6050	6250 7800	32 23

¹⁾ Нормализованная при 882° С и протянутая при 601° С.

²⁾ Закаленная при 802° С и отпущенная при 621° С.

выносливости были найдены соответственно равными 850 и 990 $кг/см^2$. Это указывает на то, что благодаря прессовой посадке усталостная прочность образцов уменьшилась до значения, меньшего половины ее первоначального значения. Подобные результаты были получены также и для образцов из никелевой стали. Для повышения

¹⁾ Улучшение усталостной прочности холодной обработкой поверхности было предложено O. Föppel's, Stahl u. Eisen, т. 49, стр. 573, 1929. Оно было применено в различных испытаниях на усталость в Институте Векера. См. Mitt. Wöhler-Inst., тт. 1—37, 1929—1940. См. также A. Thum and F. Wunderlich, Mitt. Materialprüfungsanstalt, Tech. Hochschule, Darmstadt, т. 5, 1934 и R. Kühnel, Stahl u. Eisen, т. 110, стр. 39, 1932.

²⁾ Описание этих опытов дано в статьях O. J. Horgger'a, J. Appl. Mech., т. 2, стр. A-128, 1935 и O. J. Horgger'a and J. L. Maubetsch'a, там же, т. 3, стр. A-91, 1936. Работа, проделанная в исследовательской лаборатории Вестингауза, описана в статье Р. Е. Петерсона и А. М. Вала, там же, т. 2, стр. A-1, 1935.

усталостной прочности поверхность образцов была подвергнута перед посадкой муфт или ступиц колес холодной обработке при помощи приспособления, показанного на рис. 334.

Для операции обкатки был применен токарный станок, поддерживавший образцы в своих центрах, поддерживавший и приспособление для обкатки в поперечных салазках, прикрепленных к суппорту токарного станка. Чтобы обеспечить в результате обкатки достаточно гладкую поверхность, были применены подложки, дающие более 40 ходов винта на 1 дюйм.

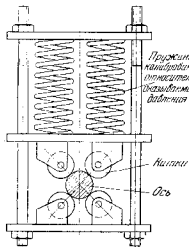


Рис. 334.

Результаты испытаний на усталость по типу С (рис. 333), проделанных с холоднообкатанными образцами, приведены на рис. 335. Видно, что усталостная прочность образцов из стали S.A.E. увеличивалась после обкатки до значения, более чем вдвое превосходящего их первоначальную прочность. Подобные результаты были получены также для образцов на никелевой стали.

Дальнейший шаг в исследовании влияния холодной обкатки на усталостную прочность связан с появлением больших испытательных машин на усталость, в которых могли испытываться локомотивные оси в натуральном виде. Фото на рис. 336 представляет одну из этих машин ¹⁾. Устройство — подобно использованному в испытываемых типа С по рис. 333, притом такое же, какое было применено Вслером в его знаменитых испытаниях на усталость осей. Результаты лабораторных испытаний с образцами больших размеров были настолько многообещающими, что некоторые железные дороги ввели требование обкатки поверхностей осей и других локомотивных частей, как, например, поршневых штоков, шатунов, кривошипов и бандажей ²⁾.

Чтобы получить слой наклепанного (нагартованного) материала достаточной толщины, требовалось значительное давление катка при поверхностной обкатке осей большого диаметра. В случае валов малого

¹⁾ Три машины этого типа использовались в исследовательской лаборатории Timken Roller Bearing Company, Canton, Ohio. Рис. 332 взят из одного из этих испытаний.

²⁾ См. статью O. J. Högger'a, представленную к годовому собранию Американского общества по испытанию металлов, февраль 1946.

диаметра и легких частей машин даже тонкий слой наклепанного металла будет показывать значительное улучшение усталостной прочности. Простым способом выполнения такого наклепа поверхности

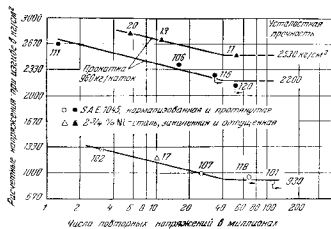


Рис. 335.

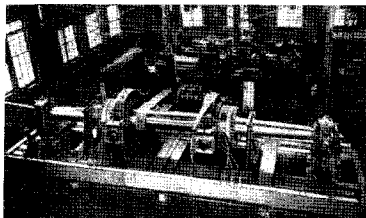


Рис. 336.

является *обдувка струей дробы*. Этот процесс нашел широкое применение в автомобильной промышленности ¹⁾.

¹⁾ См. O. J. Högger and H. R. Neifert, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 2, стр. 178, 1944

89. Разрушение поверхности при усталости

Другой случай разрушения от усталости при действии высокой концентрации напряжений представляет *разрушение поверхности* катков и зубчатых колес под повторным действием контактных давлений во время вращения. Рассматривая два вращающихся катка, прижатых друг к другу силами P (рис. 337), мы можем вычислить наибольшее сжимающее напряжение на поверхности контакта при помощи формул п. 63. В случае идеально гладкой поверхности вычисленное таким образом напряжение является истинным, и поверхностная усталостная прочность катков данного материала будет зависеть только от величины этого напряжения. В действительности поверхность катка имеет различного рода неровности, величина которых зависит от рода обработки поверхности. Несколько примеров обработки поверхности показано ¹⁾ в увеличенном виде на рис. 338. Естественно, шероховатая поверхность будет влиять на распределение давления на поверхности соприкосновения катков (рис. 337). В результате местного перенапряжения у вершин наиболее реактивных неровностей трещины усталости будут появляться раньше, чем в случае гладких катков. Это указывает на то, что усталостная прочность катков зависит от степени шероховатости их поверхности.



Рис. 337.

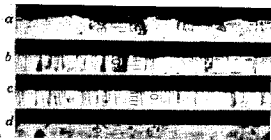


Рис. 338.

Опыты показывают, что если испытания на поверхностную усталость сделаны со смазанными катками, то трещины поверхностной

¹⁾ Этот фотоснимок и два последующих взяты из статьи С. Вэя, представленной собранию Американской ассоциации производителей зубчатых передач, май 1940. Различные методы исследования обработки поверхности описаны С. Вэем в статье, опубликованной в Proc. Special Sumner Conference on Friction and Surface Finish, Массачусетский технологический институт, июнь 1940. Библиография по предмету дана в этой статье.

усталости принимают вид ямок (раковин). *Ямкообразные трещины*, которые иногда развиваются в катках и зубчатых передачах в условиях работы, весьма нежелательны, поэтому значительные усилия были направлены на изучение причин этого явления¹⁾. Эти исследования показали, что причины развития ямкообразных трещин имеют гидродинамическую природу. Ямкообразные трещины принимают направление, уходящее наклонно внутрь металла и приобретает примерно форму конической поверхности. Трещины пересекаются с поверхностью контакта по кривой, имеющей форму параболы или буквы V, причем верх V является частью, которая искрой приходит в контакт при вращении. На рис. 339, показывающем увеличенный вид поверхности катка, начальная точка ямкообразной трещины указана стрелкой. Понятно, что смазка, находящаяся в трещину, будет стремиться удерживаться в ней, когда трещина проходит по нагруженной области. Высокое давление масла в трещине будет вызывать высокие растягивающие напряжения на дне трещины и трещина будет проникать дальше в металл. Так теория объясняет, почему наличие масла способствует росту ямкообразных трещин и почему рост трещины может быть остановлен либо изменением направления вращения, либо уменьшением давления масла в трещине.



Рис. 339.

Чтобы получить сравнительные значения сопротивления ямкообразованию различных материалов, были произведены²⁾ усталостные испытания вращением пар катков (рис. 337). В этих испытаниях один каток был диаметром 40 мм, другой диаметром 38,1 мм, ширина испытанной поверхности была 12,7 мм. Все катки имели чисто отшлифованную поверхность, на которой наибольшая глубина неровностей была между 0,0025 мм и 0,0046 мм. Скорость вращения лежала в пределах 300 — 500 оборотов в минуту, при смазке из ванны машинным маслом, вязкость которого была 700 — 900 секунд по Сейболту при рабочей температуре. Наибольшее

¹⁾ Такие исследования были проделаны С. Вэем в исследовательской лаборатории Westinghouse; см. его статью в J. Appl. Mech., т. 2, 1935.

²⁾ См. статью С. Вэя, там же.

сжимающее напряжение, даваемое формулой (279), стр. 284, вычислялось по сжимающей нагрузке, достаточной для того, чтобы вызвать появление по меньшей мере одной ямки на квадратный дюйм испытываемой поверхности при 10 миллионах циклов; оно было принято за предел усталости при ямкообразовании. Результаты таких испытаний образцов из стали, содержащей 0,45% углерода, для различных

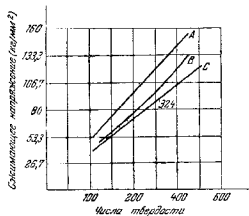


Рис. 340. Сравнение приближенного сопротивления ямкообразованию зубчатых колес и катков.

Кривая A — сжимающее напряжение в зубе колеса в точке зацепления при условии в предположении полноразмерной поверхности зуба и при отсутствии всяких отклонений в контуре, но с учетом вышности и отклонения в шпиге, достаточные для того, чтобы вызвать шесть ямок, т. е. одну ямку примерно на 6 см² площади, заключенной между начальной окружностью и концом зацепления одного зуба. Исследований зуб совещал 100 оборотов.

Кривая B — сжимающее напряжение при соприкосновении катков двух равных диаметров (35,1 мм и 10 мм) с полноразмерной поверхностью, вполне достаточной, чтобы вызвать одну ямку примерно на 6 см² площади за 10⁶ циклов.

условий термообработки представлены на рис. 340 кривой B. Числа твердости¹⁾ катков взяты за абсциссы, а соответствующие пределы ямкообразования — за ординаты. Для сравнения проведена прямая C, которая соответствует пределам ямкообразования, в 324 раза превышающим числа твердости. Так как ямкообразование приводит к разрушению от усталости, мы должны были ожидать, что сопротивление ямкообразованию увеличивается пропорционально твердости. Опыты показали, что предположение о линейной зависимости между сопро-

¹⁾ Числа твердости можно считать пропорциональными пределу прочности поверхностного слоя материала катка.

тивлением ямкообразованию и твердостью является осторожным подходом.

Кривая A на рис. 340 дает значения пределов ямкообразования, найденных из опытов с зубчатыми колесами, сделанными из того же самого материала, что и указанные только что катки. Условия на поверхности соприкосновения зубцов зубчатой передачи несколько отличаются от условий в катках, причем главное отличие заключается в том, что здесь качество соединяется со скольжением. Эта разница условий влечет за собой увеличение предела ямкообразования.

90. Причины усталости

Хотя собрано большое количество данных относительно прочности при усталости материалов, по до сих пор еще не установлена обоснованная теория, объясняющая причины и механизм этого явления. Разрушение от усталости раньше приписывали «кристаллизации» металла, делающей его хрупким. Такая теория выдвигалась на основании рассмотрения внешнего вида разрушения (см. стр. 394). Теперь мы знаем, что отдельные кристаллы остаются неизменными при испытании на усталость, кроме тех, внутри которых произошла деформация скольжения.

Баушингер первым начал исследование действия циклических напряжений. Он медленно нагружал и разгружал образцы и пользовался чувствительными экстензометрами для установления зависимости между напряжениями и деформациями при этих условиях¹⁾. Таким путем он показал, что пределы пропорциональности при растяжении и сжатии не являются постоянными параметрами для данного материала и что они могут изменяться, если образец подвергнет воздействию переменных напряжений. Для объяснения того обстоятельства, что предел выносливости для стали при симметричных циклах напряжений иногда бывает ниже предела пропорциональности, полученного из статических испытаний, Баушингер выдвинул теорию, согласно которой материал, полученный с завода, может иметь свои пределы пропорциональности при растяжении и сжатии, повышенные благодаря холодной обработке, а истинными или *естественными пределами пропорциональности* будут те, которые установятся после того, как материал будет подвергнут действию переменных напряжений. Эти естественные пределы пропорциональности предполагаются определяющими *безопасный диапазон* напряжений при испытаниях на усталость.

Идея Баушингера была развита далее Барстоу²⁾. Пользуясь медленно нагружающей и разгружающей машиной (два цикла в минуту) с зеркальным экстензометром Мартенса, прикрепленным к образцу,

¹⁾ J. Bauschinger, Mitt. Mech.-tech. Lab., München, 1886. См. также Dinglers Polytech. J., т. 268, 1886.

²⁾ L. B. Barstow, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 210, стр. 35, 1911.

он получил зависимость между напряжениями и деформациями для циклов с различными диапазонами напряжений. Рис. 341 представляет некоторые результаты, полученные

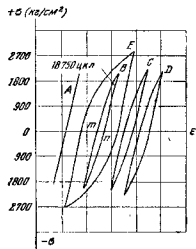


Рис. 341.

Бэрстоу с осевой сталью (предел текучести 3500 кг/см^2 и предел прочности 5900 кг/см^2) при симметричном цикле напряжений (среднее напряжение равно нулю). Линия А изображает первоначальные испытания на растяжение и сжатие с амплитудой 2200 кг/см^2 . В этих пределах зависимость между напряжениями и деформациями следует, как видно, точно прямолинейному закону¹⁾. После этого образец был подвергнут действию знакопеременных напряжений 2200 кг/см^2 , и было обнаружено, что первоначальная прямая линия А постепенно развивалась в петлю определенной формы. Такая петля, полученная после 18 750 циклов, изображена кривой В. Можно видеть, что в этом случае первоначальные пределы пропорциональности были выше так называемых естественных пределов пропорциональности, установившихся после многих циклов знакопеременных напряжений. Так как эти пределы лежат ниже 2200 кг/см^2 , то появилась *циклическая остаточная деформация*, равная ширине *mn*. Петли С, D и E были получены после действия знакопеременных напряжений, соответственно равных 2350, 2650, 3300 кг/см^2 . Число циклов в каждом случае было достаточным для установления постоянных размеров петель. Построив график изменения ширины этих петель в зависимости от соответствующих наибольших напряжений, Бэрстоу получила приблизительно прямую линию. Пересечение этой линии с осью напряжений определяет диапазон напряжений, который не влияет на образование петель. Определенный таким образом диапазон напряжений был принят Бэрстоу за *безопасный диапазон напряжений*, и последующие испытания на выносливость подтверждали это предположение с достаточной точностью. С тех пор на этом основании разрабатывались различные методы для быстрого определения диапазонов напряжений при усталости²⁾.

¹⁾ Расчетная длина в этих испытаниях была лишь 0,5 дюйма, и малый упругий гистерезис не мог быть обнаружен экстензометрами Мартенса.

²⁾ См. книгу: H. J. Gough, *The Fatigue of Metals*, London, гл. 10, 1924. См. также E. Lehr, *Die Abkürzungsverfahren*, диссертация, Stuttgart, 1925.

Измерение петель гистерезиса для определения безопасного диапазона напряжений может быть сделано другим путем, с использованием калориметрических измерений. Площадь петли представляет рассеянную в продолжение одного цикла энергию. Эта энергия преобразуется в теплоту, количество которой может быть измерено. Первые опыты этого рода были произведены Гопкинсоном и Вильямсом³⁾, которые показали, что площади петель, определенные калориметрическим методом, совпадают в пределах 6% с площадями, определенными измерениями при помощи экстензометров. При этих испытаниях было показано также, что возможно установить определенную величину гистерезиса, которая никогда не вызовет разрушения и может быть принята за истинный упругий гистерезис. На базе таких калориметрических измерений было разработано также несколько быстрых способов определения пределов выносливости.

Первая попытка объяснить механизм разрушения при испытаниях на выносливость была сделана Юингом и Хемфри⁴⁾. Они применяли вращающийся образец из шведского железа с полированной поверхностью и исследовали эту поверхность при помощи металлографического микроскопа после приложения симметричных циклов напряжений. Они нашли, что если были приложены напряжения выше определенного предела, то после достаточного числа циклов на поверхности некоторых кристаллов появлялись полосы скольжения. При повторении циклов число полос скольжения увеличивалось, и некоторые из прежних полос скольжения заметно расширялись. Этот процесс расширения продолжался до окончательного образования трещины, которая шла по расширенным полосам скольжения. Они нашли, что знакопеременные напряжения в 850 кг/см^2 можно приложить миллионы раз, не вызывая каких-либо полос скольжения. Напряжение в 1100 кг/см^2 вызывало лишь одну изолированную полосу скольжения после 3 миллионов циклов, и эта линия ограничивалась средней частью кристалла. Из этих испытаний было выведено заключение, что напряжение в 1100 кг/см^2 было пределом выносливости для шведского железа. На основании таких испытаний была выдвинута теория, утверждающая, что циклы напряжений, лежащих выше безопасного предела, вызывают полосы скольжения в отдельных кристаллах. Если продолжать прикладывать такие циклы напряжений, то будет происходить непрерывное скольжение по поверхностям. Скольжение сопровождается трением, подобным наблюдаемому между поверхностями скольжения твердых тел. В результате трения, согласно этой теории, материал постепенно истирается по поверхностям скольжения и образуется трещина.

³⁾ B. Hopkinson and G. T. Williams, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, т. 87, 1912.

⁴⁾ J. A. Ewing and J. C. W. Humphrey, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, A, т. 200, стр. 241, 1903.

Дальнейшие исследования⁴⁾ показали, что полосы скольжения могут возникнуть при напряжениях, значительно меньших предела выносливости материала. Они могут развиваться и расширяться, не вызывая образования трещины. Это указывает на то, что появление полос скольжения не может быть принято за основание для определения предела выносливости и не может объяснить механизм появления трещины усталости.

Чтобы глубже проникнуть в механизм разрушения при испытаниях на усталость, Гаф применил новый метод исследования, используя точную рентгеновскую технику⁵⁾. Начав с образцов монокристалла, он показал, что механизм деформации пластических металлических кристаллов под действием переменных напряжений остается тем же, что и в статических условиях, т. е. скольжение происходит по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенных направлениях и обуславливается величиной составляющей касательного напряжения в направлении скольжения. Рентгеновский анализ показал, что если пиклы были вне безопасного диапазона напряжений, то «кристаллографические плоскости оказывались искаженными в такой мере, что, в то время как их кривизна в среднем была незаметной, все же существовали отдельные местные искривления. Следовало предположить, что большие местные деформации — также, возможно, и действительные разрывы решетки — должны были произойти в таких искривленных плоскостях, которые под приложением достаточно большого диапазона внешних напряжений или деформаций могли повести к образованию прогрессирующей трещины; при более низком значении циклического деформирования состояние могло быть устойчивым».

При проведении опытов с кристаллическими материалами, например с мягкой сталью, предвратительные статические испытания показали, что не происходит постоянного изменения в зернах, если сохраняется упругое состояние. На участке между пределом упругости и пределом текучести на поверхности некоторых неблагоприятно ориентированных зерен появляются линии скольжения. Этими линиями определяются плоскости скольжения кристаллов. Если переменные напряжения, больше предела выносливости материала, приложены к образцу, то слабейшее зерно начинает повреждаться в плоскости скольжения, и тонкая трещина развивается по этой плоскости. Трещина расширяется с числом циклов, распространяясь на смежные зерна, и в конце концов приводит к разрушению образца. Это показывает, что повреждение от усталости начинается в том месте, где происходит пластическое течение, между тем как окружающий материал остается совершенно упругим.

Для изучения деформации в месте, где начинается усталостное повреждение от действия знакопеременных напряжений, рассмотрим снова модель, составленную из трех стержней (рис. 271, стр. 343), которая была использована для пояснения эффекта Баунингера. Предполагая, что действует симметрично знакопеременная сила P , которая больше предела упругости модели, и поспулая, как обычно на стр. 346, мы получаем истло в виде параллелограмма $abcd$ (рис. 342). В предыдущем выводе пластической деформации в вертикальном стержне пренебрегалось и предполагалось, что напряжение предела текучести стержня остается постоянным в течение циклов нагружения. При этом предположении размер пелги оставался постоянным и независимым от числа циклов. Если же принять во внимание наклеп, мы получим совершенно иные результаты. Начиная от точки a , которая определяет начало разгрузки модели, получаем линию ab (рис. 342). Точка b отвечает состоянию, когда вертикальный стержень еще не начал течь, так как его предел текучести несколько повысился из-за предыдущей пластической деформации (участок ea диаграммы). Стержень будет продолжать работать упруго до некоторого более высокого значения нагрузки, например соответственно точке b' диаграммы. Начиная с этого значения нагрузки, вертикальный стержень течет, и мы получим участок $b'c'$ диаграммы. Точка c' соответствует для модели силе P , действующей вверх. Разгружая теперь модель и затем вновь нагружая ее в противоположном направлении, мы найдем, что на графике ход упругой деформации продолжается до некоторой точки d' вследствие наклепа вертикального стержня. Точка d' определяет начало текучести, и мы получаем участок $d'e'$ на диаграмме.

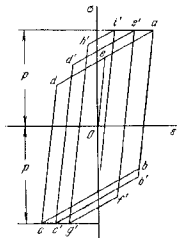


Рис. 342.

Продолжая и дальше циклы нагружения и разгрузки, получим точки f', g', h', i, \dots . Видно, что благодаря наклепу вертикального стержня, который аналогичен слабому месту образца, испытываемого на усталость, пелги гистерезиса становятся все уже и уже с увеличением числа циклов. Это указывает на то, что амплитуда пластической деформации стержня уменьшается с каждым циклом, в то время как амплитуда внешней нагрузки остается постоянной ($\pm P$). В то же самое время амплитуда напряжений в стержне растет с числом циклов

⁴⁾ H. J. Gough and D. Hanson, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 104, 1923.

⁵⁾ Результаты этой работы были представлены Корпусскому авиационному обществу; См. J. Roy. Aeronaut. Soc., август 1936.

и приближается к значению, которое следовало бы получить при действии нагрузки P , приложенной к совершенно упругой модели.

Возвращаясь теперь к рассмотрению слабых мест в образцах, испытываемых на усталость, мы должны разрешить главный вопрос, будет ли зерно, которое пластически деформируется, безопасно соизмеряться прогрессирующему наклепу или же будет начинаться и развиваться трещина усталости. Для того чтобы ответить на этот вопрос, Орован исследовал ¹⁾ наклеп слабого места при переменных напряжениях, используя кривую наклепа, выражающую предел текучести в функции пластической деформации ²⁾. Он рассмотрел два случая, как показано на рис. 343, а и 343, б. В обоих случаях линия OPA

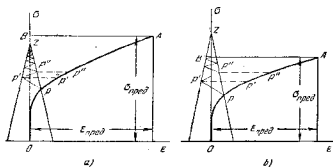


Рис. 343.

представляет кривую наклепа материала. Ордината точки P , соответствующая точке a рис. 312, дает напряжение в слабом месте образца, испытываемого на усталость, в начале первого цикла. Зигзагообразная кривая p, p', p'', \dots отмечает последовательным пластическим деформациям слабого места при ходе циклов внешней нагрузки. Предполагая, что наклеп не зависит от направления деформации, но зависит только от суммы их абсолютных значений в течение циклов, мы определяем наклеп слабого места по точкам p', p'', \dots на кривой OPA наклепа. Мы видим, что в случае на рис. 343, а, где точка Z ниже точки B , даже для неограниченного числа циклов наклеп всегда остается меньше его предельного значения (точка A). Таким образом, мы заключаем, что в этом случае переменная нагрузка является безопасной.

¹⁾ E. Orowan, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 171, стр. 79, 1939.

²⁾ Вследствие переменного направления пластической деформаций эта кривая будет несколько отлична от кривой, полученной при статическом растяжении образца, но эта разница не является существенной в наших дальнейших рассуждениях.

В случае, показанном на рис. 343, б, где точка Z выше точки B , наклеп в слабом месте достигает своего крайнего значения в точке B . С дальнейшим увеличением числа циклов трещина начнет развиваться, и образец разрушится от усталости. Видно, что опасный и безопасный циклы отличаются только положением точки Z . Поэтому предел выносливости будет соответствовать случаю, для которого точка Z совпадает с точкой B . Ордината OZ представит предельное напряжение, к которому близка амплитуда напряжений в слабом месте, когда число циклов возрастает ¹⁾. Это местное напряжение, зависящее от ориентировки слабого зерна, и оно может быть выше чем $\sigma_{\text{пред}}$, вычисленное как среднее напряжение по поперечному сечению образца.

Базируясь на диаграммах рис. 343, Орован сделал некоторые выводы относительно усталостной прочности, которые удовлетворительно согласуются с опытными данными.

1) Так как влияние переменных напряжений зависит только от относительного значения ординат OZ и OB , можно ожидать, что предел выносливости материала связан с пределом прочности и не зависит от таких характеристик, как предел пропорциональности, предел текучести и пластичность.

2) Предполагая, что участок PA (рис. 343) кривой наклепа может быть заменен наклонной прямой, можно показать, что кривая $\sigma - n$ (рис. 312) должна иметь характерную форму, состоящую из наклонной и горизонтальной прямой линии. Может быть также сделана грубая оценка числа циклов, соответствующего точке пересечения этих двух линий (предел выносливости).

3) Влияние среднего напряжения на величину диапазона напряжений можно исследовать также, используя диаграмму, которая подобна представленным на рис. 343.

91. Механические свойства металлов при высоких температурах

Во многих случаях части инженерных конструкций подвергаются одновременно действию напряжений и высоких температур. Такие условия имеют место, например, в силовых установках и в химической промышленности. Вследствие тенденции к непрерывному увеличению начальной температуры пара ²⁾ в силовых установках и в связи с развитием газовых турбин вопрос о прочности материалов при высоких температурах стал важным и практическим, и в этой области было выполнено значительное количество исследовательских работ ³⁾.

¹⁾ Это соответствует амплитуде напряжений в вертикальном зеркале ранее рассмотренной модели.

²⁾ McLeanby and Kerr, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), 1927; H. L. Guv, там же, 1929 и Engineer, т. 147, стр. 186, 1929.

³⁾ О библиографии см. G. V. Smith, Properties of Metals at Elevated Temperatures, New York, 1950. См. также H. J. Tapscott, Creep of Metals, Oxford, 1931.

Опыты показывают, что пределы текучести и прочности металлов при растяжении зависят в значительной степени от температуры.

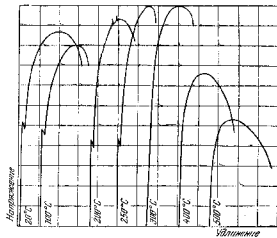


Рис. 344.

Несколько диаграмм, полученных при испытаниях на растяжение средне-углеродистой стали при различных температурах, показано ¹⁾

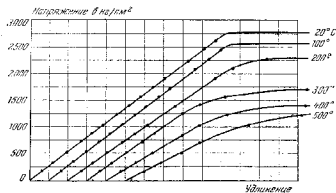


Рис. 345.

на рис. 344. Приблизительно до 250°C предел прочности сталей увеличивается, но с дальнейшим увеличением температуры он быстро

¹⁾ См. доклад о работе, проведенной R. V. Wilhelm'ом в исследовательской лаборатории Вестингауза, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 24, стр. 151, 1924.

падает. С увеличением температуры предел текучести становится менее резко выраженным, и при 300°C его уже нельзя различить на диаграмме. На рис. 345 первые участки тех же диаграмм показаны в увеличенном масштабе. Из рисунка видно, что при увеличении

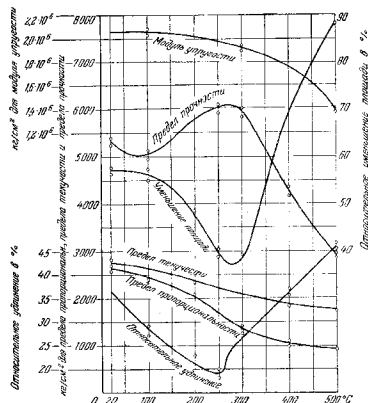


Рис. 346.

температуры предел пропорциональности стали уменьшается. В то же самое время уменьшается угол наклона прямых участков диаграмм и, следовательно, уменьшается модуль упругости. Результаты указанных выше испытаний представлены на рис. 346, который показывает, что, в то время как при возрастании температуры прочность материала уменьшается, его пластичность, характеризуемая увеличением длины и уменьшением площади сечения, увеличивается.

Опыты при высоких температурах показывают, что результаты испытаний на растяжение в значительной степени зависят от продолжительности испытания. При увеличении времени испытания на растяжение нагрузка, необходимая для доведения образца до разрушения, становится все меньше и меньше. На рис. 347 приведены диаграммы испытаний на растяжение для ранее рассмотренной стали при 500°C и при продолжительности испытания, соответственно равной 6 минутам, 70 минутам и 240 минутам. Очевидно, данные испытания на растяжение, полученные из обычных кратковременных испытаний (продолжающихся примерно 15 или 20 минут) и представленные на

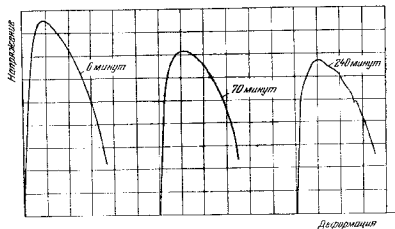


Рис. 347.

рис. 346, полезны лишь для случаев, когда нагрузки действуют только в течение короткого времени¹⁾.

В случае нагрузок, действующих в течение продолжительного периода времени и при высокой температуре, например таких, как вес конструкции или давление пара в силовых установках, мы нуждаемся в дополнительных данных относительно *влияния времени*. Опыты показывают, что при этих условиях может иметь место непрерывная деформация, или *ползучесть*, которую, как весьма важный фактор, необходимо учитывать при проектировании. Хотя по этой проблеме значительное количество исследовательских работ²⁾ было

¹⁾ Чтобы исключить влияние времени при определении модуля упругости, были применены испытания на колебания. См. G. Verge, J. Appl. Mech., т. 2, 1935 и его докторскую диссертацию, Мичиганский университет.

²⁾ О библиографии см. книгу G. V. Smith's, цит. на стр. 431.

выполнено и в еще большем числе выполняется сейчас, все же вопрос о поведении металлов при высокой температуре и продолжительном действии нагрузки не может считаться вполне выясненным.

В большинстве опытов, относящихся к ползучести, исследуют постепенное удлинение материала при длительном растяжении. Образцы, применяемые при испытании на растяжение при высокой температуре, подвергаются действию некоторой постоянной нагрузки и температуры, и при этой нагрузке исследуют *прогрессирующую ползучесть*. Результаты таких опытов для данной температуры и для различных значений нагрузки можно представить кривыми времени — удлинение, как показано на рис. 348¹⁾. Кривая А представляет типичную кривую ползучести для сравнительно высокого напряжения. После приложения нагрузки ползучесть происходит при постепенно уменьшающейся скорости. В точке а имеет место перегиб, и скорость ползучести начинает увеличиваться до тех пор, пока испытуемый образец не разорвется. Кривая В, соответствующая несколько меньшей нагрузке, имеет подобную форму, но вследствие более низких скоростей ползучести для разрушения образца требуется более продолжительное время.

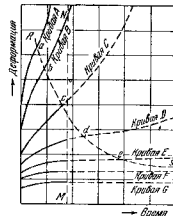


Рис. 348.

Если нагрузку уменьшать дальше, подобные же испытания над различными образцами приводят к кривым С, D, E, F и G. Если напряжение уменьшается, то для достижения точки перегиба на кривой ползучести требуется все больше и больше времени. Для определения точек перегиба для таких кривых, как F и G, потребовалось бы для испытаний чрезвычайно продолжительное время. Видно, что с уменьшением напряжения кривая ползучести, по существу, является прямой на все более продолжительном отрезке времени. Рабочие напряжения, встречающиеся в практике, на графике располагаются обычно ниже кривой С; следовательно, предположение, что кривая ползучести приближается к прямой линии, достаточно точно для практических целей. Наклон этой линии дает *наименьшую скорость ползучести* для данного напряжения и данной температуры. Величина

¹⁾ Рис. 348—353 взяты из статей McVetty, Mechanical Engineering, стр. 149, 1934 и Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 34, 1938.

этой скорости ползучести уменьшается с уменьшением напряжения, но нет убедительного доказательства, что она когда-либо обратится в нуль, т. е. что имеется предельное напряжение, при котором образцы могут бесконечно сопротивляться напряжению при высокой температуре.

При изучении прогрессирующей ползучести, испытывая образцы на растяжение под постоянной нагрузкой и при высокой температуре, нужно иметь в виду два явления: 1) наклеп материала вследствие пластической деформации и 2) устранение этого наклепа или «смягчение» материала вследствие продолжительного действия высокой температуры. Механизм пластического течения при высокой температуре тот же, что и при комнатной температуре. Пластическая деформация вызывается скольжением металла. Это скольжение сопровождается увеличением сопротивления скольжению, которое представляет собой наклеп (стр. 352).

Скорость, с которой влияние наклепа устраняется, зависит от температуры. Ранее было упомянуто (стр. 353), что влияние наклепа можно исключить в короткое время отжигом металла при некоторой особой высокой температуре, зависящей от рода металла. Тот же эффект можно получить при гораздо более низкой температуре, если температура действует в течение продолжительного периода времени. Было показано¹⁾, например, при исследовании

смягчения холоднообработанной меди, что смягчение, произведенное в течение 12 минут при 300° С, потребовало бы 10,4 дни при 200° С и что, видимо, потребовалось бы около 300 лет, чтобы произвести то же смягчение при 100° С.

Кривые время — удлинение (рис. 348) показывают, что в течение начального периода скорость растяжения постепенно уменьшается. Это происходит благодаря наклепу. В точке перегиба устанавливается некоторая постоянная скорость растяжения, при которой наклеп и смягчение нейтрализуют друг друга, т. е. наклеп, вызываемый ползучестью, непрерывно уничтожается смягчающим эффектом высокой температуры. Затем ползучесть продолжается при постоянной скорости, зависящей от величины напряжения и температуры.

¹⁾ См. Pilling and Halliwell, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 25, 1925. См. также R. W. Bailey, J. Inst. Metals, т. 35, 1926.

Так как мы всегда должны учитывать прогрессирующую ползучесть в элементах, подверженных одновременному действию высокой температуры и напряжения, проектирование должно быть основано на допущении некоторой продолжительности службы конструкции, а также некоторой величины допустимой остаточной деформации. Рабочие напряжения должны быть выбраны в каждом частном случае так, чтобы остаточная деформация конструкции в течение ее срока

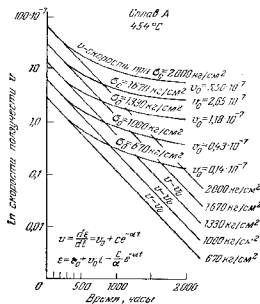


Рис. 350.

службы не превосходила бы определенного предела, зависящего от типа конструкции. Целью испытаний при высоких температурах в течение длительного времени является предоставление проектировщику достаточных сведений для удовлетворительного вычисления остаточных деформаций, обусловленных ползучестью.

Наибольшая продолжительность лабораторных испытаний составляет обычно несколько тысяч часов, и для того чтобы предугадать деформацию ползучести во время срока службы конструкции, необходимо проделать экстраполяцию результатов лабораторных испытаний. Опыты с различными сталями показывают, что в первом участке кривых ползучести на рис. 348 превышение скорости ползучести над наименьшей скоростью ползучести уменьшается геометрически,

при условии, что время нарастает арифметически. Следовательно, обозначая через ϵ неупругое относительное удлинение в некоторый момент времени t , через v — соответствующую скорость ползучести а через v_0 наименьшую скорость ползучести, мы можем для скорости ползучести принять следующее выражение¹⁾:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + ce^{-\alpha t} \quad (a)$$

где c , v_0 и α — постоянные, которые должны быть определены из кривых ползучести. Возьмем, например, кривые ползучести, показанные на рис. 349. Эти кривые были получены путем испытания металла при нескольких значениях напряжения и при постоянной температуре 454°С. Измерив наклон в пяти точках на каждой из этих кривых, мы получаем значение скорости ползучести при пяти различных значениях t и строим кривые, показанные на рис. 350. Горизонтальные асимптоты этих кривых, очевидно, дают значения v_0 для приложенных значений напряжения. Теперь, построив значения

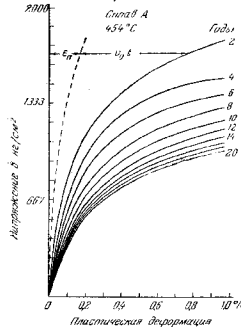


Рис. 351.

$(v - v_0)$ как функцию времени, мы получим систему наклонных параллельных линий, указывающих, что предложенное выражение (a) выбрано удовлетворительно. Значения постоянных c и d в уравнении (a) получаются из этих линий измерением при $t=0$ ординат линий, а также их наклона.

Пластическое относительное удлинение теперь получится путем интегрирования уравнения (a), что дает

$$\epsilon = \epsilon_0 + v_0 t - \frac{c}{\alpha} e^{-\alpha t} \quad (b)$$

где ϵ_0 — постоянная. Применяя это уравнение к тому значению t , для которого пластическое удлинение известно из рис. 349, можем

¹⁾ См. сноску на стр. 435. Для сравнения методов экстраполяции данных испытаний см. J. M. G. P., Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 37, стр. 358, 1937.

вычислить значение ϵ_0 . Следовательно, все постоянные, входящие в уравнение (b), определяются при помощи кривых, представленных на рис. 349 и 350. Мы можем теперь применить это уравнение при вычислении ϵ для любого данного промежутка времени. Этим путем были получены кривые, показанные на рис. 351. Имея такую систему кривых для определенного материала и для определенной температуры, проектировщик может легко выбрать надлежащие значения рабочего напряжения, если даны срок службы сооружения и допустимая пластическая деформация.

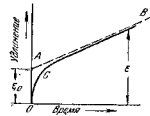


Рис. 352.

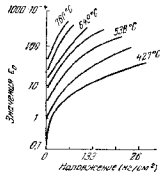


Рис. 353.

При вычислении ϵ для больших значений t мы находим, что последний член в уравнении (b) весьма мал, и им можно пренебречь. Это значит, что вместо кривой, показанной на рис. 352, мы можем воспользоваться пунктирной прямой. В результате значение ϵ будет определяться через величину отрезка ползучести ϵ_0 и наименьшую скорость ползучести v_0 . Опытные значения ϵ_0 можно представить кривыми, подобными показанным на рис. 353, которые были получены для 12%-ной хромистой стали.

Что касается наименьшей скорости ползучести, то опыты показывают, что v_0 можно представить с удовлетворительной точностью степенной функцией напряжения

$$v_0 = kv^n \quad (c)$$

где k и n — постоянные для данного материала и температуры. Значения этих постоянных¹⁾ для некоторых сталей, испытанных в исследовательских лабораториях фирмы «Вестингауз», приведены в табл. 25.

¹⁾ См. Mc Vetty, цит. на стр. 435.

Таблица 25

Значения постоянных k и n

Материал	Температура, °C	k	n
Кованая сталь 0,39% С	400	$16 \cdot 10^{-14}$	0,6
Сталь 0,30% С	400	$48 \cdot 10^{-15}$	0,48
Сталь Ni—Сr—Mo	500	$91 \cdot 10^{-10}$	0,19
Сталь 12%-ная Сг	455	$10 \cdot 10^{-17}$	0,31

В этой таблице k —относительное удлинение и течение 24 часов и n —напряжение в $кг/см^2$. При помощи этих постоянных в различных частных случаях для элементов конструкций можно вычислить деформацию ползучести и распределение напряжений.

В нашем предыдущем изложении предполагалось, что пластическое течение сопровождается наклепом. Опыты показывают, что с

увеличением температуры наклеп становится все менее и менее резко выраженным. Наибольшая температура, при которой наклеп наблюдается, различна для разных материалов и в случае стали меняется в зависимости от состава стали. Например, никакого наклепа не было замечено¹⁾ в мягкой углеродистой стали (0,17% углерода) при напряжениях $155 кг/см^2$ и температуре $647^\circ C$. При таких условиях

кривая время—удлинение имеет вид, представленный на рис. 354, т. е. скорость ползучести постоянно увеличивается с течением времени.

Интересно отметить, что два рода кривых время—удлинение, показанных на рис. 348 и 354, соответствуют различным типам разрушения. Когда имеет место наклеп, текучесть в каком-либо месте образца усиливает сопротивление в этом месте, и поэтому следующее скольжение происходит по некоторому другому поперечному сечению. В результате этого наблюдается равномерное удлинение, и образец остается цилиндрическим до начала образования шейки. Когда наклеп отсутствует, местная текучесть, которая начинается в слабейшем поперечном сечении, распространяется при уменьшающейся скорости к концам образца. В результате две части разорванного образца суживаются в виде конусов от концов к поперечному сечению в месте разрыва.

При выполнении экстраполирования с помощью уравнения (б) предполагается, что величины σ_0 , c и x , характеризующие материал, остаются постоянными в течение срока службы конструкции. Но при

¹⁾ См. Н. J. Tarsell, Creep of Metals, 1931.

продолжительном действии высоких температур сопротивление стали ползучести несколько уменьшается. Чтобы компенсировать это *термическое действие*, иногда рекомендуются лабораторные испытания при температурах выше рабочей температуры¹⁾. Термическое действие больше проявляется в случае высокоуглеродистых сталей. Для того чтобы уменьшить структурное перерождение, необходимо применить подходящую термическую обработку, которая обеспечит структурную устойчивость²⁾.

Прежде чем закончить это рассмотрение, необходимо заметить, что прогрессирующая ползучесть может производить перераспределение напряжений в частях, подвергнутых одновременному действию напряжений и высоких температур. В местах высокой концентрации напряжений скорость ползучести больше, и, следовательно, в результате ползучести будет более благоприятное распределение напряжений. Это обстоятельство нужно учитывать при проектировании. Несколько примеров этого рода разобрано Бэйла³⁾.

92. Изгиб балок при высоких температурах

В этом параграфе мы рассмотрим изгиб призматических балок симметричного поперечного сечения и предположим, что изгибающие

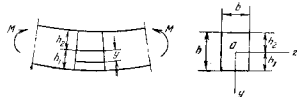


Рис. 355.

силы действуют в плоскости симметрии. Тогда из условий симметрии следует, что изгиб будет происходить в той же плоскости. Наше дальнейшее изложение мы начнем с чистого изгиба (рис. 355) и

¹⁾ См. статью R. W. Bailey, J. Appl. Mech., т. 21, стр. 369, 1954.

²⁾ См. F. H. Nessel and E. J. Larsen, Trans. Am. Inst. Min. Metallurg. Engrs., т. 99, стр. 55, 1932. Влияние продолжительного действия высоких температур на свойства различных сталей разобрано в книге G. V. Smith's, цит. на стр. 431. Случай внутрикristаллического разрушения сталей с высоким сопротивлением ползучести при высоких температурах разобран R. W. Bailey, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 131, стр. 131—349, 1935.

³⁾ R. W. Bailey, там же, 1927 в 1935; Engineering, т. 124, стр. 44, 1927 и т. 129, 1930. См. также C. R. Soderberg, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 131, 1933; G. H. MacCallum и Gh, там же, стр. 87; J. Marin, J. Franklin Inst., т. 226, стр. 645, 1938.

предположим, что при изгибе: 1) поперечные сечения остаются плоскими¹⁾, 2) каждое продольное волокно находится в состоянии простого растяжения или сжатия и 3) уравнение ползучести (уравнение (б) на стр. 438), установившееся для растяжения, также сохраняет свою силу и для сжатия. Обозначим через y расстояния волокон от нейтральной оси и через r — радиус кривизны изогнутой оси; относительным удлинением или укорочением произвольного волокна будет

$$\varepsilon = \frac{y}{r}. \quad (a)$$

При вычислении соответствующего напряжения предполагаем, что протекло значительное время с момента приложения нагрузки. Пренебрегая переходным периодом, представленным на рис. 352 кривой, можно для оценки ползучести воспользоваться выражением (с), стр. 439. В результате получим

$$\varepsilon = \frac{y}{r} = k\sigma^n t \quad (b)$$

$$\sigma = \left(\frac{y}{rk t}\right)^{1/n}. \quad (c)$$

Обозначая через h_1 и h_2 расстояния наиболее удаленных от нейтральной оси волокон, для наибольшего растягивающего или сжимающего напряжений находим значения

$$(\sigma_{\max})_{\text{раст}} = \left(\frac{h_1}{rk t}\right)^{1/n}, \quad (\sigma_{\max})_{\text{сж}} = \left(\frac{h_2}{rk t}\right)^{1/n}. \quad (d)$$

Растягивающее и сжимающее напряжения в расстоянии y от нейтральной оси будут

$$\sigma_{\text{раст}} = (\sigma_{\max})_{\text{раст}} \left(\frac{y}{h_1}\right)^{1/n}, \quad \sigma_{\text{сж}} = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} \left(\frac{y}{h_2}\right)^{1/n}. \quad (e)$$

Для определения положения нейтральной оси и расстояний h_1 и h_2 применим условие статики, которое устанавливает, что сумма растягивающих усилий по нижнему участку поперечного сечения (рис. 355) должна равняться сумме сжимающих усилий по верхнему участку. Этим условием будет

$$(\sigma_{\max})_{\text{раст}} \int_0^{h_1} \left(\frac{y}{h_1}\right)^{1/n} dF = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{h_2}\right)^{1/n} dF. \quad (f)$$

¹⁾ Это предположение удовлетворительно согласуется с опытами; см. G. H. MacCallough, Trans. A. S. M. E., т. 55, стр. 55, 1935; H. J. Gursell, J. Inst. Metals, стр. 387, 1935.

Если ширина поперечного сечения является известной функцией y , можно преобразовать указанные интегралы и получить уравнение для вычисления отношения h_1/h_2 .

Задача упрощается, если поперечное сечение имеет ось симметрии, перпендикулярную к плоскости изгиба. Тогда сразу же заключаем, что эта ось является нейтральной осью поперечного сечения, поскольку при этом условии (f) удовлетворяется. Получая в результате

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}, \quad (\sigma_{\max})_{\text{раст}} = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} = \sigma_{\max} = \left(\frac{h}{2rk t}\right)^{1/n}, \quad (g)$$

для растягивающего и сжимающего напряжений мы можем пользоваться формулой

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}. \quad (h)$$

Для вычисления σ_{\max} воспользуемся уравнением статики, которое устанавливает, что момент внутренних сил, распределенных по поперечному сечению, равняется внешнему изгибающему моменту M . Таким образом, имеем

$$M = 2\sigma_{\max} \int_0^{h/2} \left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n} y dF. \quad (i)$$

Рассмотрим теперь в качестве простого примера случай прямоугольной балки шириной b . В этом случае уравнение (i) дает

$$M = 2b\sigma_{\max} \int_0^{h/2} \left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n} y dy = \frac{n}{2n+1} \frac{bh^2}{2} \sigma_{\max},$$

и мы получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2J} \frac{2n+1}{3n},$$

где J есть момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Подставляя в уравнение (h), для напряжений в любом волокне находим

$$\sigma = \frac{Mh}{2J} \frac{2n+1}{3n} \left(\frac{2y}{h}\right)^{1/n}.$$

На рис. 356 показано распределение напряжений σ для $n=10$ и $n=6$. Видно, что при больших значениях n изменение σ лишь в незначительной степени влияет на напряжения. Для сравнения распределение напряжений при упругом состоянии показано прямой линией OA .

Зная величину σ_{\max} , находим кривизну балки из выражения (d). Если нейтральной осью является ось симметрии площади поперечного сечения, то кривизной будет

$$\frac{1}{r} = \frac{2kt}{h} \cdot \sigma_{\max}^n \quad (j)$$

Когда балка испытывает поперечный изгиб, нормальные напряжения и кривизна в каком-либо поперечном сечении балки будут вычислены путем подстановки значения изгибающего момента M в формулу для чистого изгиба. Таким образом, если нейтральной осью будет ось симметрии, напряжения должны вычисляться при помощи уравнений

(h) и (i), а кривизна найдется из уравнения (j).

Для прямоугольной балки дифференциальным уравнением изогнутой оси будет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2kt}{h} \sigma_{\max}^n = \pm \frac{1}{h} \left(\frac{h}{2l} \right)^n \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n M^n.$$

Это уравнение можно легко проинтегрировать в каждом частном

случае распределения нагрузки, и постоянные интегрирования можно определить из условий на концах балки. Подобным путем можно исследовать изгиб прямоугольной балки при одновременном действии изгиба и растяжения или сжатия¹⁾.

93. Релаксация напряжений

В предыдущих параграфах была рассмотрена ползучесть при постоянной нагрузке. Однако имеются случаи, когда ползучесть происходит при постепенно уменьшающихся силах. Болтовое соединение, подверженное высоким температурам, представляет важный случай этого типа. Затяжкой болтов вызывается значительное первоначальное растягивающее напряжение, но вследствие ползучести напряжение постепенно уменьшается с течением времени. Это явление называется *релаксацией*. Уменьшение первоначальных напряжений в болтах может оказать нежелательное действие, как, например, утечку пара в турбине или в паропроводе при высокой температуре. В этой связи

¹⁾ Этот случай разобран R. W. Bailey, *цит.* на стр. 441.

при изучении явления релаксации¹⁾ была проделана большая теоретическая и экспериментальная работа.

Начнем наше обсуждение этого вопроса с рассмотрения простого случая, когда концы болта удерживаются на неизменном расстоянии друг от друга. Предположим, что затяжкой болта были вызваны первоначальное растягивающее напряжение σ_0 и соответствующая упругая деформация ϵ_0/E . С течением времени растягивающее напряжение и упругое удлинение в болте постепенно уменьшаются из-за ползучести. В то же время будут иметь место пластические деформации. Так как концы болта закреплены, то полное удлинение должно остаться постоянным и равным начальному упругому удлинению. Обозначая через σ растягивающее напряжение в болте в какой-либо момент времени t и через ϵ_n пластическое удлинение вследствие ползучести, мы получаем уравнение

$$\epsilon_n + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (a)$$

В этом уравнении ϵ_n и σ являются функциями времени t . Дифференцируя уравнение (a) по t , получаем

$$\frac{d\epsilon_n}{dt} = - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (b)$$

При решении этого уравнения начнем с предположения, что уравнение (c), стр. 439, для скорости ползучести достаточно точно для нашей задачи. Тогда

$$h\sigma^n = - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt},$$

и мы получаем

$$dt = - \frac{1}{hE} \frac{d\sigma}{\sigma^n}.$$

Интегрирование даст

$$t = \frac{1}{(n-1)hE} \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n-1} \right], \quad (c)$$

и зависимость напряжение-время для болта будет представлена кривой²⁾ на рис. 357. Опыт показывает, что напряжение в болте, предсказываемое этой кривой, является слишком высоким. Болт терит свое первоначальное напряжение в значительно более короткий срок,

¹⁾ Несколько методов решения этой задачи разобрано Н. П. Поповым, *J. Appl. Mech.*, т. 14, стр. A-133, 1947; библиография по предмету дана в этой статье. См. также Г. В. Ноннеет, там же, стр. 352. Об экспериментальном исследовании релаксации напряжений см. A. Nádai and J. Boyd, *Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech.*, стр. 245, 1939.

²⁾ См. J. Martin, *Mechanical Properties of Materials and Design*, стр. 241, 1942.

и прямая AB на рис. 352 не может быть применена с достаточной точностью при решении уравнения (b).

Чтобы получить более удовлетворительный результат, нужно воспользоваться кривой OCB на рис. 352. Тогда скорость ползучести надо задать более общим выражением¹⁾

$$\frac{d\varepsilon_{п}}{dt} = f(\sigma, t). \quad (d)$$

Подставив (d) в уравнение (b), получим

$$f(\sigma, t) = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (e)$$

Это уравнение обычно решается последовательным численным интегрированием («шаг за шагом»). Положив $t=0$ и $\sigma = \sigma_0$, вычислим левую часть уравнения (e). Это дает в некотором масштабе начальный угол наклона кривой релаксации напряжений. Используя эту величину, можно вычислить напряжение σ в момент времени $t = \Delta t$. Подставляя это новое напряжение в уравнение (e), получим значение

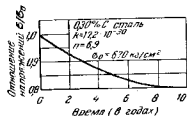


Рис. 357.

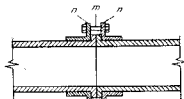


Рис. 358.

угла наклона для момента времени $t = \Delta t$. Вычислим σ для $t = 2\Delta t$ можно сделать следующий шаг, и процесс продолжается. Вычисления, сделанные Поповым, показали, что, следуя этому приему, можно получить кривую релаксации напряжений, которая удовлетворительно согласуется с опытами.

В предыдущем изложении предполагалось, что концы болта были абсолютно неподвижны; но на практике обычно имеется некоторая податливость в закреплениях концов, которая должна быть принята во внимание при вычислении кривых релаксации напряжений. На рис. 358

¹⁾ Несколько видов функции $f(\sigma, t)$ разобрано в вышеупомянутой статье Е. П. Попова. Необходимо заметить, что уравнение (a) стр. 438 для ползучести при постоянном напряжении должно быть изменено при изучении релаксации, в которой материал первоначально имеет высокие напряжения и затем ползет при непрерывно уменьшающемся напряжении.

показано соединение труб при помощи болтов, подверженное высокой температуре. При натяжке фланцев n болтами m будет иметь место упругая деформация. При релаксации эта деформация уменьшается и длина болта увеличивается. Пусть $\beta \sigma/E$ представляет упругую деформацию двух фланцев (на единицу длины между фланцами), вызванную напряжением σ в болтах¹⁾. Тогда при релаксации мы получим вместо уравнения (a) следующее уравнение:

$$\varepsilon_{пб} + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\beta(\sigma_0 - \sigma)}{E} = \varepsilon_{пф}. \quad (f)$$

Последние два члена правой части этого уравнения представляют относительное удлинение болта при релаксации вследствие упругого и пластического изменения расстояния между фланцами. Окончательное уравнение (f) можно написать в следующем виде:

$$\varepsilon_{пб} + \varepsilon_{пф} = \frac{(1 + \beta)(\sigma_0 - \sigma)}{E}.$$

Дифференцируя по t , мы получаем

$$\frac{d\varepsilon_{пб}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{пф}}{dt} = -\frac{1 + \beta}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (g)$$

Для скорости ползучести болта мы опять используем выражение (d). Подобное же выражение можно применить и для скорости ползучести фланцев. Тогда уравнение (g) будет иметь тот же вид, что и уравнение (e), и его можно решить, пользуясь последовательным численным интегрированием. Тогда мы найдем, что благодаря упругости закрепленных концов постепенное уменьшение напряжений в болте происходит гораздо медленнее, чем в случае неподвижных концов.

94. Ползучесть при сложном напряженном состоянии

Было проведено лишь несколько опытов, касающихся ползучести под действием сложных напряжений. Р. В. Бэйли²⁾ при комнатной температуре испытывал свинцовые трубы, подверженные внутреннему давлению и сочетанию внутреннего давления с осевой нагрузкой. Свинец имеет низкую точку плавления, и явление ползучести имеет место при комнатной температуре. Он также исследовал свойства стальных труб при 482°С и 549°С для сочетания осевого растяжения

¹⁾ Для вычисления β должна быть исследована упругая деформация фланцев (см. стр. 120).

²⁾ Всемирная конференция по энергетике, Токио, 1929; Engineering, т. 129, стр. 265—266, 327—329 и 772, 1933.

и кручения. Ф. Л. Эверет¹⁾ испытывал стальные трубы, подверженные кручению при высоких температурах. Такого рода испытание имеет некоторые преимущества по сравнению с обычными испытаниями на растяжение, так как пластическое кручение не оказывает влияния на размеры поперечного сечения образца, а небольшие изменения объема из-за колебаний температуры и преобразования структуры не влияют на измеримый угол закручивания.

При отсутствии дополнительных экспериментальных данных относительно ползучести под действием сложных напряжений необходимо применять результаты испытаний на ползучесть при простом растяжении к решению этих более сложных задач. Такое решение обычно сопровождается допущениями: 1) при пластической деформации направления главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 совпадают с направлениями главных деформаций ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 ; 2) объем материала остается постоянным, так что для малых деформаций имеем

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0, \quad (a)$$

и 3) наибольшие касательные напряжения пропорциональны соответствующим относительным сдвигам. Можно показать, что значения относительного сдвига в плоскостях, делящих пополам углы между главными плоскостями,

будут равны $\epsilon_1 - \epsilon_2$, $\epsilon_2 - \epsilon_3$ и $\epsilon_3 - \epsilon_1$. Этот результат можно получить, если рассмотреть куб (рис. 359), имеющий относительные удлинения ϵ_1 и ϵ_2 в направлениях 1 и 2. Относительный сдвиг γ , соответствующий плоскостям Oa и Oc , найдется из треугольника Oab . Полагая, что $\epsilon_1 > \epsilon_2$, получаем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \epsilon_2}{1 + \epsilon_1},$$

откуда

$$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_2.$$

Подобно этому можно найти относительные сдвиги для двух других плоскостей, делящих пополам углы между главными плоскостями, и тогда предположение 3) принимая следующую форму:

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3} = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{\epsilon_3 + \epsilon_1} = b, \quad (b)$$

где b есть функция σ_1 , σ_2 и σ_3 которая должна быть определена из

опытов¹⁾. Из выражения (a) и (b) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_2 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_3 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Эти выражения подобны зависимостям между напряжениями и деформациями в законе Гука (см. т. I, стр. 64), но они отличаются в двух отношениях. Величина $2b/3$ появляется вместо постоянной $1/E$ и множитель $1/2$ заменяет коэффициент Пуассона.

Чтобы применить уравнения (c) к задаче о ползучести при постоянной скорости, разделим эти уравнения на время t . Пользуясь обозначениями v_1 , v_2 и v_3 для главных скоростей ползучести и обозначая множитель, стоящий перед скобками, через m , мы приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= m \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ v_2 &= m \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ v_3 &= m \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Применяя эти уравнения к простому растяжению, где $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, получаем

$$v = m\sigma. \quad (e)$$

Мы уже установили (см. стр. 439), что в результате опытов скорость ползучести в случае простого растяжения при постоянной температуре можно представить удовлетворительно степенной функцией

$$v = k\sigma^n, \quad (f)$$

где k и n — две постоянные материала. Чтобы привести уравнения (e) и (f) к согласованию, мы должны принять

$$m = k\sigma^{n-1}. \quad (g)$$

Чтобы установить вид функции m для общего случая ползучести, представляемого уравнениями (d), воспользуемся уравнением (296) стр. 378, которое дает зависимость между условием текучести для пространственного напряженного состояния системы и для простого

¹⁾ Trans. A.S.M.E., т. 53, 1931; Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 39, стр. 215—214, 1939. См. также H. J. Gapsell and A. E. Johnson, Engineering, т. 150, 1940.

¹⁾ Указанные выше три предположения являются в сущности теми же, что были приняты пионерами теории пластичности Барре де-Сен-Венаном, Compt. rend., т. 70, стр. 473, 1870 и М. Льви, там же, стр. 1323.

растяжения. Вводя значение эквивалентного напряжения

$$\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (300)$$

в уравнение (g) вместо σ , получаем

$$m = k\sigma_s^{n-1}$$

Тогда уравнения (d) получаются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k\sigma_s^{n-1} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right], \\ v_2 &= k\sigma_s^{n-1} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \right], \\ v_3 &= k\sigma_s^{n-1} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Для простого растяжения ($\sigma_1 = \sigma = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) эти уравнения дают

$$v_1 = k\sigma^n, \quad v_2 = v_3 = -\frac{k\sigma^n}{2}. \quad (h)$$

В общем случае выражения (301) позволяют вычислить скорости ползучести v_1 , v_2 и v_3 путем использования значений k и n , полученных из испытаний на растяжение. Подобные формулы были применены различными авторами¹⁾ при решении задач на ползучесть в случаях сложных напряженных состояний.

95. Частные случаи двумерной ползучести

Применим теперь уравнения (301) к исследованию плосконапряженного состояния и предположим, что

$$\sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 > \sigma_2, \quad \sigma_2/\sigma_1 = \alpha.$$

Из выражения (300) получаем

$$\sigma_s = \sigma_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}$$

и уравнения (301) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k\sigma_1^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} (1 - \alpha/2), \\ v_2 &= k\sigma_1^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} (\alpha - 1/2), \\ v_3 &= -\frac{1}{2} k\sigma_1^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} (1 + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

¹⁾ F. K. G. Odqvist, *Plasticitetsteori*, Proc. Roy. Swed. Inst. Engrg. Research, 1934; R. W. Bailey, *J. Inst. Mech. Engrs.*, т. 131, стр. 131, 1935; C. R. Soderberg, *Trans. A. S. M. E.*, т. 58, стр. 733-744, 1936.

Видно, что выражения для скоростей ползучести в главных направлениях отличаются от выражений для простого растяжения (уравнения (h) п. 94) лишь числовыми коэффициентами. Величина этих коэффициентов может быть легко вычислена, если известны постоянная k материала и отношение α .

Толстые трубы. Если даны допускаемые деформации в главных направлениях во время срока службы конструкции, то допускаемое напряжение σ_1 найдется из уравнений (302). Этим путем можно решить такие задачи, как выбор надлежащей толщины тонкой трубы, подверженной внутреннему давлению совместно с осевой силой или крутящим моментом при высоких температурах. Приняв v_1 в направлении по окружности и v_2 в осевом направлении и предположив, что действует только одно внутреннее давление, мы получим $\alpha = 1/2$ и $v_3 = 0$. Тогда не будет ползучести в осевом направлении, но будет только в направлении по окружности.

Это заключение согласуется с результатами опытов со свинцовыми трубами, проделанных Р. В. Бейли¹⁾.

В случае, когда действует только крутящий момент, главные напряжения численно равны и направлены под углом 45° к оси трубы. В этом случае $\alpha = -1$, и для оценки ползучести по главным направлениям мы получаем

$$v_1 = -v_2 = \frac{3}{2} k\sigma_1^n (3)^{n-1/2}.$$

Здесь мы имеем деформацию чистого сдвига без ползучести трубы в осевом направлении. Таким образом, неосевая ползучесть вызывается либо отдельно действующим крутящим моментом, либо отдельно действующим внутренним давлением. Однако когда действуют одновременно давление и крутящий момент, возникает осевая ползучесть. Чтобы оценить ползучесть для этого случая, мы должны определить в каждой частной задаче величины и направления главных напряжений. Тогда уравнения (302) дадут скорости ползучести в главных направлениях. Осевая и окружная скорости ползучести получатся затем из простых геометрических соображений. Для любого направления, взятого под углом φ к направлению v_1 , скорость ползучести будет

$$v = v_1 \cos^3 \varphi + v_2 \sin^3 \varphi.$$

Вычисленные таким образом значения скоростей ползучести удовлетворительно согласуются с опытами.

Толстые трубы. Ранее мы изучили случаи однородного распределения напряжений. В качестве примера действия неоднородных напряжений рассмотрим толстую трубу под действием внутреннего

¹⁾ Цит. на стр. 447.

давления p (рис. 360). Предполагая, что труба находится в плоском деформированном состоянии, получаем, что осевая деформация ε_z обращается в нуль, и уравнения (301) дают:

$$\left. \begin{aligned} v_t &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right], \\ v_r &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_z) \right], \\ v_z &= 0 = k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r) \right], \end{aligned} \right\} (a)$$

а из последнего уравнения мы заключаем, что

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r). \quad (b)$$

По условию равновесия элемента, показанного на рис. 360, имеем (см. стр. 174)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r. \quad (c)$$

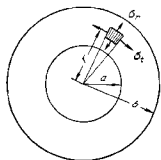


Рис. 360.

Чтобы определить σ_t и σ_r , мы должны рассмотреть деформацию трубы. Обозначая через u радиальные перемещения при расширении трубы, заключаем, что (см. стр. 174)

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

и

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_t).$$

Предполагая, что состояние ползучести установившееся, получаем путем деления на время

$$\frac{dv_t}{dr} = \frac{1}{r}(\nu_r - \nu_t). \quad (d)$$

Подставляя выражения (а) вместо v_t и ν_r , получаем дополнительное уравнение для определения главных напряжений. Это уравнение можно значительно упростить при помощи выражения (b). Тогда эквивалентное растягивающее напряжение получается в виде

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_t - \sigma_r),$$

и из выражения (а) мы находим

$$\nu_t = -\nu_r = k \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} (\sigma_t - \sigma_r)^n. \quad (e)$$

Тогда уравнение (d) принимает такой вид:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t - \sigma_r)^n = -\frac{2}{r}(\sigma_t - \sigma_r)^n,$$

и мы заключаем, что

$$(\sigma_t - \sigma_r)^n = \frac{C}{r^2}, \quad (f)$$

где C — постоянная интегрирования. Теперь уравнение (c) переходит в

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{C}{r^2} \right)^{1/n};$$

после интегрирования получаем

$$\sigma_r = -\frac{n}{2} C_1 r^{-(2/n)} + C_2, \quad (g)$$

где $C_1 = C^{1/n}$.

Постоянные C_1 и C_2 теперь будут определены из условий на внутренней и наружной поверхностях трубы, откуда

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p = -\frac{n}{2} C_1 a^{-(2/n)} + C_2,$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = 0 = -\frac{n}{2} C_1 b^{-(2/n)} + C_2.$$

Из этих уравнений находим

$$C_1 = -\frac{2p}{n(b^{-(2/n)} - a^{-(2/n)})}, \quad C_2 = -\frac{pb^{-(2/n)}}{b^{-(2/n)} - a^{-(2/n)}},$$

и уравнение (g) дает

$$\sigma_r = -p \frac{\left(\frac{b}{r} \right)^{2/n} - 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1}. \quad (h)$$

В результате из уравнения (f) получаем

$$\sigma_t = p \frac{1 + \frac{2-n}{n} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/n}}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1}. \quad (i)$$

Уравнения (b), (h) и (i) дают напряжения в трубе при условиях установившихся скоростей ползучести. Величины скоростей ползучести получаются по уравнению (e), которое приводит к

$$\nu_t = -\nu_r = \frac{1}{2} (3)^{(n+1)/2} k \frac{b^n}{r^2} \left(\frac{1}{n} \right)^n \left[\frac{p}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1} \right]^n.$$

При выводе предполагалось, что температура трубы не изменится с изменением радиуса. В случае теплопередачи через стенки трубы можно поступить подобным же образом¹⁾.

¹⁾ См. Р. В. Бейли, цит. на стр. 447.

В предыдущем изложении было получено простое решение и предположения установившегося состояния ползучести, дающее удовлетворительные результаты при ползучести, которая имеет место после длинного периода действия сил. Если бы мы захотели выяснить, какова ползучесть в результате лишь краткого действия нагрузки, то следует признать, что формулы, выведенные в предположении установившейся ползучести, оказываются здесь неудовлетворительными; мы должны были бы прибегнуть тогда к кривой ползучести по рис. 352, стр. 439. Задача становится сложной, и ползучесть может быть вычислена лишь в процессе последовательных приближений («шаг за шагом»)¹⁾. Такие вычисления показывают, что с увеличением продолжительности действия сил получаемые результаты приближаются к результатам, найденным при установившейся ползучести. При продолжительности действия, равной, может быть, году или более, оба метода вычислений дают приблизительно одни и те же результаты.

Вращающийся диск. В заключение дадим краткое изложение метода расчета на ползучесть последовательными приближениями для случая вращающегося диска²⁾ (рис. 361). Предполагается, что

переменная толщина z диска мала по сравнению с его радиусом, что напряжения σ_r и σ_z равномерно распределены по толщине, а σ_z обращается в нуль. Таким образом, мы имеем плосконапряженное состояние, и для скоростей ползучести можно воспользоваться уравнениями (302). В этих уравнениях $\alpha = \sigma_r/\sigma_t$ теперь является функцией r , т. е. $\alpha = \varphi(r)$. Предполагая, что ползучесть установившаяся и опять обозначая радиальные перемещения через u , мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_t &= \frac{u}{r} = v_t t = k t \sigma_t^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \\ \dot{\epsilon}_r &= \frac{du}{dr} = v_r t = k t \sigma_t^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Условием равновесия элемента, заштрихованного на рис. 361, а (см. стр. 180), будет

$$\frac{d}{dr} (r z \sigma_r) - z \sigma_r + \frac{\gamma \omega^2 r^2 z}{g} = 0,$$

¹⁾ Примеры таких вычислений даны в статье С. R. Soderberg'a, лит. на стр. 441. См. также статью L. F. Coffin'a, Jr., P. R. Shepler'a and G. S. Cherniak'a, J. Appl. Mech., т. 16, стр. 229, 1949.

²⁾ См. Р. В. Бейли, лит. на стр. 447. См. также Е. П. Попов, докторская диссертация, Стенфордский университет, 1946.

и интегрируемем мы получим

$$r z \sigma_r - (r z \sigma_r)_{r=a} = \int_a^r \sigma_z z dr - \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_a^r r^2 z dr. \quad (k)$$

Видно, что если известно распределение напряжений σ_r то значение σ_r для любого значения r можно вычислить по уравнению (k) при условии, что также даны $(\sigma_z)_{r=a}$ и z как функции r .

Применяя метод последовательных приближений, мы начнем с предположения, что σ_r равномерно распределены по диаметральному сечению диска, показанному штриховкой на рис. 361, б. Это среднее значение σ_r получается из уравнения (k) интегрированием от $r = a$ до $r = b$ и дает в первом приближении

$$(\sigma_r)_1 = \frac{1}{F} \left[(r z \sigma_r)_{r=b} - (r z \sigma_r)_{r=a} + \frac{\gamma \omega^2 J}{g} \right], \quad (l)$$

где

$$F = \int_a^b z dr, \quad J = \int_a^b r^2 z dr.$$

Величины $(r z \sigma_r)_{r=b}$ и $(r z \sigma_r)_{r=a}$ можно получить легко в каждом частном случае, так как силы, действующие на внутренней и наружной поверхностях диска, известны.

Имея $(\sigma_r)_1$ из уравнения (l), мы вычислим σ_r как функцию r из уравнения (k) и получаем первое приближение для отношения

$$\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_t}\right)_1 = \alpha_1 = \varphi_1(r).$$

По этим значениям α_1 первое приближение для оценки ползучести получается из первого из уравнений (1), которое дает

$$\left(\frac{u}{r}\right)_1 = k t (\sigma_t)^n (1 - \alpha_1 + \alpha_1^2)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (m)$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем отношение двух уравнений (1)

$$\frac{du}{dr} \frac{r}{u} = \frac{2\alpha_1 - 1}{2 - \alpha_1} = \psi_1(r). \quad (n)$$

Значение $\psi_1(r)$ можно легко вычислить, так как $\alpha_1 = \varphi_1(r)$ уже известно. Тогда из уравнения (n) мы получим

$$\frac{du}{u} = r^{-1} \psi_1(r) dr$$

и интегрированием находим

$$\frac{u}{r} = \frac{(u)_{r=a}}{r} e^{\int_a^r r^{-1} \psi_1(r) dr}.$$

Подставляя в уравнение (m) это значение вместо $(u/r)_1$, получим второе приближение для σ_t

$$(\sigma_t)_2 = \frac{(u)_{r=a}}{r} \frac{e^{\int_a^r r^{-1} \psi_1(r) dr}}{k t (1 - \alpha_1 + \alpha_1^2)^{(n-1)/2} (1 - \alpha_1/2)}. \quad (o)$$

Постоянная $(u)_{r=a}$ найдется из уравнения статики, подобного уравнению (1), что даст

$$\int_a^b (\sigma_r)_{r=a} z dr = (r\sigma_r)_{r=b} - (r\sigma_r)_{r=a} + \frac{\gamma \omega^2 J}{g}.$$

Когда $(u)_{r=a}$ найдется из этого уравнения, величина $(\sigma_r)_{r=a}$ будет вполне определена, и, поступая по-прежнему, мы найдем вторые приближения $(\epsilon_r)_a$, σ_r , $C_2(r)$ и $(u)_{r=a}$ и т. д.

Практика показывает, что процесс быстро сходится, и второй приближение дает удовлетворительные результаты для напряжений и деформаций ползучести. Все вычисления удобно выполнять в табличной форме. После вычисления $(\sigma_r)_a$ по уравнению (1), мы разделим расстояние от $r = a$ до $r = b$, скажем, на десять равных частей. Пользуясь уравнением (1) и интегрированием шаг за шагом, можно составить таблицу значений $(\sigma_r)_a$. Имея эти значения, можно вычислить величины ψ_1 и ψ_2 для каждого значения r , и приготовить таблицу значений ψr . По этим значениям и при помощи уравнения (2) можно для таблицы вычислить значения $(\sigma_r)_a$ и т. д.

96. Рабочие напряжения

Общие соображения. Вопрос о выборе надлежащего коэффициента безопасности при проектировании сооружений и частей машины имеет первоочередное практическое значение. Если этот коэффициент принят слишком низким, в рабочие напряжения слишком высоки, то конструкция в условиях службы может оказаться слабой. С другой стороны, если рабочие напряжения слишком низки, то конструкция получается излишне тяжелой и неэкономичной.

Для выявления различных факторов, учитываемых при выборе рабочих напряжений, возьмем простой пример растяжения призматического стержня. Допустим, что за основание для определения рабочего напряжения принят предел текучести материала; тогда безопасная площадь F поперечного сечения получится из уравнения

$$\frac{\sigma_r}{k} = \frac{P}{F}. \quad (4)$$

Мы видим, что площадь поперечного сечения зависит от величины внешней нагрузки, от предела текучести материала σ_r и от коэффициента безопасности k . Очевидно, величина этого коэффициента, который иногда называется *коэффициентом неопределенности*, зависит от точности, с которой мы знаем внешнюю нагрузку и механические свойства материала, и от точности, с которой это уравнение определяет наибольшее напряжение.

Есть случаи, когда внешние усилия известны с большой точностью. Например, мы знаем точно гидростатическое давление, действующее на плотину, если известна глубина воды. Мы знаем точно центробежные силы, действующие в роторе, имеющем определенную угловую скорость. Но в большинстве случаев силы известны лишь приблизительно, и наиболее неблагоприятное условие нагружения

для конструкции может быть установлено лишь на основании длительного опыта. Рассмотрим, например, расчет моста. Вес самого моста и вес движущегося по мосту поезда могут быть известны с достаточной точностью. Но при проектировании моста необходимо принять во внимание динамические влияния. Из-за галючая противоресонансное давление колеса паровоза на рельсы непостоянно, и наибольшее давление больше статического. Под действием движущихся и меняющихся по величине нагрузок мост будет приведен в состояние колебаний, а при таких условиях задача определения усилий в отдельных стержнях моста становится чрезвычайно сложной. Другой тип действующих на мост сил, которых мы не знаем точно, это — давление ветра. Величина этих сил обычно устанавливается на основании наблюдений над существующими сооружениями. Из этих рассуждений ясно видно, что если выражение (4) и представляет условие безопасности элемента моста, то известная точно сила P может быть определена лишь с некоторым приближением. Естественно, точность, с которой может быть сделано это определение, будет влиять на величину коэффициента безопасности.

Величина предела текучести σ_r также неизвестна точно. Она может меняться в некоторых пределах для разных образцов из одного и того же материала, а эти изменения зависят от степени однородности материала. Поэтому совершенно естественно, что в случае таких однородных материалов, как сталь, коэффициент безопасности может быть взят более низким, чем в случае таких материалов, как дерево или камень.

При выборе коэффициента безопасности необходимо также учитывать точность самой формулы. Уравнение (4) можно считать очень точным для вычисления напряжений в образце при испытании на растяжение (см. рис. 255, стр. 327), поскольку особые меры предосторожности принимаются для того, чтобы приложить нагрузку центрально и распределить ее равномерно по наиболее слабому поперечному сечению. Но, взяв опять в качестве иллюстрации расчет элемента мостовой фермы моста, можем сказать, что уравнение (4) есть лишь грубое приближение, связанное обычно с допущением, что в узлах имеются идеальные шарниры. Действительное напряженное состояние в таком стержне очень далеко от простого растяжения. Благодаря жестким узловым соединениям стержни мостовой фермы испытывают не только напряжения растяжения или сжатия, но и напряжения изгиба. Соответствующие напряжения от изгиба достигают иногда значительной величины, и если их не принимают во внимание, а для определения площади поперечного сечения пользуются уравнением (4), то неточность уравнения (4) в этом случае обычно компенсируется увеличением коэффициента безопасности.

Из этих рассуждений можно видеть, насколько трудно дать какие-либо определенные указания относительно величин коэффициента

безопасности. Выбор коэффициента всегда зависит от опыта и суждения конструктора.

В последующем изложении будем предполагать, что величины действующих сил установлены опытом и что механические свойства материала известны. Следовательно, дополнительно надо изучить методы оценки влияния различного рода напряженных состояний на выбор рабочих напряжений. Будем считать, что инженер должен так проектировать конструкцию, чтобы во всех ее частях был равный коэффициент безопасности. Очевидно, это требование необходимо всегда выполнять, чтобы проект был экономичным, поскольку пущая способность конструкции определяется сопротивлением ее наиболее слабого места.

Рабочие напряжения для статических условий. Начнем с рассмотрения рабочих напряжений для статических условий, например для случая, когда конструкция подвергается действию постоянной (или почти постоянной) нагрузки. Будем различать два рода материалов: *пластичные материалы*, главным образом различного рода строительные стали, и *хрупкие материалы*, такие, как чугун, камни и бетон.

В случае *пластичных материалов* за основание для выбора рабочих напряжений обычно принимается предел текучести σ_T , так как большие деформации, которые имеют место при текучести, недопустимы в инженерных конструкциях. Если известен у материала предел текучести σ_T , коэффициент безопасности при простом растяжении или сжатии будет¹⁾

$$k = \sigma_T / [\sigma]. \quad (b)$$

Допускаемое напряжение $[\sigma]$, принимаемое за номинальное, вычисляется при помощи выражения (a). Концентрация напряжений, вызываемая отверстиями или выточками, обычно не учитывается на том основании, что благодаря пластической деформации напряжения стремятся выравниваться в местах наибольших напряжений. Такое предположение справедливо лишь до тех пор, пока нагрузки приложены статически. В случае ударного действия нужно учитывать свойства хрупкости стержней, имеющих глубокие выточки и резкие изменения поперечного сечения (см. стр. 362).

Для общего случая однородного распределения напряжений воспользуемся эквивалентным напряжением, определяемым по формуле (300), стр. 450, а коэффициент безопасности найдем из условия

$$k = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}. \quad (c)$$

¹⁾ Здесь предполагается, что σ_T один и тот же при растяжении и сжатии. Для материалов, которые не имеют ясно выраженного предела текучести, растягивающее напряжение, при котором остаточная деформация достигает значения 0,2%, обычно принимается за σ_T .

Для плосконапряженного состояния, используя обозначение $\sigma_2/\sigma_1 = \alpha$, получим

$$k = \frac{\sigma_T}{[\sigma] \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}. \quad (d)$$

В частном случае чистого сдвига $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, $\alpha = -1$ находим

$$k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3} [\tau]}. \quad (e)$$

В случае неоднородного распределения напряжений, как, например, при изгибе или кручении, мы должны принять во внимание то обстоятельство, что начало текучести в области наибольших напряжений не влечет за собой большой деформации всей конструкции. Чтобы получить большую деформацию, эквивалентную деформации призматического стержня при растягивающем напряжении, равном σ_T , мы должны принять более высокие нагрузки, чем те, при которых σ_{\max} достигает значения σ_T . Возьмем, например, изгиб прямоугольной балки. При нагружении балки, если наибольшее напряжение в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси, достигает значения σ_T , опасной пластической деформации балки не происходит. Чтобы получить условия, эквивалентные наблюдаемым в стержне, растянутом напряжением σ_T , мы должны приложить изгибающий момент, на 50% больший того, при котором σ_{\max} только достигает значения σ_T (см. стр. 191). Принимая во внимание этот факт, запишем уравнение для вычисления *коэффициента безопасности при изгибе* в таком виде:

$$k = \frac{\beta \sigma_T}{[\sigma]}, \quad (f)$$

где β — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Он равен 1,5 для прямоугольных балок, 1,3 — для тонкостенных круглых труб ($d_{\text{вн}}/d_{\text{вн}} = 0,95$) и зависит от размеров поперечного сечения в случае двутавровых балок (см. стр. 290).

Подобные соображения применимы также в случае *кручения*; уравнение для коэффициента безопасности в этом случае будет

$$k = \frac{\beta_1 \sigma_T}{\sqrt{3} [\tau]}. \quad (g)$$

Для сплошных круглых валов $\beta_1 = 1,33$ (см. стр. 318). Для тонких круглых труб β_1 приближается к значению единица, и формула (g) совпадает с формулой (e).

Для случая совместного действия однородных нормальных и касательных напряжений иногда вместо формулы (d) применяется формула (298), стр. 378. Это дает

$$k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}. \quad (h)$$

При выводе формулы для k в случае одновременного действия изгиба и кручения мы должны видоизменить формулу (h) таким же образом, как это сделано при выводе формул (f) и (g). Тогда получим

$$k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 + 3 \left(\frac{\tau}{\beta_1}\right)^2}} \quad (i)$$

Если τ обращается в нуль, то эта формула совпадает с формулой (f); если же нормальное напряжение обращается в нуль, то она совпадает с формулой (g).

В вышеприведенных рассуждениях предполагалось, что принцип наложения сохраняет свою силу; это означает, что наибольшее напряжение пропорционально нагрузке. Следовательно, коэффициент k , который применялся при определении рабочего напряжения, должен быть также связан и с внешней нагрузкой. Тогда мы можем утверждать, что текучесть в конструкции начинается под действием нагрузки, которая в k раз больше действительно безопасной нагрузки. Если принцип наложения несправедлив, то необходимо отнести коэффициент безопасности лишь к нагрузке и определять размеры конструкции из условия, что текучесть начинается, если только действующая нагрузка увеличится в k раз. Применение этого приема к случаю одновременного действия изгиба и растяжения — сжатия было рассмотрено в п. 4 (см. стр. 33). Этот метод рекомендуется также для расчета колонн на основе предполагаемых неточностей (т. I, стр. 232).

В случае *хрупких материалов* за основание для выбора рабочих напряжений берется предел прочности при растяжении и сжатии. При этом должны быть приняты во внимание местные наибольшие напряжения, которые имеют место у выточек и отверстий. Номинальные напряжения, полученные из элементарных формул, должны быть умножены на теоретический коэффициент концентрации напряжений¹⁾. Опыты с чугуном не показывают ослабления влияния выточек и отверстий так резко, как указывает теоретический коэффициент. Причина этого кроется в неоднородном характере чугуна. Различные включения и трещины, которые всегда имеют место в чугуне, увеличивают напряжения, но дополнительные наибольшие напряжения, обусловленные выточками и отверстиями, не понижают существенно прочности материала. Введение коэффициентов концентрации напряжений при проектировании чугунных конструкций оправдывается как компенсация понижения сопротивления материала незначительным толчкам, так как возможность возникновения напряжений от удара при перевозке и установке всегда должна быть предусмотрена. Тогда формулы для вычисления коэффициентов безопасности при растяжении и

сжатии будут

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{\alpha_k [\sigma]_{\text{рост}}}, \quad k = \frac{\sigma_{\text{пр.сж}}}{\alpha_k [\sigma]_{\text{сж}}}, \quad (j)$$

в которых $\sigma_{\text{пр.рост}}$ и $\sigma_{\text{пр.сж}}$ — пределы прочности соответственно при растяжении и сжатии. Эти формулы можно также применять и для изгиба.

Для случая *сложного напряженного состояния* в хрупких материалах воспользуемся теорией Мора (см. стр. 380). Если σ_{max} и σ_{min} оба одного и того же знака, то при вычислении k мы должны применить формулы (j). Если σ_{max} и σ_{min} противоположных знаков, применим формулу (h) стр. 382. Обозначая $\sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{max}}$ через α , получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\text{max}})_{\text{пр}} &= \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пр.сж}}}{\sigma_{\text{пр.рост}}}}, \\ (\sigma_{\text{min}})_{\text{пр}} &= \frac{\alpha \sigma_{\text{пр.рост}}}{1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Для чистого сдвига $\sigma_{\text{max}} = -\sigma_{\text{min}} = \tau$, $\alpha = -1$ и формулы (k) дают

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{1 + \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}}.$$

Тогда коэффициент безопасности для кручения будет

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{\alpha_{k_1} [\tau] \left(1 + \frac{\sigma_{\text{пр.рост}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}\right)}, \quad (l)$$

где α_{k_1} есть теоретический коэффициент концентрации напряжений при кручении.

Когда действуют одновременно нормальное и касательное напряжения, как в случае сочетания изгиба и кручения, мы имеем (см. т. I, стр. 251)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{1}{2} [\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2}], \\ \sigma_{\text{min}} = \frac{1}{2} [\alpha_k \sigma - \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2}], \quad \alpha = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где α_k и α_{k_1} — теоретические коэффициенты концентрации напряжений для изгиба и кручения. Теперь, пользуясь предельными значениями (формулы (k)) для тех же напряжений, получаем коэффициенты безопасности для главных растягивающего и сжимающего

¹⁾ О коэффициентах концентрации напряжений в различных случаях см. гл. 8. См. также книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 253.

напряжений

$$k = \frac{2\sigma_{\text{пл.расс}}}{[\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\sigma_{k1} \tau)^2}] \left[1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пл.расс}}}{\sigma_{\text{пл.сж}}} \right]},$$

$$k = \frac{2\sigma_{\text{пл.расс}}}{[\alpha_k \sigma - \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\sigma_{k1} \tau)^2}] \left[1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пл.расс}}}{\sigma_{\text{пл.сж}}} \right]} \quad (m)$$

Если $\tau=0$, то эти формулы совпадают с формулами (j), а если $\sigma=0$, то мы получаем формулу (l).

Рабочие напряжения для переменных нагрузок. В случае переменных нагрузок за основание для определения коэффициента безопасности принимают значение предела выносливости σ_r материала. Начиная с рассмотрения пластичных материалов, примем для одноосных напряженных состояний формулу

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_{k2} [\tau]} \quad (n)$$

Так как концентрация напряжений имеет большое влияние на усталостную прочность пластичных материалов, то в формулу (n) вводится коэффициент α_{k2} . Этот коэффициент несколько меньше, чем теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. стр. 413), и может быть получен из результатов испытаний на усталость, приведенных на рис. 327, или может быть вычислен при помощи кривых, представленных на рис. 328.

В случае плосконапряженного состояния предельное значение наибольшего напряжения будет (см. стр. 401).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \quad (o)$$

Пользуясь этим выражением, находим для кручения ($\alpha = -1$)

$$k = \frac{\sigma_r}{\sqrt{3} \alpha_{k2} [\tau]} \quad (p)$$

где α'_{k2} получается из испытаний на усталость при кручении или из кривых, представленных на рис. 328. В случае одновременного действия изгиба и кручения получаем

$$k = \frac{\sigma_r}{\sqrt{(\alpha_{k2} \sigma)^2 + 3(\alpha'_{k2} \tau)^2}} \quad (q)$$

Для $\sigma=0$ эта формула совпадает с формулой (p), а для $\tau=0$ она совпадает с формулой (n).

Для хрупких материалов существуют лишь скудные экспериментальные сведения. Для того чтобы конструкция была в безопасном состоянии, обычно в формулах для вычисления коэффициента без-

опасности применяются полные теоретические коэффициенты концентрации напряжений. Для одноосных напряженных состояний мы в этом случае имеем

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_k [\sigma]} \quad (r)$$

Для кручения, пользуясь теорией Мора, получаем

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_{k1} [\tau] \left(1 + \alpha \frac{\sigma_{\text{пл.расс}}}{\sigma_{\text{пл.сж}}} \right)} \quad (s)$$

Для одновременного действия изгиба и кручения мы имеем

$$k = \frac{2\sigma_r}{[\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\sigma_{k1} \tau)^2}] \left[1 + \alpha \frac{\sigma_{\text{пл.расс}}}{\sigma_{\text{пл.сж}}} \right]} \quad (t)$$

где α есть отношение наименьшей амплитуды двух главных напряжений к наибольшей.

Сочетание переменных и постоянных напряжений. Предельные напряженные состояния в таких случаях определяются кривыми, показанными на рис. 315 и 316.

В дальнейшем обсуждении мы ограничим наше внимание случаем, в котором циклы напряжений накладываются на постоянное растягивающее напряжение: Этот случай, вероятно, один из чаще всего встречающихся в практических приложениях, и в нашем распоряжении имеется достаточное количество экспериментальных сведений.

Начнем со случая *пластичных материалов*; предельные состояния для образцов из стали, содержащей 0,7% углерода, без концентрации напряжений представлены кривыми HCA и DFA на рис. 362. Точкой A определено напряжение $\sigma_{\text{пл.расс}}$. Кривые B_1C_1A и D_1F_1A получены для образцов с *надрезами*. Видно, что благодаря концентрации напряжений диапазон напряжений несколько уменьшается, и то время как среднее напряжение остается неизменным. На основе

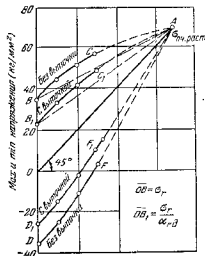


Рис. 362.

таких экспериментальных данных в практике проектирования машин установлено применение коэффициента концентрации напряжений к переменным составляющим напряжений, но не к постоянным.

Также обычно заменяют на практике кривые B_1CA и B_1C_1A прямыми, показанными пунктиром на рис. 362. Для дальнейшего обсуждения мы можем тогда воспользоваться треугольниками OBA и OB_1A по рис. 363, в котором абсциссы дают постоянные составляющие напряжения σ_m , а ординаты дают переменные составляющие σ_a . Так

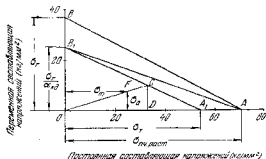


Рис. 363.

как для постоянного напряжения и пластичных материалов напряжение σ_r было ранее принято за основание для выбора допускаемых напряжений, заменяем точку A точкой A_1 , имеющей абсциссой τ_r . Линией B_1A_1 пользуются, чтобы определить предельное напряженное состояние для образца с концентрацией напряжений¹⁾. Если постоянное напряжение на образце задано абсциссой OD (рис. 363), то предельная амплитуда для переменного напряжения дается ординатой DC , и точка C будет представлять предельное напряженное состояние. Соответствующее безопасное состояние будет представлено точкой F с координатами σ_m и σ_a . Эти координаты получаются путем деления координат точки C на коэффициент безопасности k . Из подобия треугольников OB_1A_1 и DCA_1 мы имеем

$$\frac{CD}{\sigma_r/2k} = \frac{DA}{\tau_r} = \frac{\sigma_r - OD}{\tau_r}$$

$$\frac{CD}{\sigma_r/2k} + \frac{OD}{\tau_r} = 1.$$

¹⁾ Эта поправка ведет к увеличению безопасности.

Разделяя это уравнение на k , получим для безопасного напряженного состояния (точка F)

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_r/2k} + \frac{\sigma_m}{\tau_r} = \frac{1}{k}.$$

или

$$k = \frac{1}{\alpha_{кв} \frac{\sigma_a}{\sigma_r} + \frac{\sigma_m}{\tau_r}}. \quad (v)$$

Это — выражение для коэффициента безопасности в случае одноосных напряженных состояний с концентрацией напряжений¹⁾.

В случае сложного напряженного состояния в формулу (v) вместо σ_a и σ_m нужно подставить²⁾ эквивалентные напряжения. Тогда для плоского напряженного состояния получим

$$k = \frac{1}{\left[\alpha_{кв} \frac{(\sigma_1)_2}{\sigma_r} + \frac{(\sigma_1)_m}{\tau_r} \right] \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}. \quad (v)$$

Применяя это выражение к случаю кручения, имеем $\sigma_1 = \tau$, $\alpha = -1$, и пользуясь $\tau_{кв}$ вместо $\sigma_{кв}$, получаем

$$k = \frac{1}{\sqrt{3} \left(\alpha'_{кв} \frac{\tau_a}{\sigma_r} + \frac{\tau_m}{\tau_r} \right)}. \quad (w)$$

Для одновременного действия изгиба и кручения коэффициент безопасности получится из формулы

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(\alpha_{кв} \frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 + 3 \left(\alpha'_{кв} \frac{\tau_a + \tau_m}{\sigma_r} \right)^2}}. \quad (x)$$

Если действует только один изгиб, то τ_a и τ_m обращаются в нуль, и формула совпадает с (u). Когда σ_a и σ_m обращаются в нуль, и формула совпадает с (w). Когда σ_m и τ_m обращаются в нуль, мы имеем симметричный цикл напряжений, и формула совпадает с формулой (q)³⁾.

Для хрупких материалов имеется немного экспериментальных сведений относительно совместного действия сложных переменных и

¹⁾ Так как мы рассматриваем здесь разрушения от усталости, которые происходят без пластической деформации, то можем также пользоваться формулой (u) для изгиба, не выходя коэффициента α , который был применен в формуле (l). Вид формулы (u) для k был предложен С. R. Soderberg'ом, Trans. A.S.M.E., т. 52, АРМ 52-2, 1930.

²⁾ Предполагается, что отношения $\tau_1/\sigma_1; \tau_2/\sigma_2$ остаются постоянными при действии переменных напряжений.

³⁾ Формула (x) применяется также в случаях, где отношение главных напряжений τ_1/σ_2 изменяется на протяжении цикла.

постоянных напряжений. Вводя $\sigma_{нч,раст}$ вместо σ_t и пользуясь теоретическими коэффициентами концентрации α_k и α_{k_1} вместо уменьшенных коэффициентов α_{k_1} и α'_{k_1} для одноосного напряженного состояния получим

$$k = \frac{1}{\alpha_k \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{нч,раст}} \right)} \quad (y)$$

Для кручения, пользуясь теорией Мора, находим

$$k = \frac{1}{\alpha_{k_1} \left(\frac{\tau_a}{\tau_r} + \frac{\tau_m}{\sigma_{нч,раст}} \right) \left(1 + \frac{\sigma_{нч,раст}}{\sigma_{нч,сж}} \right)} \quad (z)$$

В предыдущем изложении предполагалось, что размеры конструкций определяются только из условий прочности. Иногда имеются дополнительные требования, которые должны учитываться при проектировании. Встречаются задачи, для решения которых заранее предписывается предельная деформация, принимаемая за основу при определении размеров. Деформация имеет большое значение в том случае, когда надо учитывать колебания системы. Валы должны иногда удовлетворять требованиям относительно величины угла закручивания на единицу длины.

Проектирование конструкций, подверженных действию высоких температур, должно основываться на предположении об определенной продолжительности срока службы конструкции и определенной величине деформации, которую можно считать допустимой. Рабочие напряжения выбираются так, чтобы деформация конструкции в течение срока ее службы не превосходила определенного предела, зависящего от типа конструкции (см. п. 91).

При проектировании гибких стержней и тонкостенных конструкций, выбирая рабочие напряжения, нужно рассматривать вопрос об упругой устойчивости (см. гл. V).

Проведенное здесь обсуждение позволяет видеть, что выбор рабочих напряжений представляет очень важную и в то же время очень сложную задачу. При установлении коэффициента безопасности k проектировщик должен всегда руководствоваться опытом прошлого. Приведенный анализ, дающий сравнение рабочих напряжений для различных напряженных состояний, не имеет целью заменить использование имеющегося опыта, но он может быть полезным при истолковании этого опыта и при подходе к такому способу проектирования, когда все части конструкции будут одинаково прочными. Полезным может он быть также при сравнении различных проектов и сопоставлении прочности существующих конструкций. Исследование на этой же теоретической основе действительных случаев разрушений является весьма полезным для получения более глубоких знаний о

Механические свойства сталей (напряжения в кг/мм²)

Источники	Химич. состав в %	Термообработка	Предела прочности				Предела текучести	Предела прочности	Относительное удлинение в % на длине $l = 60,8$ мм	Относительное сжатие в %	Предела выносливости	Примечания
			Предела прочности	Предела текучести	Предела прочности	Предела текучести						
1	C = 0,37 Mn = 0,55	Отжиг 850° C Нормализация 850° C Закалка 850° C в воде; отпуск 550° C	25,5	26,5	49,0	32	49	±20,1	49	49	±20,1	Стержень диаметром 57,2 мм
			28,5	29,0	55,7	29	46	±20,5	46	±20,5		
2	C = 0,49 Mn = 0,46	Нормализация 910° C Закалка 790° C в масле; отпуск 480° C	31,4	31,0	64,3	27	40	±23,1	40	±23,1	Стержень квадратного сечения 23,2 мм	
			53,0	55,4	85,6	11,3	51	±44,8	51	±44,8		
1	C = 0,35 Mn = 0,45 Ni = 3,4	Прокатка Отжиг 840° C Нормализация 840° C; отпуск 730° C Закалка 800° C в воде; отпуск 500° C	33,0	42,2	73,6	21	42	±28,7	42	±28,7	Плита 1007 × 610 × 50,8 мм	
			36,5	42,2	73,1	22	49	±31,0	49	±31,0		
1	Ni = 3,4	Нормализация 840° C; отпуск 730° C Закалка 800° C в воде; отпуск 500° C	36,5	39,4	66,0	25	48	±33,2	48	±33,2		
			50,5	54,1	75,2	23	56	±36,4	56	±36,4		

Маркировка	Химический состав в %	Термообработка	Лимиты прочности			Прочность на растяжение	Относительное удлинение в % при длине l = 50,8 мм	Относительное сужение в %	Прочность в кг/см ²	Примечание
			Предел прочности	Предел текучести	Предел пропорциональности					
2	C = 0,24 Mn = 0,37 Ni = 3,3 Cr = 0,87	Отжиг 780° C Закалка 830° C в масле	40,0	42,2	61,2	33	67	±14,3	Образцы 50,8 X 25,4 мм	
			80,5	90,0	97,0	18	62	±4,5		
3	C = 0,30 Mn = 0,56 Ni = 4,3 Cr = 1,4	Воздушная закалка 800° C	31,5	124	171	10,8	37	±71,5	Образцы диаметром 25,6 мм	
1	C = 0,32 Mn = 0,74 Si = 0,32	Литье Отжиг 923° C Нормализация 923° C	14,0	23,6	58,0	26	34	±21,3	Образцы 37,2 X 31,8 мм	
			26,0	29,0	58,0	27	40	±24,5		
			28,5	32,8	56,5	28	46	±24,5		

Источники: 1 - Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse». См. С. Тимошенко и Дж. М. Лес-сезак. Итальянская теория упругости; русский перевод, стр. 342, 1924.

2 - H. E. Moore and T. J. A. P. F. Технический бюллетень Иллинойского университета, № 186, стр. 33.

3 - L. Atchison, Технические стали, стр. 209, 1921.

сопротивления конструкций¹⁾. Сочетая анализ разрушений с теоретическими исследованиями распределения напряжений и с лабораторными исследованиями прочности материалов при различных напряженных состояниях, мы получаем возможность накопить более достоверные знания о действительной прочности конструкций. При наличии таких знаний мы сможем значительно улучшить существующие технические нормы для рабочих напряжений в различных отраслях инженерного дела. Это, без сомнения, повлечет за собой экономию материала и большую надежность сооружений и машин.

¹⁾ В этом отношении такие опубликованные труды, как Technical Reports, British Engine, Boiler, El. Insurance Co. представляют большое практическое значение.