

ВАСИЛИЙ ЗАХАРОВИЧ ВЛАСОВ

(1906 — 1958)

Второе издание книги «Тонкостенные стержни» выходит после смерти ее автора. 7 августа 1958 г. Василий Захарович Власов умер. Строительная механика потеряла одного из самых блестящих своих представителей; инженерное дело лишилось выдающегося инженера, а наука — крупнейшего ученого. Смерть В. З. Власова — тяжелая утрата для мировой науки.

Василий Захарович родился 24 февраля 1906 года в селе Кареево Тарусского района Калужской области. В 1924 году он поступил на геодезический факультет Межевого института, откуда в 1926 году перевелся на инженерно-строительный факультет Московского высшего технического училища (МВТУ). В 1930 году он окончил Высшее инженерно-строительное училище (ВИСУ), которое выделилось из МВТУ, со званием инженера-строителя мостов и конструкций. Тотчас же после окончания ВИСУ (позднее переименованного в Московское Инженерно-строительное училище — МИСИ) он начал преподавать в Училище строительную механику и тогда же начал вести научную работу во Всесоюзном институте сооружений (ныне Центральный научно-исследовательский институт промышленных сооружений — ЦНИПС). В МИСИ Василий Захарович преподавал до конца своих дней, а в ЦНИПСе работал до 1951 года. С 1932 по 1942 год Василий Захарович преподавал в Военно-инженерной академии им. В. В. Куйбышева, а с 1946 г. руководил отделом строительной механики Института механики АН СССР.

В 1937 году за работу «Строительная механика оболочек» (Москва, Стройиздат, 1936), представленную в МИСИ в качестве кандидатской диссертации, Василию Захаровичу присуждается ученая степень доктора технических наук.

В 1943 году Василий Захарович был избран членом Московского математического общества. В 1953 году В. З. Власов избирается членом-корреспондентом АН СССР.

Всю свою научную жизнь В. З. Власов посвятил теории тонкостенных конструкций. Тонкостенная конструкция — это наиболее современный и оптимальный тип конструкции, поскольку именно он позволяет

Власов Василий Захарович.
Тонкостенные упругие стержни.

Редактор *Г. И. Фельдман.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Корректор *И. Л. Елская*

Сдано в набор 5-го 1958 г. Написано в печать 1-го XII 1958 г. Бумага 60×92¹/₂, фан. мел. л. 33,75
— 1-й вид. л. Усл. печ. л. 23,87. Уч.-изд. л. 36,00. Тираж 5 000 экз. Т-11361.
Цена книги 50 р. 35 к. Заказ № 2006.

Государственное издательство физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Центральная Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза. Москва, Ж-54, Валуевский, 28.

спроектировать конструкцию наименьшего веса, но максимальной жесткости; это перекрытие промышленного сооружения, основная балка моста, крыло и фюзеляж самолета, корпус надводного и подводного корабля и ракеты.

Исключительная заслуга В. З. Власова заключается в том, что он сформулировал приближенную теорию оболочек, которая может быть легко использована при расчетах конструкций. Благодаря удачному сочетанию методов математической теории упругости, сопротивления материалов и строительной механики ему удалось получить в теории оболочек предельно простые и четкие результаты.

Главные итоги научных исследований В. З. Власова заключены в его книгах «Тонкостенные упругие стержни» (первое издание, 1940 г.), «Строительная механика тонкостенных пространственных систем» (1949) и «Общая теория оболочек и ее приложения в технике» (1949).

Первая из этих книг удостоена Сталинской премии первой степени 1941 г., а две другие — Сталинской премии второй степени 1950 г. Изданные ранее монографии «Новый метод расчета тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек» (1933) и «Строительная механика оболочек» (1936) по существу представлены в последних двух книгах.

Наиболее существенные результаты получены В. З. Власовым в теории цилиндрических оболочек средней длины, контур которых или криволинейен или очерчен по ломаной линии (складчатые системы). В. З. Власов вводит исключительно простую расчетную модель, в которой оболочка подменяется пространственной системой бесчисленного количества криволинейных арок, соединенных связями, передающими усилия, но не способными воспринять изгибающие и крутящие моменты. Другими словами, оболочка является безмоментной в продольном направлении и может нагибаться в поперечном направлении — в этом и состоит существо работы цилиндрической оболочки средней длины, так тонко выявленное Василием Захаровичем. Последующая проверка гипотез В. З. Власова показала их полную дееспособность.

Расчет цилиндрической оболочки В. З. Власов сводит к расчету дискретно-континуальной системы, что приводит систему дифференциальных уравнений оболочки в частных производных к системе обыкновенных уравнений. Введенный В. З. Власовым вариационный метод приведения дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям имеет самостоятельное значение. В. З. Власов приписывает оболочке конечное число степеней свободы в поперечном направлении и бесконечное число — в продольном. Тогда для поперечного направления расчет элементарен, а для продольного получаются дифференциальные уравнения типа, с которыми обычно имеют дело в строительной механике стержней.

Такие методы разработаны Василием Захаровичем для расчета оболочек и складчатых систем открытого и замкнутого профиля, для расчета цилиндрических оболочек на прочность с одним или несколькими ребрами,

Теория тонкостенных стержней может быть получена из вытекающей теории. Основные особенности расчета тонкостенных конструкций были известны и до В. З. Власова. Было установлено, что техническая теория изгиба балок Эйлера — Бернулли неприменима к тонкостенным стержням вследствие искажения сечений при деформации, что не безразлично характер приложения к торцам статически равноценных нагрузок и т. п. В книге В. З. Власова по тонкостенным стержням постановка задачи и ее решение изложены с максимальной полнотой. Вновь отчетливо дана расчетная модель стержня. В формуле для нормального напряжения, помимо трех обычных членов, фигурирует член, определяемый по закону секториальной площади. Построенная теория позволила дать исчерпывающее решение задачи об изгибно-крутильной форме потери устойчивости и колебаниях тонкостенных упругих стержней, а также развить методы расчета стержней с упругими и жесткими связями и методы расчета стержней при поперечных нагрузках.

Ряд важных результатов получен В. З. Власовым по безмоментной теории оболочек. Он дал способ расчета безмоментных оболочек вращения, а также оболочек с поверхностями второго порядка. В последнем случае В. З. Власов свел задачу к уравнению типа Лапласа. Позднее В. З. Власов рассматривает возможность расчета оболочки по безмоментной теории в связи с ее геометрической изменчивостью, что приводит к выяснению характера краевых задач для исходных уравнений (эллиптических или гиперболических).

В итоговой монографии В. З. Власова «Общая теория оболочек» дан вариант теории оболочек, свободной от кинематических гипотез. Из этой теории, путем введения соответствующих допущений, получается теория тонких оболочек. Весьма важная по своему практическому значению теория пологих оболочек (1944) вытекает как частный случай из общих уравнений симметричного вида и свободных от членов высшего порядка малости. В этой теории кривизна в рассматриваемом куске оболочки считается постоянной, сама оболочка почти плоской, изменения кривизны — зависящими только от перемещений по нормали. Тогда решение задачи сводится к системе двух уравнений четвертого порядка, каждое относительно функции напряжений Эри и нормального прогиба. В. З. Власов применил эти уравнения к расчету устойчивости и колебаний оболочек, к расчету цилиндрических и сферических оболочек.

Не менее важное значение имеют и предложенные В. З. Власовым уравнения нелинейной теории при конечных прогибах, которые позволяют изучить поведение оболочки в закритическом режиме. Как линейные, так и нелинейные уравнения нашли исключительно большое применение к различным частным задачам.

В. З. Власов получил и ряд важных результатов в области теории упругости. Он развил метод начальных функций для решения пространственных задач теории упругости, в частности, для решения задачи о толстой плите. В 1950 году было опубликовано исследование

В. З. Власова «Уравнение неразрывности деформаций в криголинейных координатах».

Трудно переоценить влияние идей и методов В. З. Власова на развитие строительной механики тонкостенных пространственных систем. Тонкая инженерная интуиция, позволяющая ему безошибочно находить главное звено задачи, отбрасывать все второстепенное и строить отчетливую расчетную модель, в основных чертах передающую игру сил в конструкции, и прекрасное владение математическим аппаратом позволяли В. З. Власову получать наглядные, практически используемые результаты. Многочисленные разнообразные исследования, посвященные проверке основных гипотез теории тонкостенных стержней и складчатых систем, теории пологих оболочек, подтвердили их правильность. Результаты, полученные В. З. Власовым, нашли применение почти во всех областях инженерного дела—и в расчете конструкций, и в расчете составных стержней, и в расчете крыла самолета.

Мы потеряли блестящего ученого, замечательного, чуткого, само-бытного и очень трудолюбивого человека.

Э. И. Григolloк

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому изданию	7
Предисловие ко второму изданию	8
Глава I. Теория тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля	9
§ 1. Классификация расчетных схем по пространственному признаку	9
§ 2. Основные гипотезы. Расчетная модель. Изгибное кручение	12
§ 3. Перемещения и деформации. Закон секториальных площадей. Обобщение гипотезы плоских сечений	19
§ 4. Закон плоских сечений—частный случай закона секториальных площадей	30
§ 5. Зависимость между напряжениями и деформациями	36
§ 6. Дифференциальные уравнения равновесия стержня в произвольной системе координат	43
§ 7. Дифференциальные уравнения равновесия стержня в главных координатах	49
§ 8. Обобщенные силы поперечного сечения. Бимомент и его физический смысл	56
§ 9. Центр изгиба	61
Глава II. Методы расчета тонкостенных стержней открытого профиля	67
§ 1. Координаты центра изгиба и секториальные геометрические характеристики для некоторых профилей	67
§ 2. Кручение стержня при действии поперечной нагрузки	86
§ 3. Применение метода начальных параметров к расчету стержней на кручение	91
§ 4. Стержни под действием крутящих моментов, приложенных на концах	105
§ 5. Стержень под действием поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба	109
§ 6. Кручение стержня и определение бимоментов при действии продольной силы, приложенной на конце	123
§ 7. Кручение стержня при действии продольной сдвигающей силы, приложенной в произвольной точке	138
§ 8. О принципе Сен-Венана в теории тонкостенных стержней	152
§ 9. Аналогии с элементарной теорией изгиба балок	160
§ 10. Практический метод расчета складчатых систем и оболочек, усиленных поперечными ребрами	165
§ 11. Стержни и оболочки, поперечные сечения которых обладают только одной степенью свободы	170
§ 12. Изгибное кручение цилиндрической оболочки с длинным прямоугольным вырезом (приближенное решение)	179
§ 13. Экспериментальное подтверждение теории тонкостенных стержней	185
§ 14. Расчет стержней с учетом продольных изгибающих моментов	189
§ 15. Поперечные изгибающие моменты в тонкостенных стержнях	196

Глава III. Тонкостенные стержни-оболочки, усиленные поперечными связями	207
§ 1. Метод пространственного расчета многоопорных конструкций	207
§ 2. Стержни, усиленные планками	211
§ 3. Стержни, усиленные чисто расположенными планками и раскосами	225
§ 4. Стержни, усиленные поперечными диафрагмами	233
§ 5. Кручение стержня в упругой среде	239
§ 6. Совместная работа пластинки и подкрепляющих ее тонкостенных стержней	248
Глава IV. Тонкостенные стержни-оболочки закрытого профиля. Учет деформаций сдвига	253
§ 1. Общий вариационный метод приведения сложных двухмерных задач теории оболочек к одномерным	253
§ 2. Стержень-оболочка с изменяемым прямоугольным профилем	264
§ 3. Расчет оболочки с прямоугольным изменяемым профилем без учета деформаций сдвига	278
§ 4. Расчет стержня-оболочки жесткого прямоугольного профиля с учетом деформаций сдвига	284
§ 5. Пространственные конструкции с жестким профилем, имеющим одну ось симметрии	287
§ 6. Экспериментальная проверка	291
Глава V. Пространственная устойчивость тонкостенных стержней, нагруженных по концам продольными силами и моментами	300
§ 1. Дифференциальные уравнения устойчивости стержня	300
§ 2. Интегрирование уравнений устойчивости для случая, когда концы стержня имеют шарнирные опоры или жесткие заделки	311
§ 3. Центральное сжатие. Исследование корней характеристического уравнения. Обобщение теории Эйлера	313
§ 4. Анализ форм потери устойчивости. Центры вращения	317
§ 5. Расчет центрально сжатого стержня с несимметричным поперечным сечением	319
§ 6. Устойчивость плоской формы изгиба при внецентренном сжатии	322
§ 7. Изостатика критических сил при внецентренном действии их	324
§ 8. Устойчивость плоской формы изгиба стержней при внецентренном растяжении. Круг устойчивости	323
§ 9. Устойчивость прямоугольной полосы	328
§ 10. Устойчивость таврового стержня	330
§ 11. Устойчивость сжатого пояса (коробчатого профиля) железнодорожного моста	331
§ 12. Устойчивость плоской формы изгиба при чистом изгибе	333
§ 13. Определение критических сил в зависимости от условий закрепления концов стержня [68]	335
§ 14. Экспериментальная проверка теории на строительных и авиационных металлических стержнях	343
§ 15. Устойчивость стержней, нагруженных по концам бимоментами	354
Глава VI. Общая теория устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней и балок	357
§ 1. Общие дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба	357
§ 2. Устойчивость стержней при действии продольных сил, распределенных по длине стержня по произвольному закону	371
§ 3. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных балок при действии поперечной нагрузки. Общий случай	374

§ 4. Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки. Обобщение задачи Тимошенко	376
§ 5. Устойчивость плоской формы изгиба стержней с нулевой секторальной жесткостью. Обобщение задачи Прандтля	380
§ 6. Применение метода возможных перемещений к задаче о пространственной устойчивости стержней	386
Глава VII. Равновесие тонкостенных стержней при сложном нагружении	396
§ 1. Изгиб и кручение стержней, испытывающих начальные напряжения	396
§ 2. Изгиб и кручение стержня, предварительно нагруженного продольными силами	401
§ 3. Изгиб и кручение стержней с предварительно напряженной арматурой	405
§ 4. Кручение стержней, испытывающих заданные температурные напряжения	407
§ 5. Устойчивость стержней, испытывающих начальные напряжения	409
Глава VIII. Пространственная устойчивость тонкостенных стержней с упругими и жесткими поперечными связями, распределенными по длине стержня непрерывно	411
§ 1. Устойчивость стержней, находящихся в упругой среде	411
§ 2. Устойчивость стержня при центральном действии продольной силы	412
§ 3. Устойчивость стержня при внецентренном действии продольной силы	417
§ 4. Устойчивость стержней, жестко закрепленных по длине, параллельной оси	421
§ 5. Применение метода возможных перемещений	427
§ 6. Пространственная устойчивость арочных мостов	432
§ 7. Пространственная устойчивость висячих мостов	437
§ 8. Приложение теории к расчету устойчивости крыла самолета	440
§ 9. Устойчивость системы, состоящей из цилиндрической оболочки и подкрепляющих ее стержней [54]	444
Глава IX. Общая теория изгибно-крутильных колебаний и динамической устойчивости тонкостенных стержней и конструкций	448
§ 1. Дифференциальные уравнения свободных колебаний	448
§ 2. Интегрирование уравнений колебаний стержней	452
§ 3. Колебание стержней, нагруженных продольной силой	457
§ 4. Действие нагрузки, меняющейся во времени	462
§ 5. Пространственные изгибно-крутильные колебания висячих мостов	468
§ 6. Свободные колебания и аэродинамическая устойчивость конструкции типа крыла самолета	473
Глава X. Стержни сплошного сечения	480
§ 1. Общая теория. Основные уравнения	480
§ 2. Стержни с двумя осями симметрии	492
§ 3. Стержни с одной осью симметрии	495
§ 4. Замечание о принципе Сен-Венана	502
§ 5. Деформация стержня при растяжении	504
§ 6. Деформация сжато-изогнутой распорной балки	507
Глава XI. Бимоментная теория температурных напряжений	513
§ 1. Основные уравнения	513
§ 2. Температурные напряжения в полубесконечном стержне	517
§ 3. Температурные напряжения в стержне конечной длины	520

Глава XII. Тонкостенные криволинейные стержни, плоские и пространственные	524
§ 1. Изгиб и кручение плоского стержня с круговой осью малой кривизны	524
§ 2. Пространственная устойчивость круговых стержней, арок и торообразных оболочек с жестким профилем. Основные дифференциальные уравнения	531
§ 3. Круговое кольцо под действием радиальной нагрузки. Частные случаи. Обобщение задачи Мориса Леви	532
§ 4. Устойчивость арок, находящихся под действием радиальной нагрузки. Обобщение задачи Тимошенко	535
§ 5. Об устойчивости плоской формы изгиба стержня с круговой осью. Обобщение другой задачи Тимошенко	536
§ 6. Пространственный криволинейный стержень. Закон секториальных площадей для бимоментов	537
Краткий исторический очерк и обзор литературы	544
Литература	555
Предметный указатель	567

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящей книге дается общая теория тонкостенных стержней, широко применяемых в качестве конструктивных элементов в строительном деле, судостроении и авиастроении. По этой теории тонкостенный стержень, имеющий в своем естественном (ненагруженном) состоянии форму цилиндрической оболочки или призматической складки, рассматривается как пространственная пластинчатая биполная система, способная в каждой точке срединной поверхности воспринимать не только осевые (нормальные и сдвигающие) усилия, но также и моменты. В отношении деформаций стержня вместо обычной гипотезы плоских сечений автором принимается другая, более общая и естественная гипотеза о недеформируемости контура поперечного сечения стержня. Эта гипотеза вместе с гипотезой об отсутствии деформации сдвига в срединной поверхности приводит к новому закону распределения по сечению деформаций удлинений, именно к закону секториальных площадей, включающему в себя как частный случай закон плоских сечений и позволяющему определить напряжения в самом общем случае изгибно-крутильных форм равновесия стержня.

Кроме теоретических исследований в настоящем труде приводятся результаты экспериментальных работ по проверке настоящей теории, сделанных в 1938 г. научными сотрудниками ЦНИИС Д. В. Бычковым, Н. Г. Добудоголо, А. Р. Ржаницыным и С. И. Стельмахом. Более подробное изложение экспериментальных работ и практические методы расчета, доведенные до таблиц и графиков, будут опубликованы в подготавливаемом в настоящее время к печати специальном сборнике трудов лаборатории строительной механики ЦНИИС.

Следует отметить, что с рассмотрением тонкостенного стержня как пространственной складчатой системы и изучением изгибно-крутильных форм равновесия автор вынужден был ввести ряд новых терминов, отражающих новые понятия статического и геометрического характера, связанные с законом секториальных площадей. Автор заранее просит извинения у читателя за новую терминологию, которая является весьма условной и далеко не окончательной.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. А. А. Гвоздеву, проф. И. М. Рабиновичу и проф. Н. С. Стрелецкому за весьма ценные замечания и указания, данные ими при ознакомлении с рукописью настоящей книги, а также научным сотрудникам ЦНИИС

Д. В. Бычкову, А. Л. Гольденвейзеру, А. К. Мрощинскому, Ю. В. Рейману и А. Р. Ржаницыну за редактирование рукописи и проверку формул и техникан ЦНИПС Ф. А. Перн и В. П. Сивильной за помощь, оказанную ими при техническом оформлении рукописи.

В. З. Власов

Москва, 1940 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание монографии «Тонкостенные упругие стержни», подготовленное автором спустя 18 лет после выхода в свет первого издания, содержит ряд новых задач сопротивления материалов, строительной механики и прикладной теории упругости. К таким задачам относятся тонкостенные стержни-оболочки открытого профиля, подкрепленные поперечными бимоментными связями, стержни-оболочки закрытого профиля, претерпевающие при деформации наряду с деформацией профиля также и деформацию сдвига, стержни сплошного сечения, бимоментная теория предварительно напряженных стержней, бимоментная теория температурных напряжений, равновесие стержней-оболочек при сложном нагружении, пространственная устойчивость и колебания конструкций типа тонкостенного стержня и др. Все эти задачи разрешены на основе общей бимоментной теории деформации с использованием в статических задачах вариационного метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Изложенная в монографии теория охватывает также элементы конструкций, которые по своим размерам могут быть отнесены к категории стержней.

Более общая теория автора, позволяющая рассчитывать сложные пространственные системы типа цилиндрических и призматических ортотропных оболочек средней длины, изложена в другой нашей монографии «Тонкостенные пространственные системы».

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность В. В. Власову, А. К. Мрощинскому и Ф. А. Перну за большую помощь, оказанную ими при подготовке данной рукописи ко второму изданию.

В. З. Власов

Москва, 1958 г.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ-ОБОЛОЧЕК ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

§ 1. Классификация расчетных схем по пространственному признаку

В современной строительной механике, понимаемой в широком смысле слова, расчетные схемы основных элементов конструкций и сооружений по признаку их пространственной протяженности можно разделить на четыре класса: 1) сплошные тела, 2) пластинки и оболочки, 3) стержни сплошного сечения и 4) тонкостенные стержни.

К первому классу относятся тела, для которых протяженность в пространстве трех измерений по всем направлениям характеризуется величинами одного порядка, например, шар, куб, не слишком длинный эллипсоид или параллелепипед, сплошная увругая среда, заполняющая все пространство или полупространство, различные детали строительных и машиностроительных конструкций, испытывающие напряжения от действия местных нагрузок или температуры. Решение задач об определении напряжений и деформаций в сплошных телах, изложенные точных методов решения этих задач составляет предмет математической теории упругости.

Ко второму классу относятся тонкостенные пространственные системы при условии, что из трех измерений таких систем в пространстве два выражаются величинами одного порядка, а третье, относящееся к толщине конструкции, представляет собою малую величину относительно первых двух. Примером таких систем являются пластины, тонкие шиты (круглые, прямоугольные, трапециевидные и др.), оболочки, обрисованные по какой-либо заданной поверхности (цилиндрические, конические, сферические, эллиптические, гиперболические и др.), вообще тонкостенные конструкции, широко применяемые в строительном деле, авиации, судостроении, приборостроении и в других областях техники.

Общая теория пластинок и оболочек, включающая вопросы прочности, устойчивости и колебаний, основана на геометрических гипотезах, справедливых с известной степенью приближения для тонких деформируемых тел. Точные и приближенные методы расчета пластинок и оболочек составляют содержание нового, весьма обширного

спитетического раздела строительной механики, который может быть назван строительной механикой тонкостенных пространственных систем.

К третьему классу мы относим тела, имеющие форму брусков. Пространственная протяженность таких тел характеризуется тем, что из трех измерений два выражаются величинами, «мало отличающимися друг от друга, а третье по отношению к первым двум представляет собою большую величину. Такие тела мы называем стержнями сплошного сечения. В частности, если тело имеет форму длинного параллелепипеда, то оно может рассматриваться как стержень сплошного сечения при условии, что два основных размера стержня в плоскости его поперечного сечения (ширина и высота прямоугольника) не слишком сильно отличаются друг от друга.

При рассмотрении явлений изгиба и растяжения стержней сплошного сечения этот основной признак пространственной протяженности тел третьего класса позволяет ввести ряд дополнительных геометрических гипотез. Гипотезы, определяющие упрощенную расчетную модель стержня, заключаются, по существу, в том, что из шести компонентов тензора деформации стержня как пространственного тела при поперечном изгибе и продольном растяжении сохраняется только деформация удлинения в направлении, параллельном оси стержня. Остальные пять компонентов тензора деформации принимаются равными нулю. Следствием этих чисто геометрических гипотез является, как нетрудно показать, закон плоских сечений, лежащий в основе элементарной теории изгиба балок. Согласно этому закону поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

При рассмотрении явления кручения исходят из так называемой теории чистого кручения, основанной на гипотезах об отсутствии деформаций удлинений и сдвига в плоскости поперечного сечения и деформаций удлинений в продольном направлении. Эта теория позволяет определять в стержне одни только касательные напряжения, возникающие на площадках поперечного сечения стержня.

Элементарная теория растяжения (сжатия), изгиба и чистого кручения составляет общую техническую теорию стержней сплошного сечения, основанную, по существу, на применении к таким стержням принципа Сен-Венана. Согласно этому принципу и указанным гипотезам внутренние силы поперечного сечения стержня в самом общем случае упругой деформации стержня приводятся к одной равнодействующей, определяемой как вектор в пространстве тремя компонентами силы и тремя компонентами момента. Замена этой равнодействующей какой-либо другой системой сил, статически ей эквивалентной, не сопровождается изменением напряженного и деформированного состояния расчетной модели, принимаемой для стержня сплошного сечения.

К расчетным схемам третьего класса относятся и всякого рода стержневые системы (плоские, пространственные, статически определимые и статически неопределимые), элементами которых являются стержни, работающие при изгибе по закону плоских сечений и при

кручении по теории чистого кручения, т. е. в основном стержни сплошного сечения. Теория и методы расчета таких систем, по существу, и составляют содержание старых курсов строительной механики стержневых систем.

К четвертому классу расчетных схем элементов конструкций и сооружений относятся тела, представляющие собой длинные призматические или цилиндрические оболочки, характеризующиеся тем, что протяженность их в пространстве по всем трем основным измерениям выражается величинами разных порядков: толщина оболочки представляет собой малую величину по сравнению с каким-либо характерным размером поперечного сечения, а этот размер должен быть малым по сравнению с длиной оболочки. Такие тела автором названы *тонкостенными стержнями*. Примером тонкостенных стержней являются широко применяемые в строительных конструкциях металлические прокатные, сварные или клепаные балки, колонны, отдельные элементы ферм и рам и т. д. Многие строительные сооружения, работающие как пространственные системы, по своим относительным размерам могут быть отнесены к конструкциям типа тонкостенных стержней. К таким сооружениям, в частности, относятся некоторые типы балочных и арочных мостов с достаточно жесткими поперечными связями, висячие мосты с проезжей частью корытного или двутаврового профиля, конструкции длинных железобетонных ребристых, цилиндрических и призматических сводов-оболочек, бункеров, трубопроводов и т. д. В авиации и в судостроении к тонкостенным стержням следует отнести металлические стрингеры, шпангоуты, отдельные элементы конструкции самолета, корабля.

Специфическая особенность тонкостенных стержней состоит в том, что эти стержни, как пространственные системы типа оболочек, могут при кручении испытывать деформации продольных удлинений, а следовательно, и пропорциональные этим деформациям продольные нормальные напряжения, возникающие вследствие относительной деформации сечения, могут достигать весьма больших значений в тонкостенных стержнях открытого (жесткого или деформируемого) профиля, а также и в стержнях закрытого деформируемого профиля.

В заключение отметим, что изложенная здесь классификация элементов конструкций и сооружений по пространственному признаку, несмотря на выделение пространственных систем типа тонкостенных стержней в новый самостоятельный класс, является далеко не исчерпывающей *).

*: В курсах строительной механики основные расчетные схемы конструкций и сооружений по пространственному признаку обычно делятся на следующие три класса: 1) сплошные тела; 2) пластинки и оболочки; 3) стержни и стержневые системы. К последнему классу с давних пор безоговорочно относят также и тела, называемые нами тонкостенными стержнями и состав-

Эта классификация скорее носит качественный характер, определяемый гипотезами, лежащими в основе расчетных схем каждого класса.

Резкой границы между расчетными схемами описанных выше элементов конструкций указать нельзя. Одна и та же конструкция, в зависимости от условий ее работы под внешней нагрузкой, характера задачи строительной механики, относящейся к этой конструкции, степени точности, предъявляемой к расчету, может быть перенесена из одного класса в другой. Так, например, тонкостенный стержень, обладающий в поперечном сечении жестким закрытым профилем, при изгибном кручении во многих случаях может быть отнесен к категории стержней сплошного сечения. Возникающие в таком стержне дополнительные продольные нормальные напряжения носят местный характер и в соответствии с принципом Сен-Венана по длине стержня затухают весьма быстро. Если же тонкостенный стержень в поперечном сечении обладает закрытым гибким (деформируемым) профилем, то такой стержень следует рассматривать как тонкостенную пространственную систему типа длинной цилиндрической или призматической оболочки и учитывать в нем дополнительные напряжения, связанные с деформацией сечения и обусловленные деформацией изгиба стержня-оболочки в поперечном направлении.

Точно так же при решении некоторых специальных задач по теории стержней сплошного сечения приходится учитывать дополнительные факторы, связанные с деформацией таких стержней, и пользоваться, по существу, вариационными методами теории тонкостенных стержней, распространяя и обобщая эти методы в своей физической концепции на стержни сплошного сечения. К таким задачам относятся, например, задача о напряжениях и деформациях рельса, балки прямоугольного сечения, балок и плит, лежащих на упругом основании и др.

§ 2. Основные гипотезы. Расчетная модель. Изгибное кручение

1. Общая теория тонкостенных стержней, обладающих в поперечном сечении открытым жестким или закрытым деформируемым профилем, была разработана автором на основе данной им ранее общей технической теории ортотропных цилиндрических и призматических полубезмоментных оболочек.

Рассмотрим тонкостенную пространственную конструкцию типа цилиндрической или призматической оболочки, имеющей в поперечном сечении произвольно заданное очертание и состоящей из конечного числа тонких узких пластинок, как плоских, так и криволинейных (рис. 1). Будем считать, что составляющие данную оболочку пластинки жестко соединены вдоль ребер так, что в каждой точке ребра устраняется всякого рода подвижность одной пластинки по отношению к другой, соседней с ней.

Следовательно, по существу, новый класс конструкций и сооружений, принципиально отличающийся от стержней сплошного сечения.

Пусть δ — толщина оболочки, d — какой-либо характерный размер поперечного сечения (ширина или высота профиля), l — длина. При относительных размерах, выражающихся величинами порядка

$$\frac{\delta}{d} \leq 0,1; \quad \frac{d}{l} \leq 0,1,$$

мы относим рассматриваемую конструкцию к категории длинных цилиндрических оболочек. Такие оболочки, независимо от формы и геометрических размеров профиля, мы назвали тонкостенными стержнями.

2. В нашей теории тонкостенных стержней, как и в общей теории оболочек, существенную роль играет так называемая срединная поверхность стержня-оболочки, т. е. поверхность, проходящая через середины толщин пластинок, образующих данный стержень. Срединная поверхность тонкостенного прямого стержня, состоящего в общем случае из плоских пластинок и цилиндрических оболочек, относится к классу цилиндрических поверхностей. Прямые линии, параллельные оси стержня и принадлежащие срединной поверхности, представляют собою образующие этой поверхности. Плоская кривая, получающаяся от пересечения срединной поверхности с плоскостью P , перпендикулярной к образующим, называется направляющей. Иногда мы будем называть ее профильной линией.

Приняв образующие и направляющие за координатные линии, мы будем иметь взаимно ортогональную систему координат, позволяющую на срединной поверхности однозначно определить положение любой точки. Текущие координаты какой-либо точки M по образующей и направляющей мы будем в дальнейшем обозначать соответственно через z и s (рис. 2).

За начало отсчета координаты z может быть принята любая плоскость, перпендикулярная к оси (соответственно — образующей) стержня. Мы обычно будем принимать за начальную плоскость — плоскость, совпадающую с торцом стержня-оболочки. На рис. 2 начальной будет

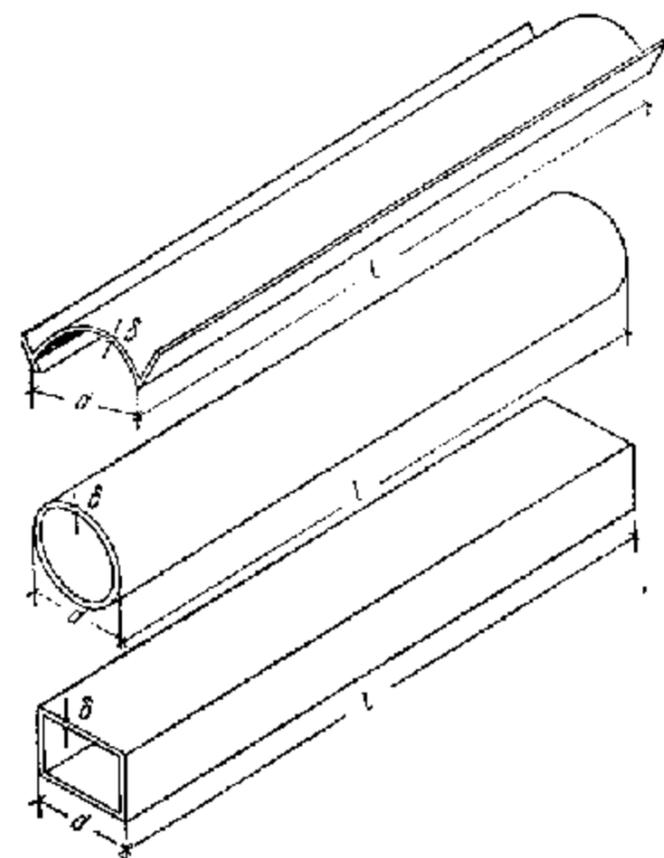


Рис. 1.

наиболее удаленная от наблюдателя плоскость P_0 , а положительным направлением координаты z будем считать направление от начальной плоскости к наблюдателю. За начало отсчета координаты s может быть принята любая образующая. Мы обычно будем принимать за начало отсчета образующую, лежащую в плоскости симметрии (в случае симметричных профилей) или образующую, совпадающую с продольным

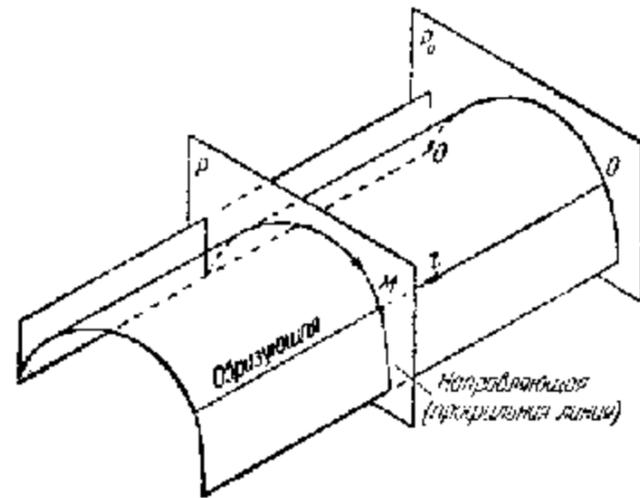


Рис. 2.

краем какого-либо элемента профиля стержня. Как известно, для стержня, находящегося в условиях растяжения (сжатия), изгиба или кручения, существенными являются нормальные и касательные напряжения, возникающие на площадках поперечного сечения стержня. Эти напряжения представляют собой те расчетные статические величины, по которым определяются основные размеры кон-

струкции. Нормальные же напряжения, возникающие на площадках продольного сечения и действующие параллельно касательной к профильной линии, в работе тонкостенного стержня как *пространственной системы* не играют существенной роли.

Предложенная автором теория стержней открытого профиля построена на следующих геометрических гипотезах:

а) *тонкостенный стержень открытого профиля рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким (недеформируемым) профилем,*

б) *деформации сдвига срединной поверхности, характеризующаяся изменением прямого угла между координатными линиями $z = \text{const}$, $s = \text{const}$, принимается равной нулю.*

Считая профиль стержня жестким, мы тем самым постулируем, что напряжения (нормальные и касательные), возникающие на площадках поперечного сечения стержня, не изменятся от замены одной внешней поперечной нагрузки, приходящейся на элемент стержня, заключенной между сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, другой нагрузкой, статически эквивалентной первой. Другими словами, мы полагаем, что при внешней нагрузке, действующей в плоскости поперечного сечения и приводящейся к системе сил, статически эквивалентной нулю для каждого элементарного поперечного диска, стержень ведет себя как жесткое тело и, следовательно, нормальные и касательные напряжения по площадкам поперечного сечения стержня от этой нагрузки равны нулю.

Действительно, пусть на тонкостенный стержень открытого профиля, имеющий на концах жесткие поперечные диафрагмы, действует

поперечная нагрузка, состоящая из двух взаимно уравновешенных поперечных сил Q , приложенных в двух разных точках произвольно выбранной поперечной элементарной полоски (рис. 3, а). Такого рода нагрузка в упругом стержне с деформируемым профилем вызовет поперечные изгибающие моменты, а также поперечные и нормальные усилия по площадкам продольного сечения стержня. Крайние вертикальные пластинки, к которым приложены поперечные силы Q , будут претерпевать каждая в своей плоскости деформацию изгиба, связанную, как нетрудно видеть, с деформацией профиля стержня. Вследствие такой деформации продольные ребра тонкостенного стержня согласно нашей общей теории призматических и цилиндрических оболочек получат деформацию продольных удлинений. Этим деформациям в упругом стержне будут соответствовать нормальные напряжения по площадкам поперечного сечения стержня. Нормальные напряжения в свою очередь вызовут в пластинках стержня касательные напряжения, определяемые из условий равновесия элемента стержня-оболочки. Эти напряжения, как нормальные, так и касательные, в рассматриваемом случае нагружения стержня находятся в прямой зависимости от деформаций, характеризующих изменение формы и геометрических размеров профиля стержня.

Если эти деформации положить равными нулю, т. е. рассматривать стержень как оболочку, усиленную жесткими поперечными диафрагмами, то в таком стержне взаимно уравновешенная поперечная нагрузка не совершит никакой работы. Профиль стержня остается неизменным и, следовательно, в поперечных сечениях стержня напряжения будут равны нулю.

Принимая вторую гипотезу об отсутствии деформации сдвига, мы тем самым считаем, что координатные линии $z = \text{const}$, $s = \text{const}$, ортогональные до деформации, остаются ортогональными и после деформации, т. е. пренебрегаем изменением прямого угла между этими линиями как геометрическим фактором, не имеющим вследствие своей малости существенного значения для напряжений в тонкостенном стержне-оболочке открытого профиля.

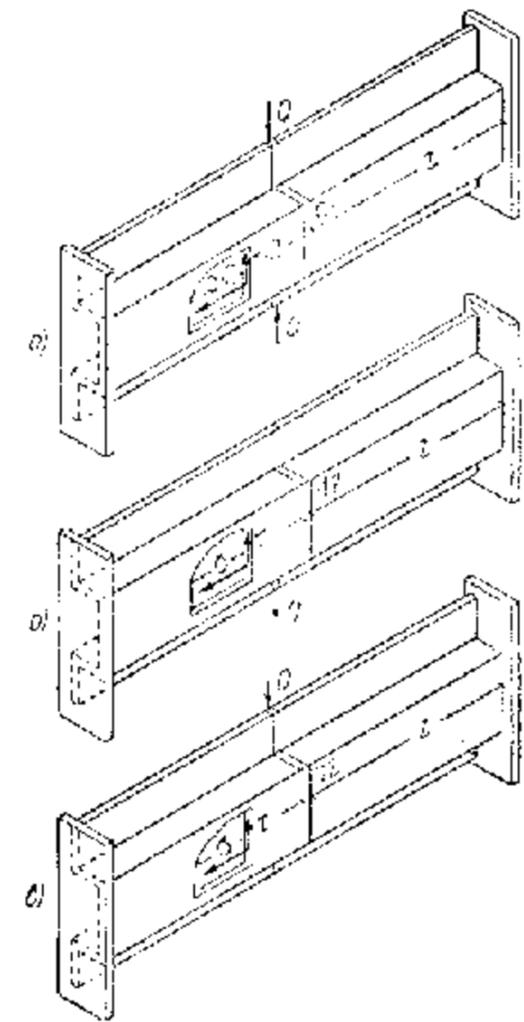


Рис. 3.

4. Обобщая сказанное выше, мы приходим к выводу, что при определении нормальных и касательных напряжений σ и τ , возникающих только на площадках поперечного сечения стержня-оболочки, внешняя поперечная нагрузка, состоящая из какого угодно числа сил, приложенных в разных точках профильной линии сечения $z = \text{const}$, может быть заменена в той же плоскости $z = \text{const}$ одной, статически эквивалентной ей силой, имеющей вполне определенную линию действия (рис. 3, б, в). Эта равнодействующая, определяемая в общем случае как

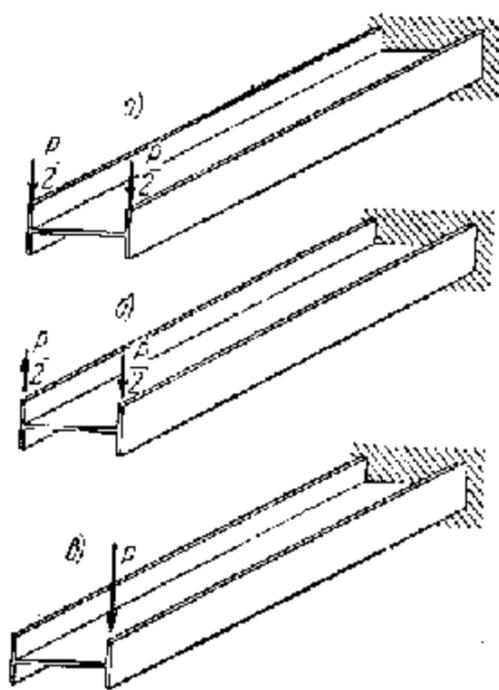


Рис. 4.

погонная поперечная нагрузка (нагрузка, приходящаяся на поперечную полосу единичной ширины), не может быть перенесена в другое положение параллельно самой себе. Перенос поперечной нагрузки из одной продольной плоскости действия в другую, ей параллельную, сопровождается изменением напряженного и деформированного состояния тонкостенного стержня. Поперечные нагрузки, представленные на рис. 4 и действующие на свободном конце консольной двутавровой балки, вызывают в этой балке различные напряженные состояния. Нагрузка, показанная на рис. 4, а, вызовет деформацию изгиба. Нагрузка, показанная на рис. 4, б, вызовет изгибно-крутильные деформации; нагрузка же, показанная на рис. 4, в и действующая в плоскости

одной только полки, вызовет в балке сложное деформированное состояние, которое по принципу независимости действия сил может быть получено путем наложения двух состояний: *изгибного* (рис. 4, а) и *изгибно-крутильного* (рис. 4, б).

Изгибное состояние описывается законом плоских сечений. В этом состоянии обе полки двутавровой балки испытывают одинаковую деформацию изгиба: верхние волокна полки растянуты, нижние — сжаты.

Изгибно-крутильное состояние относится к явлению изгибного пластического кручения, т. е. такого кручения, при котором отдельные продольные элементы стержня (пластинки) наряду с кручением испытывают также и изгиб. В поперечных сечениях, помимо касательных напряжений, возникают и нормальные напряжения. Состояние изгибного кручения в нашей теории описывается уже другим законом, принципиально отличным от закона плоских сечений. В рассматриваемом примере изгибно-крутильное состояние характеризуется тем, что полки двутавровой балки, имеющей на одном конце жесткую заделку, в результате кручения испытывают изгиб каждая в своей плоскости, причем

этот изгиб для обеих полок происходит в противоположных направлениях. При нагрузке, показанной на рис. 4, б, крайние верхние волокна полки, расположенной справа, испытывают растяжение, а нижние — сжатие; крайние же верхние волокна левой полки испытывают сжатие, а нижние — растяжение. В результате такой деформации поперечное сечение двутавровой балки уже не остается плоским.

Искривление плоского поперечного сечения, обусловленное продольным перемещением точек сечения из его плоскости, называется *депланацией* сечения.

В случае изгибного кручения депланация стержня сопровождается возникновением в поперечных сечениях не только касательных, но также и нормальных напряжений. В каждом поперечном сечении стержня нормальные напряжения приводятся к новой обобщенной силе, представляющей собой систему взаимно уравновешенных продольных усилий. Назовем эту обобщенную силу *продольным бимоментом стержня*. В рассматриваемом примере бимомент состоит из изгибающих моментов полки балки, имеющих в любом поперечном сечении одинаковые значения и разные знаки.

Б. Теория пространственных изгибно-крутильных форм равновесия тонкостенного стержня основана, по существу, на отказе от гипотезы плоских сечений и от трактовки стержня как одномерной упругой модели, для которой граничные условия могут быть заданы только в смысле принципа Сен-Венана. Принципиальное отличие этой теории от элементарной теории изгиба балок и состоит в том, что она основана на гипотезах, позволяющих рассматривать явление изгибного кручения стержня как кручение тонкостенной пространственной системы типа оболочки с учетом фактора депланации сечения.

Если в отношении перемещений в плоскости поперечного сечения элементарный диск стержня, заключенный между плоскостями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, при принятых гипотезах рассматривается как жесткое тело, то в отношении перемещений из плоскости сечения этот диск нами рассматривается как изменяемое, деформируемое тело. Точки какого-либо сечения $z = \text{const}$ стержня наряду с перемещениями, определяемыми законом плоских сечений, могут получать также и дополнительные продольные перемещения, связанные с депланацией сечения. Вследствие этой депланации *внешняя продольная нагрузка, состоящая из сил, приложенных в точках какого-либо поперечного сечения $z = \text{const}$ стержня, в отличие от поперечной нагрузки, не может быть заменена какой-либо другой статически эквивалентной ей системой продольных сил*. Всякая замена продольной нагрузки другой, статически ей эквивалентной, равносильна загрузению стержня дополнительной взаимно уравновешенной продольной нагрузкой. Такая нагрузка, будучи приложена к стержню, рассматриваемому в свете элементарной теории изгиба балок, не вызывает дополнительных деформаций и напряжений, поскольку поперечные сечения, согласно этой теории, остаются плоскими. Уравновешенная же продольная нагрузка, приложенная в кон-

турных точках поперечного сечения тонкостенного стержня, может вызвать деформацию сечения. В результате такой деформации в поперечных сечениях стержня возникнут дополнительные нормальные напряжения, приводящиеся в сечениях

$z = \text{const}$ к внутреннему продольному бимоменту. Этот бимомент, по мере удаления от сечения, в точках которого приложена внешняя взаимно уравновешенная продольная нагрузка (внешний бимомент), согласно принципу Сен-Венана будет затухать. Однако степень этого затухания в значительной мере зависит от относительных геометрических размеров и структуры поперечного сечения стержня. Для стержня сплошного сечения, а также для тонкостенного стержня, имеющего в поперечном сечении жесткий закрытый профиль, деформация сечения, вызываемая внешней продольной взаимно уравновешенной нагрузкой, носит местный характер. Эта деформация, а также и связанные с ней внутренние напряжения по мере удаления от места приложения нагрузки быстро затухают. В случае же тонкостенного стержня открытого профиля деформация сечения, вызванная действием продольной взаимно уравновешенной нагрузки и относящаяся к изгибному кручению, по мере удаления от места приложения нагрузки, как правило, затухает

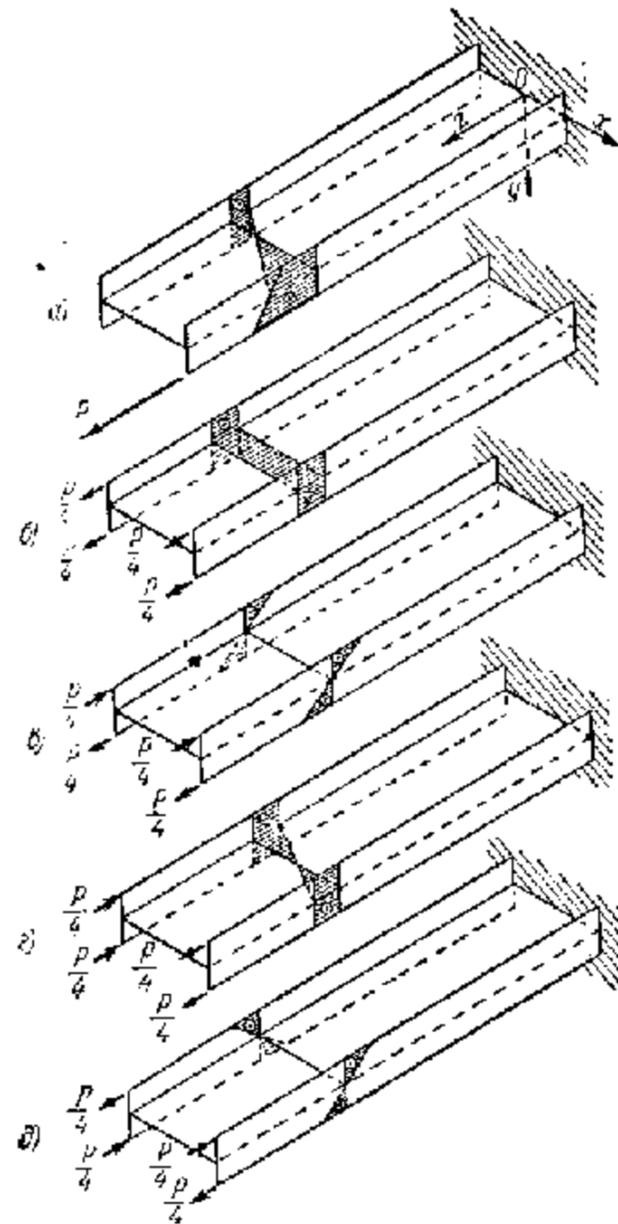


Рис. 5.

весьма слабо. Для такого стержня внутренние бимоментные напряжения и связанная с этими напряжениями деформация изгибного кручения являются весьма существенными факторами. Применение принципа Сен-Венана к расчету тонкостенного стержня на действие внешней нагрузки, вызывающей кручение, может привести к грубой ошибке.

Поясним сказанное здесь примером. На рис. 5, а изображена консольная двутавровая балка, нагруженная на свободном конце перпендикулярно приложенной продольной силой P . Такая сила, согласно элементарной теории изгиба балок, заменяется статически-эквивалентной ей системой продольных усилий, вызывающих центральное растяжение и чистый изгиб в главных плоскостях. Продольная нагрузка, вызывающая только растяжение, показана на рис. 5, б. Продольные нагрузки, вызывающие только чистый изгиб, показаны на рис. 5, в и г. Каждая из этих нагрузок представлена продольными силами, приложенными в четырех крайних точках профиля балки и имеющими по абсолютной величине одинаковые значения, равные $\frac{P}{4}$.

В случае центрального растяжения продольная нагрузка является симметричной относительно обеих главных осей сечения Ox и Oy . В случае чистого изгиба в главной плоскости Oxz продольная нагрузка будет симметричной относительно оси Ox и косимметричной относительно другой оси Oy . В случае чистого изгиба в другой главной плоскости Oyz продольная нагрузка имеет симметричное расположение относительно оси Oy и косимметричное относительно оси Ox .

В этом разложении, сделанном в соответствии с моделью плоского сечения, недостает еще одного компонента заданной нагрузки, а именно — системы четырех продольных сил (величина каждой равна $\frac{P}{4}$), имеющих относительно обеих осей косимметричное расположение (рис. 5, д). Такая нагрузка приводится к двум равным по величине и противоположным по знаку изгибающим моментам, действующим в плоскостях полок двутавра и вызывающим изгиб этих полок в противоположных направлениях. Вследствие такого изгиба поперечные сечения двутавровой балки будут претерпевать деформацию, которая по мере удаления от места приложения нагрузки будет затухать тем медленнее, чем тоньше стенка двутавра. В результате такой чисто бимоментной продольной нагрузки, т. е. нагрузки, статически эквивалентной нулю, тонкостенный стержень будет испытывать деформацию кручения. Таким образом, явление кручения стержня может иметь место не только при действии поперечных крутящих сил (моментов), но также и при действии одних только продольных сил. Это явление для тонкостенного стержня открытого профиля находится в тесной связи с деформацией сечения и по этой причине не может быть изучено методами элементарной теории изгиба балок, основанной на гипотезе плоских сечений, выражающей по существу применение к этим балкам как к стержням сплошного сечения принципа Сен-Венана.

§ 3. Перемещения и деформации. Закон секториальных площадей. Обобщение гипотезы плоских сечений

1. Осью стержня в сопротивлении материалов обычно называют линию центров тяжести площадей поперечных сечений. В дальнейшем всякую прямую в пространстве, параллельную этой оси, условимся называть произвольной осью стержня. Пусть произвольная ось стержня

пересекается с плоскостью его поперечного сечения $z = \text{const}$ в точке O (рис. 6). Отнесем поперечные сечения стержня к прямоугольной системе координат Oxy с началом отсчета в точке O ; ось Ox и Oy ориентируем так, чтобы они вместе с положительным направлением третьей оси Oz образовывали левовинтовую систему координат*). Координаты x и y произвольной точки M профильной линии тонкостенного стержня представляют собой вполне определенные функции независимой переменной z .

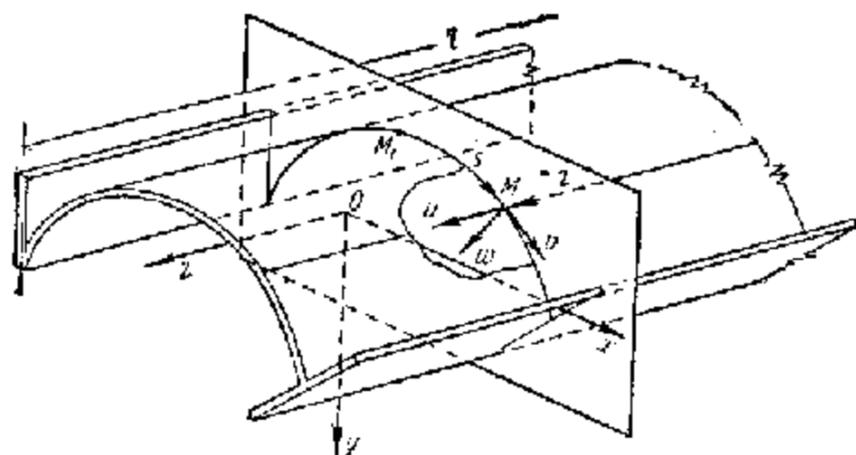


Рис. 6.

2. Предположим, что тонкостенный стержень-оболочка претерпевает какую-либо деформацию. В результате этой деформации произвольная точка M срединной поверхности стержня займет в пространстве новое положение. Наша задача заключается в определении перемещений точек срединной поверхности стержня, поскольку ими характеризуется деформированное состояние стержня.

Остановимся сначала на поперечных перемещениях, т. е. на перемещениях в плоскости поперечного сечения стержня. Согласно первой геометрической гипотезе о жестком профиле деформация стержня происходит так, что форма профиля и все геометрические размеры этого профиля в плоскости поперечного сечения остаются неизменными, т. е. на поперечное сечение стержня в отношении перемещений в этой плоскости можно смотреть как на абсолютно жесткое тело, положение которого определяется тремя независимыми величинами, отвечающими трем степеням свободы диска на плоскости.

Подобно тому, как это делается в кинематике твердого тела, мы будем определять поперечные перемещения точек сечения $z = \text{const}$ через перемещение некоторой произвольно выбранной точки A , взятой

* Система координат называется левовинтовой, если для наблюдателя, смотрящего на плоскость Oxy против направления оси Oz , совмещение оси Ox с осью Oy происходит путем поворота оси Ox на 90° по часовой стрелке.

в этом сечении, и угол поворота всего сечения относительно этой точки. При этом, если точка A не принадлежит профильной линии, то считается, что она жестко связана с ней.

Пусть a_x и a_y — координаты точки A , а $\xi(z)$ и $\eta(z)$ — проекции полного перемещения этой точки A на оси координат Ox и Oy соответственно. Этими проекциями как функциями от z определяется пространственная кривая, в которую после деформации переходит связанная со стержнем произвольная ось стержня с координатами $x = a_x$, $y = a_y$ (рис. 7). Пусть $\theta(z)$ есть угол поворота сечения $z = \text{const}$ в плоскости Oxy относительно той же точки A . Этим углом как функцией от z определяется угол закручивания стержня по длине. Угол закручивания $\theta(z)$ мы будем считать положительным, если, смотря на сечение $z = \text{const}$ против направления оси Oz мы видим, что оно поворачивается по часовой стрелке.

Обозначая перемещения какой-нибудь точки B поперечного сечения стержня по направлению осей Ox и Oy соответственно через ξ_B и η_B и заменяя по малости угла θ дугу окружности отрезком касательной к этой окружности, получим для этих перемещений следующие выражения (рис. 7):

$$\left. \begin{aligned} \xi_B &= \xi - (b_y - a_y)\theta, \\ \eta_B &= \eta + (b_x - a_x)\theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где b_x и b_y — координаты точки B .

При малых величинах $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ перемещение профиля стержня в плоскости поперечного сечения можно рассматривать как вращение вокруг точки, называемой *мгновенным центром вращения*. Положение этого центра в плоскости Oxy определится из условия его неподвижности. Совмещая произвольную точку B с мгновенным центром вращения, мы должны перемещения ξ_B и η_B этой точки приравнять нулю. Формулы (3.1) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi - (b_y - a_y)\theta &= 0, \\ \eta + (b_x - a_x)\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где b_x и b_y теперь обозначают координаты мгновенного центра вращения. В дальнейшем мгновенный центр вращения будем называть *центром кручения*. Из уравнений (3.2) получаем формулы для координат

центра кручения:

$$\left. \begin{aligned} b_x &= a_x - \frac{\eta}{\theta}, \\ b_y &= a_y + \frac{\xi}{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Уравнениями (3.3) определяется в общем случае пространственная кривая, которая может быть названа *линией центров кручения*.

Положение центра кручения, в отличие от центра тяжести сечения, зависит от деформации стержня, а следовательно, и от внешней нагрузки, вызывающей эту деформацию.

3. Полное перемещение произвольной точки M срединной поверхности стержня-оболочки, есть векторная величина, определяемая в пространстве тремя компонентами.

За эти компоненты мы примем:

1) продольное перемещение u ; это перемещение будем считать положительным, если оно направлено в сторону возрастания переменной z ;

2) поперечное тангенциальное перемещение v , направленное по касательной к профильной линии; при положительном значении это перемещение направлено в сторону возрастания переменной s ;

3) поперечное нормальное перемещение w ; положительное направление этого перемещения определится из условия того, что перемещения u , v и w при положительных значениях образуют левовинтовую систему координат (см. рис. 6).

Все три перемещения будут в общем случае функциями двух независимых переменных z и s .

Остановимся на определении поперечных перемещений v и w . Их нетрудно найти из формулы (3.1), которая для произвольной точки профильной линии M с текущими координатами x и y примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi - (y - a_y) \theta, \\ \eta_s &= \eta + (x - a_x) \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где ξ_s и η_s — перемещения точки M по направлению осей Ox , Oy .

Обозначив угол, образуемый касательной к профильной линии в точке M с осью Ox , через α и проектируя ξ_s и η_s на направление касательной (рис. 8), получим для тангенциального перемещения $v(z, s)$ выражение:

$$v(z, s) = \xi_s \cos \alpha + \eta_s \sin \alpha. \quad (3.5)$$

Аналогично получим выражение для нормальной составляющей $w(z, s)$ полного перемещения:

$$w(z, s) = -\eta_s \cos \alpha - \xi_s \sin \alpha. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.5) и (3.6) вместо ξ_s и η_s их выражения по формуле (3.4), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v(z, s) &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + [(x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha] \theta, \\ w(z, s) &= -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + [(x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha] \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Из рис. 9 видно, что

$$\left. \begin{aligned} (x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha &= h(s), \\ (x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha &= t(s), \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где $h(s)$ и $t(s)$ — длины перпендикуляров, опущенных из точки A соответственно на касательную и нормаль к профильной линии в точке M .

Воспользовавшись равенствами (3.7) и (3.8), мы можем выражения для $v(z, s)$ и $w(z, s)$ представить в более компактном виде:

$$v(z, s) = \xi(z) \cos \alpha(s) + \eta(z) \sin \alpha(s) + \theta(z) h(s), \quad (3.9)$$

$$w(z, s) = -\xi(z) \sin \alpha(s) + \eta(z) \cos \alpha(s) - \theta(z) t(s). \quad (3.10)$$

В формулах (3.9) и (3.10) последние слагаемые определяют перемещения, происходящие вследствие поворота всего сечения относительно точки A . При малом угле поворота каждое из этих перемещений, как это следует из кинематики твердого тела, определяется как произведение угла поворота на длину перпендикуляра, опущенного из точки A как на центра вращения на прямую, проходящую через точку M в направлении искомого перемещения.

Определим теперь продольное перемещение $u(z, s)$ точки M , возникающее вследствие деформации срединной поверхности и направленное из плоскости поперечного сечения стержня. Это перемещение мы можем найти на основании второй гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности.

Деформация сдвига в общем случае определяется как относительное изменение прямого угла, заключенного между координатными линиями $s = \text{const}$ и $z = \text{const}$, возникающее при переходе оболочки в деформированное состояние. Эта деформация для цилиндрической оболочки обуславливается перемещениями $u = u(z, s)$ и $v = v(z, s)$.

На рис. 10 показаны тангенциальные (происходящие в соответствующих касательных плоскостях) перемещения для четырех точек M , a ,

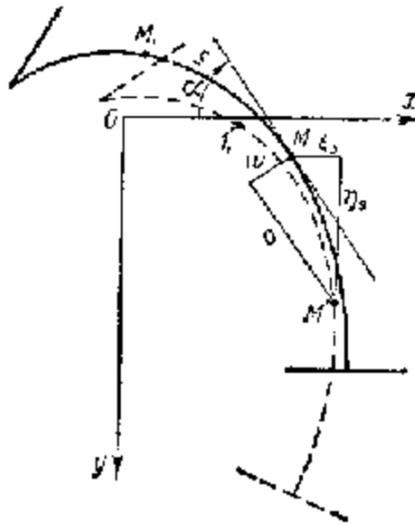


Рис. 8.

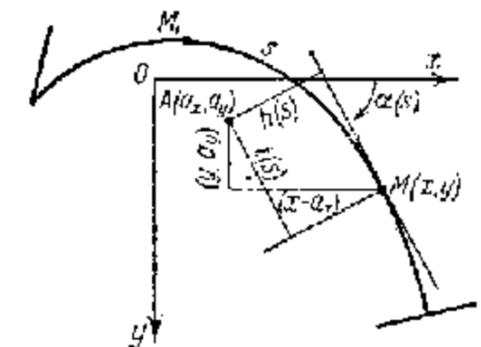


Рис. 9.

h, c элементарного прямоугольника поверхности. Зная перемещения всех четырех точек выделенного прямоугольника, мы можем определить интересующую нас деформацию сдвига. Эта деформация в точке M по определению равна сумме углов α, β , на которые после деформации поворачиваются стороны Ma и Mb элементарного прямоугольника. Обозначая деформацию сдвига через γ , будем иметь:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Полагая для тонкостенного стержня открытого профиля деформацию сдвига равной нулю, мы можем написать:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (3.12)$$

Так как перемещение $v(z, s)$ нам уже известно, — оно определяется формулой (3.9), — то мы можем теперь найти продольное перемещение $u(z, s)$. Решив уравнение (3.12) относительно искомой функции $u(z, s)$, будем иметь:

$$u(z, s) = \zeta(z) - \int_{M_1}^M \frac{\partial v}{\partial z} ds. \quad (3.13)$$

Здесь $\zeta(z)$ — некоторая произвольная функция, зависящая только от координаты z и представляющая продольное перемещение точки M_1 , служащей началом отсчета координаты s . Интеграл в правой части равенства (3.13) вычисляется вдоль профильной линии

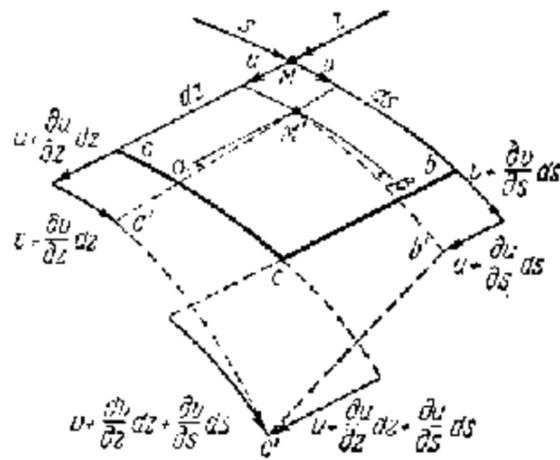


Рис. 10.

по переменной s в пределах от начальной точки M_1 до той точки M , для которой определяется перемещение $u(z, s)$.

Дифференцируя равенство (3.9) по переменной z и помножив обе части этого равенства на ds , получим:

$$\frac{\partial v}{\partial z} ds = \zeta'(z) \cos \alpha(s) ds + \eta'(z) \sin \alpha(s) ds + \nu'(z) h(s) ds. \quad (3.14)$$

Из рис. 11 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cdot ds &= dx, \\ \sin \alpha \cdot ds &= dy, \\ h \cdot ds &= d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

В этих формулах ds представляет собой дифференциал дуги профильной линии; dx, dy — дифференциалы декартовых координат, соответствующие элементу ds профильной линии; $d\omega$ — удвоенная площадь

элементарного треугольничка (сектора), основанием которого служит дифференциал дуги ds , а высота определяется длиной перпендикуляра h , опущенного из точки A на касательную в точке M к профильной линии.

Внося выражения (3.14) и (3.15) в правую часть равенства (3.13) и выполняя интегрирование, получим:

$$u(z, s) = \zeta(z) - \zeta'(z) x(s) - \eta'(z) y(s) - \nu'(z) \omega(s), \quad (3.16)$$

где $x(s), y(s)$ — декартовы координаты точки M ; $\omega(s)$ — удвоенная площадь сектора, ограниченного отрезком дуги M_1M профильной линии и двумя прямыми AM_1, AM , соединяющими концы этого отрезка с точкой A (рис. 12). Эта площадь автором названа *секториальной*

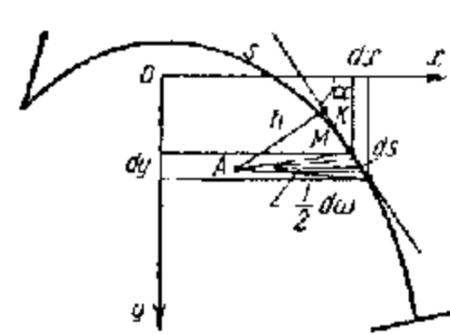


Рис. 11.

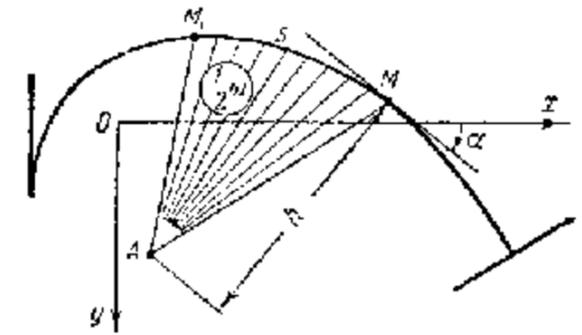


Рис. 12.

Площадь $\omega(s)$, как и координаты $x(s), y(s)$, входящие в формулу (3.16), для данной профильной линии при выбранных точках A и M_1 представляют собой вполне определенную функцию от координаты s . Точку A мы называем *полюсом* секториальных площадей, а точку M_1 — *секториальной начальной* точкой.

Прямая AM_1 , служащая началом отсчета секториальных площадей и соединяющая полюс A с какой-либо выбранной на профильной линии точкой M_1 , может быть названа *неподвижным* радиусом-вектором. Прямую AM , соединяющую полюс A с переменной точкой M , т. е. с точкой, для которой вычисляется площадь $\omega(s)$, будем называть *подвижным* радиусом-вектором.

Секториальную площадь будем считать положительной, если описывающий ее подвижной радиус-вектор AM при взгляде против направления оси Oz вращается по часовой стрелке.

На рис. 13 дана эюра секториальных площадей, построенная для профиля, показанного на рис. 6. Ординаты $\omega(s)$, выражающие собой в некотором масштабе секториальные площади, на правом криволинейном участке профиля при принятом правиле знаков имеют положительные значения. Для левого же участка профиля эти ординаты будут отрицательными. На прямолинейных участках профильной линии секториальные площади всегда представляются прямолинейными (в общем случае трапециoidalными) эюрами, поскольку площадь $\omega(s)$ на таком

участке в функции от координаты z всегда представляется линейным законом.

Формулой (3.16) представлен общий закон для продольных перемещений $u(z, s)$ тонкостенного стержня-оболочки, имеющего в поперечном сечении открытый профиль. Этот закон может быть сформулирован следующим образом:

Продольные перемещения $u(z, s)$ по сечению $z = \text{const}$ тонкостенной открытой оболочки цилиндрической или призматической формы, при отсутствии деформации изгиба контура поперечного сечения и деформаций сдвига средней поверхности складываются из перемещений, зависящих линейно от декартовых координат точки на линии контура, и перемещений, пропорциональных секториальной площади.

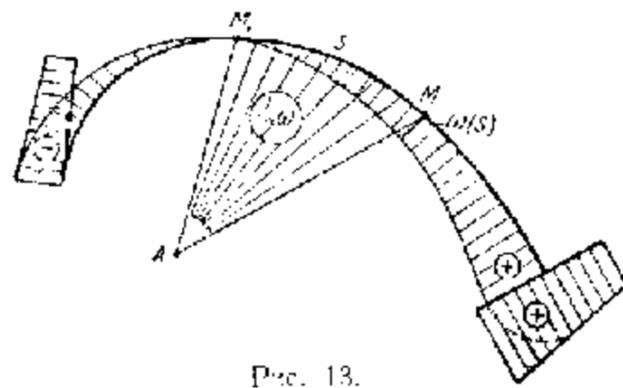


Рис. 13.

Первыми тремя слагаемыми формулы (3.16) выражен закон Бернулли—Навье, согласно которому поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Продольные перемещения, определяемые суммой первых трех членов формулы (3.16), возникают в результате сложной деформации растяжения и изгиба в двух плоскостях: Oxz и Oyz . Функция $\zeta(z)$ определяет осевую деформацию; поперечные сечения при этой деформации получают только поступательные смещения вдоль образующей стержня. Функции $\xi(z)$ и $\eta(z)$, представляющие собой прогибы произвольной оси стержня $x = a_x$, $y = a_y$ в продольных плоскостях Oxz , Oyz (рис. 14) характеризуют деформацию изгиба. При этой деформации поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются относительно осей Ox , Oy , лежащих в плоскости поперечного сечения.

Последним, четвертым членом формулы (3.16) определяется та часть перемещений, которая не следует закону плоских сечений и возникает в результате кручения. Это отклонение от закона плоских сечений является *секториальной деформацией* сечения. Эта деформация представлена законом секториальных площадей.

Величина $\theta'(z) = \frac{d\theta}{dz}$, представляющая собой относительный угол кручения, служит мерой деформации сечения. Эту величину мы будем в дальнейшем называть *депланацией* стержня при кручении. Продольное перемещение какой-либо точки M средней поверхности, возникающее вследствие одной только деформации кручения, равно взятому со знаком минус произведению на депланацию $\theta'(z)$ на секториальную площадь $\omega(s)$, имеющую полюс в точке A плоского поперечного сечения и начало отсчета в точке M_1 профильной линии.

Заметим, что при определении продольных перемещений $u(z, s)$ мы не пользовались гипотезой плоских сечений. Закон Бернулли—Навье, выражающий эту гипотезу и лежащий в основе современной элементарной теории изгиба балок, представляет собой частный случай закона, выраженного формулой (3.16).

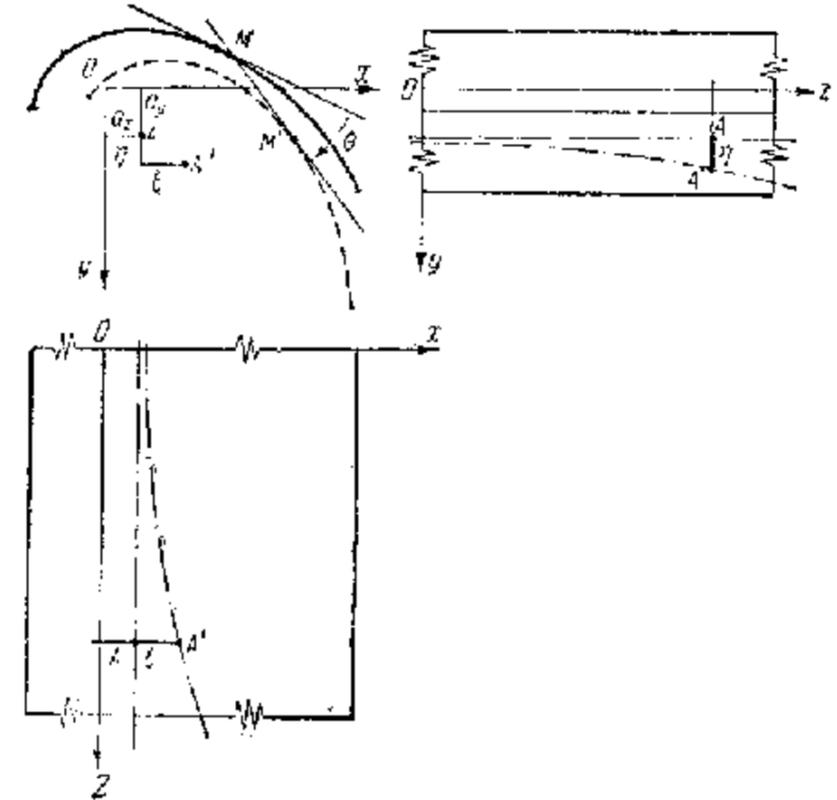


Рис. 14.

4. Зная перемещения точек средней поверхности оболочки, мы можем теперь найти и деформацию этой поверхности в любой ее точке M . В дальнейшем нас будет интересовать продольная деформация $\varepsilon = \varepsilon(z, s)$, определяемая как относительное удлинение линейного элемента dz , проходящего через какую-либо точку M поверхности и направленного параллельно образующей этой поверхности. Это удлинение определяется как отношение разности продольных перемещений $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ и u двух соседних точек a и M к длине элемента dz исходной (недеформированной) поверхности (см. рис. 10):

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.17)$$

Дифференцируя, согласно (3.17), равенство (3.16) по продольной координате z , получим общую формулу, также четырехчленную, для относительного продольного удлинения:

$$\varepsilon(z, s) = \zeta'(z) - \xi''(z)x(s) - \eta''(z)y(s) - b''(z)\omega(s). \quad (3.18)$$

Формула (3.18) показывает, что относительные продольные удлинения $\varepsilon(z, s)$ на профильной линии $z = \text{const}$ складываются из удлинений, зависящих линейно от координат $x(s)$, $y(s)$ точки профильной линии и подчиняющихся закону плоских сечений, и удлинений, распределенных вдоль профильной линии по закону секториальных площадей и возникающих вследствие деформации сечения.

Формула (3.18) имеет общий характер и позволяет для данного тонкостенного стержня по заданным четырем функциям $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\theta(z)$ определить деформацию продольного удлинения в любой точке срединной поверхности. Эта формула также является обобщением известной в сопротивлении материалов формулы для деформаций удлинений, возникающих при осевом растяжении и изгибе балки, и получающейся из закона плоских сечений.

5. Формула (3.18) показывает, что любая цилиндрическая поверхность, рассматриваемая как срединная поверхность тонкостенного стержня, может испытывать деформации даже в предположении, что очертание этой поверхности в плоскости ее поперечного сечения остается неизменным и деформация сдвига отсутствует. Деформация этой поверхности характеризуется тем, что ее образующие (линии $s = \text{const}$) получают относительные удлинения, и эти удлинения в разных точках поверхности могут принимать разные значения.

Исследуем теперь вопрос о том, может ли поверхность испытывать деформации, если предположить, что относительное продольное удлинение во всех точках поверхности (при любых значениях координат z и s) равно нулю. Другими словами, можно ли цилиндрической поверхности сообщить какую-либо деформацию, рассматривая эту поверхность в свете принятых ранее двух геометрических гипотез и считая ее также нерастяжимой и в продольном направлении.

Для решения этой задачи мы должны, очевидно, положить $\varepsilon = 0$. Из формулы (3.18) получаем:

$$\zeta'(z) - \xi''(z)x(s) - \eta''(z)y(s) - \theta''(z)\omega(s) \equiv 0. \quad (3.19)$$

Так как равенство (3.19) должно выполняться при любом значении переменного s и функции 1 , $x(s)$, $y(s)$, $\omega(s)$ линейно независимы между собой*), то мы приходим к уравнениям:

$$\zeta'(z) = 0; \quad \xi''(z) = 0; \quad \eta''(z) = 0; \quad \theta''(z) = 0.$$

Интегралы этих уравнений будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \zeta(z) &= \zeta_0, \\ \xi(z) &= \xi_0 + \xi'_0 z, \\ \eta(z) &= \eta_0 + \eta'_0 z, \\ \theta(z) &= \theta_0 + \theta'_0 z. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

*) Условие линейной независимости функций 1 , $x(s)$, $y(s)$, $\omega(s)$ состоит в том, что на заданном интервале изменения независимой переменной s ни одна из этих функций не может быть получена как линейная комбинация остальных трех функций.

Здесь постоянные интегрирования рассматриваются как произвольно заданные величины. Из этих величин ζ_0 , ξ_0 , η_0 представляют собой поступательные перемещения начального сечения $z = 0$ по трем взаимно перпендикулярным направлениям; ξ'_0 , η'_0 , θ_0 — угловые перемещения того же сечения $z = 0$ относительно трех взаимно перпендикулярных осей; θ'_0 — обобщенное перемещение, относящееся также к сечению $z = 0$ и представляющее собой деформацию этого сечения.

Легко видеть, что шесть независимых величин ζ_0 , ξ_0 , η_0 , ξ'_0 , η'_0 , θ_0 соответствуют шести степеням свободы поверхности, рассматриваемой в пространстве как жесткое тело. Эти величины мы можем исключить из рассмотрения, поскольку они относятся к перемещениям поверхности как жесткого тела и, следовательно, не оказывают никакого влияния на деформацию поверхности. Мы можем поэтому для начального сечения положить равными нулю поступательные перемещения ζ_0 , ξ_0 , η_0 и угловые перемещения ξ'_0 , η'_0 , θ_0 . У нас остается еще одна произвольная величина — деформация θ'_0 , характеризующая, согласно (3.16), искажение поперечных сечений поверхности по закону секториальных площадей.

Из последней формулы (3.20) следует, что деформация θ'_0 , заданная в сечении $z = 0$, сопровождается деформацией кручения стержня. Эта деформация, определяемая как относительный угол закручивания, для тонкостенного стержня с нерастяжимой срединной поверхностью остается постоянной по длине стержня (не зависит от координаты z)

$$\theta' = \theta'_0 = \text{const.}$$

Мы видим, что всякая нерастяжимая цилиндрическая или призматическая поверхность, имеющая в поперечном сечении жесткий контур, может испытывать деформацию, и эта деформация характеризуется углом кручения $\theta(z) = \theta'_0 z$, пропорциональным координате z с коэффициентом пропорциональности θ'_0 , представляющим собой секториальную деформацию начального сечения $z = 0$.

Такого рода деформация рассматривается в теории чистого кручения тонкостенного стержня, т. е. кручения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают одни только касательные напряжения, и эти напряжения как величины, пропорциональные деформации кручения $\theta' = \theta'_0$, по длине стержня остаются постоянными.

Таким образом, как теория изгиба, так и теория чистого кручения тонкостенных стержней, рассматриваемые в сопротивлении материалов, в отношении деформаций представляют собой частный случай нашей общей теории, описываемой законом секториальных площадей и построенной на гипотезах о неизменяемости формы профиля тонкостенного стержня и отсутствии деформаций сдвига в срединной поверхности стержня-оболочки.

Гипотезы Бернулли—Навье, лежащие в основе элементарной теории изгиба балок, и гипотезы Сен-Венана, относящиеся к задаче о чистом кручении стержня, являются частными случаями наших более общих

геометрических гипотез, позволяющих расширить рамки современного сопротивления материалов и рассмотреть ряд новых задач по прочности, устойчивости и колебаниям тонкостенного стержня, рассматриваемого как пространственная система типа цилиндрической или призматической оболочки с жестким профилем.

§ 4. Закон плоских сечений — частный случай закона секториальных площадей

1. Выше мы отметили, что в самом общем случае деформации тонкостенного бруса относительные удлинения, определяемые формулой (3.18), в поперечном сечении $z = \text{const}$ складываются из удлинений, определяемых из закона плоских сечений, и удлинений, меняющихся по дуге контура согласно закону секториальных площадей.

Эшора удлинений $\varepsilon(z, s)$ по сечению $z = \text{const}$ получается путем наложения четырех эшор, из которых одна остается постоянной по дуге профильной линии, вторая и третья соответственно пропорциональны расстояниям от данной точки контура до осей координат Ox и Oy , четвертая определяется секториальной площадью, имеющей полюс в точке A . Мы получаем таким образом для продольных деформаций ε четыре различных выражения в функции дуги s .

Однако можно показать, что для тонкостенных профилей, обладающих недеформируемым контуром сечения, изменение деформаций ε в функции дуги s , выраженное формулой (3.18), может быть представлено одним только законом секториальных площадей. Из этого закона, как частный случай, вытекает закон плоских сечений, лежащий в основе обычной теории изгиба балок.

Закон секториальных площадей можно сформулировать следующим образом:

Для тонкостенного стержня с жестким профилем, находящегося одновременно в условиях растяжения (сжатия), изгиба и кручения, относительные продольные удлинения $\varepsilon = \varepsilon(z, s)$ в поперечном сечении $z = \text{const}$ меняются по закону секториальной площади, имеющей полюс и начало отсчета в определенных точках сечения.

Прежде чем перейти к доказательству этого положения, выведем формулу преобразования секториальной площади при переносе полюса и начала отсчета.

Пусть ω_A и ω_D — соответственно секториальные площади, имеющие полюсы в точках A и D (рис. 15). Для дифференциалов этих площадей мы имеем формулы:

$$\left. \begin{aligned} d\omega_A &= (x - a_x) dy - (y - a_y) dx, \\ d\omega_D &= (x - d_x) dy - (y - d_y) dx, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где a_x и a_y — координаты точки A ; d_x и d_y — координаты точки D ; x и y — координаты контурной точки M .

Из формул (4.1) получим выражение для дифференциала разности секториальных площадей:

$$d(\omega_A - \omega_D) = (a_y - d_y) dx - (a_x - d_x) dy. \quad (4.2)$$

Интегрируя обе части равенства (4.2) и выражая ω_A через ω_D , получим:

$$\omega_A = \omega_D + (a_y - d_y)x - (a_x - d_x)y + C, \quad (4.3)$$

где C — произвольная постоянная, зависящая от начала отсчета секториальных площадей.

Обозначая через x_0 и y_0 координаты точки, от которой отсчитывается дуга s и считая, что эта точка служит также началом отсчета секториальных площадей ω_A и ω_D , т. е. полагая, что при $s=0$ секториальные площади $\omega_A = \omega_D = 0$, получим для постоянной интегрирования C выражение:

$$\begin{aligned} C &= -(a_y - d_y)x_0 + \\ &+ (a_x - d_x)y_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) постоянная C выражена координатами начальной точки M_0 , которая может быть выбрана пока совершенно произвольно.

Внося выражение (4.4) в формулу (4.3), получим искомую зависимость между ω_A и ω_D :

$$\omega_A = \omega_D + (a_y - d_y)(x - x_0) - (a_x - d_x)(y - y_0). \quad (4.5)$$

Перейдем к доказательству сформулированной выше теоремы. Деформированное состояние стержня, как видно из формулы (3.18), определяется функциями ξ , ξ , η и θ . Функция ξ , как было уже сказано выше, представляет собой продольные перемещения, одинаковые для всех точек поперечного сечения; ξ и η — проекции на координатные плоскости Oxz и Oyz пространственной кривой, в которую после деформации стержня переходит прямая, параллельная образующей цилиндра и проектирующаяся на плоскость Oxy в точку A с координатами a_x и a_y ; θ — угол закручивания, зависящий также от z . При заданных функциях ξ , ξ , η и θ относительные удлинения ε определяются формулой (3.18), в которой $\omega(s)$ обозначает секториальную площадь, имеющую полюс в точке A . Переходя от полюса A к полюсу D и заменяя $\omega(s)$ по формуле (4.3) через ω_D , получим выражение для ε :

$$\varepsilon = \xi' - C\theta'' - [\xi'' - (a_y - d_y)\theta'']x - [\eta'' - (a_x - d_x)\theta'']y - \theta''\omega_D. \quad (4.6)$$

Произвольные величины C , d_x и d_y подберем так, чтобы в формуле (4.6) обратились в нуль деформации, зависящие линейно от ко-

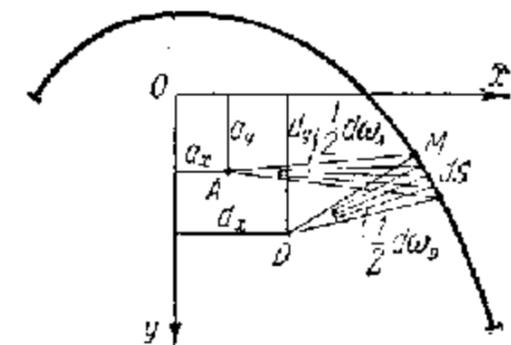


Рис. 15.

ординат точки сечения. Для определения величин C , d_x и d_y получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \xi' - C\theta'' &= 0, \\ \eta'' - (a_x - d_x)\theta'' &= 0, \\ \xi'' + (a_y - d_y)\theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Из этих уравнений находим:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\xi'}{\theta''}, \\ d_x &= a_x - \frac{\eta''}{\theta''}, \\ d_y &= a_y + \frac{\xi''}{\theta''}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Формула (4.6) при выполнении условий (4.7) принимает следующий вид:

$$\epsilon = -\theta''(z) \omega_D(z, s), \quad (4.9)$$

что и доказывает нашу теорему. Здесь секториальная площадь $\omega_D(z, s)$ в общем случае деформации стержня зависит уже от двух переменных z и s , поскольку координаты полюса этой площади d_x , d_y и величина C , определяющая, согласно уравнению (4.4), начальную точку отсчета секториальной площади, являются функциями от z .

Точку D , служащую полюсом для секториальной площади ω_D , мы в дальнейшем условимся называть *секториальным центром деформации*. Эта точка, как видно из формул (3.3) и (4.8), в общем случае деформации стержня не совпадает с центром кручения B .

Совпадение точек B и D получается в том случае, когда прогибы ξ и η точки A и углы закручивания θ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\xi}{\theta} = \frac{\xi''}{\theta''}; \quad \frac{\eta}{\theta} = \frac{\eta''}{\theta''}. \quad (4.10)$$

Уравнения (4.10) удовлетворяются, например, в случае деформации стержня по закону тригонометрической функции. Так, если перемещения ξ , η и θ заданы в виде

$$\xi = \xi_0 \sin \lambda z, \quad \eta = \eta_0 \sin \lambda z, \quad \theta = \theta_0 \sin \lambda z,$$

где ξ_0 , η_0 , θ_0 и λ — постоянные величины, то уравнения (4.10) удовлетворяются при любом z :

$$\frac{\xi}{\theta} = \frac{\xi''}{\theta''} = \frac{\xi_0}{\theta_0} = \text{const}, \\ \frac{\eta}{\theta} = \frac{\eta''}{\theta''} = \frac{\eta_0}{\theta_0} = \text{const},$$

Секториальный центр деформации D в этом случае совпадает с центром кручения B :

$$\left. \begin{aligned} d_x = b_x = a_x - \frac{\eta_0}{\theta_0}, \\ d_y = b_y = a_y + \frac{\xi_0}{\theta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Координаты точек D и B , как видно из формул (4.11), не зависят от z . Этими координатами определяется прямая, параллельная оси z и служащая в рассматриваемом случае синусоидальной деформации осью кручения стержня. Поперечные сечения стержня, оставаясь в своей плоскости неизменяемыми, при деформации поворачиваются относительно оси кручения на угол $\theta = \theta_0 \sin \lambda z$, меняющийся по длине стержня по закону $\sin \lambda z$.

Закон секториальных площадей, выраженный формулой (4.9), является общим законом для относительных удлинений ϵ тонкостенного стержня, обладающего в поперечном сечении жестким контуром.

Если же деформация стержня такова, что $\theta'' = 0$, а ξ'' и η'' отличны от нуля, то центр деформации, как видно из формул (4.8), лежит в бесконечности. Закон секториальных площадей в этом случае вырождается в закон плоских сечений; прямая, соединяющая центр изгиба с начальной точкой отсчета секториальной площади, переходит в так называемую нейтральную ось сечения; деформации удлинений ϵ в сечении $z = \text{const}$ меняются пропорционально расстоянию от нейтральной оси.

Закон, сформулированный нами для относительных удлинений, будет справедлив также и для продольных перемещений u . Четырехчленную формулу (3.16) для перемещений u можно тем же способом привести к одночленному виду:

$$u = -\theta'(z) \omega_E(z, s).$$

Здесь перемещения u уже определяются одним только законом секториальных площадей. Координаты полюса E , который мы назовем *секториальным центром абсолютной деформации*, будут:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= a_x - \frac{\eta'}{\theta'}, \\ e_y &= a_y + \frac{\xi'}{\theta'}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Начальная секториальная точка определится из условия:

$$C' = \frac{\xi'}{\theta'}. \quad (4.13)$$

Сравнивая формулы (4.12) и (4.13) с формулами (4.8), мы видим, что в общем случае деформации центр деформации и центр абсолютной деформации не совпадают, начальные секториальные точки — различные точки.

2. Рассмотрим геометрический способ построения секторного центра деформации. Предварительно заметим, что эпюра относительных удлинений для поперечного сечения стержня полностью определяется четырьмя ординатами. Действительно, пусть x_i, y_i — координаты четырех точек профиля стержня, в которых заданы относительные удлинения ε_i , и пусть ω_i ($i=1, 2, 3, 4$) — секторные площади, отвечающие этим точкам. Подставляя эти величины, взятые для каждой точки, в формулу (3.18), получим систему четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных $\zeta'', \xi'', \eta'', \theta''$. Если точки x_i, y_i выбраны так, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \omega_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & \omega_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & \omega_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & \omega_4 \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

отличен от нуля, то для неизвестных ζ'', ξ'', η'' и θ'' получают определенные значения, и эпюра относительных удлинений для поперечного сечения стержня может быть построена.

Если же точки x_i, y_i выбраны так, что определитель (4.14) равен нулю, то система уравнений становится несовместной, и эпюру относительных удлинений построить нельзя.

Отметим два случая обращения в нуль определителя (4.14):

1) Определитель обращается в нуль, если все четыре точки лежат на одной прямой. Действительно, разлагая определитель по элементам последнего столбца, мы будем иметь множителями при ω_i ($i=1, 2, 3, 4$) нули, так как эти множители представляют собой площади треугольников, вершины которых лежат на одной прямой.

2) Определитель обращается в нуль, когда три точки лежат на одном прямолинейном участке профиля стержня. В самом деле, эпюра относительных удлинений на прямолинейном участке меняется по закону прямой, следовательно, определяется на этом участке двумя ординатами.

Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля, состоящий из узких прямоугольных пластинок. Поперечное сечение стержня и эпюра относительных удлинений показаны на рис. 16. При построении секторного центра деформации мы будем исходить из эпюры относительных удлинений для части профиля, составленной из отрезков $1-2, 3-4, 5-6$, поскольку эпюру относительных удлинений для всего поперечного сечения стержня можно определить четырьмя ординатами, заданными в точках $1, 2, 3, 4$ (рис. 16).

Отметим на рис. 16 три точки: M_0, M_0', M_0'' , в которых относительные удлинения равны нулю. Точки M_0 и M_0'' принадлежат профилю, точка M_0' получается продолжением прямолинейных отрезков $1-2$ и $1'-2'$ до взаимного пересечения. Проведем далее прямую M_0-M_0' . Эта прямая является нейтральной осью для части стержня $1-2-5-M_0$,

поскольку относительные удлинения для этой части профиля пропорциональны расстояниям до прямой M_0-M_0' .

Покажем, что эпюру относительных удлинений для части сечения стержня $1-2-5-M_0$ можно рассматривать как секторную площадь, полюс которой выбран в произвольной точке K прямой, проходящей через точку 5 и параллельной M_0-M_0' , а начальная секторная точка взята в M_0 . Убедимся в том, что для точки M_0 секторная площадь равна нулю. Действительно, секторная площадь в M_0 представляется разностью удвоенных площадей треугольников KM_05 и $KM_0'5$, так как для первого из них секторная площадь положительна (радиус-вектор вращается по часовой стрелке), а для второго — отрицательна (радиус-вектор вращается против часовой стрелки). Но площади этих треугольников равны: они имеют общие высоты $K-L$ и основания $K-5$. Поскольку в точке M_0 секторная площадь равна нулю, а на участке $5-M_0$ эпюра меняется по закону секторной площади, то наше утверждение доказано.

Точно так же доказывается, что прямая M_0-M_0'' является нейтральной осью для части профиля $3-4-6-M_0$ и что эпюра относительных удлинений для этой части меняется по закону секторной площади с полюсом, взятым в произвольной точке K' прямой, параллельной M_0-M_0'' и проходящей через точку 6 , в начальной точке M_0 .

Продолжив прямые $K-5$ и $K'-6$ до взаимного пересечения, найдем секторный центр деформации — точку D . Относительное удлинение в поперечном сечении нашего стержня будет меняться по закону секторной площади с полюсом в точке D и начальной секторной точкой M_0 .

3. Рассмотрим стержень, состоящий из одного или нескольких, связанных между собой пучков узких прямоугольных пластинок. Поперечное сечение такого стержня, состоящего из одного пучка, показано на рис. 17.

Для любого пучка справедливо следующее утверждение:

В пределах пучка относительные удлинения меняются по поперечному сечению по закону плоских сечений.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что секторная площадь с полюсом и началом отсчета в произвольных точках

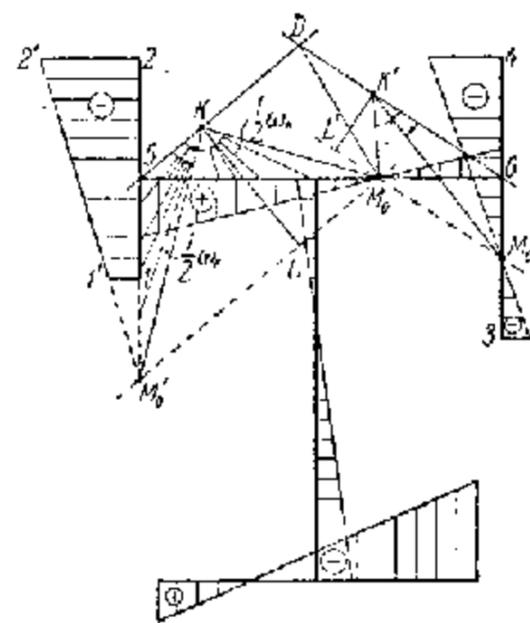


Рис. 16.

поперечного сечения в пределах этого пучка меняется по закону плоскости.

Для удобства рассуждений возьмем начальную секториальную точку в центре пучка — точке A . Полюс секториальной площади выберем в произвольной точке K поперечного сечения стержня (рис. 17).

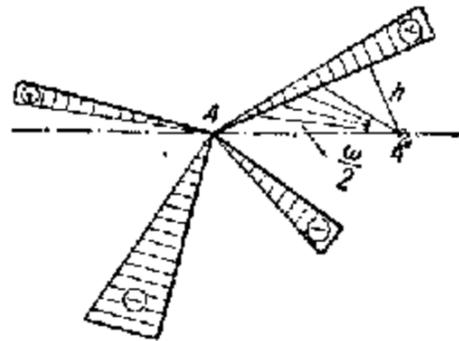


Рис. 17.

Проведем прямую линию через эти точки. Прямая AK будет нейтральной осью пучка A , поскольку секториальные площади для точек пучка пропорциональны расстояниям от этих точек до прямой AK . Следовательно, в пределах пучка секториальная эпюра меняется по закону плоскости, что и доказывает теорему.

Следствием нашей теоремы является следующее утверждение: тонкостенный стержень, состоящий из одного пучка прямоугольных весьма тонких пластинок, не испытывает деформации. Его поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

§ 5. Зависимость между напряжениями и деформациями

До сих пор мы рассматривали тонкостенный стержень с чисто геометрической точки зрения. Исходя из гипотезы о недеформируемости контура сечения и считая, что деформации сдвига срединной поверхности равны нулю, т. е. что координатные линии $z = \text{const}$ и $s = \text{const}$ после деформации остаются взаимно ортогональными, мы получили общий закон (3.18) для продольных деформаций.

Однако формула (3.18) не дает еще вполне определенного выражения для деформаций ε , поскольку в ней функции $\zeta(z)$, $\bar{\zeta}(z)$, $\eta(z)$ и $b(z)$ неизвестны.

Такая кинематическая неопределенность происходит вследствие того, что нами совершенно не использованы статические условия, а именно, условия равновесия упругого тела, получившего определенную деформацию. Задача становится вполне определенной, если к кинематическим условиям, выразившимся для деформаций ε в законе секториальных площадей, добавить статические условия и использовать физическую зависимость между напряжениями и деформациями, представленную законом Гука.

С переходом стержня в деформированное состояние в нем возникнут внутренние силы упругости. Эти силы в поперечном сечении $z = \text{const}$ представляются нормальными и касательными напряжениями.

Из всех напряжений, возникающих в поперечном сечении стержня, в нашей теории, относящейся к стержням, состоящим из тонких пластинок, учитываются нормальные напряжения, действующие по направ-

лению образующей срединной поверхности, и касательные напряжения, направленные по касательной к профильной линии; касательные же напряжения, направленные по нормали к профильной линии, в нашей теории, как величины весьма малые, принимаются равными нулю.

В дальнейшем будем считать, что нормальные напряжения по толщине стенки стержня остаются постоянными, касательные же напряжения по толщине стенки меняются по линейному закону (рис. 18, а, б).

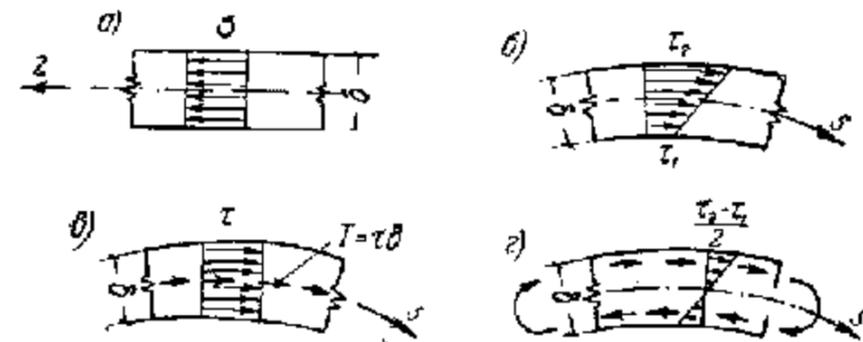


Рис. 18.

Исходя из этих статических гипотез, относящихся к напряжениям, действующим в поперечном сечении стержня, мы тем самым заранее полагаем равными нулю так называемые продольные изгибающие моменты, возникающие вследствие неравномерного распределения продольных нормальных напряжений по толщине стенки стержня*).

Нормальные напряжения поперечного сечения, по умножении их на толщину стенки, статически приводятся к одним только нормальным усилиям, действующим по направлению образующей срединной поверхности.

Касательные же напряжения приводятся к сдвигающим силам, действующим по направлению касательной к дуге контура (рис. 18, в), и крутящим моментам. Сдвигающие силы получаются из общей трапециевидальной эпюры касательных напряжений путем выделения прямоугольной эпюры с ординатой, равной полусумме ординат в крайних точках эпюры. Крутящие моменты возникают вследствие разности касательных напряжений в крайних точках стенки. Эти моменты статически эквивалентны касательным напряжениям, меняющимся по толщине стенки по закону кососимметричной треугольной эпюры и принимающим в крайних точках стенки значения, равные полуразности крайних ординат трапеции (рис. 18, г).

Таким образом, напряженное состояние стержня в плоскости поперечного сечения может быть выражено через нормальные напряжения $\sigma(z, s)$, средние касательные напряжения $\tau(z, s)$ и крутящие моменты. Касательные и нормальные напряжения $\tau(z, s)$ и $\sigma(z, s)$ рассматриваются

* Расчет тонкостенных стержней с учетом продольных изгибающих моментов приведен в § 14 гл. II.

как функции двух переменных z и s . Крутящие же моменты, приходящиеся на единицу длины и зависящие от разности касательных напряжений в крайних точках стенки, мы будем приводить к крутящему моменту $H_k(z)$, распространенному на все поперечное сечение. Этот момент будет функцией одной переменной z .

Условимся относительно знаков этих величин. Элементарная площадка поперечного сечения будет считаться положительной, если

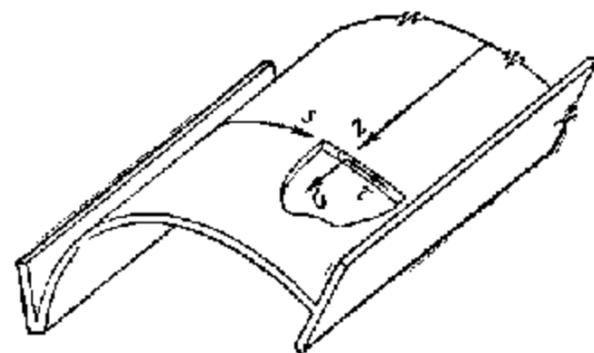


Рис. 19.

внешняя нормаль к этой площадке направлена в сторону положительных значений координаты z (рис. 19). Напряжения, действующие в какой-либо точке этой площадки, будем считать положительными, если они направлены в сторону возрастания координат точки срединной поверхности оболочки (рис. 19). Крутящий момент условимся считать положительным, если со стороны положительной

площадки он вращает поперечное сечение по часовой стрелке.

Пользуясь физической зависимостью между напряжениями и деформациями стержня, мы можем определить напряжения σ , τ и момент H_k через деформации.

Согласно закону Гука относительные удлинения элемента срединной поверхности стержня по двум взаимно перпендикулярным направлениям представляются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{E} (\sigma - \mu \sigma_1), \\ \epsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где ϵ и ϵ_1 — относительные удлинения стержня в продольном и поперечном направлениях; σ и σ_1 — нормальные напряжения, соответственно по площадкам поперечного и продольного сечений; E — модуль упругости (при растяжении); μ — коэффициент Пуассона.

Согласно гипотезе о недеформируемости контура мы должны деформацию удлинения ϵ , дуги контура положить равной нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \mu \sigma &= 0, \\ \sigma_1 &= \mu \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

откуда

Внося выражение (5.2) в первую из формул (5.1), получим:

$$\epsilon = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma. \quad (5.3)$$

Формулой (5.3) устанавливается зависимость между продольными относительными удлинениями ϵ и нормальными напряжениями σ . Эту зависимость мы можем представить и в такой форме:

$$\sigma = E_1 \epsilon, \quad (5.4)$$

где через E_1 обозначен приведенный модуль упругости продольного растяжения:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}. \quad (5.5)$$

В дальнейшем мы будем пренебрегать величиной μ^2 по сравнению с единицей и считать $E_1 = E$.

Подставив значение ϵ из формулы (3.18) в формулу (5.4), получим общий закон распределения нормальных напряжений $\sigma = \sigma(z, s)$:

$$\sigma = E (\xi'' - \xi'' x - \eta'' y - b'' \omega). \quad (5.6)$$

Согласно этому закону нормальные напряжения σ получаются в результате наложения напряжений, распределенных по сечению $z = \text{const}$ по закону расстояний от некоторой прямой, и напряжений, меняющихся в зависимости от дуги s по закону секториальных площадей. Как и в случае деформаций e , закон распределения напряжений σ по сечению $z = \text{const}$ может быть представлен секториальной площадью $\omega(z, s)$ с полюсом в центре деформации. Действительно, на основании формул (4.9) и (5.4) имеем:

$$\tau(z, s) = -E b''(z) \omega_D(z, s).$$

Формула (5.6), как мы видим, является обобщением известной в сопротивлении материалов трехчленной формулы, относящейся к продольному нормальному напряжению в стержне, испытывающем одновременно осевую деформацию и деформацию изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Четырехчленной формулой (5.6) утверждается, что в поперечных сечениях тонкостенного стержня, помимо напряжений, обусловленных растяжением и изгибом стержня и распределенных по сечению $z = \text{const}$ по закону плоских сечений (то есть зависящих от координат x и y линейно), могут возникать также продольные нормальные напряжения, определяемые законом секториальных площадей.

Отличие нашей теории от теории так называемого чистого кручения состоит именно в том, что закон секториальных площадей, представленный общей четырехчленной формулой (5.6), позволяет определить нормальные напряжения при кручении стержня, которые в теории Сен-Венана, относящейся к чистому кручению, принимаются равными нулю.

Определим теперь крутящий момент H_k . Этот момент, как уже отмечалось выше, возникает в поперечном сечении вследствие неравномерного распределения касательных напряжений по толщине стенки стержня и относится к случаю чистого кручения стержня. Из теории

чистого кручения, т. е. кручения, при котором в поперечном сечении возникают одни только касательные напряжения, для крутящего момента имеем выражение

$$H_k = GJ_a \theta', \quad (5.7)$$

где G — модуль упругости при сдвиге; θ' — производная от угла закручивания; J_a — момент инерции при чистом кручении, вычисляемый для тонкостенных складчатых профилей по формуле

$$J_a = \frac{\alpha}{3} \sum a \delta^3, \quad (5.8)$$

причем a и δ — соответственно ширина и толщина пластинок, из которых состоит стержень, α — эмпирический коэффициент, близкий к единице.

Нам осталось теперь определить касательные напряжения. Заметим, что

нормальное напряжение $\sigma(z, s)$, представленное формулой (5.6), мы определили, используя для упругого стержня зависимость (5.4) и считая, следовательно, это напряжение пропорциональным соответствующей ему деформации удлинения. При определении же среднего касательного напряжения $\tau(z, s)$, показанного на рис. 18, в, мы не можем воспользоваться аналогичным уравнением упругости, поскольку в нашей теории деформация сдвига, вызываемая касательными напряжениями, по малости принята равной нулю.

При определении касательных напряжений $\tau(z, s)$ мы будем исходить уже не из закона Гука, а из соответствующего условия статики, выражающего равновесие элемента оболочки в продольном направлении. Таким образом, эти напряжения определяются статическим методом, подобно тому, как это имеет место в элементарной теории изгиба балок.

Выделяя из стержня в координатах z и s бесконечно малый элемент со сторонами dz и ds (рис. 20) и приравняв нулю сумму проекций всех сил, действующих на этот элемент, на направление образующей, получим:

$$d(\sigma \delta) ds + d(\tau \delta) dz + p_z dz ds = 0, \quad (5.9)$$

где $\delta = \delta(s)$ — толщина оболочки, являющаяся в общем случае функцией от s ; $p_z = p_z(z, s)$ — проекция интенсивности внешней поверхностной нагрузки на ось z ; эта проекция в общем случае зависит от двух переменных z и s .

Разделив уравнение (5.9) на произведение дифференциалов $dz ds$, получим:

$$\frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} + p_z = 0, \quad (5.10)$$

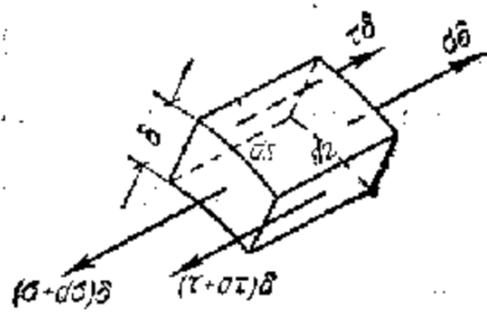


Рис. 20.

В этом уравнении $\sigma \delta$ и $\tau \delta$ представляют собой нормальные и сдвигающие усилия, отнесенные к единице длины, возникающие в поперечном сечении $z = \text{const}$. Решая уравнение (5.10) относительно касательных напряжений τ и принимая во внимание, что толщина стенки δ не зависит от z , найдем:

$$\tau(z, s) = \frac{1}{\delta} \left[S_0(z) \cdot \int_0^s p_z ds - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta ds \right]. \quad (5.11)$$

Здесь $S_0(z)$ — произвольная функция, зависящая только от одной переменной z . Нетрудно выяснить физический смысл этой функции.

Полагая в выражении (5.11) $s = 0$ и замечая, что определенные интегралы, стоящие в правой части этого выражения, при $s = 0$ обращаются в нуль, получим:

$$\tau(z, 0) = \frac{1}{\delta(0)} S_0(z).$$

Отсюда находим

$$S_0(z) = \tau(z, 0) \delta(0). \quad (5.12)$$

Из выражения (5.12) видно, что функция $S_0(z)$ представляет собой сдвигающие усилия $\tau \delta$, действующие по продольному сечению $s = 0$.

Подставляя в правую часть равенства (5.11) найденное ранее для σ выражение (5.6) и обозначая через dF дифференциал площади сечения δds , мы можем написать:

$$\tau = \frac{1}{\delta} \left[S_0 + \int_0^s p_z ds - E(\zeta'' \int_0^s dF - \xi''' \int_0^s x dF - \eta''' \int_0^s y dF - \theta''' \int_0^s \omega dF) \right]. \quad (5.13)$$

Здесь через ζ'' , ξ''' , η''' и θ''' обозначены вторая и третьи производные от соответствующих функций.

Формулу (5.13) удобно представить в следующем виде:

$$\tau = \frac{1}{\delta} S_0 + \frac{1}{\delta} \int_0^s p_z ds - E \zeta''(z) \frac{F(s)}{\delta} + E \xi''' \frac{S_x(s)}{\delta} + E \eta''' \frac{S_y(s)}{\delta} + E \theta''' \frac{S_\omega(s)}{\delta}, \quad (5.14)$$

где $F(s)$, $S_x(s)$ и $S_y(s)$ — соответственно площадь и статические моменты относительно осей x и y , вычисляемые по формулам:

$$F(s) = \int_0^s dF, \quad S_x(s) = \int_0^s y dF, \quad S_y(s) = \int_0^s x dF; \quad (5.15)$$

$S_{\omega}(s)$ — новая геометрическая характеристика, вычисляемая по формуле

$$S_{\omega} = \int_0^s \omega dF. \quad (5.16)$$

Функция $S_{\omega}(s)$, представляющая вместе с функциями $F(s)$, $S_x(s)$ и $S_y(s)$ распределение сдвигающих усилий по контуру сечения, напоминает по своему виду формулу для статического момента с той только разницей, что роль плеча в этой формуле играет секторная площадь ω ; условимся поэтому в дальнейшем величину $S_{\omega}(s)$ называть *секториальным статическим моментом*.



Рис. 21.

Величины $F(s)$, $S_x(s)$, $S_y(s)$ и $S_{\omega}(s)$, определяемые формулами (5.15) и (5.16), вычисляются для части сечения, заключенной между начальной точкой M_0 на дуге контура, и точкой M , для которой определяется по формуле (5.14) касательное напряжение τ . Если начало координаты s выбрано в крайней точке дуги контура, то эти геометрические факторы вычисляются только для отсеченной части сечения, например, на рис. 21 для части, которая расположена выше точки M , определяемой дугой s .

Если внешняя продольная нагрузка как поверхностная, так и погонная, относящаяся к отдельным продольным линиям, включая и продольные края, отсутствует, то формула (5.13) переходит в более простую:

$$\tau(z, s) = \frac{E}{\delta(s)} \left[-\zeta''(z) F(s) + \xi'''(z) S_y(s) + \eta'''(z) S_x(s) + \theta'''(z) S_{\omega}(s) \right]. \quad (5.17)$$

Формула (5.17), представляющая собой частный случай более общей формулы (5.13), в свою очередь является обобщением известной в сопротивлении материалов формулы для определения касательных напряжений при поперечном изгибе балки.

Первым членом общей формулы (5.17) определяются касательные напряжения, возникающие от действия на стержень сдвигающих усилий, приложенных на продольных краях и вызывающих только растяжение. Вторым и третий члены формулы (5.17) относятся к касательным напряжениям, возникающим при изгибе тонкостенного стержня в двух взаимно перпендикулярных продольных плоскостях. Последним членом, имеющим одинаковое строение со вторым или третьим членом, определяются осевые касательные напряжения, возникающие при стесненном кручении тонкостенного стержня и распределенные по толщине стенки оболочки также равномерно (см. рис. 18, в).

§ 6. Дифференциальные уравнения равновесия стержня в произвольной системе координат

Из формул (5.6), (5.7) и (5.14) видно, что напряжения σ , τ и момент H_{ω} , определяющие состояние внутренних усилий оболочки в поперечном сечении $z = \text{const}$, зависят от функций $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$. Эти функции остаются пока неизвестными. Для определения их нам нужно привлечь неиспользованные еще условия равновесия.

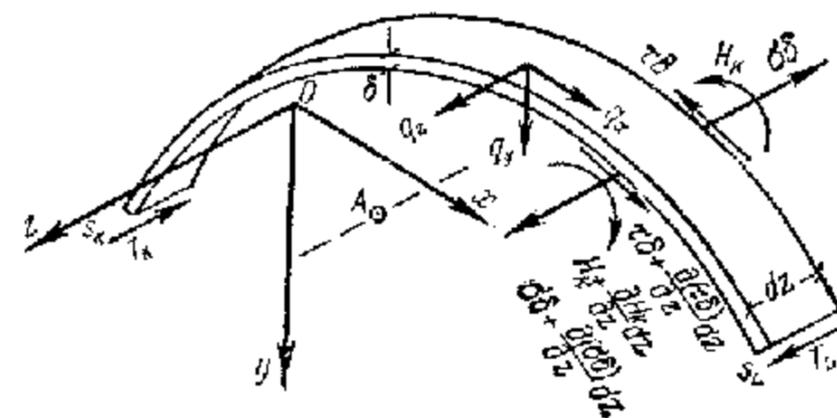


Рис. 22.

Выделим из стержня двумя сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, элементарную поперечную полоску, имеющую ширину dz . Действие стержня на эту полоску заменим нормальными и сдвигающими усилиями и крутящими моментами, распределенными по криволинейным сторонам полоски. Эти усилия и моменты как функции от z при переходе от сечения $z = \text{const}$ к сечению $z + dz = \text{const}$ получают некоторые приращения, пропорциональные (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) дифференциалу dz (рис. 22). Кроме усилий, заменяющих собой действие стержня на выделенный элемент, на него будет действовать также и внешняя нагрузка.

Условия равновесия элементарной поперечной полоски могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum Z &= 0, & \int_L \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} dz ds + (T_L - T_R + q_z) dz &= 0; \\ \sum X &= 0, & \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \cos \alpha \cdot dz ds + q_x dz &= 0; \\ \sum Y &= 0, & \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \sin \alpha \cdot dz ds + q_y dz &= 0; \\ \sum M_A &= 0, & \int_L \frac{\partial(H\delta)}{\partial z} dz [(x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha] ds + \\ & & + H'_L dz + m dz &= 0. \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Первое уравнение получено из условия равенства нулю суммы проекций на направление образующей всех сил, действующих на выделенный элемент. В этом уравнении выражение $\frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} dz ds$, стоящее под интегралом, представляет собой разность продольных нормальных сил, приходящихся на элемент $dz ds$; q_z — продольная поверхностная нагрузка, направленная по оси z и приходящаяся на всю поперечную полоску единичной ширины; $T_L = T_L(z)$ и $T_K = T_K(z)$ — сдвигающие усилия, приложенные по продольным краям стержня, определяемым крайними точками контура $s = s_K$ и $s = s_L$.

Вторым и третьим уравнениями выражены условия равновесия элементарной полоски по направлениям осей x и y поперечного сечения. В этих уравнениях подынтегральные выражения $\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \cos \alpha \cdot dz ds$ и $\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \sin \alpha \cdot dz ds$ представляют собой соответственно проекции на оси x и y дифференциала сдвигающей силы, приходящейся на элемент оболочки $dz ds$; $q_x = q_x(z)$ и $q_y = q_y(z)$ — интенсивности внешних поперечных нагрузок, действующих соответственно по направлению координатных осей x и y .

Последнее уравнение получено из условия равенства нулю суммы действующих относительно произвольной точки A поперечного сечения моментов от всех сил, приложенных к выделенному элементу. Первым членом этого уравнения представлен момент от осевых сдвигающих усилий, приложенных по сечениям $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$; этот момент для элемента dz определяется как момент от проекций на оси x и y дифференциалов сдвигающих сил, действующих по направлению касательных к дугам контуров сечений. Второй член представляет собой дифференциал крутящего момента H_x , приходящийся на полоску шириною dz . Последним членом m выражен момент от внешней поперечной нагрузки.

Интегралы (6.1) вычисляются по переменной s для всей кривой L поперечного сечения. Сокращая уравнения (6.1) на dz и замечая, что

$$ds \cos \alpha = dx, \quad ds \sin \alpha = dy,$$

$$[(x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha] ds = d\omega$$

[см. формулу (4.1)], мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \int_L \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} ds + T_L - T_K + q_z &= 0, \\ \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} dx + q_x &= 0, \\ \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} dy + q_y &= 0, \\ \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} d\omega + H'_x + m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Толщина стенки стержня δ нами рассматривается как функция одной переменной s . На этом основании толщина δ , стоящая под интегралом в первом из уравнений (6.2), может быть вынесена из-под знака частной производной от выражения $(\sigma\delta)$.

Обозначая в этом уравнении произведение δds через dF и применяя формулу интегрирования по частям к интегралам, стоящим в остальных трех уравнениях, получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{\partial\sigma}{\partial z} dF + T_L - T_K + q_z &= 0, \\ \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} x \right]_K^L - \int_L x \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \right] ds + q_x &= 0, \\ \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} y \right]_K^L - \int_L y \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \right] ds + q_y &= 0, \\ \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \omega \right]_K^L - \int_L \omega \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \right] ds + H'_x + m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

В этих уравнениях выражения, стоящие под знаком подстановок, нужно вычислить при значениях независимой переменной s , определяющих положение крайних точек кривой $z = \text{const}$, т. е. при $s = s_K$ и $s = s_L$.

Величина $\tau\delta$ представляет собой сдвигающее усилие T , приходящееся на единицу длины продольного сечения средней поверхности. При $s = s_K$ и $s = s_L$ эта величина принимает соответственно значения сдвигающих усилий $T_K(z)$ и $T_L(z)$, приложенных по продольным краям стержня. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \right]_{s=s_K} &= T'_K(z), \\ \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial z} \right]_{s=s_L} &= T'_L(z). \end{aligned} \right\}$$

Выполняя в уравнениях (6.3) подстановку и меняя местами в подынтегральных выражениях частные производные по z и s от функции $(\tau\delta)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{\partial\sigma}{\partial z} dF + q_z + T_L - T_K &= 0, \\ - \int_K x \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} \right] ds + q_x + T'_L x_L - T'_K x_K &= 0, \\ - \int_K y \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} \right] ds + q_y + T'_L y_L - T'_K y_K &= 0, \\ - \int_F \omega \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} \right] ds + H'_x + m + T'_L \omega_L - T'_K \omega_K &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где x_K, y_K, x_L и y_L — соответственно координаты начальной и конечной точек кривой поперечного сечения оболочки; ω_K и ω_L — секториальные площади для этих точек.

Из формул (5.6), (5.14) и (5.7) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial z} dF &= \zeta'' E dF - \zeta''' E x dF - \eta''' E y dF - \theta''' E \omega dF, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial (\pi^2)}{\partial s} \right] ds &= - \frac{\partial p_x}{\partial z} ds - \zeta''' E dF + \zeta^{IV} E x dF + \\ &+ \eta^{IV} E y dF + \theta^{IV} E \omega dF, \\ H'_K &= GJ_d \theta'' \end{aligned} \right\} (6.5)$$

Внося теперь в уравнения (6.4) выражения (6.5) и замечая, что производные от искомых функций $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ могут быть вынесены из-под интегралов, получим:

$$\left. \begin{aligned} \zeta'' E \int_F dF - \zeta''' E \int_F x dF - \eta''' E \int_F y dF - \\ - \theta''' E \int_F \omega dF - q_z + T_L - T_K &= 0, \\ \int \frac{\partial p_x}{\partial z} x ds + \zeta''' E \int_F x dF - \zeta^{IV} E \int_F x^2 dF - \\ - \eta^{IV} E \int_F xy dF - \theta^{IV} E \int_F x \omega dF + q_x + T'_L x_L - T'_K x_K &= 0, \\ \int \frac{\partial p_x}{\partial z} y ds + \zeta''' E \int_F y dF - \zeta^{IV} E \int_F yx dF - \\ - \eta^{IV} E \int_F y^2 dF - \theta^{IV} E \int_F y \omega dF + q_y + T'_L y_L - T'_K y_K &= 0, \\ \int \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + \zeta''' E \int_F \omega dF - \zeta^{IV} E \int_F \omega x dF - \\ - \eta^{IV} E \int_F \omega y dF - \theta^{IV} E \int_F \omega^2 dF + \\ + GJ_d \theta'' + m + T'_L \omega_L - T'_K \omega_K &= 0. \end{aligned} \right\} (6.6)$$

Мы получили четыре дифференциальных уравнения относительно четырех неизвестных функций $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$. Интегралы, входящие в коэффициенты этих уравнений, вычисляются для всего поперечного сечения стержня.

Для большей наглядности представим уравнения (6.6) в следующей табличной форме:

Таблица 1

$\zeta(z)$	$\xi(z)$	$\eta(z)$	$\theta(z)$	Члены, зависящие от нагрузки
$\int_F 1^2 dF \cdot D^2$	$\int_F 1x dF \cdot D^2$	$-\int_F 1y dF \cdot D^2$	$-\int_F 1\omega dF \cdot D^2$	$= -\frac{1}{E} (q_z + T_L - T_K)$
$-\int_F x1 dF \cdot D^2$	$\int_F x^2 dF \cdot D^2$	$\int_F xy dF \cdot D^2$	$\int_F \omega x dF \cdot D^2$	$= \frac{1}{E} (q_x + T'_L x_L - T'_K x_K + \int x \frac{\partial p_x}{\partial z} ds)$
$-\int_F y1 dF \cdot D^2$	$\int_F yx dF \cdot D^2$	$\int_F y^2 dF \cdot D^2$	$\int_F \omega y dF \cdot D^2$	$= \frac{1}{E} (q_y + T'_L y_L - T'_K y_K + \int y \frac{\partial p_y}{\partial z} ds)$
$-\int_F \omega 1 dF \cdot D^2$	$\int_F \omega x dF \cdot D^2$	$\int_F \omega y dF \cdot D^2$	$\int_F \omega^2 dF \cdot D^2 - \frac{GJ_d}{E} D^2$	$= \frac{1}{E} (m + T'_L \omega_L - T'_K \omega_K + \int \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds)$

Буквой D в таблице 1 обозначен символический оператор, обозначающий взятие производной по переменной z ,

$$D = \frac{\partial}{\partial z}$$

от функции, стоящей в заголовке соответствующей колонки; показатель степени при D обозначает порядок производной. Так, например, слагаемое, стоящее во втором уравнении в колонке под $\xi(z)$, в раскрытом виде выглядит так: $\int x^2 dF \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$ и т. д.

При такой форме записи легче заметить, что система дифференциальных уравнений равновесия выделенной полоски стержня-оболочки обладает симметричным строением. Коэффициенты табл. 1, симметрично расположенные относительно диагонали, проходящей от верхнего левого угла к нижнему правому углу, равны друг другу. Таким образом, из 16 коэффициентов системы только 10 оказываются существенно различными между собой: четыре диагональных и шесть побочных.

Из табл. 1 легко подметить также закон образования этих коэффициентов; все они представлены в виде интегралов, вычисляемых для площади всего поперечного сечения стержня. Подынтегральные

функции образуются из четырех известных функций (рис. 23):

$$1; x(s); y(s); \omega(s) \quad (6.7)$$

путем попарного перемножения их; так, подынтегральные функции коэффициентов первого уравнения получаются умножением первой функции 1 (постоянная для всего контура поперечного сечения) на каждую из функций (6.7); подынтегральные функции коэффициентов второго уравнения получаются умножением функции $x(s)$ на каждую из функций (6.7); аналогичным же образом получаются подынтегральные функции коэффициентов двух последних уравнений умножением функций $y(s)$ и $\omega(s)$ на каждую из функций (6.7).

При заданном контуре поперечного сечения эти коэффициенты представляют вполне определенные величины; так как они зависят

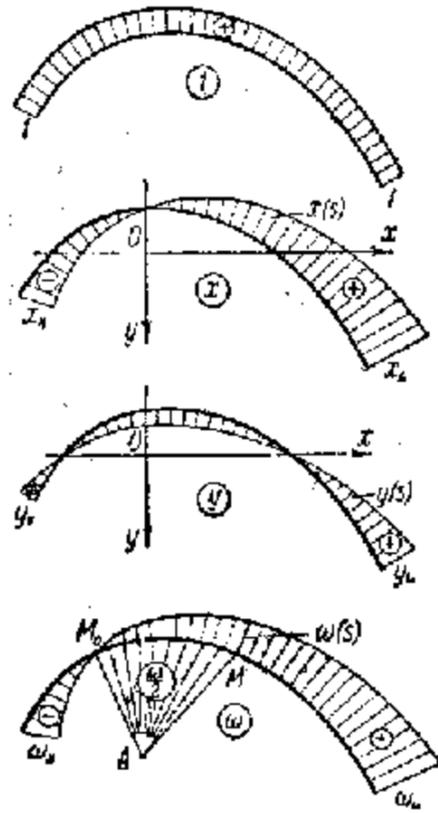


Рис. 23.

от формы профиля стержня, то их называют *геометрическими характеристиками сечения*. С некоторыми из них мы уже встречались в сопротивлении материалов. Они имеют следующие сокращенные символические обозначения:

а) статические моменты (размерность $[L^3]$, где $[L]$ — единица длины):

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF; \quad (6.8)$$

б) моменты инерции (размерность $[L^4]$):
осевые:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad (6.9)$$

центробежный

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (6.10)$$

По аналогии с обозначениями и терминологией, принятыми в сопротивлении материалов, характеристики, получающиеся вследствие введения нами новой

секториальной координаты $\omega(s)$, мы называем и обозначаем сокращенно так:

а) секториальный статический момент (см. § 5) (размерность $[L^4]^*$):

$$S_\omega = \int_F \omega dF; \quad (6.11)$$

*) Здесь и в дальнейшем новые геометрические характеристики сечения отмечаются индексами подынтегральных функций.

б) секториальный момент инерции (биомомент инерции) (размерность $[L^6]$):

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF; \quad (6.12)$$

и секториальные центробежные моменты инерции (размерность $[L^5]$):

$$J_{\omega x} = \int_F \omega x dF, \quad J_{\omega y} = \int_F \omega y dF. \quad (6.13)$$

При этих обозначениях система дифференциальных уравнений равновесия стержня запишется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_z'' - S_y z'''' - S_x \eta'''' - S_\omega \theta'''' &= -\frac{1}{E} (q_z + T_L - T_K), \\ -S_y z'''' + J_y z'''' + J_{xy} \eta'''' + J_{\omega x} \theta'''' &= \\ &= \frac{1}{E} \left(q_x + T_L x_L - T_K x_K + \int_L x \frac{\partial p_x}{\partial z} ds \right), \\ S_x z'''' + J_{xy} z'''' + J_x \eta'''' + J_{\omega y} \theta'''' &= \\ &= \frac{1}{E} \left(q_y - T_L' y_L - T_K' y_K + \int_L y \frac{\partial p_y}{\partial z} ds \right), \\ -S_\omega z'''' + J_{\omega x} z'''' + J_{\omega y} \eta'''' + J_\omega \theta'''' - \frac{GJ_d}{E} \theta'' &= \\ &= \frac{1}{E} \left(m + T_L \omega_L - T_K \omega_K + \int_L \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

§ 7. Дифференциальные уравнения равновесия стержня в главных координатах

1. Система дифференциальных уравнений равновесия стержня-оболочки (6.14) имеет сложный и неудобный для практического применения вид. Это объясняется тем, что мы выбрали основные функции 1 , $x(s)$, $y(s)$ и $\omega(s)$ произвольно; поперечное сечение мы отнесли к произвольным прямоугольным осям, полюс секториальной площади выбрали в произвольной точке A , начало отсчета секториальной площади — в произвольной точке M_1 профильной линии.

Произвол этот, следовательно, характеризуется свободным выбором на плоскости поперечного сечения стержня шести величин: S_x и S_y , определяющих положение начала отсчета координат; J_{xy} , определяющей направление осей координат; $J_{\omega x}$ и $J_{\omega y}$, определяющих положение полюса секториальных площадей; S_ω , определяющей направление начального радиуса-вектора (или, другими словами, положение начальной точки отсчета секториальных площадей).

Выберем основные функции 1 , $x(s)$, $y(s)$ и $\omega(s)$ так, чтобы они были ортогональны, понимая под ортогональностью свойство этих функций, состоящее в том, что интегралы из попарных произведений функций (но не квадратов их) по площади сечения F , распространенные на все поперечное сечение, равны нулю, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} S_y &= \int_F 1x dF = 0, & S_\omega &= \int_F 1\omega dF = 0, \\ S_x &= \int_F 1y dF = 0, & J_{\omega x} &= \int_F x\omega dF = 0, \\ J_{xy} &= \int_F xy dF = 0, & J_{\omega y} &= \int_F y\omega dF = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Мы видим, что условия ортогональности основных функций представляют собой условия обращения в нуль всех побочных коэффициентов уравнений (6.14).

При выполнении условий ортогональности (7.1) для основных функций система этих уравнений распадается на четыре отдельных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EF\zeta'' &= -(q_z + T_L - T_K), \\ EI_y \xi^{IV} &= q_x + T_L x_L - T_K x_K + \int_L^s x \frac{\partial p_z}{\partial z} ds, \\ EJ_x \eta^{IV} &= q_y - T_L y_L - T_K y_K + \int_L^s y \frac{\partial p_z}{\partial z} ds, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' &= m + T_L \omega_L - T_K \omega_K + \int_L^s \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Если продольные края стержня свободны от сдвигающих сил и внешняя нагрузка представлена одними только погонными поперечными силами $q_x(z)$, $q_y(z)$ и моментом $m(z)$ (наиболее часто встречающийся в практике случай), то уравнения (7.2) имеют еще более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} EF\zeta'' &= 0, \\ EJ_y \xi^{IV} &= q_x, \\ EJ_x \eta^{IV} &= q_y, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' &= m. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Первое из уравнений (7.3) определяет продольные перемещения $\zeta(z)$ от продольной растягивающей или сжимающей силы, приложенной на концах стержня и распределенной по сечению равномерно.

Второе и третье уравнения относятся к поперечному изгибу стержня и определяют перемещения $\xi(z)$, $\eta(z)$ такой точки A поперечного

сечения, которая отличается тем, что взятая относительно нее секторная площадь $\omega(s)$ обладает свойством ортогональности по отношению к функциям $x(s)$ и $y(s)$.

Четвертое уравнение относится к кручению стержня при действии поперечной нагрузки, дающей относительно точки A внешний погонный крутящий момент $m(z)$.

2. Функции 1 , $x(s)$, $y(s)$ и $\omega(s)$, удовлетворяющие условиям ортогональности (7.1), мы назовем *главными обобщенными координатами* поперечного сечения тонкостенного стержня. Физический смысл условий ортогональности (7.1) заключается в том, что планарная работа внутренних (внешних) сил двух каких-либо состояний деформации стержня, определяемых перемещениями $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$, при отнесении поперечного сечения к главным обобщенным координатам 1 , $x(s)$, $y(s)$ и $\omega(s)$ равна нулю.

Определим главные обобщенные координаты поперечного сечения.

Прежде всего заметим, что первые три условия ортогональности (7.1) относятся к закону плоских сечений и представляют известные в сопротивлении материалов условия для определения главных центральных осей сечения. Следовательно, координаты $x(s)$ и $y(s)$ отсчитываются от главных центральных осей поперечного сечения и являются главными координатами.

Нашей задачей является определение главной секторальной координаты ω . Для этого мы воспользуемся последними тремя условиями ортогональности (7.1). Из этих условий последние два нам понадобятся для определения полюса главной секторальной координаты, а первое — для определения начальной секторальной точки.

Необходимо отметить, что при определении полюса и начала отсчета главной секторальной координаты мы можем относить поперечное сечение к произвольной системе координат Oxy . Ниже мы это докажем. Вначале же, для простоты вычислений, будем считать, что система координат Oxy отнесена к главным центральным осям.

Найдем сначала координаты искомого полюса. Ранее мы получили формулу (4.5), которую запишем следующим образом:

$$\omega_A = \omega_B + (a_y - b_y)x(s) - (a_x - b_x)y(s) + [(a_x - b_x)y(s_0) - (a_y - b_y)x(s_0)], \quad (7.4)$$

где ω_A , ω_B — секторные площади части контура поперечного сечения стержня с полюсами соответственно в точках A и B ; $x(s_0)$, $y(s_0)$ — координаты начальной точки (точки, для которой $\omega_A = \omega_B = 0$);

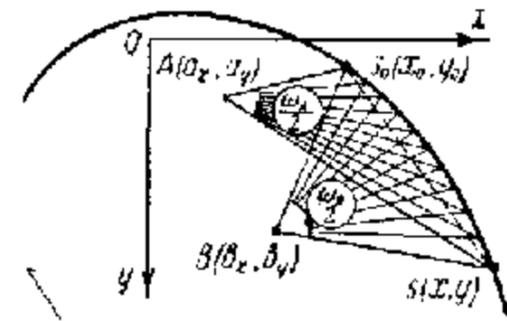


Рис. 24.

$x(s)$, $y(s)$ — текущие координаты точки контура s , для которой определяются секториальные площади ω_A и ω_B ; a_x , a_y — координаты точки A ; b_x , b_y — координаты точки B (все координаты отнесены к произвольной прямоугольной системе координат Oxy).

Формулой (7.4) мы связали секториальные координаты, отсчитываемые от общего начала, но имеющие полюса в двух произвольных точках A и B поперечного сечения (рис. 24).

Вспользуемся условиями ортогональности: $J_{mx} = 0$ и $J_{my} = 0$. Предположим, что A есть полюс, при котором эти условия выполняются, а B — некоторый вспомогательный полюс. Тогда, подставляя в условия ортогональности (7.1) формулу (7.4), получим следующие два уравнения:

$$\int_F \omega_A x dF = \int_F \omega_B x dF + (a_y - b_y) \int_F x^2 dF - (a_x - b_x) \int_F xy dF + \\ + [(a_x - b_x)y(s_0) - (a_y - b_y)x(s_0)] \int_F x dF = 0, \\ \int_F \omega_A y dF = \int_F \omega_B y dF + (a_y - b_y) \int_F xy dF - (a_x - b_x) \int_F y^2 dF + \\ + [(a_x - b_x)y(s_0) - (a_y - b_y)x(s_0)] \int_F y dF = 0.$$

Так как сечение отнесено к главным центральным осям, то

$$\int_F xy dF = J_{xy} = 0, \quad \int_F x dF = S_y = 0, \quad \int_F y dF = S_x = 0.$$

Вспользовавшись обозначениями (6.9) и (6.13) для моментов инерции, получим:

$$\left. \begin{aligned} a_x - b_x - a_y - b_y &= \frac{1}{J_x} \int_F \omega_B y dF = \frac{J_{\omega_B y}}{J_x}, \\ a_y - b_y - a_x - b_x &= -\frac{1}{J_y} \int_F \omega_B x dF = -\frac{J_{\omega_B x}}{J_y}. \end{aligned} \right\} (7.5)$$

Точка A с координатами a_x , a_y называется *главным секториальным полюсом*, или просто *главным полюсом*.

Убедимся в том, что координаты точки A , определяемые формулами (7.5), не зависят от того, где мы возьмем начало отсчета секториальной площади ω_B , или, другими словами, координаты этой точки инвариантны по отношению к началу отсчета секториальных площадей.

Предварительно отметим следующий очевидный факт. Секториальные площади $\omega_B(s_0, s)$ и $\omega_B(s_1, s)$, имеющие общий полюс в точке B , но различные начальные секториальные точки s_0 и s_1 , отличаются друг от друга на постоянную величину $\omega_B(s_0, s_1)$, равную удвоенной

площади сектора, заключенной между радиусами-векторами, соединяющими полюс с этими точками (рис. 25):

$$\omega_B(s_0, s) = \omega_B(s_1, s) + \omega_B(s_0, s_1). \quad (7.6)$$

Подставляя значения (7.6) в формулы (7.5), получим:

$$a_x - b_x = \frac{1}{J_x} \int_F y \omega_B(s_0, s) dF = \frac{1}{J_x} \left[\int_F y \omega_B(s_1, s) dF + \omega_B(s_1, s_0) \int_F y dF \right], \\ a_y - b_y = -\frac{1}{J_y} \int_F x \omega_B(s_0, s) dF = \\ = -\frac{1}{J_y} \left[\int_F x \omega_B(s_1, s) dF + \omega_B(s_1, s_0) \int_F x dF \right].$$

Так как мы имеем дело с главными центральными осями, то

$$\int_F x dF = S_y = 0, \quad \int_F y dF = S_x = 0,$$

отсюда следует:

$$a_x - b_x = \frac{1}{J_x} \int_F y \omega_B(s_0, s) dF = \frac{1}{J_x} \int_F y \omega_B(s_1, s) dF, \\ a_y - b_y = -\frac{1}{J_y} \int_F x \omega_B(s_0, s) dF = -\frac{1}{J_y} \int_F x \omega_B(s_1, s) dF,$$

что и подтверждает высказанное положение.

Из изложенного видно, что главный полюс есть особая точка поперечного сечения стержня; положение полюса (как и положение центра тяжести) зависит только от геометрических размеров поперечного сечения.

Нетрудно убедиться в том, что у оболочек и складчатых профилей, имеющих в поперечном сечении одну ось симметрии, главный полюс лежит на этой оси. В случае сечения с двумя осями симметрии главный полюс находится на пересечении осей симметрии и, следовательно, совпадает с центром тяжести сечения.

Координаты главного полюса в главных центральных осях стержня выражаются согласно формуле (7.5) через координаты другой, произвольно выбранной точки B , служащей полюсом для вспомогательной секториальной площади ω_B . Пользуясь произволом в выборе точки B , мы можем поместить ее, в частности, в центре тяжести сечения; тогда

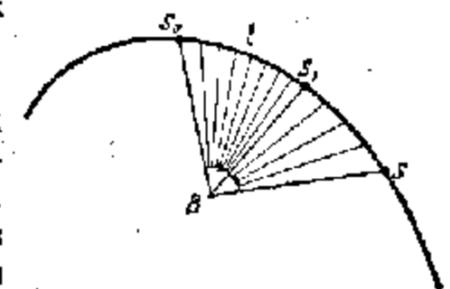


Рис. 25.

формулы (7.5) будут иметь более простой вид:

$$a_x = \frac{1}{J_x} \int_F \omega_y y dF,$$

$$a_y = -\frac{1}{J_y} \int_F \omega_x x dF.$$

Обратимся теперь к определению начальной секториальной точки главной секториальной координаты ω . Эту точку мы найдем, воспользовавшись условием ортогональности $S_{\omega} = 0$.

Отметим, что секториальный статический момент, определяемый как интеграл от произведения секториальной площади ω на дифференциал площади поперечного сечения dF , при произвольном выборе точки s_0 (но при фиксированном положении полюса A) будет равен разности статических моментов, вычисленных отдельно для участков сечения с положительными и отрицательными секториальными площадями. Благодаря этому мы всегда можем выбрать начало отсчета секториальных площадей так, чтобы секториальный статический момент S_{ω} всего сечения обратился в нуль.

Выше мы получили выражение (7.6), в котором связали две секториальные площади, имеющие общий полюс B , но различные начальные секториальные точки s_0 и s_1 . Эта формула для полюса A главной секториальной координаты примет вид:

$$\omega_A(s_1, s) = \omega_A(s_0, s) - \omega_A(s_0, s_1).$$

Величина $\omega_A(s_0, s_1)$, равная удвоенной площади сектора, заключенного между радиусами-векторами As_0 и As_1 в дуге s_0s_1 , представляет собой функцию дуги s_0s_1 . Обозначив длину дуги через t (рис. 25), введем следующее сокращенное обозначение:

$$\omega_A(s_0, s_1) = D(t). \quad (7.7)$$

Пусть s_1 есть та начальная точка отсчета, при которой выполняется условие $S_{\omega} = 0$. Подставляя в это условие формулу (7.7) получаем:

$$\int_F \omega_A(s_0, s) dF - D(t) F = 0,$$

откуда для величины $D(t)$ находим следующую формулу:

$$D(t) = \frac{1}{F} \int_F \omega_A(s_0, s) dF.$$

В этой формуле секториальной площадью $D(t)$ определяется расстояние t между произвольно выбранной точкой s_0 [от которой отсчитываем подынтегральную координату $\omega_A(s_0, s)$] и искомой точкой s_1 , при которой выполняется условие $S_{\omega} = 0$. Эту точку в дальнейшем будем называть *секториальной нулевой точкой*.

Легко убедиться в том, что у складчатых профилей, имеющих в поперечном сечении одну ось симметрии, секториальная нулевая точка лежит на пересечении этой оси с профильной линией.

Секториальных нулевых точек может быть несколько, а может быть и бесконечно много. Так, у симметричного двутаврового профиля любая точка стенки является нулевой секториальной точкой. Нулевую секториальную точку, наименее удаленную от главного полюса, мы будем называть *главной секториальной нулевой точкой*.

Остановимся теперь на определении главной секториальной координаты ω и соответствующего ей главного секториального момента J_{ω} в том случае, когда поперечное сечение отнесено к произвольной системе координат Oxy .

Запишем формулу (7.4) в более компактном виде:

$$\omega_A = x_y x - \alpha_x y + \alpha + \omega_B, \quad (7.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= a_x - b_x, \\ \alpha_y &= a_y - b_y, \\ \alpha &= (a_x - b_x) y(s_0) - (a_y - b_y) x(s_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Так как координаты искомого главного полюса и нулевой секториальной точки нам неизвестны, то коэффициенты α_x , α_y и α являются неизвестными в выражении (7.8). Известными величинами в этом уравнении являются текущие координаты x и y и секториальная координата ω_B , отнесенная к произвольно выбранному полюсу B с произвольной начальной точкой отсчета. Предполагая, что ω_A есть главная секториальная координата, удовлетворяющая условиям ортогональности (7.1), запишем эти условия в раскрытом виде, подставляя вместо ω_A его выражение по формуле (7.8). Получим три уравнения:

$$J_{\omega_A x} = \int_F (x_y x - \alpha_x y + \alpha + \omega_B) x dF = 0,$$

$$J_{\omega_A y} = \int_F (x_y x - \alpha_x y + \alpha + \omega_B) y dF = 0,$$

$$S_{\omega_A} = \int_F (\alpha_y x - \alpha_x y + \alpha + \omega_B) dF = 0,$$

или в раскрытом виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y \int_F x^2 dF - \alpha_x \int_F xy dF + \alpha \int_F x dF + \int_F \omega_B x dF &= 0, \\ \alpha_x \int_F yx dF - \alpha_y \int_F y^2 dF + \alpha \int_F y dF + \int_F \omega_B y dF &= 0, \\ \alpha_y \int_F x dF - \alpha_x \int_F y dF + \alpha \int_F dF + \int_F \omega_B dF &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Воспользовавшись обозначениями (6.8) — (6.13), мы можем записать систему (7.10) в сокращенном виде:

$$\left. \begin{aligned} J_y z_y - J_{xy} a_x + S_y z &= -J_{\omega B} x, \\ J_{xy} a_y - J_x z_x + S_x a &= -J_{\omega B} y, \\ S_y z_y - S_x a_x + Fz &= -S_{\omega B}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Мы получили систему трех неоднородных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных a_x , a_y и a . Так как матрица коэффициентов этой системы имеет симметричный вид, то неизвестные a_x , a_y и a можно определить, пользуясь, например, сокращенным алгоритмом Гаусса.

После определения a_x , a_y и a по формулам (7.9) можно построить эпиюры главной секториальной координаты ω_A и тем самым получить на эпиюре положение начальной точки отсчета секториальных площадей.

Зная эпиюру ω_A , нетрудно определить главный секториальный момент инерции $J_{\omega A}$. Действительно, подставляя в выражение $J_{\omega A} = \int_F \omega_A^2 dF$ значение ω_A по формуле (7.8), получим:

$$\begin{aligned} J_{\omega A} = & a_y (J_y a_y - J_{xy} a_x + S_y a + J_{\omega B} x) - a_x (J_{xy} a_y - J_x z_x + S_x a + J_{\omega B} y) + \\ & + a (S_y a_y - S_x a_x + Fz + S_{\omega B}) + \\ & + J_{\omega B} x a_y - J_{\omega B} y a_x + S_{\omega B} a + J_{\omega B}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Выражения в скобках на основании (7.11) равны нулю, поэтому формула (7.12) будет иметь более простой вид:

$$J_{\omega A} = a_y J_{\omega B} x - a_x J_{\omega B} y + a S_{\omega B} + J_{\omega B}. \quad (7.13)$$

Так как a_x , a_y и a мы определили из решения системы (7.11), $J_{\omega B} x$, $J_{\omega B} y$, $S_{\omega B}$ и $J_{\omega B}$ при произвольном полюсе B нам известны, то формула (7.13) дает возможность вычислить $J_{\omega A}$.

§ 8. Обобщенные силы поперечного сечения. Бимомент и его физический смысл

Разрешив дифференциальные уравнения (7.2) для общего случая загрузки, или уравнения (7.3) для случая, когда $q_z = T_L = T_K = 0$, при заданных граничных условиях мы определим функции $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$. Зная эти функции, мы можем затем по формулам (5.6), (5.14) и (5.7) найти нормальные и касательные напряжения, а также крутящие моменты, возникающие в поперечном сечении стержня. Для этих напряжений и моментов в случае действия на стержень одних

только поперечных нагрузок ($q_z = T_L = T_K = 0$) мы имели такие выражения*):

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E(\zeta' - \xi''x - \eta''y - \theta''\omega), \\ \tau &= E \left[\xi''' \frac{S_y(s)}{\delta} - \eta''' \frac{S_x(s)}{\delta} + \theta''' \frac{S_{\omega}(s)}{\delta} \right], \\ H_x &= GJ_d \theta'. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где x , y , ω — главные координаты точки сечения; $S_x(s)$, $S_y(s)$ — статические моменты отсеченной части поперечного сечения; $S_{\omega}(s)$ — секториальный статический момент, вычисляемый также для отсеченной части сечения.

Изложенная нами теория тонкостенных стержней основана на идее приведения *двухмерной непрерывной упругой системы*, т. е. системы, равновесие которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных по координатам z , s срединной поверхности оболочки, к *системе дискретно-непрерывной*, т. е. к системе, обладающей конечным числом степеней свободы в поперечном направлении и бесконечно большим числом степеней свободы в направлении образующей оболочки.

Действительно, в § 3 было показано, что элементарная поперечная полоска стержня, заключенная между сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, в силу принятых в нашей теории геометрических гипотез обладает в пространстве семью степенями свободы. Перемещения из плоскости $z = \text{const}$ [продольные перемещения $u(z, s)$] определяются согласно (3.16) четырьмя обобщенными кинематическими величинами: ζ , ξ' , η' и θ' . Перемещения в плоскости $z = \text{const}$ [поперечные перемещения $v(z, s)$ и $w(z, s)$] определяются согласно (3.9) и (3.10) тремя величинами: ξ , η и θ .

В соответствии с этими кинематическими степенями свободы внутренние нормальные и сдвигающие силы тонкостенного стержня, возникающие на площадках поперечного сечения $z = \text{const}$, могут быть приведены к обобщенным продольным и поперечным силам, относящимся ко всему поперечному сечению стержня.

Исходя из понятия возможной (виртуальной) работы, мы можем обобщенные продольные силы определить как работу всех элементарных продольных сил σdF на каждом из рассматриваемых нами в принятой кинематической модели возможном продольном обобщенном перемещении, равном единице. Полагая в формуле (3.16) последовательно $\zeta = 1$, $\xi' = -1$, $\eta' = -1$ и $\theta' = -1$ (три остальные при этом имеют нулевые значения), мы получим четыре элементарных состояния продольных перемещений $u(z, s)$ в сечении $z = \text{const}$: 1, x , y и ω . Помножая элементарную продольную силу σdF последовательно на каждую из функций 1, x , y и ω и интегрируя затем по всей площади сечения,

* В этом случае на основании первого уравнения (7.3) $\zeta'' = 0$.

получим для обобщенных продольных сил, соответствующих этим состояниям, следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma l \, dF, \\ M_x &= \int_F \sigma y \, dF, \\ M_y &= - \int_F \sigma x \, dF, \\ B &= \int_F \sigma \omega \, dF. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Первыми тремя формулами определяются продольная сила и изгибающие моменты поперечного сечения стержня. В соответствии с принятым нами правилом знаков (рис. 26) положительная нормальная сила $\sigma \, dF$, приходящаяся на элемент площади сечения и действующая в положительном квадранте плоскости Oxy , будет давать положительный момент относительно оси Ox и отрицательный — относительно оси Oy . Четвертой формулой (8.2) определяется новая статическая величина, имеющая размерность $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ и соответствующая секториальной деформации сечения ω .

Эта величина B названа нами *бимоментом*. В отличие от момента бимомент представляет собой обобщенную уравновешенную силу, т. е. силу, статически эквивалентную нулю.

Подставляя в (8.2) вместо σ его выражение по первой из формул (8.1) и имея в виду, что мы имеем дело с *главными обобщенными координатами* (l, x, y, ω), удовлетворяющими условиям ортогональности, получим:

$$\left. \begin{aligned} N &= EF \zeta', \\ M_y &= EJ_y \xi'', \\ M_x &= - EJ_x \eta'', \\ B &= - EJ_\omega \theta''. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Формулами (8.3) устанавливается дифференциальная зависимость между основными обобщенными величинами — статическими величинами N, M_y, M_x, B и кинематическими величинами ζ, ξ, η, θ , характеризующими изменение напряжений и деформаций в стержне по переменной z .

Эти формулы можно представить и в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \zeta' &= \frac{N}{EF}, \\ \xi'' &= \frac{M_y}{EJ_y}, \\ \eta'' &= - \frac{M_x}{EJ_x}, \\ \theta'' &= - \frac{B}{EJ_\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Подставляя выражения (8.4) в формулу для нормальных напряжений σ (8.1), получим:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{B}{J_\omega} \omega. \quad (8.5)$$

Этой формулой нормальные напряжения $\sigma(z, s)$ выражены через обобщенные силы $N(z), M_y(z), M_x(z), B(z)$ и главные обобщенные координаты $l, x(s), y(s)$ и $\omega(s)$. Первые три члена в формуле (8.5) совпадают с известными формулами сопротивления материалов, опирающимися на закон плоских сечений. Четвертый член определяет нормальные напряжения, возникающие вследствие того, что сечения при кручении не остаются плоскими, а деформируются по закону секториальных площадей. Эти напряжения пропорциональны произведению бимомента B на секториальную координату ω ; коэффициентом пропорциональности здесь служит величина, обратно пропорциональная главному секториальному моменту инерции J_ω .

Величину EJ_ω , фигурирующую в последних формулах (8.3) и (8.4) и характеризующую жесткость стержня в тех случаях кручения, когда в поперечном сечении возникают нормальные напряжения $\sigma_\omega = \frac{B}{J_\omega} \omega$, распределенные по закону секториальных площадей, будем по аналогии с теорией изгиба балок называть *секториальной жесткостью деформации стержня*.

Подобным же образом мы можем выразить функции, характеризующие изменение касательных напряжений τ по переменной z , через статические факторы — силы. Эти силы мы определим как работу элементарных контурных сдвигающих сил $T \, ds = (\tau \delta) \, ds$ на каждом из возможных единичных перемещений $\xi = 1, \eta = 1, \theta = 1$ контура сечения в плоскости $z = \text{const}$. На основании формул (3.9), (3.15) мы можем определить их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_F (\tau \delta) \, dx, & Q_y &= \int_F (\tau \delta) \, dy, \\ H_\omega &= \int_F (\tau \delta) \, d\omega = \int (\tau \delta) \, h \, ds, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где Q_x, Q_y — поперечные силы в сечении $z = \text{const}$, действующие по направлению осей Ox, Oy ; H_ω — изгибно-крутящий момент от осевых сдвигающих сил $T = \tau \delta$, действующих по касательным к дуге контура сечения относительно центра изгиба.

Подставляя в (8.6) напряжения τ , определяемые второй из формул (8.1) и принимая во внимание, что в силу ортогональности главных координат ξ, η, ω справедливы зависимости*)

$$\int_F S_x dx = 0, \quad \int_F S_x d\omega = 0, \quad \int_F S_\omega dx = 0,$$

$$\int_F S_y dy = 0, \quad \int_F S_y d\omega = 0, \quad \int_F S_\omega dy = 0,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -EJ_y \xi''', \\ Q_y &= -EJ_x \eta''', \\ H_\omega &= -EJ_\omega \theta'''. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Формулами (8.7) поперечные силы и изгибно-крутящий момент H_ω выражены через третьи производные от прогибов ξ, η линии главных полюсов и от угла кручения θ . При изгибе по закону плоских сечений коэффициентами при них служат жесткости EJ_x, EJ_y , а при кручении по закону секторных площадей — жесткость EJ_ω . Из формул (8.7) находим:

$$\left. \begin{aligned} \xi''' &= -\frac{1}{EJ_y} Q_x, \\ \eta''' &= -\frac{1}{EJ_x} Q_y, \\ \theta''' &= -\frac{1}{EJ_\omega} H_\omega. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

*) Действительно, применяя интегрирование по частям, получим:

$$\int_F S_x dx = S_x x \Big|_F - \int_F x dS_x = S_x x \Big|_F - \int_F xy dF = 0,$$

$$\int_F S_\omega dx = S_\omega x \Big|_F - \int_F x dS_\omega = S_\omega x \Big|_F - \int_F x\omega dF = 0,$$

но

$$\int_F S_y dx = S_y x \Big|_F - \int_F x dS_y = S_y x \Big|_F - \int_F x^2 dF = -J_y$$

и, аналогично,

$$\int_F S_x dy = -J_x, \quad \int_F S_\omega d\omega = -J_\omega$$

Подставляя найденные значения (8.8) в формулу (8.1) для осевых касательных напряжений τ , получим:

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_x}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_x} S_x(s) + \frac{H_\omega}{J_\omega} S_\omega(s) \right]. \quad (8.9)$$

Из формул (8.4) и (8.8) путем дифференцирования и исключения производных от перемещений получаем соотношения:

$$Q_x = -M'_y, \quad Q_y = M'_x, \quad H_\omega = B'. \quad (8.10)$$

Эти соотношения, представляющие собой обобщение известной в сопротивлении материалов теоремы Журавского, справедливы в случае действия на стержень одних только поперечных нагрузок. Как мы отмечали в начале параграфа, формула (8.9) справедлива в случае действия одной только поперечной нагрузки. В более общем случае, когда на стержень действует также и продольная нагрузка, приложенная в виде сдвигающих сил по продольным краям, вместо (8.9) следует пользоваться формулой:

$$\tau = \frac{1}{\delta} \left[T_K + (T_L - T_K) \frac{F(s)}{F} - \frac{Q_x}{J_y} S_y(s) - \frac{Q_y}{J_x} S_x(s) - \frac{H_\omega}{J_\omega} S_\omega(s) \right],$$

где T_K и T_L — сдвигающие усилия, действующие вдоль продольных краев стержня; $F(s)$ — площадь отсеченной части сечения.

Третья из формул (8.7) относится к изгибно-крутящему моменту H_ω относительно главного полюса от осевых сдвигающих сил $\tau \delta$, действующих по касательной к дуге контура сечения; третья из формул (8.1) представляет крутящий момент H_k , возникающий от неравномерного распределения по толщине стенки касательных напряжений, пропорциональных расстоянию от рассматриваемой точки до профильной линии.

Сумма моментов H_ω и H_k даст *полный* крутящий момент, который мы обозначим через H :

$$H = H_\omega + H_k = -EJ_\omega \theta''' + GJ_d \theta'. \quad (8.11)$$

§ 9. Центр изгиба

1. *Линией центров изгиба* называется прямая, параллельная образующей стержня и обладающая следующим свойством: если внешняя поперечная нагрузка, включая реакции, проходит через эту прямую, то стержень будет находиться в условиях центрального поперечного изгиба. Под *центральной поперечной изгибом* мы понимаем чисто изгибную деформацию стержня, т. е. деформацию, при которой поперечные сечения, оставаясь плоскими, получают только поступательные смещения, определяемые прогибами $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$ (рис. 27, а).

Если же поперечная нагрузка, включая и опорные реакции, хотя бы на каком-либо одном участке стержня приводится к равнодействию-

ющей, не проходящей через линию центра изгиба, то стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления при изгибе и кручении. В сечениях стержня, помимо напряжений от изгиба, возникнут дополнительные напряжения изгибного кручения, определяемые законом секториальных площадей (рис. 27, б).

В § 7 мы определили координаты главного полюса A . Покажем, что для стержня постоянного сечения главный полюс совпадает с центром изгиба, а линия главных полюсов является одновременно и линией центров изгиба. Для этого выпишем формулу (8.9) для касательных напряжений:

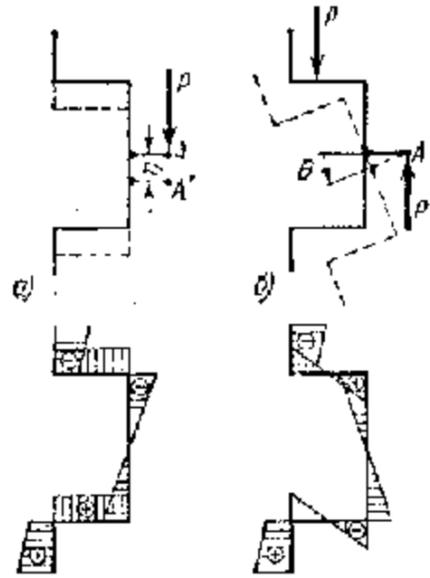


Рис. 27.

Нетрудно убедиться, что первыми двумя членами этой формулы определяются касательные напряжения от изгиба при прохождении поперечной нагрузки через линию главных полюсов; третьим же членом определяются касательные напряжения от изгибного кручения, пропорциональные крутящему моменту H_ω и возникающие в том случае, когда $H_\omega \neq 0$, т. е.

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_x}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_x} S_x(s) + \frac{H_\omega}{J_\omega} S_\omega(s) \right]. \quad (8.9)$$

когда поперечная нагрузка (включая и реакции опорных связей) не проходит через линию главных полюсов. Действительно, касательные напряжения, определяемые первыми двумя членами формулы (8.9) в центральных осях координат, не дают крутящего момента относительно главного полюса:

$$\int_F \tau \delta h ds = \int_F \tau \delta d\omega = -\frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y d\omega - \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x d\omega = 0.$$

Изгибно-крутящий момент H_ω получается от касательных напряжений, определяемых только последним членом формулы (8.9):

$$\int_F \tau \delta d\omega = -\frac{H_\omega}{J_\omega} \int_F S_\omega d\omega = H_\omega. \quad (9.1)$$

Отсюда следует, что при $H_\omega \equiv 0$ поперечная сила, а следовательно, и внешняя поперечная нагрузка, сию уравновешиваемая, в каждом сечении, т. е. при любом значении независимой переменной z , проходит через линию главных секториальных полюсов. Значит, эта линия одновременно является и линией центров изгиба. На этом основании в дальнейшем, если не будет оговорено особо, главный секториаль-

ный полюс будем называть *центром изгиба*, а линию главных секториальных полюсов — *линией центров изгиба*.

Следует отметить, что к нашим выводам относительно линии главных секториальных полюсов можно прийти и другим, чисто аналитическим путем. Для этого рассмотрим последнее дифференциальное уравнение равновесия стержня (7.3) для угла закручивания $\theta(z)$:

$$EJ_\omega \theta'' - GJ_x \theta' = m. \quad (9.2)$$

Если стержень находится в условиях одного поперечного изгиба, то интеграл этого уравнения $\theta(z)$ должен быть тождественно равен нулю, что, очевидно, выполняется, если, во-первых, внешняя распределенная нагрузка проходит через линию главных секториальных полюсов, т. е. уравнение однородно и $m(z) \equiv 0$ и если, во-вторых, граничные условия для уравнения (9.2) однородны*). Выполнение последних условий фактически сводится к отсутствию внешних сосредоточенных крутящих моментов относительно линии главных полюсов (т. е. сосредоточенная поперечная нагрузка также должна проходить через эту линию) и отсутствию сосредоточенных продольных биомоментов, поскольку влияние сосредоточенных силовых факторов учитывается граничными условиями. Если поперечная нагрузка удовлетворяет этим требованиям, то кручения не будет. Поэтому линия главных секториальных полюсов является в то же время и линией центров изгиба.

2. Величины a_x, a_y , определяемые по общим формулам (7.5), будем в дальнейшем называть координатами центра изгиба. Исходя из описанного выше понятия о равновесии стержня при центральном поперечном изгибе, мы дадим здесь другой, статический метод определения координат центра изгиба. Центр изгиба может быть определен как точка пересечения линий действия поперечных сил Q_x и Q_y при двух независимых изгибах в главных плоскостях.

Пусть, как и ранее в § 7, b_x и b_y — координаты произвольно выбранного полюса B ; a_x и a_y — координаты центра изгиба A .

При изгибе в плоскости Oyz сдвигающие усилия $T = \tau \delta$ определяются по формуле:

$$\tau \delta = -\frac{Q_y}{J_x} S_x.$$

Для крутящего момента от этих усилий относительно точки B получим выражение:

$$H_B = \int_F \tau \delta d\omega_B = -\frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x d\omega_B = \frac{Q_y}{J_x} I_{\omega_B y}. \quad (9.3)$$

С другой стороны, по теореме Вариньона, этот момент равен моменту равнодействующей сдвигающих усилий, проходящей через центр

*) То есть на концах стержня выполняются любые из условий (2.8) и (2.10) гл. II.

изгиба:

$$H_B = Q_y (a_x - b_x). \quad (9.4)$$

Сравнивая между собой правые части равенства (9.3) и (9.4), найдем координату a_x центра изгиба:

$$a_x - b_x = \frac{J_{\omega B} y}{J_x}.$$

Аналогичным образом из рассмотрения изгиба в плоскости Oxz получим:

$$a_y - b_y = -\frac{J_{\omega B} x}{J_y}.$$

Обе формулы совпадают с ранее приведенными формулами (7.5).

3. В классической теории изгиба балок, основанной на законе плоских сечений, фундаментальное значение имеет понятие об оси стержня. В сопротивлении материалов за такую ось безоговорочно принимается линия центров тяжести поперечных сечений стержня. В задачах строительной механики изгибаемый элемент какой-либо стержневой системы (многопролетной балки, рамы) рассматривается также в свете элементарной теории изгиба балок и отождествляется с упругой одномерной моделью, а именно с осью, расположенной по линии центров тяжести поперечных сечений стержня. Это основное понятие сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем, вытекающее из закона плоских сечений и имеющее по существу обоснование в принципе Сен-Венана, в свете излагаемой нами общей бимоментной теории изгибного кручения нуждается в коренном пересмотре и обобщении. Если изгибаемый элемент конструкции по своим размерам относится к категории тонкостенных стержней, то при рассмотрении такого элемента как пространственной системы существенное значение имеет также и линия центров изгиба. Эта линия совпадает с линией центров тяжести сечений для стержней, имеющих в поперечном сечении две оси симметрии. Для стержней же произвольного несимметричного профиля или профиля с одной осью симметрии линия центров изгиба не будет совпадать с линией центров тяжести сечения. Применяя к таким стержням обычную теорию изгиба балок, позволяющую рассмотреть только изгибную деформацию, мы должны за ось стержня принимать не линию центров тяжести сечений, а линию центров изгиба и считать, что поперечные нагрузки, вызывающие изгиб стержня по закону плоских сечений, приложены в точках линии центров изгиба. Если же поперечную нагрузку (распределенную по пролету или состоящую из сосредоточенных сил) относить к точкам линии центров тяжести, то такая нагрузка, кроме изгиба, вызовет также и кручение. Обычная теория изгиба балок в этом случае становится непригодной.

Поясним сказанное здесь на примере балки швеллерного профиля. Для такого профиля центр тяжести O и центр изгиба A находятся на оси симметрии по разные стороны от стенки (см. рис. 34). Поперечная вертикальная нагрузка, проходящая через линию центров тя-

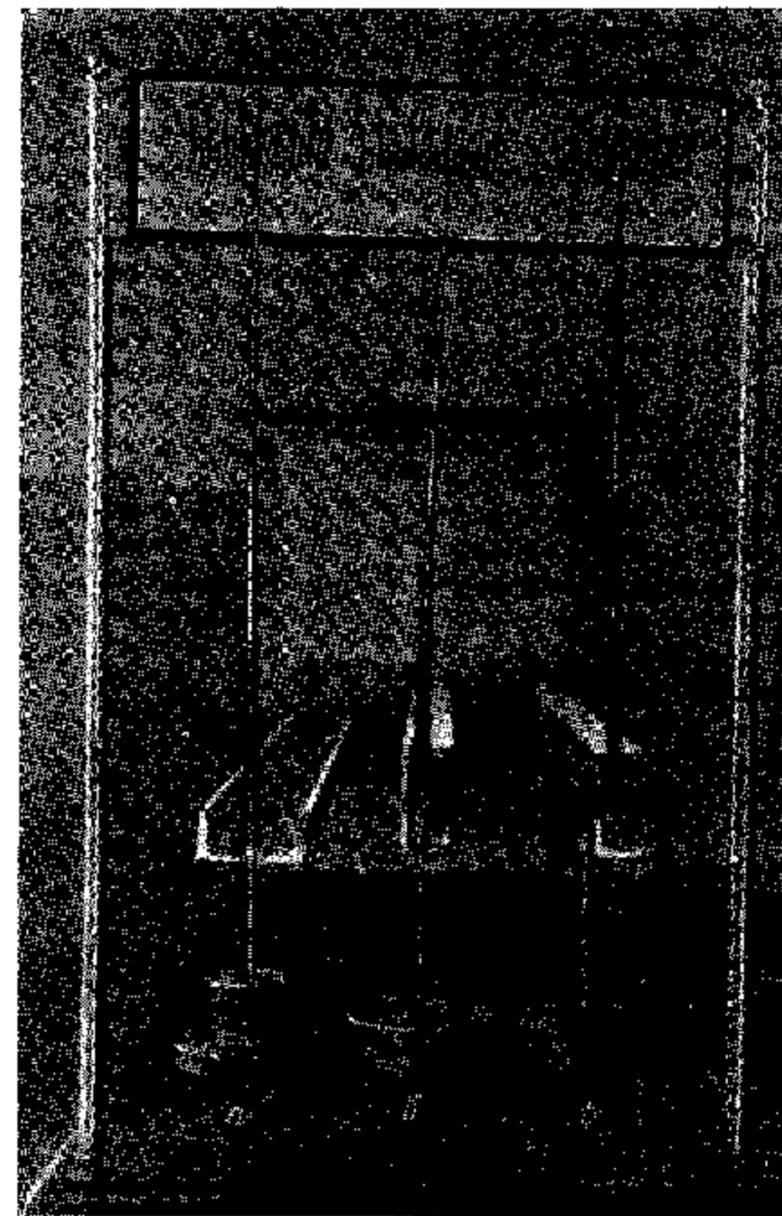


Рис. 28.

жести, вызовет в такой балке не только изгиб, но и кручение, сопровождающееся деформацией поперечных сечений. Швеллерная балка при действии на нее поперечной нагрузки будет испытывать изгиб, описываемый обычной теорией, только в том случае, если эта нагрузка приложена в точках линии центров изгиба, находящихся вне сечения.

На рис. 28 показана модель, представляющая собой швеллер, заделанный одним концом в вертикальную стенку и нагруженный сосредоточенной силой на свободном конце.

По оси симметрии поперечного сечения на свободном торце имеется планка, жестко соединенная со стержнем.

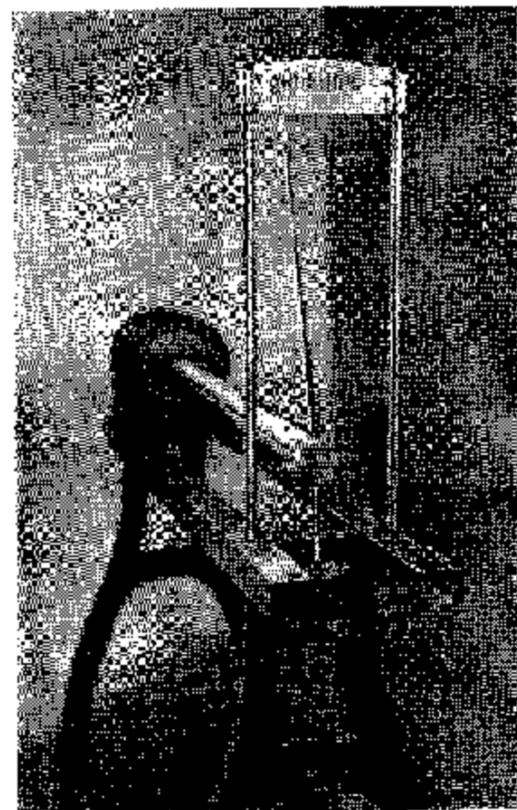


Рис. 29.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а). Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая по оси симметрии профиля, вызывает поперечный изгиб стержня (рис. 28, а).

Сила, приложенная в центре тяжести сечения и действующая параллельно стенке, вызовет наряду с изгибом и кручение консольного стержня (рис. 28, б). Угол закручивания стержня фиксируется стрелкой индикатора, установленного на свободном конце стержня.

ГЛАВА II

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

§ 1. Координаты центра изгиба и секториальные геометрические характеристики для некоторых профилей

При расчете тонкостенного стержня-оболочки с открытым профилем на совместное действие изгиба и кручения по излагаемой нами теории необходимо, кроме геометрических характеристик поперечного сечения, связанных с законом плоских сечений, вычислять подобные характеристики, связанные с законом секториальных площадей. Рассмотрим несколько примеров на вычисление координат центра изгиба и секториальных характеристик. Сечения в нижеприведенных примерах будем относить к главным центральным осям.

1. Двутавровое сечение с неодинаковыми полками. Пусть a_1 , a_2 , a_3 и δ_1 , δ_2 , δ_3 — соответственно ширина и толщина элементов сечения. Oy — ось симметрии сечения (рис. 30). Для определения координат центра изгиба воспользуемся общими формулами (7.5) гл. I. Определить же нулевую секториальную точку в нашем примере нет необходимости, поскольку профиль симметричен относительно стенки, и любая точка стенки профиля является нулевой секториальной точкой.

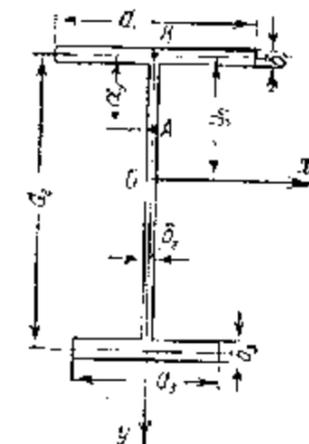


Рис. 30.

Выберем вспомогательный полюс B секториальной площади ω_B в точке пересечения стенки с верхней полкой двутавра. Начальную секториальную точку возьмем в произвольной точке стенки профиля. Вычисление интегралов формул (7.5) гл. I проведем приемами строительной механики. Для этого построим эпиюры геометрических величин, входящих в подинтегральные выражения (рис. 31).

На рис. 31, а приведена эпиюра секториальных площадей ω_B . Секториальные площади на участках верхней полки и стенки равны нулю; на участке нижней полки они представляются кососимметричной эпиюрой.

На рис. 31, б, в приведены эпюры расстояний x и y от точек профильной линии сечения до главных осей.

Вычисляя интегралы $\int x \omega_B dF$ и $\int y \omega_B dF$ приемами строительной механики, т. е. умножая для каждого участка площадь одной эпюры

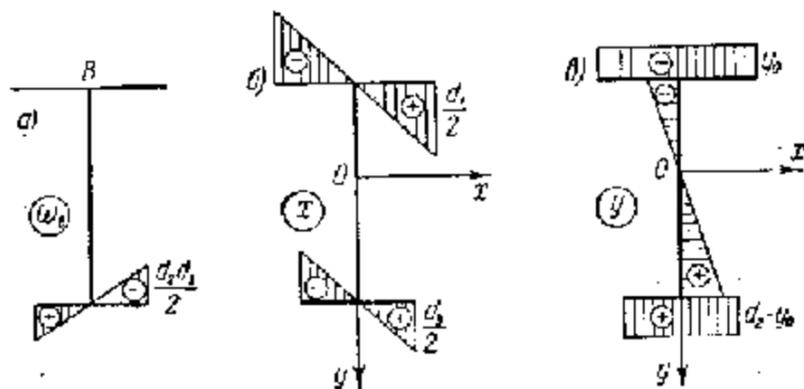


Рис. 31.

на расположенную под ее центром тяжести ординату другой эпюры и учитывая толщины элементов δ , получим:

$$J_{\omega_B x} = \int x \omega_B dF = -\frac{d_1^2 \delta_1}{12} d_2 = -J_{3y} d_2,$$

$$J_{\omega_B y} = \int y \omega_B dF = 0.$$

Таким же приемом вычисляем момент инерции J_y :

$$J_y = \int x^2 dF = \frac{d_1^3 \delta_1}{12} + \frac{d_2^3 \delta_2}{12} = J_{1y} + J_{2y},$$

где J_{1y} , J_{2y} — моменты инерции полок относительно оси y .

Для координат центра изгиба, согласно формулам (7.5) гл. I, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= 0, \\ \alpha_y &= \frac{d_1^3 \delta_1}{d_1^3 \delta_1 + d_2^3 \delta_2} d_2 = \frac{J_{2y}}{J_{1y} + J_{2y}} d_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Выражение $\alpha_x = 0$ показывает, что центр изгиба находится на оси симметрии. Расстояние α_y от этого центра до точки B , отложенное на оси Oy в положительном направлении, определяется второй из формул (1.1). Для двутаврового профиля с одинаковыми полками, как профиля с двумя осями симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения:

$$\alpha_y = \frac{d_2}{2}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) следует из формулы (1.1), если в ней положить $d_1 = d_2$, $\delta_1 = \delta_2$.

Из формул (1.1) нетрудно получить формулы для координат центра изгиба таврового профиля. Для этого нужно площадь сечения одной из полок положить равной нулю. Если считать $d_2 = 0$, то получим:

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 0; \quad (1.3)$$

если считать $d_1 = 0$, то

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = d_2. \quad (1.4)$$

Выражения (1.3) и (1.4) показывают, что в тавровом профиле центр изгиба лежит в точке пересечения стенки с полкой. Действительно, как мы видели в § 4 гл. I, поперечное сечение стержня, состоящего из пучка пластинок, не испытывает деформации, и поэтому изгибно-крутящий момент H_{ω} равен нулю. Равенство же нулю H_{ω} указывает на то, что равнодействующая касательных напряжений в поперечном сечении (в предположении, что касательные напряжения по толщине пластинок распределены равномерно) проходит через центр изгиба. Этой точкой будет являться центр пучка, поскольку касательные напряжения параллельны профилю стержня и их равнодействующая, следовательно, проходит через его центр.

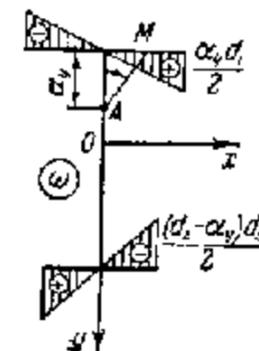


Рис. 32.

Определив центр изгиба для двутаврового профиля с полками разной ширины, мы можем теперь, пользуясь радиусом-вектором AM , построить эпюру главных секториальных площадей ω . Эта эпюра приведена на рис. 32. Полюс A и начальная точка отсчета секториальной площади лежат на оси симметрии Oy . Эпюрой секториальных площадей ω (рис. 32) выражен закон распределения по сечению дополнительных нормальных напряжений σ_{ω} от изгибного кручения.

Формула для секториального момента инерции принимает вид:

$$J_{\omega} = \int \omega^2 dF = \alpha_y^2 J_{1y} + (d_2 - \alpha_y)^2 J_{2y}.$$

Для касательных напряжений τ_{ω} , возникающих вследствие деформации поперечного сечения стержня, из формулы (8.9) гл. I получим:

$$\tau_{\omega} = -\frac{H_{\omega}(z) S_{\omega}(s)}{J_{\omega}^{\xi}(s)}. \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что дополнительные сдвигающие напряжения τ_{ω} в поперечном сечении стержня меняются по закону секториального статического момента:

$$S_{\omega}(s) = \int \omega dF.$$

Этот момент вычисляется для отсеченной части контура, т. е. для той части, которая расположена по одну сторону от рассматриваемой точки на контуре. Так как правая часть формулы (1.5) содержит знак минус, а момент дополнительных касательных напряжений относительно центра изгиба как раз и есть крутящий момент H_{ω} , то отсюда следует, что эпюра секториальных статических моментов, взятая с обратным знаком, выражает закон распределения касательных напряжений τ_{ω} по сечению стержня. Заметим еще, что знак $S_{\omega}(s)$ зависит от направления обхода контура поперечного сечения, которое в каждом конкретном случае устанавливается применительно к профилю стержня.

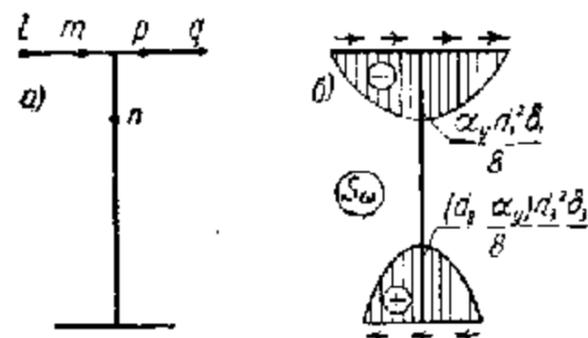


Рис. 33.

Возьмем к нашему примеру и будем считать, что как для верхней, так и для нижней полки двутавра возрастание координаты s происходит слева направо. Отсюда легко построить эпюру S_{ω} . Так, для отсеченной части профиля lm (рис. 33, а) секториальный статический момент будет отрицателен, поскольку мы от границы контура l до точки m идем в положительном направлении, а эпюра ω для участка lm отрицательна; для отсеченной части профиля pq момент S_{ω} также будет отрицателен, поскольку мы от границы контура q до точки p идем в отрицательном направлении, а секториальная площадь для этого участка положительна. Эпюра секториальных статических моментов приведена на рис. 33, б. По ширине полки моменты S_{ω} меняются по закону параболы, поскольку секториальная площадь как для верхней, так и для нижней полки выражается нечетной линейной функцией, для стенки же профиля секториальный статический момент равен нулю, так как секториальная площадь для точек стенки равна нулю.

Напомним, что ранее (§ 5 гл. I) за положительное направление касательных напряжений, отнесенных к положительной поперечной площадке, мы приняли направление отсчета координаты s , а за положительное направление крутящего момента, отнесенного к той же площадке, направление этого момента по часовой стрелке. Принимая это во внимание, нетрудно определить направление дополнительных сдвигающих усилий в поперечном сечении стержня. Направление этих усилий в полках двутавра показано на рис. 33, б стрелками. В любой точке стенки двутавра дополнительные сдвигающие напряжения исчезают, так как для этих точек S_{ω} равняется нулю.

2. Корытное сечение (швеллер). Пусть d и δ соответственно ширина и толщина стенки, а d_1 и δ_1 — ширина и толщина полки корытного сечения (рис. 34). Центр изгиба A для такого сечения лежит

на оси симметрии Ox . Нулевая секториальная точка находится на пересечении оси симметрии с профилем стержня. Расстояние α_x от стенки до центра изгиба A определяется по формуле (7.5) гл. I.

На рис. 35, а приведена эпюра секториальных площадей ω_B с полюсом B в точке пересечения стенки с осью симметрии Ox ;

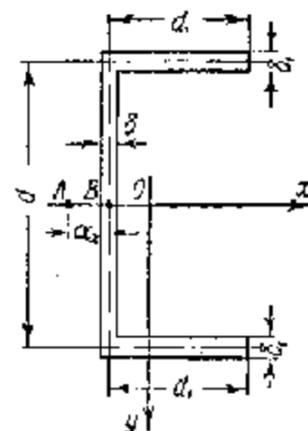


Рис. 34.

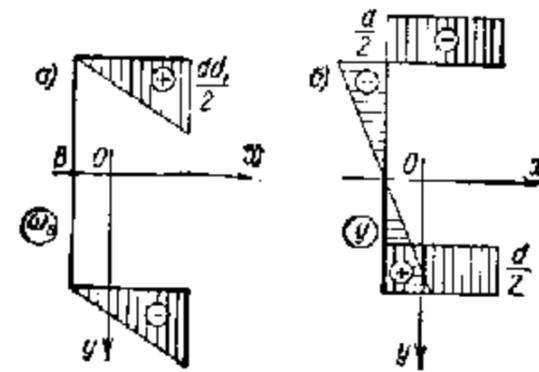


Рис. 35.

на рис. 35, б дана эпюра ординат y . Вычисляя приемами строительной механики определенный интеграл от произведения функций, представленных эпюрами ω_B и y , и учитывая толщину полки δ_1 , получим:

$$J_{\omega_B y} = \int_F y \omega_B dF = -\frac{d^2 d_1^2 \delta_1}{4}. \quad (1.6)$$

Момент инерции J_x вычисляется как интеграл от квадрата ординат эпюры y по площади сечения F :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{d^3 \delta}{12} + \frac{d^2 d_1 \delta_1}{2}. \quad (1.7)$$

Подставляя выражения (1.6) и (1.7) в соответствующую формулу (7.5) гл. I, получим координату центра изгиба:

$$\alpha_x = \frac{J_{\omega_B y}}{J_x} = \frac{\int_F y \omega_B dF}{\int_F y^2 dF} = -\frac{3d^2 \delta_1}{d\delta + 6d_1 \delta_1} = -\frac{d_1^2 \delta_1}{2d_1 \delta_1 + \frac{d^2}{3}}.$$

Эпюра главных секториальных площадей ω , представленная на рис. 36, а, имеет кососимметричный вид относительно оси симметрии Ox . Началом отсчета площадей служит точка B , лежащая на оси симметрии. Секториальные площади для точек стенки, лежащих ниже оси Ox , будут иметь положительные значения, поскольку эти площади описываются движением радиуса-вектора AM по часовой стрелке. В точке примыкания полки к стенке секториальные площади достигают

наибольших значений, что указывает на то, что при кручении наибольшие дополнительные напряжения будут возникать в углах швеллера.

Секториальная площадь для полок сечения по мере удаления от стенки убывает по абсолютной величине и в точке C , находящейся от стенки на расстоянии, равном расстоянию от стенки до центра изгиба A , принимает нулевое значение.

Секториальный момент инерции J_ω вычисляется как интеграл от квадрата ординат эпюры ω по F . Пользуясь приемами строительной механики, получим:

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = \frac{1}{6} (d_1 - 3\alpha_x) d^2 d_1^2 \delta_1 + \alpha_x^2 J_x,$$

где J_x — момент инерции (1.7).

На рис. 36,б приведена эпюра секториальных статических моментов S_ω , характеризующих распределение по сечению сдвигающих

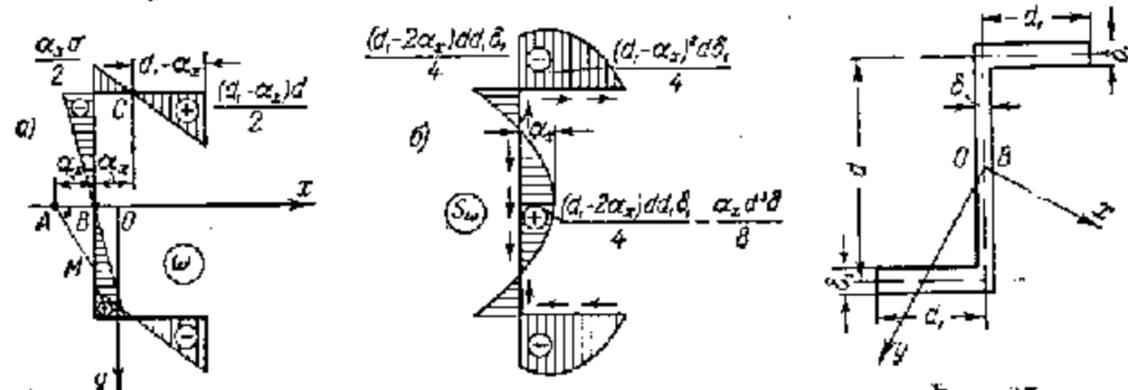


Рис. 36.

Рис. 37.

усилий $T = \tau z$ от кручения. За положительное направление обхода принят обход контура по часовой стрелке. Моменты S_ω на каждом прямолинейном участке контура меняются по закону квадратной параболы и принимают максимальные (по абсолютной величине) значения в тех точках, где секториальные площади ω равны нулю. Направление сдвигающих усилий при кручении в поперечном сечении стержня представлено на рис. 36,б стрелками.

3. Зетовое сечение. Для определения центра изгиба в зетовом сечении с шириной и толщиной стенки d и δ и полок d_1 и d_2 , выберем вспомогательный полюс B в центре тяжести сечения (рис. 37). Начало отсчета секториальной площади возьмем в произвольной точке стенки профиля. Эпюры секториальных площадей ω_B и координат x и y для контура сечения приведены на рис. 38. Вычисляя при помощи этих эпюр интегралы, входящие в формулы (7.5) гл. I, и имея в виду, что для полок эпюры секториальных площадей одинаковы, а эпюры координат отличаются только знаками, получим:

$$\alpha_x = 0; \quad \alpha_y = 0. \quad (1.8)$$

Выражения (1.8) показывают, что для зетового сечения центр изгиба совпадает с центром тяжести.

Построим теперь эпюры главных секториальных площадей. Полюс A этих площадей находится в центре изгиба, т. е. в данном случае в центре тяжести сечения. Нам нужно эпюру ω построить так, чтобы эта эпюра была взаимно нулевой не только с эпюрами x и y от изгиба, но также и с эпюрой от равномерного растяжения или сжатия.

Поскольку эпюра ω_B , приведенная на рис. 38,а, ортогональна с эпюрами x и y (рис. 38,б,в), нам остается теперь наложить на нее эпюру,

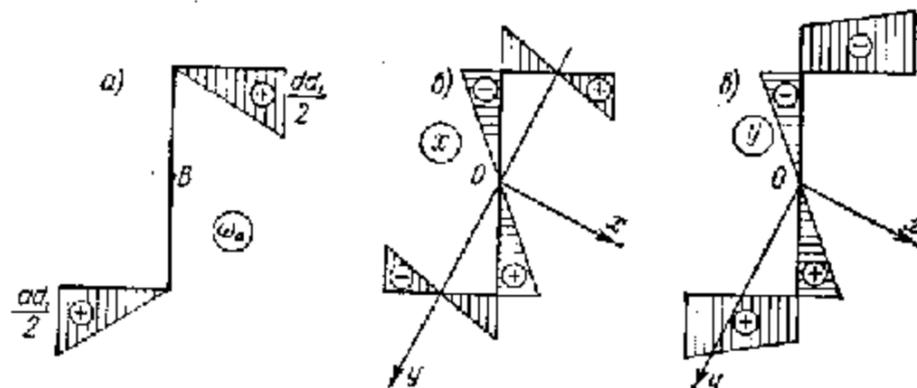


Рис. 38.

соответствующую напряжениям от осевого растяжения (сжатия), и подобрать ординаты эпюры ω так, чтобы секториальный статический момент S_ω для всего сечения обратился в нуль.

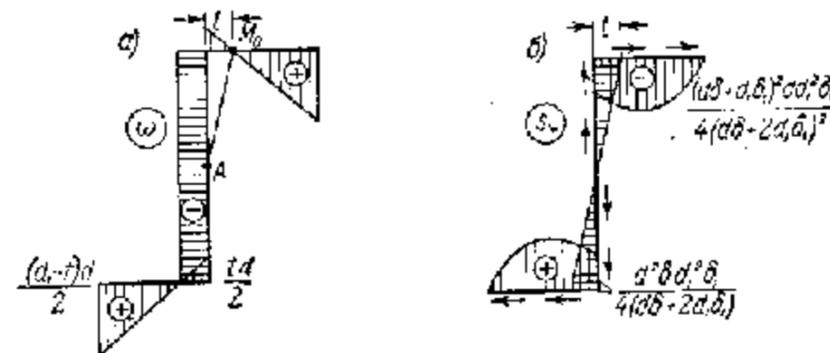


Рис. 39.

Пусть точка полки M_0 , отстоящая от стенки на расстоянии l , служит началом отсчета секториальных площадей ω . При таком выборе начальной точки эпюра секториальных площадей ω будет иметь вид, показанный на рис. 39,а. Ординаты этой эпюры являются линейными функциями параметра l , определяющего положение начальной точки M_0 . Подберем параметр l так, чтобы секториальный статический момент S_ω для всего сечения обратился в нуль, т. е. чтобы

$$S_\omega = \int_F \omega dF = 0. \quad (1.9)$$

Раскрывая условие (1.9) при помощи эпюры, изображенной на рис. 39,а, по правилу Верещагина получим:

$$\left(\frac{d_1}{2} - t\right) dd_1 \delta_1 - \frac{td^2 \delta}{2} = 0,$$

откуда

$$t = \frac{d_1^2 \delta_1}{d\delta + 2d_1 \delta_1}. \quad (1.10)$$

Эпюра ω , приведенная на рис. 39,а, при t , определяемом по формуле (1.10), будет взаимно нулевой со всеми остальными компонентами общей четырехчленной формулы (8.5) гл. I. Это значит, что нормальные напряжения σ_ω , изменяющиеся по сечению согласно закону главной секториальной площади ω , из четырех статических факторов формулы (8.5) гл. I дают только изгибно-крутящий бимомент B . Продольная сила от этих напряжений и изгибающие моменты будут равны нулю.

Секториальная площадь ω по ширине полки меняется по линейному закону. По стенке эта площадь остается постоянной. Это указывает на то, что при изгибном кручении зетового стержня стенка испытывает равномерное растяжение или сжатие в зависимости от знака внешнего крутящего момента и от условий закрепления стержня на концах*).

Для секториального момента инерции получаем формулу:

$$J_\omega = \frac{d_1^3 \delta_1}{12} d^2 \frac{d_1 \delta_1 + 2d\delta}{d\delta + 2d_1 \delta_1}.$$

На рис. 39,б приведена эпюра секториальных статических моментов S_ω , характеризующих изменение секториальных сдвигающих усилий $T = \tau \delta$ в поперечном сечении (контур сечения обходится слева направо). Эпюра S_ω на участках полок представляется параблами второй степени с максимальными ординатами в начальных точках отсчета секториальных площадей. Для стенки секториальный статический момент меняется по закону прямой линии, принимая нулевое значение в начале координат.

На этом же рисунке показаны равнодействующие сдвигающих усилий, подсчитанные на участках поперечного сечения по эпюре секториальных статических моментов. Эти равнодействующие для всего сечения приводятся к одному только изгибно-крутящему моменту H_ω .

4. Составное несимметричное сечение. Рассмотрим сложное несимметричное сечение, составленное из двух швеллеров № 12 (рис. 40,а). Такое сечение применяется в промышленных зданиях в качестве факеркового прогона.

*). Приведенное здесь утверждение на основании теоремы Бетти о взаимности работ имеет также и обратную силу; зетовый стержень в случае действия осевой силы, приложенной в точках стенки профиля, наряду с растяжением (сжатием), будет испытывать и кручение. Более подробно об этом изложено в § 8.

Выпишем характеристики швеллера № 12, которыми мы воспользуемся при вычислениях (ГОСТ 10017-39):

$$h = 12 \text{ см}, \quad b = 5,3 \text{ см}, \quad d = 0,55 \text{ см}, \quad t = 0,9 \text{ см}, \\ F = 15,36 \text{ см}^2, \quad J_x = 346,3 \text{ см}^4, \quad J_y = 37,4 \text{ см}^4, \quad z_0 = 1,62 \text{ см}.$$

Центр тяжести сечения находится в точке O , отстоящей от оси горизонтальной стенки на расстоянии 2,46 см и от оси вертикальной стенки на расстоянии 3,54 см.

Главная ось Ox составляет с горизонтальной осью угол $\beta = 29^\circ 53'$ (рис. 40,б). Площадь сечения и главные моменты инерции равны:

$$F = 30,72 \text{ см}^2, \quad J_x = 976,8 \text{ см}^4, \\ J_y = 383,8 \text{ см}^4. \quad (1.11)$$

Оси сечения с указанием длины, толщины и площади каждого участка показаны на рис. 41,а.

При определении центра изгиба и вычислении секториальных характеристик мы будем считать, что для горизонтального элемента сечения $2-B$ осью служит прямая, являющаяся осью стенки горизонтального швеллера. Толщина этого элемента на участке $2-6$ равна толщине стенки швеллера, а на участке $6-B$ — сумме толщин стенки горизонтального швеллера и полки вертикального.

Выбирая вспомогательный полюс в точке B пересечения осей стенок двух швеллеров, получим для участков $B-2$, $B-3$ и $B-4$ нулевые эпюры секториальных площадей и для участков $1-2$ и $4-5$ — треугольные эпюры (рис. 41,б). Координаты точки B в главных осях будут:

$$b_x = 4,29 \text{ см}, \quad b_y = -0,38 \text{ см}. \quad (1.12)$$

Эпюры координат точек профильной линии x и y даны на рис. 42. Вычисляя определенный интеграл от произведений ω_B на x и y и учитывая толщины элементов, получим:

$$J_{\omega Bx} = -1096,0 \text{ см}^5, \quad J_{\omega By} = -38,3 \text{ см}^5. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.11), (1.12), (1.13) в формулы (7.5) гл. I, найдем координаты полюса A :

$$a_x = 4,25 \text{ см}, \quad a_y = 2,48 \text{ см}.$$

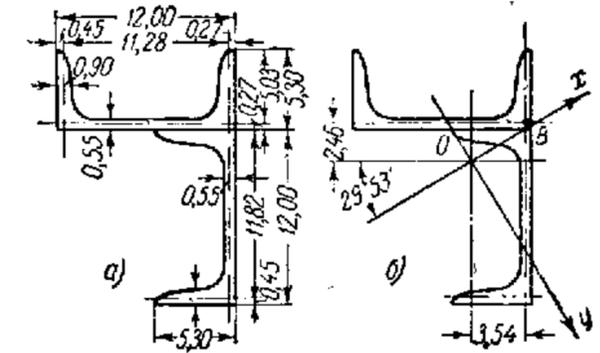


Рис. 40.

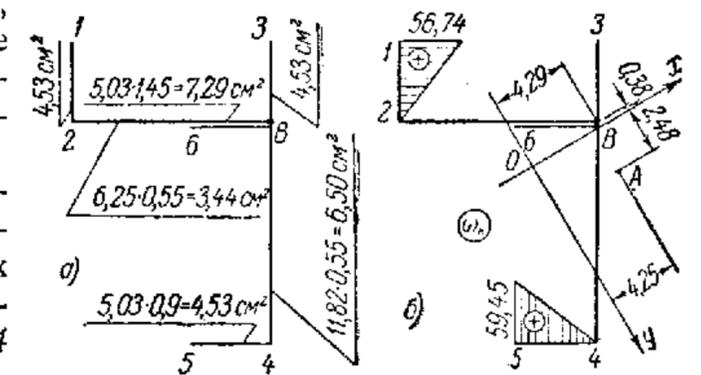


Рис. 41.

По отношению к осям стенок швеллеров центр изгиба A отстоит от вертикальной оси на расстоянии $1,38$ см (вправо) и от горизонтальной оси на расстоянии $2,48$ см (вниз) (рис. 43, а).

Определим начальную точку отсчета главных секториальных площадей M_0 . Пусть эта точка находится на стенке вертикального швеллера

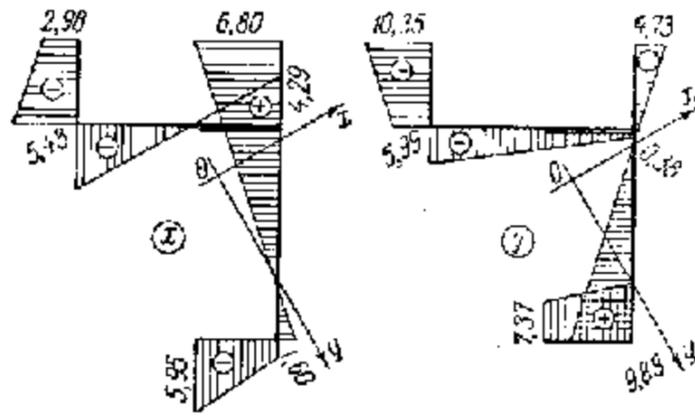


Рис. 42.

на расстоянии t от оси стенки горизонтального швеллера. Эюра секториальных площадей ω_A при фиксированном расстоянии t будет иметь вид, показанный на рис. 43, а. Вычисляя с помощью этой эюры

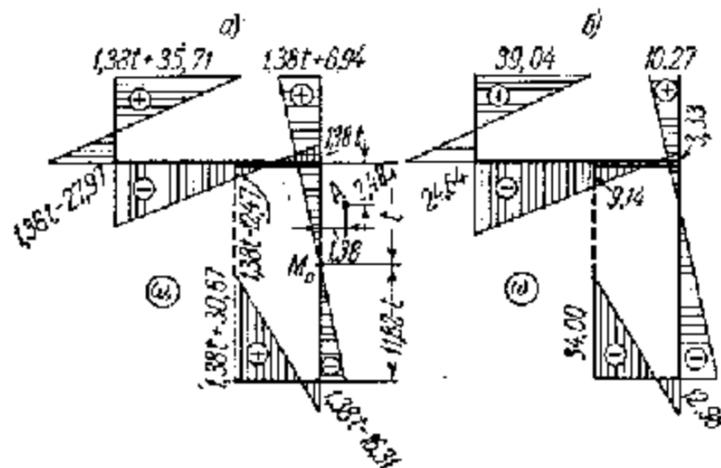


Рис. 43.

секториальный статический момент S_{ω} для всего сечения, найдем:

$$S_{\omega}(t) = 42,53 t - 102,72.$$

Этот момент при произвольном t есть функция положения начальной точки отсчета секториальной площади.

Приравняв величину S_{ω} нулю, получим:

$$t = 2,415 \text{ см.}$$

По определении t эюра главных секториальных площадей ω будет иметь вид, показанный на рис. 43, б.

Для секториального момента инерции получаем значение

$$J_{\omega} = 4829 \text{ см}^6.$$

Эюра секториальных статических моментов S_{ω} дана на рис. 44.

Б. Сечение, очерченное по дуге окружности. Пусть R — радиус дуги профильной линии кругового сечения, δ — толщина стенки сечения, α — половина центрального угла (рис. 45).

Выберем полюс B вспомогательной секториальной площади в геометрическом центре дуги окружности. Начало отсчета площади ω_B возьмем в точке M_0 пересечения оси симметрии с профильной линией контура. Обозначая через φ центральный угол,

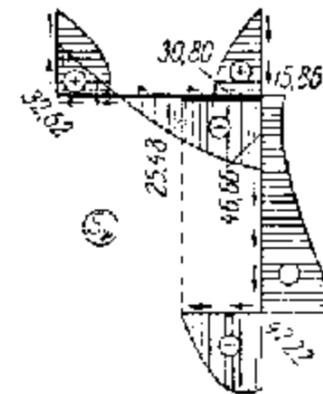


Рис. 44.

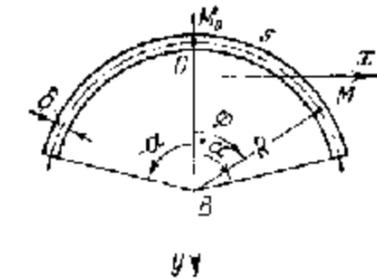


Рис. 45.

определяющий на контуре точку M с текущей координатой s , и совмещая ось Oy с осью симметрии сечения, мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} s &= R\varphi, & dF &= R\delta d\varphi, \\ x &= R \sin \varphi, & y &= b_y - R \cos \varphi, & \omega_B &= R^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Согласно значениям (1.14), получаем выражения секториально-центробежных моментов инерции, входящих в формулы (7.5) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega_B x} &= \int_R x \omega_B dF = R^2 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi \sin \varphi d\varphi, \\ J_{\omega_B y} &= \int_R y \omega_B dF = R^2 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} (b_y - R \cos \varphi) \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\}$$

В моменте инерции $J_{\omega_B x}$ подынтегральное выражение представляет собой четную функцию. Этот интеграл будет отличен от нуля. В моменте инерции $J_{\omega_B y}$ подынтегральное выражение представляет собой нечетную функцию. Интеграл от нечетной функции в интервале, симметричном относительно начала координат, как площадь кососимметричной эюры равен нулю. Таким образом

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega_B x} &= 2R^2 \delta (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \\ J_{\omega_B y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Учитывая, что $b_x = 0$, получим из формул (7.5) гл. I и (1.15):

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_x = 0, \\ a_y &= -\frac{J_{\omega B^x}}{J_y} = -\frac{2R^3 \delta}{J_y} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Равенство $a_x = 0$ показывает, что центр изгиба находится на оси симметрии. Расстояние по оси симметрии от центра изгиба до геометрического центра дуги окружности, совпадающего с полюсом B , определяется второй формулой (1.16).

Вычислим момент инерции J_y , входящий в эту формулу. Пренебрегая моментом инерции элемента $dF = \delta ds$ относительно касательной к дуге контура сечения по сравнению с моментом инерции всего сечения, т. е. считая, что нормальные напряжения σ по толщине стенки распределяются равномерно, мы можем написать:

$$J_y = \int_F x^2 dF.$$

Подставляя в эту формулу значения x и dF из формул (1.14) и интегрируя, получим:

$$J_y = R^3 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = R^3 \delta (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha). \quad (1.17)$$

Вторая из формул (1.16) принимает вид:

$$a_y = -2R \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (1.18)$$

По формуле (1.18) расстояние от центра изгиба до центра дуги круга по оси симметрии определяется в функции угла α (при центральном угле 2α). Значения координат a_y для разных углов α приведены ниже в табл. 2

Таблица 2

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
a_y	$-1,044 R$	$-1,117 R$	$-1,274 R$	$-1,436 R$	$-1,609 R$	$-2 R$

Из этой таблицы видно, что центр изгиба находится вне дуги контура сечения.

При $\alpha = 180^\circ$, т. е. в случае тонкостенной трубы, имеющей сквозной разрез по образующей, центр изгиба находится на расстоянии диаметра

$D = 2R$ от геометрического центра O в стороне, противоположной разрезу (рис. 46, а)*).

Если концы такой трубы закрепить от прогибов и угловых перемещений и приложить к ней в середине пролета сосредоточенную

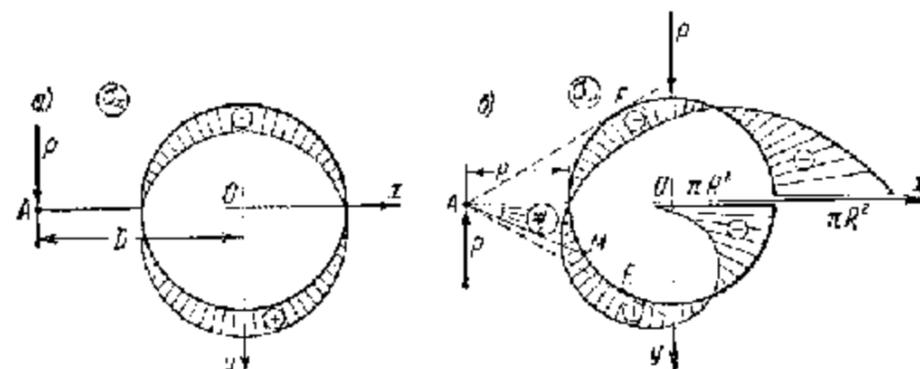


Рис. 46.

поперечную нагрузку, то состояние напряжений и деформаций трубы будет зависеть от положения нагрузки в плоскости поперечного сечения. Если нагрузка проходит через центр изгиба, то труба будет находиться в условиях одного только поперечного изгиба (рис. 46, а). Если нагрузка не проходит через центр изгиба, например, в случае действия

собственного веса (нагрузка проходит через центр тяжести сечения, рис. 47), то труба будет находиться в условиях сложного сопротивления, при изгибе (рис. 46, а) и кручении (рис. 46, б) одновременно. В поперечном сечении трубы кроме напряжений от изгиба, подчиняющихся закону плоских сечений, возникнут дополнительные напряжения от кручения, определяемые законом секториальных площадей.

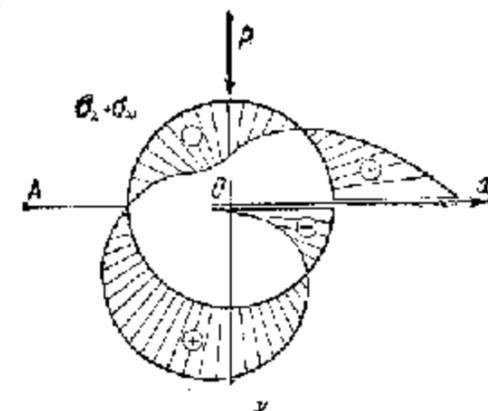


Рис. 47.

Эпюры ординат y и секториальных площадей ω , характеризующие распределение напряжений σ_x и σ_ω в поперечном сечении, соответственно при изгибе и кручении, показаны на рис. 46, а и б. На рис. 47 дан примерный вид эпюры напряжений $\sigma_x - \sigma_\omega$ при совместном действии изгиба и кручения.

Из эпюры рис. 46, б видно, что в поперечном сечении разрезанной трубы имеются три точки, в которых напряжения σ_ω от кручения равны нулю. Эти точки не лежат на одной прямой, что указывает на деформацию сечения. Секториальные напряжения σ_ω достигают максимальных

* Во избежание недоразумений обращаем внимание на то, что на рис. 46, 48, 50 ось симметрии служит Oy , а на рис. 46, 47, 49 осью симметрии служит Ox .

(по абсолютной величине) значений в точках E и F (не считая точек, совпадающих с разрезом), где подвижной радиус-вектор, описывающий площадь ω , совпадает с касательной к дуге профильной линии. В точке, совпадающей с разрезом, напряжения σ_x , вследствие свободной подвижности продольных краев претерпевают разрыв.

В рассматриваемом круговом сечении для эюры главных секториальных площадей ω получается простое аналитическое выражение. Из рис. 48 имеем:

$$\omega = R(x_y \sin \varphi + R\varphi).$$

В этой формуле x_y берется со своим знаком.

Для секториального момента инерции получаем формулу:

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= \int_F \omega^2 dF = R^3 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} (x_y \sin \varphi + R\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} R^3 \delta \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]; \end{aligned} \quad (1.19)$$

при $\alpha = \pi$ $J_{\omega} = \frac{2}{3} R^3 \delta \pi (\pi^2 - 6)$.

Зная значение $\omega(x)$, нетрудно получить аналитическое выражение для секториального статического момента отсеченной части сечения. За положительное направление обхода примем обход контура по часовой стрелке. Пользуясь рис. 48 для отсеченной части MK , получим:

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = R^2 \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} (x_y \sin \varphi + R\varphi) d\varphi.$$

Полагая в этой формуле $\alpha = \pi$, получим выражение S_{ω} для трубы с разрезом:

$$S_{\omega} = R^2 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (-2 \sin \varphi + \varphi) d\varphi = R^2 \delta \left(2 \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - 2,93 \right). \quad (1.20)$$

Эюры секториальных статических моментов, вычисленная по формуле (1.20), приведена на рис. 49. Из этой эюры видно, что в случае кручения касательные напряжения, пропорциональные S_{ω} , достигают наибольших значений в двух точках поперечного сечения. Эти напряжения статически приводятся к изгибно-крутящему моменту H_{ω} (§ 8 гл. I), который вместе с моментом от чистого кручения уравновешивает внешний крутящий момент.

Формулы (7.5) гл. I для вычисления координат центра изгиба и формулы (6.12) гл. I для вычисления секториального момента инерции

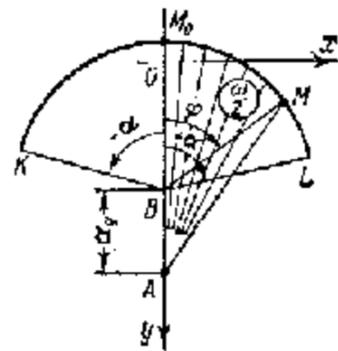


Рис. 48.

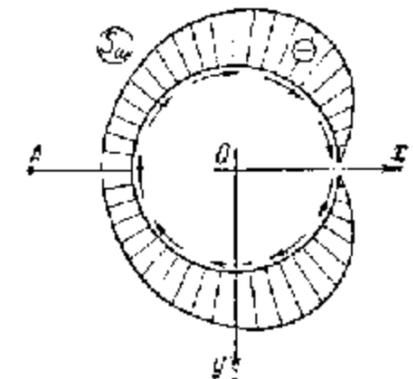


Рис. 49

имеют общий характер; в частности, толщина контура поперечного сечения может меняться по любому закону.

Рассматривая выше профиль, очерченный по дуге окружности, мы предполагали толщину контура постоянной. Полученные результаты мы можем обобщить на случай, когда поперечное сечение стержня оболочки, очерченное по дуге окружности, состоит из участков различной толщины и имеет одну ось симметрии (рис. 50, а).

С этой целью рассмотрим какой-нибудь промежуточный k -й участок, толщина которого равна δ_k ; участок этот ограничен радиусами, составляющими с осью симметрии в положительном квадранте углы β_{k-1} и β_k ; аналогичный участок в силу симметрии будет и по другую сторону оси симметрии (рис. 50, б). Далее мы будем считать, что контур, заключенный между углами $-\beta_k$ и $+\beta_k$, имеет толщину $+\delta_k$, а контур, заключенный

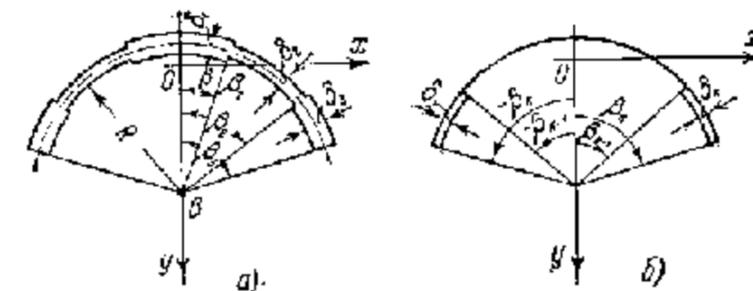


Рис. 50.

между $-\beta_{k-1}$ и $+\beta_{k-1}$, имеет отрицательную толщину $-\delta_k$. Тогда для k -го участка получим по формуле (1.15):

$$\begin{aligned} J_{\omega Bx} &= \int_F x \omega_B dF = R^2 \delta_k \left(\int_{-\beta_k}^{+\beta_k} \varphi \sin \varphi d\varphi - \int_{-\beta_{k-1}}^{+\beta_{k-1}} \varphi \sin \varphi d\varphi \right) = \\ &= 2R^2 \delta_k [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})], \end{aligned}$$

и по формуле (1.17):

$$J_y = \int_F x^2 dF = R^2 \delta_k [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})].$$

Суммируя полученные величины по индексу k от 1 до n , где n — число участков, имеющих разную толщину, получим формулу для

координаты центра изгиба:

$$a_y = -\frac{J_{\omega Bx}}{J_y} = -2R \frac{\sum_{k=1}^n [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \delta_k}{\sum_{k=1}^n [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \delta_k} \quad (1.21)$$

Аналогичным же образом получим формулу для секториального момента инерции:

$$J_{\omega} = 4R^3 \left\{ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (\beta_k^3 - \beta_{k-1}^3) \delta_k - \frac{\left\{ \sum_{k=1}^n [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \delta_k \right\}^2}{\sum_{k=1}^n [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \delta_k} \right\} \quad (1.22)$$

6. Сечение, усиленное продольными ребрами (стрингерами).

Рассмотрим тонкостенный стержень, усиленный продольными ребрами. Поперечное сечение такого стержня будем представлять профильной

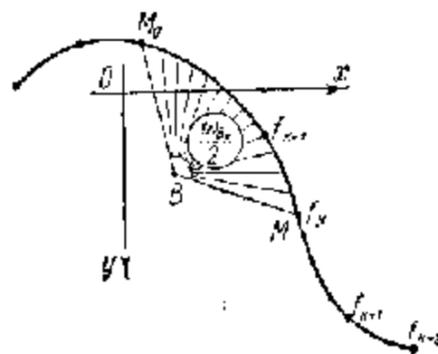


Рис. 51.

линией с сосредоточенными в отдельных точках площадями сечений продольных ребер (рис. 51). Принимая для таких стержней гипотезу о недеформируемости контура сечения, мы можем изложенную выше теорию секториальных площадей распространить также и на сечения с толщиной стенок, меняющейся по закону любой прерывной функции. Для этой цели нам достаточно приведенные выше определенные интегралы, относящиеся к различным секториальным характеристикам сечения, понимать как интегралы Стильтьеса, т. е. на участках, где рабочее поперечное сечение представляется конечными площадями, приложенными в отдельных точках сечения, заменять эти интегралы суммами произведений подынтегральных функций на значения соответствующих площадей. При таком обобщении секториальные центробежные моменты инерции $J_{\omega x}$ и $J_{\omega y}$, входящие в формулы (7.5) гл. I, примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega Bx} &= \int_F x \omega_B dF = \int_L x \omega_B \delta ds + \sum_k x_k \omega_{Bk} f_k \\ J_{\omega By} &= \int_F y \omega_B dF = \int_L y \omega_B \delta ds + \sum_k y_k \omega_{Bk} f_k \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

где $\delta = \delta(s)$ — толщина стенки сечения (в общем случае может быть переменной); f_k — площадь сечения продольного ребра с центром тяжести в точке K ; ω_{Bk} — секториальная площадь для точки K ; эта площадь определяется полюсом B и профильной линией M_0M и не зависит от площадей сечения элементов тонкостенного стержня.

Интегралы, стоящие в правых частях формул (1.23), берутся по переменной s и распространяются на весь контур сечения. Суммы распространяются на все площади сечения, сосредоточенные в точках контура. Для осевых моментов инерции J_x и J_y мы получаем аналогичные выражения:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_L y^2 \delta ds + \sum_k y_k^2 f_k \\ J_y &= \int_L x^2 \delta ds + \sum_k x_k^2 f_k \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

На основании уравнений (1.23) и (1.24) формулы (7.5) гл. I принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\int_L y \omega_B^2 ds + \sum_k y_k \omega_{Bk} f_k}{\int_L y^2 \delta ds + \sum_k y_k^2 f_k} \\ a_y &= -\frac{\int_L x \omega_B^2 ds + \sum_k x_k \omega_{Bk} f_k}{\int_L x^2 \delta ds + \sum_k x_k^2 f_k} \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Для секториальных характеристик S_{ω} и J_{ω} получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega} &= \int_{L(s)} \omega \delta ds + \sum_{k(s)} \omega_k f_k \\ J_{\omega} &= \int_L \omega^2 \delta ds + \sum_k \omega_k^2 f_k \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Первой из формул (1.26) определяется секториальный статический момент для точки контура M ; интеграл и суммы, стоящие в правой части этой формулы, распространяются только на отсеченную часть сечения. Для всего сечения $S_{\omega} = 0$. Второй из формул (1.26) определяется секториальный момент инерции. В этой формуле интегрирование по s и суммирование по сосредоточенным площадям f_k распространяется на все поперечное сечение.

По формулам (1.25) и (1.26) мы можем вычислить координаты центра изгиба и секториальные характеристики сечения для прокатных

профилей с учетом переменности толщин стенок и утолщений в местах сопряжения отдельных частей сечения.

По этим же формулам можно рассчитать сечения, состоящие из одних только сосредоточенных площадей. В этом случае нужно, очевидно, толщину стенки δ считать равной нулю. Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\sum_k y_k \omega_{Bk} f_k}{\sum_k y_k^2 f_k}, & \alpha_y &= -\frac{\sum_k x_k \omega_{Bk} f_k}{\sum_k x_k^2 f_k}; \\ S_{\omega} &= \sum_{k(s)} \omega_k f_k, & J_{\omega} &= \sum_k \omega_k^2 f_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Формулы (1.27) относятся к стержням, в которых нормальные силы в поперечных сечениях воспринимаются одними только продольными

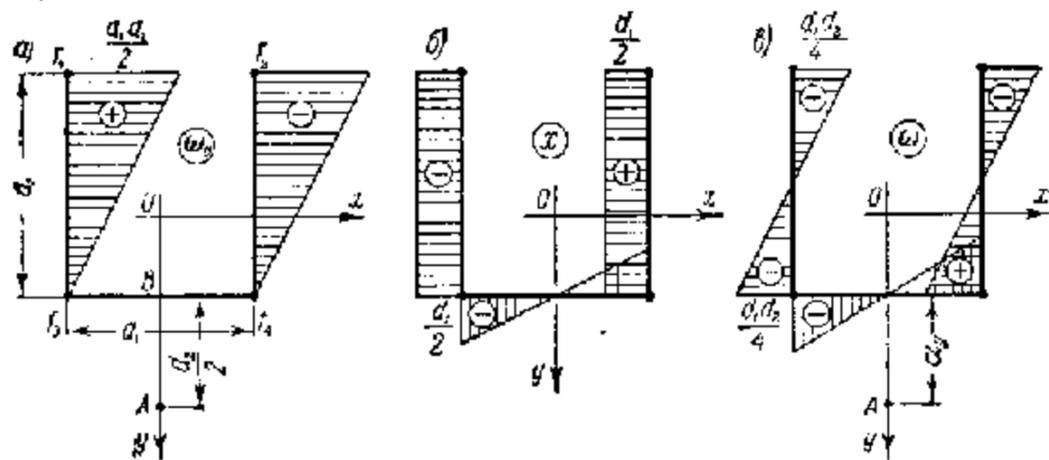


Рис. 52.

элементами. Такими стержнями являются, например, фермы открытых железнодорожных мостов, пространственные конструкции самолета, усиленные ребрами, и т. д. Сквозные стенки ферм в приведенном здесь расчете условно рассматриваются как сплошные пластинки, работающие в поперечных сечениях на одни только сдвигающие силы. Нормальные силы воспринимаются одними только продольными элементами.

В качестве примера рассмотрим мостовую ферму с ездой поизу, усиленную поперечными рамами. Выбирая для определения центра изгиба по формулам (1.27) полюс в точке B и полагая $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$, получим $\alpha_y = \frac{d_2}{2}$ (рис. 52, а). Центр изгиба, как мы видим, и в этом случае находится вне сечения. При кручении продольные деформации удлинений по сечению распределяются по закону секторных площадей. Эпюра этих площадей приведена на рис. 52, в. Умножая деформации удлинений на жесткость EJ продольных элементов, получим нормальные усилия в поясах пространственной фермы при кручении. Эти

усилия нужно прибавить к усилиям, возникающим в стержнях фермы от изгиба.

Таким образом, принимая для ферм гипотезу о недеформируемости контура сечения, мы можем эти фермы рассчитывать как сплошные пространственные системы, учитывая возникающие в них дополнительные напряжения от кручения.

7. Цилиндрическая оболочка, подкреплённая в продольном направлении пластинками и стержнями. На рис. 53, а показано поперечное сечение системы, состоящей из цилиндрической оболочки, двух пластинок и двух бортовых элементов, каждый из которых представляет собой тонкостенный стержень.

Если рассматриваемая конструкция по своим размерам относится к категории длинных цилиндрических оболочек или если эта конструкция в поперечном направлении усилена ребрами (шпангоутами), то при расчете такой конструкции как пространственной системы может быть с успехом использована теория тонкостенных стержней. Распределение продольных нормальных напряжений при изгибе описывается законом плоских сечений, причем этот закон распространяется на все элементы сечения, включая и участки профиля, относящиеся к продольным стрингерам, пластинкам и тонкостенным стержням, работающим совместно с оболочкой и составляющим с профилем этой оболочки в поперечном сечении одно жесткое целое. Аналогично в случае изгибного кручения распределение в поперечном сечении продольных нормальных напряжений описывается законом секторных площадей, и этот закон, характеризующий деформацию сечения, остается также единым для всех элементов профиля.

На рис. 53, б показана эпюра ординат $x = x(s)$, выражающая закон плоских сечений при изгибе стержня-оболочки из плоскости симметрии. На рис. 53, в приведена эпюра ординат $\omega = \omega(s)$ закона секторных площадей при изгибном кручении относительно центра изгиба A. Положение центра A определяется по формулам (7.5) общего метода, изложенного в § 7 гл. I. Входящие в эти формулы определенные интегралы распространяются на все элементы профиля. Главные характеристики сечения для рассматриваемого сложного профиля вычисляются по формулам (6.9)–(6.13), в которых интегрирование распространяется также на все участки сложного профиля, включая промежуточные пластинки и бортовые тонкостенные стержни.

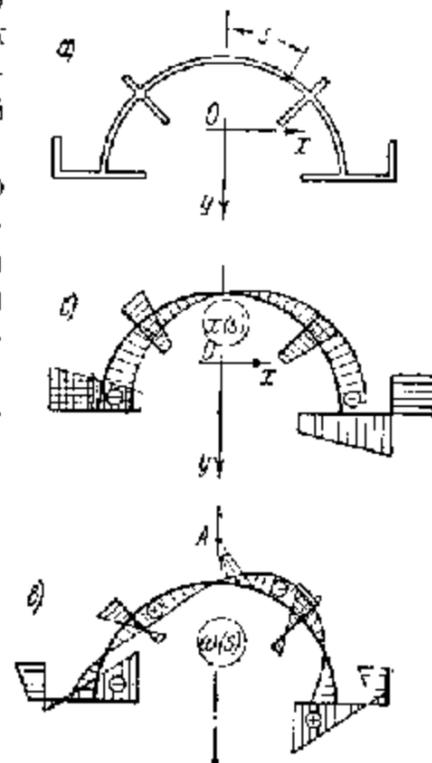


Рис. 53.

§ 2. Кручение стержня при действии поперечной нагрузки

1. В § 9 гл. I было установлено, что тонкостенный стержень, обладающий в поперечном сечении жестким контуром, при действии на него поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, будет испытывать не только деформации изгиба, но также и деформации кручения. Мы опустим здесь всё, относящееся к изгибу балок, основанному на гипотезе плоских сечений [первые три уравнения (7.3) гл. I],

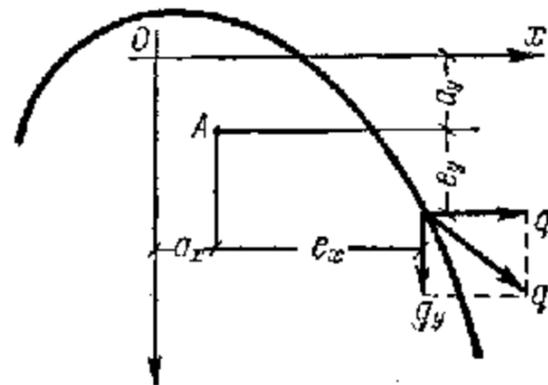


Рис. 54.

и займемся только изучением кручения тонкостенного стержня, возникающего в общем случае действия поперечной нагрузки. Последняя формула (7.3) гл. I даст для угла закручивания $\theta(z)$ в случае действия одной только поперечной нагрузки дифференциальное уравнение

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_{\phi} \theta'' - m = 0. \quad (2.1)$$

Напомним, что через m обозначен свободный член, представляющий собой в случае действия одной только поперечной нагрузки внешний крутящий момент, приходящийся на единицу длины оболочки. Если q_x и q_y — интенсивности поперечных нагрузок, действующих по направлениям главных осей, а e_x и e_y — плечи этих нагрузок относительно центра изгиба (рис. 54), то крутящий момент m определяется формулой

$$m = q_y e_x - q_x e_y.$$

Разделим уравнение (2.1) на коэффициент при θ^{IV} и введем обозначения:

$$k^2 = \frac{GJ_{\phi} l^2}{EJ_{\omega}} \quad (2.2)$$

(l — длина пролета стержня-оболочки вдоль образующей),

$$f(z) = \frac{1}{EJ_{\omega}} m.$$

Тогда уравнение (2.1) примет более простой вид:

$$\theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \theta'' - f(z) = 0. \quad (2.3)$$

2. Дифференциальное уравнение (2.3) — линейное, неоднородное (в случае, если $m \neq 0$), с постоянными коэффициентами.

Общий интеграл дифференциального уравнения (2.3) может быть представлен в виде

$$\theta(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \bar{\theta}(z). \quad (2.4)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные, получившиеся в результате интегрирования однородного дифференциального уравнения, т. е. уравнения, получающегося из уравнения (2.3) путем отбрасывания свободного члена $f(z)$; $\bar{\theta}(z)$ — любое частное решение, удовлетворяющее неоднородному уравнению (2.3); k — безразмерное характеристическое число, определяемое по формуле (2.2)*:

$$k = l \sqrt{\frac{GJ_{\phi}}{EJ_{\omega}}}.$$

Это число, как мы видим, зависит от отношения жесткости GJ_{ϕ} при чистом кручении, рассматриваемом в свете теории Сен-Венана, к секториальной жесткости EJ_{ω} (т. е. жесткости, относящейся к кручению стержня, сопровождаемому появлением в поперечных сечениях нормальных напряжений) и пропорционально l — пролету оболочки в продольном направлении.

* Напомним, как получается общее решение однородного уравнения

$$\theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \theta'' = 0. \quad (a)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\theta = e^{rz}, \quad (b)$$

где r — неизвестный множитель, подлежащий определению. Подставляя (b) в уравнение (a), получим:

$$r^4 e^{rz} - \frac{k^2}{l^2} r^2 e^{rz} = 0.$$

Отсюда, сокращая на общий множитель e^{rz} , будем иметь для определения значений r характеристическое уравнение

$$r^2 - \frac{k^2}{l^2} r^2 = 0 \quad \text{или} \quad r^2 \left(r^2 - \frac{k^2}{l^2} \right) = 0. \quad (в)$$

Решая уравнение (в), находим для его четырех корней следующие значения:

$$r_1 = r_2 = 0 \quad (\text{корень двойной кратности}), \quad r_3 = \frac{k}{l}, \quad r_4 = -\frac{k}{l}.$$

Следовательно, общий интеграл однородного уравнения (a) можно записать в виде

$$\theta = C_1 + C_2 z + \bar{C}_3 e^{\frac{k}{l} z} + \bar{C}_4 e^{-\frac{k}{l} z}.$$

Переходя затем от показательных функций к гиперболическим по формулам:

$$e^{\frac{k}{l} z} = \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \quad e^{-\frac{k}{l} z} = \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$$

и обозначая $(\bar{C}_3 + \bar{C}_4)$ и $(\bar{C}_3 - \bar{C}_4)$ новыми постоянными $C_3 = \bar{C}_3 + \bar{C}_4$ и $C_4 = \bar{C}_3 - \bar{C}_4$, получим искомое выражение

$$\theta = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z.$$

Имея общий интеграл для угла закручивания (2.4), мы можем получить также общие интегралы для деформации $\theta' = \frac{d\theta}{dz}$ и для внутренних силовых факторов поперечного сечения стержня.

Такими факторами являются бимомент B , получающийся от нормальных напряжений при кручении (вместо него можно было бы взять сами нормальные напряжения, связанные с бимоментом формулой $\sigma = \frac{B}{J_{\omega}} \omega$), и полный крутящий момент H , состоящий из суммы изгибно-крутящего момента H_{ω} от осевых сдвигающих сил и крутящего момента H_k от неравномерного распределения касательных напряжений по толщине стенки. Для этих величин мы получили формулы (8.3) и (8.11) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} B &= -EJ_{\omega} \theta'', \\ H &= -EJ_{\omega} \theta''' + GJ_d \theta'. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Найдя производные первого, второго и третьего порядка по переменной z от функции $\theta(z)$ (2.4) и внося их в формулы (2.5), получим общие интегралы для B и H . Окончательно получим для четырех основных расчетных величин (двух кинематических: угла закручивания θ и деформации θ' , и двух статических: бимомента B и полного крутящего момента H) следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \bar{\theta}(z), \\ \theta'(z) &= C_2 + C_3 \frac{k}{l} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + C_4 \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \bar{\theta}'(z), \\ B(z) &= -GJ_d \left[C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{l^2}{k^2} \bar{\theta}''(z) \right], \\ H(z) &= GJ_d \left[C_2 + \bar{\theta}'(z) - \frac{l^2}{k^2} \bar{\theta}'''(z) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

3. В теории дифференциальных уравнений указываются общие приемы для отыскания частных интегралов неоднородного уравнения. Так, например, зная общий интеграл однородного уравнения, можно определить частный интеграл неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных; этот способ применим вообще к линейным уравнениям с постоянными и переменными коэффициентами.

Для разных частных видов нагрузок указываются наиболее простые и быстрые способы получения частных интегралов. Мы не будем рассматривать все эти случаи, так как в дальнейшем намерены при решении дифференциального уравнения кручения воспользоваться методом начальных параметров, а нахождение частных интегралов по этому методу отлично от классических способов, о которых мы говорили выше. Применению метода начальных параметров к нашей задаче мы посвятим следующий параграф, а теперь приведем несколько примеров получения

частных интегралов для некоторых часто встречающихся случаев нагрузки по обычной теории.

а) Сосредоточенный крутящий момент. Такой случай имеет место при отсутствии поверхностных сил. Сосредоточенный крутящий момент получается от действия сосредоточенной поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба. Погонная нагрузка от крутящего момента m равна нулю. Частный интеграл неоднородного уравнения (2.3) равен нулю:

$$\bar{\theta}(z) = 0.$$

Формулы (2.6) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z, \\ \theta'(z) &= C_2 + C_3 \frac{k}{l} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + C_4 \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \\ B(z) &= -GJ_d \left(C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ H(z) &= GJ_d C_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Из четвертой формулы (2.7) видно, что общий крутящий момент от внутренних сил на незагруженном участке не зависит от переменной z . Это следует также и из условий равновесия части стержня, заключенной между сечениями, в плоскостях которых действуют крутящие моменты от сосредоточенных сил.

Формулы (2.7) позволяют также определить усилия и деформации стержня от внешней нагрузки, приложенной по концам и осуществленной в виде нормальных или касательных напряжений, распределенных по сечению в соответствии с законом секторных площадей.

б) Равномерно распределенный крутящий момент. Если на стержень действует поперечная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность и постоянное направление и приложенная на линии, параллельной образующей, то внешний погонный крутящий момент m от такой нагрузки будет выражаться постоянной (но зависящей от z) величиной.

Обозначая интенсивность поперечной нагрузки через q и плечо этой нагрузки относительно центра изгиба соответственно через e , получим для интенсивности крутящего момента m выражение (рис. 55):

$$m = qe.$$

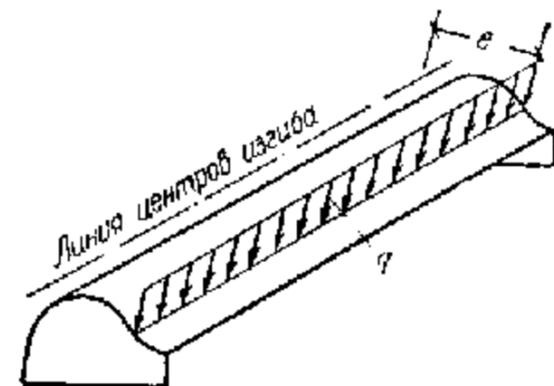


Рис. 55.

Дифференциальное уравнение (2.3) для этого случая принимает следующий вид:

$$\theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \theta'' - \frac{qe}{EJ_w} = 0.$$

Частное решение этого неоднородного уравнения будет:

$$\bar{\theta} = -\frac{qe}{2EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z^2.$$

Общие интегралы (2.6) для деформаций и усилий от кручения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{qe}{2EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z^2, \\ \theta'(z) &= C_2 + C_3 \frac{k}{l} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + C_4 \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - \frac{qe}{EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z, \\ B(z) &= -GJ_d \left(C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{qe}{EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z \right), \\ H(z) &= GJ_d \left(C_2 - \frac{qe}{EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z \right). \end{aligned}$$

в) Крутящий момент, распределенный по закону трапеции. Интенсивность крутящего момента m может быть выражена формулой

$$m = e \left(q_0 + \frac{q_1}{l} z \right),$$

где функция $q_0 + \frac{q_1}{l} z$ представляет собой трапециoidalную нагрузку, приложенную на прямой, параллельной образующей, и имеющую плечо e относительно центра изгиба. Общие интегралы (2.6) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{e}{6EJ_w} \left(3q_0 z^2 + \frac{q_1}{l} z^3 \right) \frac{l^2}{k^2}, \\ \theta'(z) &= C_2 + C_3 \frac{k}{l} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + C_4 \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - \frac{e}{EJ_w} \left(q_0 z + \frac{1}{2} \frac{q_1}{l} z^2 \right) \frac{l^2}{k^2}, \\ B(z) &= -GJ_d \left[C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{e}{EJ_w} \left(q_0 + \frac{q_1}{l} z \right) \frac{l^2}{k^2} \right], \\ H(z) &= GJ_d \left[C_2 - \frac{e}{EJ_w} \left(q_0 z + \frac{1}{2} \frac{q_1}{l} z^2 \right) \frac{l^2}{k^2} + \frac{q_1 e}{EJ_w} \frac{l^2}{k^2} z \right]. \end{aligned}$$

4. Определив тем или иным способом общие интегралы четырех основных расчетных величин в функции четырех произвольных постоянных интегрирования, мы можем определить эти произвольные постоянные, исходя из граничных условий на концах стержня. Так как произвольных постоянных четыре, то на каждом конце стержня необходимо поставить два условия.

Основные виды граничных условий, с которыми нам придется встречаться, можно свести к нескольким типам.

а) Конец стержня жестко заделан. Это значит, что опорное сечение закреплено от перемещений как в плоскости этого сечения

(отсутствие угла закручивания θ), так и из плоскости (отсутствие деформации θ'). Это чисто кинематические граничные условия; их можно, следовательно, записать так:

$$\theta = 0, \quad \theta' = 0 \quad (2.8)$$

при $z=0$ или $z=l$, в зависимости от того, к какому концу относится это условие.

б) Конец стержня имеет шарнирное закрепление. Под шарнирным закреплением стержня мы условимся понимать такое закрепление, при котором опорное сечение не имеет угла закручивания (сечение закреплено от поворота относительно оси z) и свободно может деформироваться из своей плоскости (по сечению отсутствуют секториальные продольные силы). Граничные условия для шарнирно закрепленного конца стержня будут иметь вид:

$$\theta = 0, \quad B = 0. \quad (2.9)$$

Здесь одно условие кинематическое, другое — статическое.

в) Стержень имеет свободный конец. Под этим понимается отсутствие на конце статических факторов (продольных секториальных сил и общего крутящего момента). Следовательно, на свободном конце стержня мы имеем чисто статические условия:

$$B = 0, \quad H = 0. \quad (2.10)$$

Так как стержень имеет два конца, то граничные условия могут сочетаться в разных комбинациях; так, например, условия (2.8), равно как и условия (2.9), могут выполняться на обоих концах одного стержня; условия (2.10) не могут выполняться на обоих концах одного стержня; на одном конце могут выполняться условия (2.8), а на другом (2.9) или (2.10).

Перечисленными комбинациями мы, конечно, не исчерпываем всех видов граничных условий, которые могут встретиться на практике; на концах могут быть приложены крутящие моменты заданной величины, бимоменты или продольные нормальные силы и т. д. Некоторые из таких видов граничных условий будут ниже рассмотрены.

Наложением граничных условий и определением произвольных постоянных интегрирования, по существу, заканчивается основная часть расчета; дальнейшее заключается в вычислении силовых или кинематических факторов.

§ 3. Применение метода начальных параметров к расчету стержней на кручение

1. Общее решение однородного дифференциального уравнения кручения

$$\theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \theta'' = 0 \quad (3.1)$$

представлено формулами (2.6). В этих формулах функция $1, z, \operatorname{sh} \frac{k}{l} z,$

$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$ являются частными линейно независимыми между собой решениями уравнения (3.1), а C_1, C_2, C_3 и C_4 произвольными постоянными. Эти постоянные в каждом частном случае определяются из граничных условий. Пользуясь методом начальных параметров, мы можем легко выявить природу этих постоянных и значительно упростить расчет стержней на кручение.

Выберем начало координаты z в каком-либо произвольном сечении стержня. Будем считать, что для этого начального сечения все геометрические и статические факторы, связанные с кручением стержня по секториальному закону, имеют вполне определенные заданные значения. Обозначая эти факторы соответственно через θ_0, θ'_0, B_0 и H_0 и предполагая, что стержень находится под действием одних только начальных факторов, т. е. считая, что по длине стержня внешние воздействия равны нулю, получим из общих формул (2.6), полагая $z=0$, следующую систему уравнений для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 через начальные параметры θ_0, θ'_0, B_0 и H_0 :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= C_1 + C_4, & \theta'_0 &= C_2 + \frac{k}{l} C_3, \\ B_0 &= -C_3 GJ_d, & H_0 &= C_2 GJ_d. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \theta_0 + \frac{1}{GJ_d} B_0, \\ C_3 &= -\frac{1}{GJ_d} H_0, \\ C_2 &= \frac{l}{k} \theta'_0 - \frac{l}{k} \frac{1}{GJ_d} H_0, \\ C_4 &= -\frac{1}{GJ_d} B_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 и C_4 в формулы (2.6), получим общие формулы метода начальных параметров для всех четырех расчетных величин:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \frac{l}{k} \theta'_0 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - \frac{1}{GJ_d} B_0 \left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - 1 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{GJ_d} H_0 \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ \theta' &= \theta'_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{k}{l} \frac{1}{GJ_d} B_0 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{1}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) H_0, \\ B &= -\frac{l}{k} GJ_d \theta'_0 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{l}{k} H_0 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \\ H &= H_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Эти формулы в своей совокупности образуют систему линейного преобразования изгибно-крутильных факторов начального сечения θ_0, θ'_0, B_0 и H_0 в изгибно-крутильные факторы $\theta(z), \theta'(z), B(z)$ и $H(z)$ сечения с текущей координатой z . Коэффициенты этого преобразования зависят не только от координаты z , определяющей взаимное положение двух сечений (начального и рассматриваемого), но также и от величин GJ_d, EJ_c и $k = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_c}}$, характеризующих упругие свойства стержня при кручении. Линейное преобразование, выраженное формулами (3.3), удобно представить в виде табл. 3.

Таблица 3

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$
$\theta(z)$	1	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1

В этой таблице в верхней горизонтальной строчке и в крайнем левом вертикальном столбце выписаны изгибно-крутильные факторы, относящиеся к двум различным сечениям стержня*). В пересечениях вертикальных столбцов с горизонтальными строчками выписаны коэффициенты преобразования (3.3). Эти коэффициенты образуют матрицу, которую мы будем называть *матрицей начальных параметров*.

2. Из способа получения матрицы начальных параметров следует, что эту матрицу можно записать и в более общей форме, а именно,

*) Для того чтобы сохранить однородность коэффициентов таблицы, вместо B и H мы рассматриваем величины, им пропорциональные: $\frac{1}{GJ_d} B$ и $\frac{1}{GJ_d} H$.

взять за начальное сечение по $z=0$, а любое произвольное сечение $z=t$ ($z > t > 0$). Тогда в коэффициентах матрицы вместо аргумента z следует брать аргумент $(z-t)$. Матрица может быть представлена в виде следующей таблицы:

Таблица 4

	θ_t	θ'_t	$\frac{1}{GJ_d} B_t$	$\frac{1}{GJ_d} H_t$
$\theta(z)$	1	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$-\frac{(z-t)}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1

Докажем несколько важных свойств матрицы начальных параметров:

а) Определитель матрицы начальных параметров равен единице при любом значении z .

Действительно, раскрывая этот определитель, получим:

$$\Delta = \operatorname{ch}^2 \frac{k}{l} (z-t) - \operatorname{sh}^2 \frac{k}{l} (z-t) = 1^*).$$

б) Так как коэффициенты матрицы при заданных упругих характеристиках и длине стержня зависят от относительной координаты $(z-t)$, определяющей взаимное положение двух сечений стержня $t = \operatorname{const}$

*) Определитель матрицы начальных параметров представляет собой известный в теории линейных дифференциальных уравнений определитель Вронского. Фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения, для которой определитель Вронского при начальном значении аргумента равен единице, называется в теории линейных дифференциальных уравнений *нормальной фундаментальной системой*. Следовательно, наше решение, составленное из линейно независимых функций $1, \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t),$

$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t), (z-t) - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$, представляет собой нормальную фундаментальную систему для уравнения (3.1).

и $z > t = \operatorname{const}$, то формулам табл. 4 можно придать различный смысл в зависимости от того, какое из двух сечений считать переменным.

Считая начальное сечение $t = \operatorname{const}$ заданным и давая независимой переменной z различные значения, мы можем по формулам табл. 4 построить графики изменения факторов $\theta(z), \theta'(z), B(z)$ и $H(z)$ от действия каждого из четырех начальных факторов θ_t, θ'_t, B_t и H_t в отдельности.

Фиксируя теперь определенным образом сечение $z = \operatorname{const}$, для которого разыскиваются значения $\theta(z), \theta'(z), B(z)$ и $H(z)$ и давая начальному сечению $t = \operatorname{const}$ различные положения по длине стержня, получим по формулам табл. 4 уравнения линий влияния (инфлюент) для каждого из четырех факторов $\theta(z), \theta'(z), B(z), H(z)$ в отдельности. Поэтому коэффициенты этой матрицы, зависящие от аргумента $(z-t)$, будут в этом случае функциями влияния.

Поскольку независимой переменной в случае линий влияния является та же относительная координата и уравнения линий влияния совпадают с уравнениями эшор, то графики изменения изгибно-крутильных факторов являются также и линиями влияния для этих факторов. Это есть *свойство взаимности эшор и инфлюент*.

в) Линейное преобразование, представленное матрицей табл. 4, обладает также *свойством обратимости*. Это свойство заключается в том, что с помощью этой матрицы можно произвести не только прямое преобразование начальных факторов $\theta_t, \theta'_t, \frac{1}{GJ_d} B_t$ и $\frac{1}{GJ_d} H_t$ сечения $t = \operatorname{const}$, принятого за начальное, в факторы $\theta(z), \theta'(z), \frac{1}{GJ_d} B(z)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z)$ сечения с текущей координатой z , но также и обратное преобразование факторов $\theta_z, \theta'_z, \frac{1}{GJ_d} B_z$ и $\frac{1}{GJ_d} H_z$ в факторы $\theta(t), \theta'(t), \frac{1}{GJ_d} B(t)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(t)$. Для этого нужно сечения $z = \operatorname{const}$ и $t = \operatorname{const}$ поменять местами, т. е. считать за заданное начальное сечение $z = \operatorname{const}$, а за текущее $t = \operatorname{const}$. Естественно, что аргумент $(z-t)$ изменит при этом знак на обратный. Четные функции влияния при изменении знака аргумента на обратный не изменятся; функции влияния нечетные при изменении знака аргумента переменяют знак на обратный. Таким образом, матрица обратного преобразования, коэффициенты которой получаются из коэффициентов матрицы табл. 4 путем замены знаков нечетных функций на обратные может быть представлена в виде табл. 5.

Обратное линейное преобразование (табл. 5) является, по существу, решением системы четырех уравнений табл. 3, если в этих уравнениях левые части $\theta_z, \theta'_z, \frac{1}{GJ_d} B_z$ и $\frac{1}{GJ_d} H_z$ считать заданными величинами, а начальные параметры $\theta_t, \theta'_t, \frac{1}{GJ_d} B_t$ и $\frac{1}{GJ_d} H_t$ — искомыми.

Определитель матрицы обратного преобразования также равен единице, так как изменение знака всех нечетных функций на обратный не меняет величины определителя^{*)}.

Таблица 5

	θ_z	θ'_z	$\frac{1}{GJ_d} B_z$	$\frac{1}{GJ_d} H_z$
$\theta(z)$	1	$-\frac{t}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$-\frac{(z-t)}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$\frac{t}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$	$-\frac{t}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1

3. Перейдем теперь к получению интегралов однородного уравнения (3.1) от различных сосредоточенных факторов, как угодно расположенных по длине стержня. Предварительно запишем матрицу начальных параметров табл. 3 в более компактной форме, обозначая коэффициенты этой матрицы буквой K с двумя индексами, показывающими строку и столбец, на пересечении которых в таблице находится коэффициент. Матрица начальных параметров в символической форме записи представлена в виде табл. 6.

Формулы, выписанные в табл. 6, а в развернутом виде для случая стесненного кручения — в табл. 3, позволяют определить изгибно-крутильные факторы $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $\frac{1}{GJ_d} B(z)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z)$ для любого сечения $z = \text{const}$, если известны эти факторы для начального сечения $z = 0$.

^{*)} Эта матрица обладает еще рядом интересных свойств. Доказательство этих свойств для матрицы более общего типа, относящейся к дифференциальному уравнению с двумя заданными обобщенными упругими характеристиками r^2 и s^2 :

$$y^{IV} - 2r^2 y'' + s^2 y = 0,$$

подробно изложено в работах автора [65] и [66].

Вывод этого уравнения дан в § 5 гл. III.

Рассматривая коэффициенты $K(z)$ табл. 6 как функции влияния и пользуясь принципом наложения, вытекающим из линейности этого преобразования, мы можем при помощи этой таблицы определить

Таблица 6

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$
$\theta(z)$	$K_{\theta\theta}(z)$	$K_{\theta\theta'}(z)$	$K_{\theta B}(z)$	$K_{\theta H}(z)$
$\theta'(z)$	$K_{\theta'\theta}(z)$	$K_{\theta'\theta'}(z)$	$K_{\theta' B}(z)$	$K_{\theta' H}(z)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	$K_{B\theta}(z)$	$K_{B\theta'}(z)$	$K_{BB}(z)$	$K_{BH}(z)$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	$K_{H\theta}(z)$	$K_{H\theta'}(z)$	$K_{HB}(z)$	$K_{HH}(z)$

изгибно-крутильные факторы $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $\frac{1}{GJ_d} B(z)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z)$ для любого сечения стержня от действия сосредоточенных кинематических и статических факторов, приложенных в произвольных сечениях. Так, например, если на стержень, кроме начальных параметров θ_0 , θ'_0 , $\frac{1}{GJ_d} B_0$, $\frac{1}{GJ_d} H_0$, действуют сосредоточенные факторы θ_t , θ'_t , $\frac{1}{GJ_d} B_t$ и $\frac{1}{GJ_d} H_t$, приложенные в сечении $z=t$, то для сечений с абсциссами $z \geq t$ изгибно-крутильные факторы θ , θ' , $\frac{1}{GJ_d} B$ и $\frac{1}{GJ_d} H$ будут складываться из факторов $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $\frac{1}{GJ_d} B(z)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z)$, возникающих от одних только начальных параметров θ_0 , θ'_0 , $\frac{1}{GJ_d} B_0$ и $\frac{1}{GJ_d} H_0$, и факторов $\theta(z-t)$, $\theta'(z-t)$, $\frac{1}{GJ_d} B(z-t)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z-t)$, получающихся в результате действия одних только сосредоточенных факторов θ_t , θ'_t , $\frac{1}{GJ_d} B_t$ и $\frac{1}{GJ_d} H_t$; коэффициенты влияния в обоих случаях одни и те же, но в первом случае они вычисляются для аргумента z , а во втором случае для аргумента $(z-t)$. Следовательно, для участка стержня, расположенного далее сечения $t = \text{const}$ или в самом сечении (т. е. при $z \geq t$), для вычисления наших основных величин мы будем иметь формулы, представленные в табл. 7.

Таблица 7

$\frac{1}{GJ_d} H_t$	$K_{OH}(z-t)$	$K_{OH'}(z-t)$	$K_{OB}(z-t)$	$K_{OH}(z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} B_t$	$K_{OB}(z-t)$	$K_{OB'}(z-t)$	$K_{OH}(z-t)$	$K_{OB}(z-t)$
θ'_t	$K_{OH'}(z-t)$	$K_{OH''}(z-t)$	$K_{OB'}(z-t)$	$K_{OH'}(z-t)$
θ_t	$K_{OB}(z-t)$	$K_{OB'}(z-t)$	$K_{OH}(z-t)$	$K_{OB}(z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} H_0$	$K_{OH}(z)$	$K_{OH'}(z)$	$K_{OB}(z)$	$K_{OH}(z)$
$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$K_{OB}(z)$	$K_{OB'}(z)$	$K_{OH}(z)$	$K_{OB}(z)$
θ'_0	$K_{OH'}(z)$	$K_{OH''}(z)$	$K_{OB'}(z)$	$K_{OH'}(z)$
θ_0	$K_{OB}(z)$	$K_{OB'}(z)$	$K_{OH}(z)$	$K_{OB}(z)$
	$0(z)$	$\theta(z)$	$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	$\frac{1}{GJ_d} H(z)$

Для участков стержня, расположенных ближе сечения $t = \text{const}$ (при $z < t$) для вычисления основных величин следует пользоваться формулами табл. 6. При практических расчетах по методу начальных параметров формулы табл. 7 являются основными. В этих формулах в дальнейшем будем считать заданными величины сосредоточенных факторов $\theta_t, \theta'_t, \frac{1}{GJ_d} B_t$ и $\frac{1}{GJ_d} H_t$ и сечение, в котором они приложены ($z = t$). В большинстве случаев при расчетах приходится иметь дело со статическими нагрузками и гораздо реже с кинематическими, поэтому в табл. 7 можно сохранить только B_t и H_t , положив $\theta_t = \theta'_t = 0$.

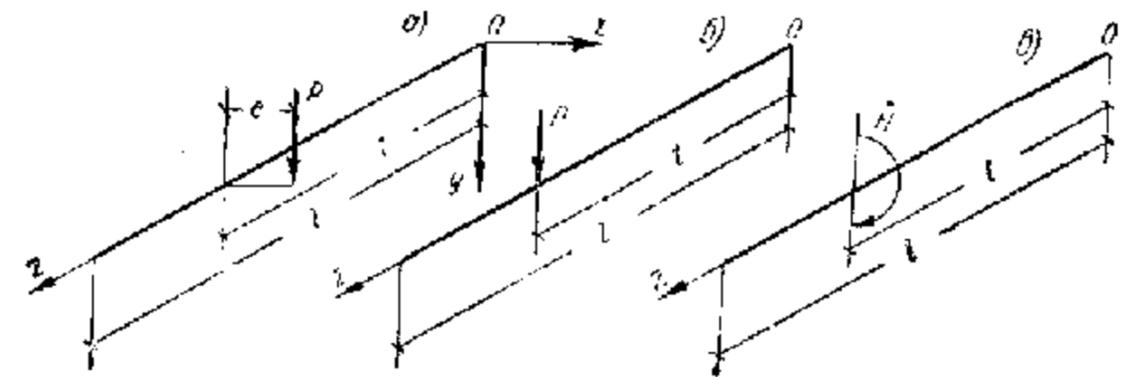


Рис. 56.

4. Пользуясь законом наложения, мы можем легко обобщить формулы таблицы 7, распространив их и на более сложные случаи действия нагрузок, которые приложены в различных сечениях стержня в виде сосредоточенных факторов или распределенных на некотором участке стержня по тому или иному непрерывному закону.

Предварительно сделаем замечание о знаке начального фактора H_t от сосредоточенного внешнего крутящего момента \bar{N} , приложенного в сечении $z = t$ стержня. Покажем, что при положительном значении \bar{N} начальный фактор H_t определяется по формуле $H_t = -\bar{N}$.

Пусть в сечении $z = t$ действует внешний сосредоточенный крутящий момент \bar{N} (рис. 56, в). Этот момент в данном случае образован внешней поперечной силой P , приложенной в сечении $z = t$ на расстоянии e от линии центров изгиба (рис. 56, а), и определяется по формуле $\bar{N} = Pe$. Согласно рис. 56, в крутящий момент \bar{N} положителен, так как он направлен по часовой стрелке со стороны значений $z - t > 0$.

В сечении $z = 0$ начальное значение крутящего момента, как начального параметра, равно H_0 . Положительное направление этого момента на площадке с отрицательной нормалью будет против часовой стрелки, если смотреть на эту площадку со стороны значений $z - t > 0$ (§ 5 гл. I). Двигаясь в направлении оси Oz и проходя сечение $z = t$, мы будем получать отрицательное приращение функции $H(z)$ в этом

сечении. Действительно, для части стержня $z-t > 0$ крутящий момент \bar{H} на площадке с отрицательной нормалью создает вращение по часовой стрелке, если смотреть на эту площадку со стороны значений $z-t > 0$ и поэтому его значение, как значение начального фактора H_t , в сечении $z-t=0$ будет отрицательным, т. е. $H_t = -\bar{H}$.

Аналогичное замечание нужно сделать и относительно B_t .

Рассмотрим для примера стержень, нагруженный на участке от $z=t_1$ до $z=t_2$ нагрузкой $q(z)$, расположенной с эксцентриситетом e

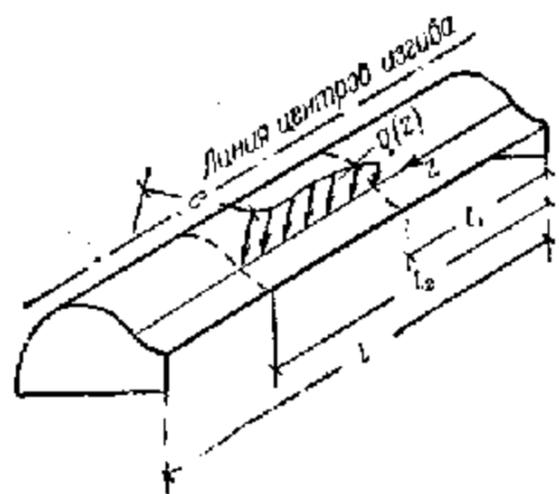


Рис. 57.

по отношению к линии центров изгиба и создающей, следовательно, распределенный крутящий момент $\bar{H}(z) = q(z)e$ (рис. 57), интенсивность которого может менять свою величину по какому-либо закону в функции от координаты z .

На участке стержня от $z=0$ до $z=t_1$ нагрузки нет никакой и, следовательно, все основные функции выражаются только через начальные параметры по формулам табл. 6 или в развернутом виде по формулам табл. 3.

Суммируя «сосредоточенные» моменты $\bar{H}(t) dt$ на всем протяжении

от $z=t_1$ до z ($t_1 \leq z < t_2$) или, другими словами, интегрируя последний столбец табл. 7 по переменной t в пределах от $t=t_1$ до $t=z$, получим формулы, учитывающие влияние только распределенной нагрузки — крутящего момента интенсивности $\bar{H}(z)$. Эти формулы будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= -\frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{\theta H}(z-t) dt, \\ \theta'(z) &= -\frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{\theta' H}(z-t) dt, \\ \frac{1}{GJ_d} B(z) &= -\frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{BH}(z-t) dt, \\ \frac{1}{GJ_d} H(z) &= -\frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{HH}(z-t) dt. \end{aligned} \right\} (3.4)$$

Присоединяя формулы (3.4) к формулам табл. 6, зависящим только от начальных параметров, получим формулы для вычисления основных расчетных величин для второго участка стержня ($t_2 > z \geq t_1$).

Третий участок стержня от $z=t_2$ до $z=l$ не содержит нагрузки. Формулы для третьего участка ($l \geq z \geq t_2$) будут отличаться от аналогичных формул для второго участка только тем, что в интегралах вместо верхнего предела $t=z$ будет предел $t=t_2$, так как нагрузка собирается со всего участка (от t_1 до t_2).

5. Вычислим для конкретного случая нагрузки интегралы, фигурирующие в вышеприведенных формулах и представим эти формулы в развернутом виде. Пусть на участке стержня $t_2 \geq z \geq t_1$ приложен равномерно распределенный крутящий момент $\bar{H}(t) = qe$, где q и эксцентриситет e — постоянные величины. Вынося qe за знак интеграла и раскрывая коэффициенты влияния, стоящие под интегралами, по соответствующим формулам табл. 3, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{\theta H}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \left[(z-t) - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) \right] dt = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left[-\frac{(z-t)^2}{2} - \frac{l^2}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right]_{t=t_1}^{t=z} = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left\{ \frac{(z-t_1)^2}{2} + \frac{l^2}{k^2} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t_1) \right] \right\}, \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{\theta' H}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right] dt = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left[t - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) \right]_{t=t_1}^{t=z} = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left[(z-t_1) - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t_1) \right], \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{BH}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) dt = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left[-\frac{l^2}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right]_{t=t_1}^{t=z} = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \frac{l^2}{k^2} \left[-1 + \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t_1) \right], \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} \bar{H}(t) K_{HH}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} \int_{t=t_1}^{t=z} dt = \frac{qe}{GJ_d} \left[t \right]_{t=t_1}^{t=z} = \\ &= \frac{qe}{GJ_d} (z-t_1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычислим интегралы для третьего участка

стержня ($z \geq t_2$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{GJ_d} \int_{t_1}^{t_2} \bar{H}(t) K_{CH}(z-t) dt &= \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left\{ -\frac{(z-t_2)^2}{2} + \frac{(z-t_1)^2}{2} + \frac{l^2}{k^2} \left[\operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_2) - \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right] \right\}, \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t_1}^{t_2} \bar{H}(t) K_{OH}(z-t) dt &= \\ &= \frac{qe}{GJ_d} \left\{ t_2 - t_1 + \frac{l}{k} \left[\operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-t_2) - \operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-t_1) \right] \right\}, \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t_1}^{t_2} \bar{H}(t) K_{BH}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} \frac{l^2}{k^2} \left[-\operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_2) + \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right], \\ \frac{1}{GJ_d} \int_{t_1}^{t_2} \bar{H}(t) K_{HH}(z-t) dt &= \frac{qe}{GJ_d} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Формулы для определения основных расчетных величин в раскрытом виде для указанного вида нагрузки приведены в таблицах 8 (для участка $z < t_1$), 9 (для участка $t_2 < z \leq t_1$) и 10 (для участка $z \geq t_2$).

Таблица 8

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$
$\theta(z)$	1	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1

Из рассмотрения таблиц 8, 9 и 10 может создаться ложное представление, что нагрузки, приложенные на каком-либо участке стержня, оказывают свое влияние на последующие участки и не влияют на участки предыдущие; так, например, в приведенном примере нагрузка приложена на втором участке и члены от нагрузки (частные интегралы от нагрузки) есть в формулах для второго и третьего участков, но их нет в формулах для первого участка.

Таблица 9

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$	$\frac{1}{GJ_d} qe$
$\theta(z)$	1	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\frac{(z-t_1)^2}{2} - \frac{l^2}{k^2} \times$ $\times \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right]$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-(z-t_1) +$ $+\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-t_1)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$-\frac{l^2}{k^2} \left[-1 + \right.$ $\left. + \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right]$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1	$-(z-t_1)$

Ошибочность такого суждения станет очевидна, если мы вспомним, что начальные параметры θ_0 , θ'_0 , B_0 и H_0 являются произвольными постоянными интегрирования дифференциального уравнения (3.1) и подлежат определению из граничных условий на концах стержня $z=0$ и $z=l$. Два условия на конце $z=0$ сразу дают определенные значения (обычно нулевые) для двух начальных параметров, а два других параметра определятся из соответствующих условий на конце $z=l$. Этот конец относится к последнему участку стержня, на котором сказываются все предыдущие нагрузки. Таким образом, через два параметра, определенные из формул последнего участка, влияние всех нагрузок скажется и на предыдущих участках, в том числе и на первом, не содержащем непосредственно частных интегралов от нагрузки.

Таблица 10

$\frac{1}{GI_d} qe$	$-\frac{(z-t_1)^2}{2} + \frac{(z-t_2)^2}{2} - \frac{t^2}{k^2} \left[\operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_2) - \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right]$	$-\frac{(t_2-t_1)}{k} \left[\operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-t_2) - \operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-t_1) \right]$	$-\frac{t^2}{k^2} \left[-\operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_2) + \operatorname{ch} \frac{k}{l}(z-t_1) \right]$	$-(t_2-t_1)$
$\frac{1}{GI_d} H_0$	$z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	1
$\frac{1}{GI_d} B_0$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	0
θ'_0	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	0
θ_0	1	0	0	0
$\theta(z)$	$\theta(z)$	$\theta'(z)$	$\frac{1}{GI_d} B(z)$	$\frac{1}{GI_d} H(z)$

§ 4. Стержни под действием крутящих моментов, приложенных на концах

Применим метод начальных параметров к расчету на кручение стержней, находящихся под действием внешней заданной нагрузки. Начнем с более простых случаев внешней нагрузки, а именно — с таких, когда состояние усилий и деформаций на всем протяжении стержня описывается одними и теми же формулами; к таким нагрузкам относятся, например, нагрузки, приложенные только на концах стержня. Рассмотрим, в частности, стержень, находящийся под действием взаимно уравновешенных крутящих моментов, приложенных на концах (рис. 58).

Деформации и напряжения стержня будут зависеть от условий закрепления концов стержня. Мы рассмотрим здесь два случая граничных условий.

1. Концы стержня свободны от продольных секториальных сил. В этом случае на обоих концах стержня должны обращаться в нуль бимоменты B . Другим условием должно быть равенство крутящих моментов на концах стержня заданным внешним крутящим моментам \bar{H} . Но из табл. 3 мы видим, что $H(z) = H_0$ и поэтому достаточно приравнять $H(z)$

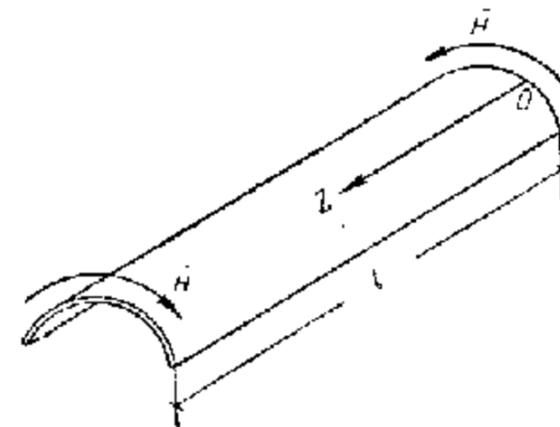


Рис. 58.

заданному \bar{H} только на одном конце; поэтому здесь мы имеем не два, а одно условие. Пусть это условие относится к краю $z=l$, тогда в качестве четвертого граничного условия примем равенство угла закручивания на краю $z=0$.

Таким образом, граничные условия в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad B=0 \quad \text{и} \quad \theta=0; \\ \text{при } z=l \quad B=0 \quad \text{и} \quad H=\bar{H}. \end{aligned}$$

Из этих условий получаем:

$$B_0=0, \quad \theta_0=0 \quad \text{и} \quad H_0=\bar{H}. \quad (4.1)$$

Три начальных параметра таким образом уже определены; четвертый начальный параметр θ'_0 определим из последнего условия: $B(l)=0$. Используя (4.1), получим:

$$B(l) = -\frac{l}{k} GI_d \theta'_0 \operatorname{sh} k + \frac{l}{k} \bar{H} \operatorname{sh} k = 0.$$

Отсюда находим:

$$\theta'_0 = \frac{\bar{H}}{GI_d}. \quad (4.2)$$

Подставляя найденные значения начальных параметров (4.1) и (4.2) в матрицу табл. 3, получим для основных расчетных величин следующие формулы:

$$\theta(z) = \frac{\bar{H}}{GJ_d} z, \quad \theta'(z) = \frac{\bar{H}}{GJ_d}, \quad B(z) = 0, \quad H(z) = \bar{H}. \quad (4.3)$$

Для угла закручивания $\theta(z)$ мы получили формулу, совпадающую с известной формулой из теории чистого кручения тонкостенных стержней.

Изгибно-крутящий бимомент $B(z)$ при выбранных граничных условиях всюду (при любом z) равен нулю. Это указывает на то, что в стержне со свободными концами нормальные напряжения при кручении равны нулю. В стержне возникают одни только касательные напряжения, образующие в поперечном сечении замкнутый силовой поток и приводящиеся к крутящему моменту H .

Относительный угол закручивания $\theta'(z)$ в случае чистого кручения пропорционален крутящему моменту \bar{H} и обратно-пропорционален крутильной жесткости GJ_d . Величина J_d для тонкостенных открытых профилей, как отмечалось уже ранее [(5.8) гл. I], вычисляется по формуле

$$J_d = \frac{\alpha}{3} \sum d\delta^3,$$

где α — коэффициент, зависящий от формы сечения. Ниже в табл. 11 приводятся полученные экспериментальным путем значения коэффициента α для некоторых типов прокатных профилей.

Таблица 11

Сечение прокатной стали	Коэффициент α	
	для различных образцов	средний
Угловое	0,86 — 1,10	0,99
Корытное	0,98 — 1,25	1,12
Тавровое	0,92 — 1,25	1,15
Двутавровое	1,16 — 1,44	1,31
Широкополочное двутавровое	1,21 — 1,47	1,29
З-стоевое	1,13 — 1,20	1,16

2. Опорные сечения стержня при кручении остаются плоскими. При этих граничных условиях на обоих концах стержня отсутствует деформация θ' .

Считая по-прежнему угол поворота начального сечения равным нулю, мы можем граничные условия представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta' &= 0, \quad \theta = 0; \\ \text{при } z=l \quad \theta' &= 0, \quad H = \bar{H}. \end{aligned}$$

Эти условия сразу определяют три начальных параметра

$$\theta_0 = 0, \quad \theta'_0 = 0, \quad H_0 = \bar{H}. \quad (4.4)$$

Четвертый начальный параметр находим из условия $\theta'(l) = 0$. Берем $\theta'(l)$ из табл. 3; используя при этом (4.4), получим:

$$\theta'(l) = -\frac{k}{l} \frac{B_0}{GJ_d} \operatorname{sh} k + \frac{\bar{H}}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} k) = 0,$$

откуда

$$B_0 = \frac{l}{k} \frac{1 - \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}. \quad (4.5)$$

Подставляя найденные значения начальных параметров (4.4) и (4.5) в таблицу 3, получим для основных расчетных величин следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{\bar{H}}{GJ_d} \left[-\frac{l}{k} \frac{1 - \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} \left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - 1 \right) + z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right], \\ \theta'(z) &= \frac{\bar{H}}{GJ_d} \left(-\frac{l}{k} \frac{1 - \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + 1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ B(z) &= \bar{H} \frac{l}{k} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ H(z) &= \bar{H}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Так как условия закрепления стержня симметричны, а внешняя нагрузка обратно симметрична, то можно упростить эти формулы, если начало отсчета координаты z выбрать в середине пролета стержня (рис. 59) и считать при этом, что угол закручивания в начальном сечении равен нулю. В этом случае угол закручивания θ будет представлять нечетную функцию z . Следовательно, и бимомент B , пропорциональный второй производной от угла закручивания, также будет являться нечетной функцией z , обращаясь в нуль при $z=0$, поскольку при двукратном дифференцировании четность функции не меняется. Можно также убедиться непосредственно, что в среднем сечении стержня бимомент обращается в нуль, полагая в третьей формуле (4.6) $z = \frac{l}{2}$.

Таким образом, граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta &= 0, \quad B = 0; \\ \text{при } z=\frac{l}{2} \quad \theta' &= 0, \quad H = \bar{H}. \end{aligned}$$

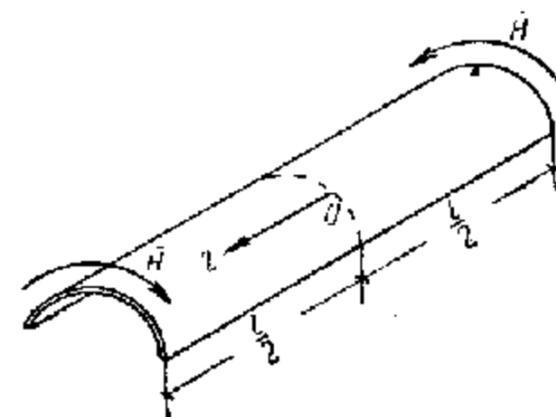


Рис. 59.

Начальный параметр θ'_0 будет равен:

$$\theta'_0 = \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{2} - 1}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \frac{\bar{H}}{GJ_d}$$

и для основных расчетных величин получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{\bar{H}}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right), & \theta'(z) &= \frac{\bar{H}}{GJ_d} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right), \\ B(z) &= \bar{H} \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, & H(z) &= \bar{H}. \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Из формул (4.7) следует, что в стержне, имеющем на концах жесткие из своей плоскости диафрагмы, при кручении возникают не только крутильные касательные напряжения, относящиеся к случаю чистого кручения (т. е. к кручению без деформаций удлинения отдельных волокон по оси Oz), но также секториальные нормальные и касательные напряжения, связанные с работой отдельных элементарных продольных полосок на изгиб в плоскости этих полосок при жесткой заделке их концов.

Формулы для секториальных напряжений σ_ω и τ_ω на основании (8.5), (8.9), (8.11) гл. I и (4.7) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\omega &= \frac{B}{J_\omega} \omega = \frac{l}{k} \frac{\bar{H}}{J_\omega} \omega(s) \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \\ \tau_\omega &= -\frac{H_\omega S_\omega(s)}{J_\omega \delta(s)} = \frac{\bar{H} S_\omega(s)}{J_\omega \delta(s)} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}. \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Из этих формул видно, что нормальные напряжения меняются относительно среднего поперечного сечения (начала отсчета координаты z) по закону нечетной функции $\left(\operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right)$, а касательные напряжения — по закону четной функции $\left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right)$; и те, и другие принимают наибольшие значения в опорных сечениях. Полагая в (4.8) $z = \frac{l}{2}$, получим для этих наибольших значений формулы:

$$\begin{aligned} \max \sigma_\omega &= \frac{l}{k} \frac{\bar{H}}{J_\omega} \omega(s) \operatorname{th} \frac{k}{2}, \\ \max \tau_\omega &= \frac{\bar{H} S_\omega(s)}{J_\omega \delta(s)}. \end{aligned}$$

§ 5. Стержень под действием поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба

Рассмотрим тонкостенный стержень с открытым профилем поперечного сечения с пролетом равным l , имеющий на концах определенные закрепления.

Пусть на стержень в некоторой точке $z = t$ действует сосредоточенная поперечная сила P , отстоящая от центра изгиба на расстоянии e (см. рис. 56, а). Стержень в этом случае будет находиться в условиях сложного сопротивления при изгибе и кручении. В самом деле, нагрузка P , будучи перенесена параллельно самой себе в центр изгиба (рис. 56, б), вызовет в стержне напряжения, определяемые по обычной элементарной теории изгиба. Сосредоточенный же внешний крутящий момент $\bar{H} = Pe$, полученный при перенесении силы P в центр изгиба (рис. 56, в), вызовет в стержне дополнительные секториальные напряжения σ_ω и τ_ω . Опуская расчет стержня на нагрузку, вызывающую изгиб стержня по закону плоских сечений, мы рассмотрим здесь расчет стержня на действие сосредоточенного крутящего момента $\bar{H} = Pe$.

Так как в сечении $z = t$ приложен один только внешний сосредоточенный фактор \bar{H} , то мы будем иметь $H_t = -\bar{H} = -Pe$ (§ 3 п. 4), и формулы табл. 7 § 3 в развернутой форме принимают следующий вид:

Таблица 12

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$	$\frac{1}{GJ_d} \bar{H}_t = -\frac{1}{GJ_d} Pe$
$\theta(z)$	1	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$z-t - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\theta'(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z$	$\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t)$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1	1

По этим формулам величины $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $B(z)$, $H(z)$ вычисляются только для сечений стержня, расположенных левее сечения $z = t$ (для $z \geq t$), в котором приложен крутящий момент $\bar{H} = Pe$.

Для сечений же, расположенных ближе сечения $z = t$ (для $z < t$), в формулах табл. 12 следует удерживать члены, содержащие только начальные параметры θ_0, θ'_0, B_0 и H_0 , и отбросить члены, содержащие внешнюю нагрузку $\bar{H} = Pe$.

Переходя к определению начальных параметров, рассмотрим несколько частных случаев граничных условий.

1. Стержень, имеющий на концах шарнирные закрепления. Здесь мы имеем условия (2.9) на обоих концах, поэтому граничные условия запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z=0 \quad \theta=0, \quad B=0; \\ \text{при } z=l \quad \theta=0, \quad B=0. \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Первые два условия непосредственно определяют два начальных параметра: $\theta_0 = 0$ и $B_0 = 0$; остальные два начальных параметра: θ'_0 и H_0 — найдем из двух последних условий (5.1). Составляя при помощи табл. 12 выражения $\theta(t)$ и $B(t)$ и приравнявая их нулю, получим:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_0' \frac{l}{k} \operatorname{sh} k + \frac{H_0}{GJ_d} \left(l - \frac{l}{k} \operatorname{sh} k \right) = -\frac{Pe}{GJ_d} \left[\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - (l-t) \right]; \\ -\theta_0' \frac{l}{k} \operatorname{sh} k + \frac{H_0}{GJ_d} \frac{l}{k} \operatorname{sh} k = -\frac{Pe}{GJ_d} \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t). \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Решение системы (5.2) дает для θ_0' и H_0 значения:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_0' = \frac{Pe}{GJ_d l \operatorname{sh} k} \left[(l-t) \operatorname{sh} k - t \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) \right]; \\ H_0 = Pe \frac{l-t}{l}. \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Подставляя найденные значения начальных параметров (5.3) в табл. 12 и имея в виду, что аналитические выражения для изгибно-крутильных факторов на каждом участке будут различны, окончательно получим: для участка $0 \leq z < t$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(z) = -\frac{Pe}{GJ_d} \left[\frac{l-t}{l} z - \frac{l \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t)}{k \operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right]; \\ \theta'(z) = \frac{Pe}{GJ_d} \left[\frac{l-t}{l} - \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t)}{\operatorname{sh} k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right]; \\ B(z) = Pe \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t)}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z; \\ H(z) = Pe \frac{l-t}{l}. \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

для участка $t \leq z \leq l$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(z) = \frac{Pe}{GJ_d} \left[\frac{t}{l} (l-z) - \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right]; \\ \theta'(z) = \frac{Pe}{GJ_d} \left[-\frac{t}{l} + \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-z) \right]; \\ B(z) = Pe \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z); \\ H(z) = -Pe \frac{t}{l}. \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Формулы (5.4) и (5.5) носят общий характер и позволяют определять кинематические и статические факторы $\theta(z), \theta'(z), B(z)$ и $H(z)$ для любого сечения при любом положении сосредоточенной силы P в пролете. Как уже говорилось в § 3, фиксируя в этих формулах сечение $t = \operatorname{const}$ и давая различные значения переменной z , мы можем по этим формулам построить для $\theta(z), \theta'(z), B(z)$ и $H(z)$ эпюры от внешнего сосредоточенного крутящего момента Pe , приложенного в определенном сечении $t = \operatorname{const}$. Если же в этих формулах считать апплику z постоянной, а расстояние до сечения t — переменным, принимающим в интервале $0 < t < l$ всевозможные значения, то в этом случае формулы (5.4) и (5.5) выражают собою уравнения линий влияния для перемещений $\theta(z), \theta'(z)$, сил $B(z)$ и $H(z)$ сечения $z = \operatorname{const}$ от сосредоточенного крутящего момента Pe , передвигающегося по длине стержня.

Имея выражения (5.4) и (5.5), мы можем также легко определить дополнительные нормальные и касательные напряжения от кручения, определяемые по формулам:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\omega} = \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s); \\ \tau_{\omega} = \frac{H_{\omega}(z) S_{\omega}(s)}{J_{\omega} \delta(s)}. \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

где $H_{\omega}(z) = H(z) - GJ_d \theta'(z)$ на основании формулы (8.11) гл. I.

В формулах (5.6) статические факторы $B(z)$ и $H_{\omega}(z)$ характеризуют изменение напряжений σ_{ω} и τ_{ω} по длине стержня (при заданном положении нагрузки), а геометрические факторы $\omega(s), S_{\omega}(s)$ и $\delta(s)$ — изменение этих напряжений по контуру поперечного сечения.

Рассматривая выражения (5.4) и (5.5) как уравнения линий влияния, т. е. считая в этих выражениях z пока постоянным, а t — переменным, и пользуясь законом независимости действия сил, мы можем легко подсчитать перемещения и усилия в случае кручения стержня от системы внешних сосредоточенных крутящих моментов $P_1 e_1, P_2 e_2, \dots$, приложенных в точках t_1, t_2, \dots и т. д.

Можно также определить величины $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $B(z)$ и $H(z)$, а следовательно, на основании (5.6) найти значения σ_{ω} и τ_{ω} , получающиеся от силовой поперечной нагрузки, действующей на стержень.

Если поперечная нагрузка по длине стержня меняется по величине и положению, но остается постоянной по своему направлению, то интенсивность внешнего крутящего момента в этом случае выражается формулой

$$m(t) = q(l) e(t), \quad (5.7)$$

где $q(t)$ — интенсивность нагрузки, $e(t)$ — расстояние в сечении t от центра изгиба до этой нагрузки.

Считая поперечную нагрузку $q(t)$ сплошной, т. е. действующей по всей длине стержня, а $m(t) dt$ — сосредоточенным (на длине dt) крутящим моментом, аналогичным моменту, обозначенному в формулах (5.4) и (5.5) через Pe , мы получим формулы основных расчетных величин, интегрируя соответствующие величины по всей длине стержня; таким образом, для сплошной нагрузки мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \int_0^z \theta(z, t) m(t) dt + \int_z^l \theta(z, t) m(t) dt, \\ \theta'(z) &= \int_0^z \theta'(z, t) m(t) dt + \int_z^l \theta'(z, t) m(t) dt, \\ B(z) &= \int_0^z B(z, t) m(t) dt + \int_z^l B(z, t) m(t) dt, \\ H(z) &= \int_0^z H(z, t) m(t) dt + \int_z^l H(z, t) m(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Сечением z (в котором мы определяем величину интересующего нас фактора) весь интервал от 0 до l (длина стержня) разбивается на две части. Функции $\theta(z, t)$, $\theta'(z, t)$, $B(z, t)$ и $H(z, t)$ в формулах (5.8) суть функции влияния, определяемые формулами (5.4) или (5.5) в зависимости от того, на каком участке по отношению к рассматриваемому сечению z расположена нагрузка $m(t) dt$, влияние которой учитывается. Очевидно, что функции влияния, стоящие в первых слагаемых формул (5.8) должны вычисляться по формулам (5.5), так как здесь $t < z$, а функции влияния, стоящие во вторых слагаемых (5.8), должны вычисляться по формулам (5.4), так как для этого участка $t > z$.

Считая в формулах (5.8) $m(t)$ величиной постоянной, что имеет место, например, в случае, когда $q = \text{const}$ и $e = \text{const}$, и выполняя интегрирование, получим формулы для значений $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $B(z)$, $H(z)$, получающихся в произвольном сечении z под влиянием равномерно распределенного внешнего крутящего момента.

Эти формулы имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{l^2 m}{k^2 G J_d} \left[\frac{k^2 z (l - z)}{2l} + \frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} - 1 \right], \\ \theta'(z) &= \frac{l m}{k G J_d} \left[\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right) - \frac{\text{sh } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right], \\ B(z) &= \frac{l^2 m}{k^2} \left[1 - \frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right], \\ H(z) &= m \left(\frac{l}{2} - z \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Для напряжений σ_{ω} и τ_{ω} получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\omega} &= \frac{l^2 m}{k^2 J_{\omega}} \omega(s) \left[1 - \frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right], \\ \tau_{\omega} &= \frac{l m}{k J_{\omega}^2(s)} S_{\omega}(s) \frac{\text{sh } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Из формул (5.10) видно, что в случае равномерной нагрузки q , действующей на постоянном расстоянии e от центра изгиба, наибольшие нормальные напряжения σ_{ω} получаются в среднем (по длине) поперечном сечении, касательные же напряжения τ_{ω} достигают наибольших значений в опорных сечениях:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_{\omega} &= \frac{l^2 m}{k^2 J_{\omega}} \omega(s) \left(1 - \frac{1}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right), \\ \max \tau_{\omega} &= \frac{l m}{k J_{\omega}^2(s)} S_{\omega}(s) \text{th } \frac{k}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Формулы (5.9) мы могли бы получить и другим путем, исходя из матрицы табл. 9, в которой на основании соображений, развитых в § 3, представлены в последнем столбце частные интегралы от равномерной нагрузки q , действующей на постоянном расстоянии e от центра изгиба на участке от $z = t_1$ до $z = t_2$. Для данного случая, когда q действует по всей длине стержня, в табл. 9 нужно положить $t_1 = 0$ и считать, что формулы этой таблицы справедливы для всего интервала от 0 до l .

Накладывая граничные условия (5.1), получим значения начальных параметров:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta'_0 = \frac{qe}{GJ_d} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{k} \frac{1 - \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} \right),$$

$$H_0 = 0, \quad H'_0 = qe \frac{l}{2}.$$

Подставляя эти значения начальных параметров в табл. 9, видоизмененную применительно к данному случаю, придем к формулам (5.9).

Рассмотрим в качестве числового примера фахверковый прогон, представленный на рис. 40. Для этого прогона мы получили в § 1:

$$J_x = 976,8 \text{ см}^4, \quad J_y = 383,8 \text{ см}^4, \quad J_{\omega} = 4829 \text{ см}^6.$$

Крутильное сопротивление J_d вычислим по формуле (5.8) гл. I при коэффициенте $\alpha = 1$:

$$J_d = 6,17 \text{ см}^4.$$

Для упругих характеристик материала приемем:

$$E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2,$$

$$G = 0,4E.$$

Длина прогона пусть будет $l = 3,00 \text{ м}$. Для упругой характеристики k по формуле (2.2) получаем:

$$k = 6,782.$$

Определим напряжения σ от равномерно распределенной поперечной нагрузки $q = 0,9 \frac{\text{м}}{\text{м}}$,

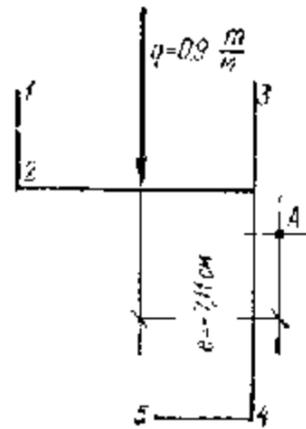


Рис. 60.

приложенной с эксцентриситетом $e = -7,11 \text{ см}$ относительно центра изгиба (рис. 60). Такая нагрузка получается от собственного веса кладки стены, лежащей на прогоне. Эта нагрузка, помимо напряжений от изгиба, вызовет также напряжения от кручения. Напряжения от изгиба вычисляются по обычным формулам сопротивления материалов; наибольшие же напряжения от кручения вычисляются по первой из формул (5.11):

$$\max \sigma_{\omega} = -24,43 \omega(s).$$

Эпюра секториальных площадей $\omega(s)$ изображена на рис. 43, б. При наличии этой эпюры напряжения σ_{ω} по вышенаписанной формуле легко подсчитываются для любой точки контура.

Результаты расчета прогона (в кг/см^2) приведены в табл. 13.

На рис. 61, а приведена эпюра наибольших напряжений $\sigma_{\text{изг}} = \sigma_x + \sigma_y$ от изгиба. На рис. 61, б дана эпюра напряжений σ_{ω} от

кручения. Суммарная эпюра напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{\omega}$ для среднего поперечного сечения показана на рис. 61, в.

Таблица 13

№ точек	σ_x	σ_y	$\sigma_x + \sigma_y$	σ_{ω}	$\sigma_x - \sigma_y + \sigma_{\omega}$
1	+391,5	-930,1	-538,6	-953,8	-1492,4
2	+719,9	-538,3	+181,6	+602,0	+783,6
3	-893,4	-425,1	-1318,5	-250,9	-1569,4
4	+210,2	+887,9	+1098,1	+317,1	+1415,2
5	+781,7	+662,3	+1444,0	-830,7	+613,3

Из сравнения эпюр для $\sigma_{\text{изг}} = \sigma_x + \sigma_y$ и $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{\omega}$, приведенных на рис. 61, а и в, видно, что погрешность, которая получается при расчете прогона по обычной теории изгиба по сравнению с расчетом с учетом кручения, достигает весьма больших значений. Такое расхождение между результатами расчета по теории плоских сечений

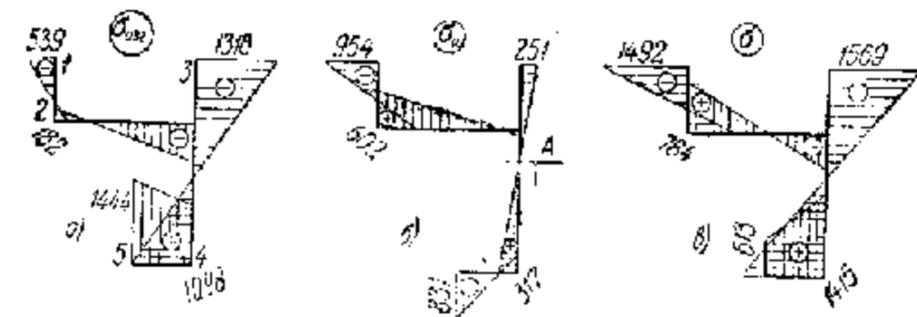


Рис. 61.

и по излагаемой здесь теории объясняется тем, что данный прогон нами рассматривался как отдельный элемент, не имеющий связей от кручения. В действительности, кирпичная стена, вес которой передается на прогон, вследствие своей монолитности будет оказывать сопротивление кручению. Вследствие этого сопротивление вес стены на прогон будет передаваться с меньшим эксцентриситетом. С уменьшением эксцентриситета дополнительные секториальные напряжения σ_{ω} при постоянной нагрузке будут уменьшаться, в то время как напряжения от изгиба от эксцентриситета не зависят. Эпюра напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{\omega}$ при учете упругой сопротивляемости кирпичной стены будет занимать промежуточное положение между эпюрами, показанными на рис. 61, а и в.

Чтобы составить представление о влиянии эксцентриситета на величину σ_{ω} , мы приводим даже, в табл. 14, результат вычисления σ_{ω} при трех эксцентриситетах: $e = -7,11 \text{ см}$ (соответствует нагрузке, рассмотренной выше), $e = -1,38 \text{ см}$ (соответствует той же нагрузке, но

приложенной в точке 3) и $e = -12,84$ см (та же нагрузка приложена в точке 1) (рис. 60).

Таблица 14

№ точек	$\sigma_{01} \frac{xz}{\text{см}^2}$		
	$e = -1,38$	$e = -7,11$	$e = -12,84$
1	-185,1	-953,8	-1722,5
2	+116,8	+602,0	+1087,0
3	-48,7	-250,9	-453,1
4	+61,5	-317,1	+572,5
5	-161,2	-830,7	-1500,2

Составляющие напряжений от изгиба σ_x и σ_y , как уже указывалось, не меняют своей величины при изменении эксцентриситета; их величина остается прежней (табл. 13).

2. Стержень, концы которого жестко заделаны. В этом случае на обоих концах стержня мы имеем дело с граничными условиями вида (2.8):

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta=0, \quad \theta'=0; \\ \text{при } z=l \quad \theta=0, \quad \theta'=0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Первые два условия непосредственно определяют два начальных параметра, остальные же два начальных параметра B_0 и H_0 мы определим из двух последних условий по формулам табл. 12.

Получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} k) + \frac{H_0 l}{GJ_d} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \operatorname{sh} k + \frac{Pe}{GJ_d} \left[\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - (l-t) \right] = 0, \\ -\frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} k + \frac{H_0}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} k) + \frac{Pe}{GJ_d} \left[\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t) - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= -Pe \frac{l + (l-z) \operatorname{ch} k + \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} t - \frac{l}{k} \operatorname{sh} k + \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t)}{k \operatorname{sh} k + 2(1 - \operatorname{ch} k)}, \\ H_0 &= Pe \frac{1 + \frac{k}{l} (l-z) \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} k + \operatorname{ch} \frac{k}{l} t - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t)}{k \operatorname{sh} k + 2(1 - \operatorname{ch} k)}. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

Формулы для основных расчетных величин при этих граничных условиях получим, подставляя найденные значения начальных параметров в табл. 12. Они будут иметь вид: на участке $0 \leq z < l$:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{B_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right), \\ \theta'(z) &= -\frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right), \\ B(z) &= B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \\ H(z) &= H_0. \end{aligned} \right\} (5.14)$$

на участке $l \leq z \leq l$

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{B_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right) + \\ &\quad + \frac{Pe}{GJ_d} \left[(z-l) - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-l) \right], \\ \theta'(z) &= -\frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) + \\ &\quad + \frac{Pe}{GJ_d} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-l) \right], \\ B(z) &= B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + Pe \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-l), \\ H(z) &= H_0 + Pe, \end{aligned} \right\} (5.15)$$

где B_0 и H_0 определяются по формулам (5.13).

Рассматривая выражения (5.14) и (5.15) как функции влияния, мы можем аналогично предыдущему случаю по формулам (5.8) определить изгибно-крутильные факторы от любой сплошной нагрузки и, в частности, для равномерного распределенного крутящего момента $m = qe = \text{const}$, действующего по всей длине стержня.

В этом последнем случае проще даже будет исходить из табл. 9 § 3, полагая в ней $t_1 = 0$. Налагая граничные условия (5.12), мы определим из этих условий начальные параметры:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta'_0 = 0, \\ B_0 &= -m \frac{l^2}{k^2} \frac{k \operatorname{ch} \frac{k}{2} - 2 \operatorname{sh} \frac{k}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{k}{2}}, \\ H_0 &= m \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения начальных параметров в выражения табл. 9, получим в случае равномерно распределенного крутящего момента, действующего по всей длине стержня, следующие формулы для основных расчетных величин:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{m}{EI_m} \frac{l^2}{k^2} \left[\frac{z(l-z)}{2} - \frac{l^2 \operatorname{sh} \frac{kz}{2l} \operatorname{sh} \frac{k}{2l} (l-z)}{k \operatorname{sh} \frac{k}{2}} \right], \\ \theta'(z) &= \frac{m}{EI_m} \frac{l^2}{k^2} \left[\frac{l}{2} - z + \frac{l}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{k}{2}} \right], \\ B(z) &= m \frac{l^2}{k^2} \left[1 - \frac{k}{2} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{k}{2}} \right], \\ H(z) &= m \left(\frac{l}{2} - z \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Для секторных напряжений σ_ω и τ_ω на основании (5.16) получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\omega &= \frac{m}{J_\omega} \frac{l^2}{k^2} \left[1 - \frac{k}{2} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{k}{2}} \right] \omega(s), \\ \tau_\omega &= \frac{m}{2J_\omega} \frac{l}{\operatorname{sh} \frac{k}{2}} \frac{S_\omega(s)}{s(s)} \operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(z - \frac{l}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Наибольших значений напряжения (5.17) достигают в опорных сечениях стержня, т. е. при $z=0$ и $z=l$:

$$\begin{aligned} \max \sigma_m &= \frac{m}{J_\omega} \frac{l^2}{k^2} \left(1 - \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{2l} \right) \omega(s), \\ \max \tau_m &= \frac{ml}{2J_\omega} \frac{S_\omega(s)}{s(s)}. \end{aligned}$$

3. Стержень, у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно закреплен. В этом случае на одном конце стержня должны выполняться условия (2.8), а на другом — условия (2.9). Пусть для определенности условия (2.8) относятся к краю $z=0$, а условия (2.9) (шарнирное опирание) относятся к краю $z=l$.

Тогда условия (2.8) на краю $z=0$ определяют сразу два начальных параметра:

$$\theta_0 = 0; \quad \theta'_0 = 0.$$

Два других начальных параметра B_0 и H_0 определим из двух уравне-

ний, к которым приводят условия (2.9) на краю $z=l$. Эти уравнения, которые мы получим при помощи табл. 12, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} B_0(1 - \operatorname{ch} k) + H_0 \left(l - \frac{l}{k} \operatorname{sh} k \right) + Pe \left[\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - (l-t) \right] &= 0, \\ B_0 \operatorname{ch} k - H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} k + Pe \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Решая систему (5.18), найдем:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= Pe \frac{\frac{l}{k} (l-t) \operatorname{sh} k - \frac{l^2}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t)}{\frac{l}{k} \operatorname{sh} k - l \operatorname{ch} k}, \\ H_0 &= Pe \frac{\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - (l-t) \operatorname{ch} k}{\frac{l}{k} \operatorname{sh} k - l \operatorname{ch} k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Формулы для основных расчетных величин будут иметь такой же вид, как и в предыдущем случае: (5.14) — для участка $0 \leq z < t$ и (5.15) — для участка $t \leq z \leq l$, только в них теперь вместо B_0 и H_0 нужно поставить их значения, определяемые формулами (5.19).

В случае равномерно распределенного крутящего момента $m=qe = \text{const}$, действующего по всей длине стержня, формулы для основных расчетных величин будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{m}{GJ_d} \left\{ - \left(\frac{l^2}{k^2} + \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} k - k \operatorname{ch} k} \left[l^2 \operatorname{sh} \frac{k}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{k}{2} - \frac{2}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{2} \right) - \frac{l}{2k} [2 + (k^2 - 2) \operatorname{ch} k] z + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{l^2}{k^2} \left(\operatorname{sh} \frac{k}{l} z - k \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \left(\frac{l^2}{k^2} - \frac{l^2}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right] \right\}, \\ \theta'(z) &= \frac{m}{GJ_d} \left\{ -z + \frac{1}{\operatorname{sh} k - k \operatorname{ch} k} \left[-\frac{l}{2k} [2 + (k^2 - 2) \operatorname{ch} k] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{l}{k} \left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - k \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right) + \frac{l \left(\frac{k^2}{2} - 1 \right)}{k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-z) \right] \right\}, \\ B(z) &= m \frac{l^2}{k^2} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) + \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - k \operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{sh} k - k \operatorname{ch} k} \right], \\ H(z) &= -m \left\{ z + \frac{\frac{l}{2k} [2 + (k^2 - 2) \operatorname{ch} k]}{\operatorname{sh} k - k \operatorname{ch} k} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

По формулам (5.6) легко вычислить нормальные и касательные напряжения от кручения: σ_ω и τ_ω .

4. Стержень с одним заделанным и другим свободным концом. Считая, как и в предыдущем случае, что заделка относится к

начальному сечению и что на другом конце обращаются в нуль статические факторы, можно записать граничные условия для этого случая следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta=0, \quad \theta'=0; \\ \text{при } z=l \quad B=0, \quad H=0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Уравнения для определения оставшихся начальных параметров B_0 и H_0 , составленные при помощи табл. 12, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} B_0 \operatorname{ch} k + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} k &= Pe \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t), \\ H_0 &= Pe. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= Pe, \\ B_0 &= Pe \frac{l}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - \operatorname{sh} k}{\operatorname{ch} k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Формулы для определения основных расчетных величин будут, как и в двух предыдущих случаях, представлены выражениями (5.14) и (5.15), в которые вместо B_0 и H_0 должны быть вставлены их значения (5.22).

Формулы же для основных расчетных величин в случае равномерно распределенного крутящего момента $m = qe = \text{const}$, действующего по всей длине стержня, для этого вида граничных условий будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= -\frac{m}{GJ_d \operatorname{ch} k} \left[-\frac{l^2}{k^2} - \frac{l^2}{k} \operatorname{sh} k + z \left(l - \frac{z}{2} \right) \operatorname{ch} k + \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^2}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{l^2}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right], \\ \theta'(z) &= -\frac{m}{GJ_d \operatorname{ch} k} \left[(l-z) \operatorname{ch} k + \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - l \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-z) \right], \\ B(z) &= -\frac{m}{\operatorname{ch} k} \frac{l^2}{k^2} \left[\operatorname{ch} k - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - k \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right], \\ H(z) &= -m(l-z). \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

По формулам (5.6) легко найти нормальные и касательные напряжения от изгибно-кручения: σ_w и τ_w .

Мы рассмотрели четыре типа стержней, отличающихся между собой граничными условиями. Для всех этих типов граничные условия задавались в явном виде, причем из четырех изгибно-крутильных факторов два начальных параметра принимали нулевые значения.

Приведенное решение можно легко распространить также и на более общий случай, когда граничные условия задаются в форме линейных соотношений между кинематическими и статическими факторами. С такими граничными условиями мы встречаемся в случае, когда стержень на концах упруго заделан. Примером может служить стержень

какого-нибудь промежуточного пролета неразрезной балки, упруго заделанный в соседние элементы этой балки. Статические факторы, действующие в опорных сечениях этого стержня, будут пропорциональны соответствующим кинематическим факторам. Коэффициенты пропорциональности определяются из условия совместности продольных секториальных деформаций и углов закручивания в опорных сечениях.

5. Кручение стержня при действии изгибающего момента. Мы рассмотрим вопрос о кручении стержня, концы которого находятся в различных граничных условиях, при действии на него поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба.

Покажем, что, имея решение для случая действия на стержень сосредоточенной силы, можно легко из этого решения получить основные формулы для расчета стержней на кручение при действии сосредоточенного (а, следовательно, можно далее развить и для распределенного) изгибающего момента.

Пусть в точке $z=t$ на стержень действует в плоскости параллельной оси стержня и отстоящей от центра изгиба на расстоянии e сосредоточенный изгибающий момент M (рис. 62, а).

Поскольку плоскость действия этого момента не проходит через центр изгиба, то в стержне, кроме напряжений от изгиба, возникнут также напряжения и от кручения. Дополнительные деформации и напряжения, возникающие в стержне по закону секториальных площадей, в том случае, когда плоскость действия момента M не проходит через линию центров изгиба, мы определим, исходя из формул табл. 12, выведенных для случая действия сосредоточенной поперечной силы.

Обозначим любой из четырех факторов $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $\frac{1}{GJ_d} B(z)$ и $\frac{1}{GJ_d} H(z)$ через $\Phi(z, t)$, имея в виду, что этот фактор является функцией двух переменных z и t ; будем, кроме того, полагать, что мы имеем дело с единичной нагрузкой $Pe=1$, и отметим это обстоятельство индексом P при функции Φ . Тогда любую из формул таблицы 12 мы можем символически записать следующим образом:

$$\Phi_P = \Phi_P(z, t).$$

Заменим теперь внешний изгибающий момент M , приложенный в точке $z=t$, парой поперечных сил P с плечом Δt (рис. 62, б):

$$P = \frac{M}{\Delta t}. \quad (5.24)$$

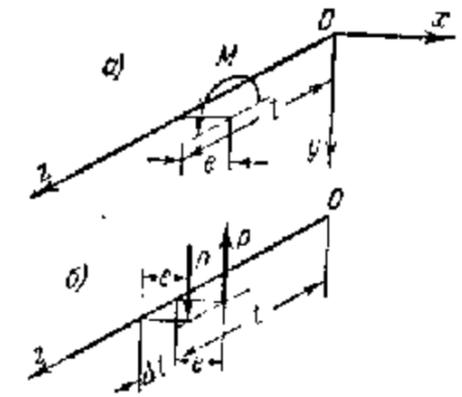


Рис. 62.

Подсчитывая значение фактора Φ_P при действии двух равных и противоположно направленных поперечных сосредоточенных сил P , приложенных в сечениях t и $t + \Delta t$, мы можем, используя (5.24), написать:

$$\Phi_M = [\Phi_P(z, t + \Delta t) - \Phi_P(z, t)] Pe = \frac{\Phi_P(z, t + \Delta t) - \Phi_P(z, t)}{\Delta t} Me.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\Phi_M = \frac{\partial \Phi_P}{\partial t} Me. \quad (5.25)$$

Таким образом, функция влияния для изгибно-крутильного фактора Φ_M от изгибающего момента M , действующего в плоскости, параллельной оси стержня и отстоящего от центра изгиба на расстоянии e , определяется как величина, пропорциональная производной по t от Φ_P , где под Φ_P понимается функция влияния для аналогичного фактора в случае, когда на стержень действует сосредоточенный внешний крутящий момент $Pe = 1$; коэффициент пропорциональности служит величина Me .

Так, например, для стержня с шарнирными закреплениями на концах, при действии на него в сечении $z = t$ сосредоточенного изгибающего момента M , приложенного с эксцентриситетом e относительно центра изгиба, получим на основании (5.4), (5.5) и (5.25) следующие выражения для основных изгибно-крутильных факторов:

для участка $0 \leq z < t$

$$b(z) = \frac{Me}{GJ_d} \left[-\frac{z}{t} + \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l}(l-t)}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right],$$

$$b'(z) = \frac{Me}{GJ_d} \left[-\frac{1}{t} + \frac{k}{l} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l}(l-t)}{\operatorname{sh} k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right],$$

$$B(z) = -Me \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l}(l-t)}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z,$$

$$H(z) = -\frac{Me}{l};$$

для участка $t \leq z \leq l$

$$b(z) = \frac{Me}{GJ_d} \left[\frac{l-z}{l} - \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right],$$

$$b'(z) = \frac{Me}{GJ_d} \left[-\frac{1}{l} + \frac{k}{l} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-z) \right],$$

$$B(z) = Me \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} t}{\operatorname{sh} k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z),$$

$$H(z) = -\frac{Me}{l}.$$

Аналогичным образом можно получить формулы и для других случаев граничных условий.

Из формулы (5.25) следует, что при $e = 0$ величина Φ_M также обращается в нуль. Это означает, что если внешний изгибающий момент действует в плоскости, проходящей через центр изгиба, то все дополнительные секториальные факторы, связанные с кручением стержня, обращаются в нуль. Стержень в этом случае будет находиться в условиях центрального поперечного изгиба. В общем же случае, когда плоскость действия внешнего изгибающего момента не проходит через центр изгиба, в стержне, кроме основных изгибных деформаций и напряжений, возникнут также и дополнительные факторы, связанные с явлением закручивания.

§ 6. Кручение стержня и определение бимоментов при действии продольной силы, приложенной на конце

1. Отклонение от закона плоских сечений имеет место, как мы увидим ниже, не только в случае изгиба от поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, но также и в случае действия продольных сил (сжимающих, растягивающих или сдвигающих), приложенных как на концах, так и в произвольном месте срединной поверхности, а также и в случае, когда продольная сила приложена вне сечения и передается на него при помощи жесткой консоли, прикрепленной к некоторой точке контура стержня.

Напомним предварительно, что, исходя из закона секториальных площадей, мы можем заданную внешнюю продольную нагрузку заменить эквивалентными ей четырьмя силовыми факторами, а именно: продольной нормальной силой \bar{N} , изгибающими моментами \bar{M}_x и \bar{M}_y и бимоментом \bar{B} . Каждый из этих силовых факторов мы представляем как обобщенную силу, полученную путем рассмотрения работы заданной внешней нагрузки в сечении $z = \operatorname{const}$ на соответствующем продольном перемещении, определяемом одним из четырех компонентов общей четырехчленной формулы (3.16) гл. I.

Если внешняя продольная нагрузка задается в сечении $z = \operatorname{const}$ в виде нормальных напряжений $\bar{\sigma}(s)$ (рис. 63, а), то на основании

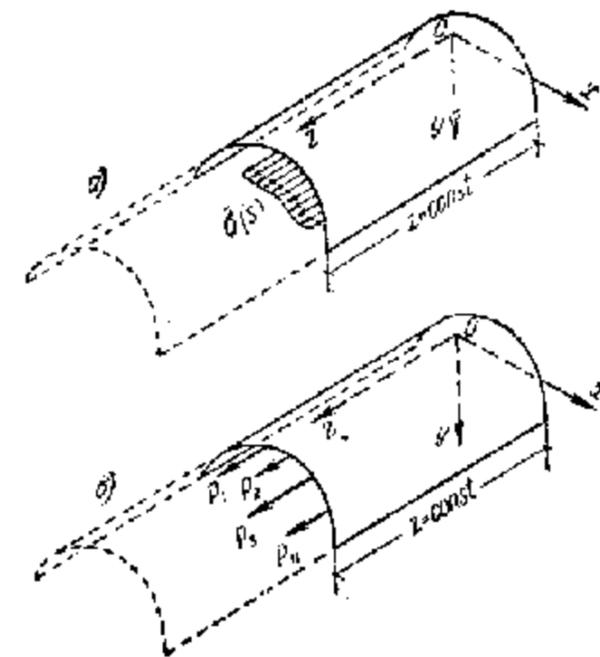


Рис. 63.

формулы (8.2) гл. I для указанных силовых факторов, статически эквивалентных этой нагрузке, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_F \bar{\sigma} dF, \\ \bar{M}_x &= \int_F \bar{\sigma} y dF, \\ \bar{M}_y &= - \int_F \bar{\sigma} x dF, \\ \bar{B} &= \int_F \bar{\sigma} \omega dF. \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Если продольная нагрузка состоит из ряда сосредоточенных сил P_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$), приложенных в различных точках дуги контура поперечного сечения (рис. 63, б), то формулы (6.1) для определения четырех силовых факторов сечения $z = \text{const}$ будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \sum_k P_k, \\ \bar{M}_x &= \sum_k P_k y_k, \\ \bar{M}_y &= - \sum_k P_k x_k, \\ \bar{B} &= \sum_k P_k \omega_k. \end{aligned} \right\} (6.2)$$

Здесь через x_k и y_k обозначены координаты точки приложения силы P_k , через ω_k — секторная площадь для этой точки; суммирование распространяется на все силы P_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$), приложенные по дуге контура сечения $z = \text{const}$.

Если нагрузка состоит из одной только продольной силы P , приложенной в точке контура $K(x_k, y_k, \omega_k)$, то формулы (6.2) будут иметь более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= P, \\ \bar{M}_x &= P y_k, \\ \bar{M}_y &= - P x_k, \\ \bar{B} &= P \omega_k. \end{aligned} \right\} (6.3)$$

Здесь уместно будет напомнить, что знак бимоента зависит:

- 1) от знака внешней нормали сечения $z = \text{const}$, в котором приложена сила P ,
- 2) от направления силы P и
- 3) от знака соответствующей бимоменту секторной координаты ω .

Внешнюю нормаль и силу P мы считаем положительными, если они по направлению совпадают с положительным направлением оси Oz ; секторную площадь ω мы считаем положительной, если эта площадь при взгляде на сечение $z = \text{const}$ со стороны положительной внешней нормали описывается движением подвижного радиуса-вектора по часовой стрелке.

Если считать, что секторная координата ω , соответствующая силе P , имеет положительное значение, то для четырех случаев

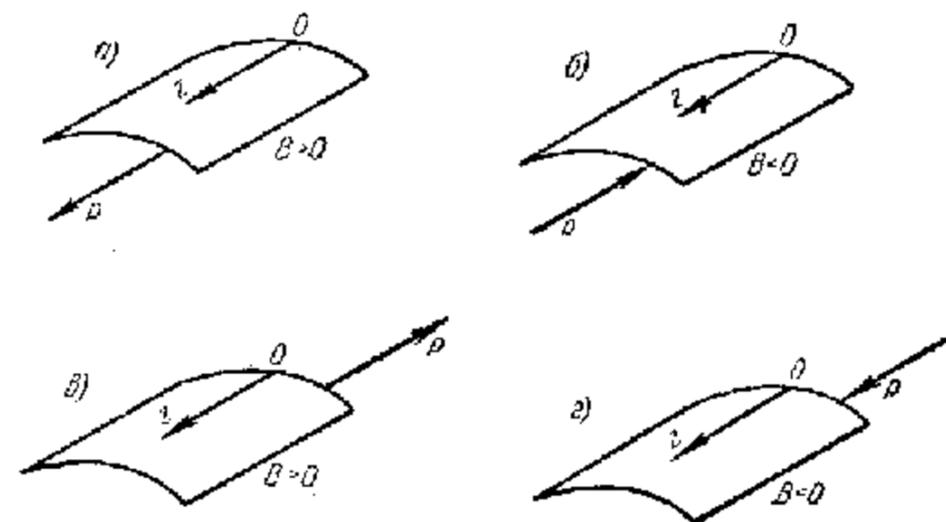


Рис. 64.

приложения силы P , показанных на рис. 64, бимомент будет положительным в соответствии с принятым правилом знаков для случаев а) и в) и отрицательным для случаев б) и г).

Приведенные формулы дают возможность по заданной шпуре нормальных напряжений $\sigma(z)$ или шпуре продольных нормальных сил вычислить статические факторы, приложенные по сечению $z = \text{const}$. Зная величины этих факторов, можно затем легко определить напряжения в любой точке стержня. Для нормальных напряжений ранее была получена формула (8.5) гл. I:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{B}{J_\omega} \omega.$$

В этой формуле первыми тремя членами выражены напряжения, подчиняющиеся закону плоских сечений. Статические факторы, характеризующие изменение этих напряжений по длине стержня при действии одной только продольной нагрузки, не зависят от переменной z и определяются по формулам:

$$N = \bar{N}; \quad M_x = \bar{M}_x; \quad M_y = \bar{M}_y.$$

Последним членом в формуле (8.5) гл. I представлены напряжения σ_{ω} , возникающие вследствие закручивания стержня. Изгибно-крутящий

бимомент B , характеризующий изменение секториальных нормальных напряжений по переменной z , в отличие от статических факторов N , M_x и M_y , по длине стержня не остается постоянным.

В теории тонкостенных стержней мы приняли гипотезу о неизменяемости профиля стержня. Из этой гипотезы следует, что любую поперечную нагрузку, действующую в плоскости поперечного сечения, можно заменять статически эквивалентной ей нагрузкой в той же плоскости, поскольку поперечное сечение стержня ведет себя как абсолютно жесткое тело.

Иначе обстоит дело с продольной нагрузкой, приложенной к точкам поперечного сечения стержня. Действительно, поперечное сечение в отношении продольных перемещений обладает не тремя, а четырьмя степенями свободы; продольные перемещения сечения не следуют закону плоскости, сечение стержня испытывает деформацию. Каждой степени свободы отвечает своя обобщенная продольная сила. Эти обобщенные продольные силы, отнесенные к главным координатам, есть растягивающая сила N , изгибающие моменты M_x и M_y и бимомент B .

Обобщенная продольная сила — бимомент представляет собой особую систему продольных сил, приложенных к точкам поперечного сечения стержня, а именно: систему сил, статически эквивалентную нулю. Для стержня заданного профиля и зависимости от внешней нагрузки и граничных условий бимомент в любом сечении имеет вполне определенное значение. Так как замена одной продольной нагрузки, приложенной к точкам поперечного сечения стержня, другой, статически ей эквивалентной, изменит значение бимомента в этом сечении, то, вообще говоря, такую замену делать нельзя. Мы можем в поперечном сечении стержня одну продольную нагрузку заменять другой лишь таким образом, чтобы значения четырех обобщенных продольных сил в этом сечении оставались неизменными. В частности, мы можем в поперечном сечении стержня заменить одну продольную нагрузку другой продольной нагрузкой, статически эквивалентной первой, если обе нагрузки рассматриваются в пределах одного пучка пластинок, входящих в состав данного стержня. Нетрудно показать, что в этом случае значение бимомента в рассматриваемом поперечном сечении не изменится, поскольку в пределах одного пучка пластинок, как мы ранее показали, продольные перемещения меняются по закону плоскости.

Покажем еще, что необходимо строго различать, какой парой сил образуя изгибающий момент — парой продольных сил или парой поперечных сил. Рассмотрим тонкостенный стержень корытного профиля, находящийся под действием сосредоточенного изгибающего момента, приложенного к концу стержня. Эпюра главных секториальных площадей для такого профиля приведена на рис. 36, а. Пусть момент изгибает стержень в продольной плоскости, проходящей через центр изгиба A и нулевую секториальную точку S_1 . Если этот момент образован парой поперечных сил (рис. 65, а), то, очевидно, кручения не будет, так как поперечные силы лежат в плоскости, проходящей через центр изгиба.

Если тот же момент образован парой продольных сил, приложенных в точках B и S_1 (рис. 65, б), то бимомент \bar{B} в начальном сечении определится по формуле

$$\bar{B} = P\omega_B$$

и стержень будет закручиваться. Наоборот, пусть плоскость действия

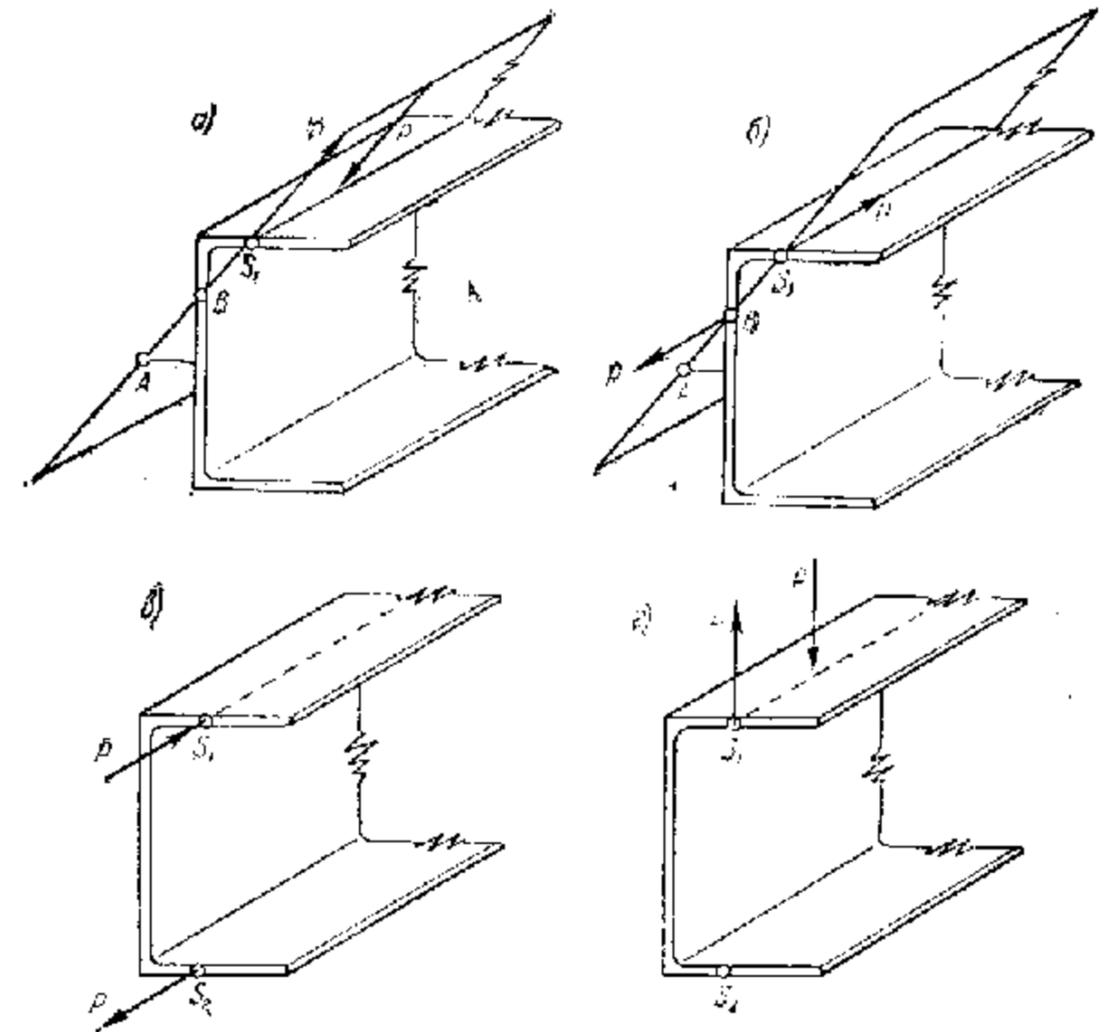


Рис. 65.

сосредоточенного изгибающего момента проходит через нулевые секториальные точки S_1 и S_2 (рис. 65, в, г). В этом случае стержень будет закручиваться, если изгибающий момент образован парой поперечных сил, поскольку поперечные силы не проходят через центр изгиба; если же изгибающий момент образован парой продольных сил, приложенных в точках S_1 и S_2 , то кручения не будет, так как S_1 и S_2 — нулевые секториальные точки.

Необходимо, далее, помнить, что если изгибающий момент образован парой поперечных сил, то эти силы можно по линии их действия

переносить в любую точку поперечного сечения стержня, так как профиль стержня считается жестким. Если же изгибающий момент образован парой продольных сил, то кручение стержня будет зависеть от точек приложения этих сил: нельзя произвольно заменить одну пару продольных сил другой парой, статически эквивалентной первой. Вообще, как мы выше отметили, одну произвольную продольную нагрузку можно заменять другой продольной нагрузкой лишь таким образом, чтобы в рассматриваемом поперечном сечении четыре обобщенные продольные силы сохраняли свои прежние значения.

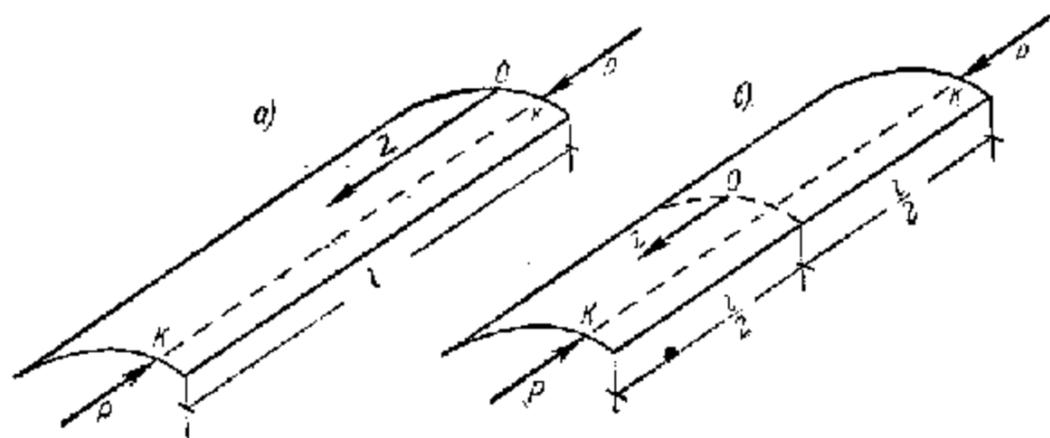


Рис. 66.

Как и ранее, мы будем опускать случаи растяжения (сжатия) и изгиба по закону плоских сечений как хорошо известные из курса сопротивления материалов и будем заниматься только выводом формул для определения дополнительных (секторных) деформаций и напряжений, возникающих вследствие закручивания стержня от действия внешней продольной нагрузки.

2. Рассмотрим случай, когда на концах стержня приложены одни только изгибно-крутящие бимоменты \bar{B} . Пусть стержень находится под действием сжимающих сил P , приложенных на концах стержня и направленных по линии $K-K$ (рис. 66, а). Бимомент \bar{B} определяется в этом случае по последней из формул (6.3), которая при принятом правиле знаков будет иметь вид (для обоих концов):

$$\bar{B} = -P\omega_k.$$

Будем считать, что начальное сечение $z=0$ закреплено от угла закручивания, тогда граничные условия для данного случая нагрузки можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta &= 0, \quad \bar{B} = -P\omega_k; \\ \text{при } z=l \quad H &= 0, \quad \bar{B} = -P\omega_k. \end{aligned}$$

Начальные параметры при таких граничных условиях будут иметь значения:

$$\begin{aligned} U_0 &= 0, \\ U'_0 &= -\frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{th} \frac{k}{2}, \\ B_0 &= -P\omega_k, \\ H_0 &= 0, \end{aligned}$$

а основные расчетные величины будут вычисляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{P\omega_k}{GJ_d} \left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \operatorname{th} \frac{k}{2} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - 1 \right), \\ U'(z) &= \frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{k}{l} \left(\operatorname{sh} \frac{k}{l} z - \operatorname{th} \frac{k}{2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ B(z) &= -P\omega_k \left(\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \operatorname{th} \frac{k}{2} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ H(z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Формулы (6.4) упростятся, если начало отсчета координаты z выбрать в среднем поперечном сечении стержня (рис. 66, б) и считать при этом, что угол закручивания на конце по-прежнему равен нулю.

Граничные условия при этом можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad H &= 0, \quad U' = 0; \\ \text{при } z=l \quad B &= -P\omega_k, \quad \theta = 0. \end{aligned}$$

Формулы (6.4) при таких условиях примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \operatorname{ch} \frac{k}{2}}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \\ U'(z) &= \frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{k}{l} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \\ B(z) &= -P\omega_k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \\ H(z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Для нормальных напряжений, возникающих под влиянием одного только изгибно-крутящего бимомент, мы получаем теперь формулу:

$$\sigma_{\omega} = - \frac{P\omega_k}{J_{\omega}} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \omega(s). \quad (6.6)$$

Эти напряжения, как видно из формулы (6.6), зависят не только от положения точки на профильной линии контура s , но также и от положения точки на образующей (координата z). Наименьшие напряжения получаются в среднем поперечном сечении, при $z=0$. По мере удаления от этого сечения в ту или другую сторону напряжения возрастают по закону $\operatorname{ch} \frac{k}{l} z$; при $z = \pm \frac{l}{2}$, т. е. в крайних сечениях, напряжения достигают наибольших значений:

$$\max \sigma_{\omega} = - \frac{P\omega_k}{J_{\omega}} \omega(s). \quad (6.7)$$

Формулой (6.7) определяется заданная секторная эюра напряжений, эквивалентная статически заданному изгибно-крутящему бимоменту \bar{B} .

Мы приходим таким образом к весьма важному выводу, а именно:

Наделение закручивания стержня может иметь место не только в случае чистого кручения и поперечного изгиба силой, не проходящей через центр изгиба, но также и в случае действия одних только продольных сил, приложенных к концам стержня.

Ниже будет показано, что этот вывод относится также и к продольным силам и моментам, приложенным в любой точке срединной поверхности стержня, а также и vice versa с передачей на стержень при помощи жесткой консоли.

Нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при произвольном приложении сил, как правило, не следуют закону плоских сечений. Этот закон имеет место только в частном случае действия продольных сил, когда эти силы распределены по сечению так, что изгибно-крутящий бимомент B от этих сил, определяемый последней из формул (6.1), (6.2) или (6.3), равен нулю. Так, например, если продольная нагрузка состоит из одной только силы P , то изгибно-крутящий бимомент равен нулю в том только случае, если эта сила приложена в такой точке контура, для которой равна нулю секторная площадь $\omega(s)$.

В поперечных сечениях стержня, в общем случае действия продольной силы (когда $\bar{B} \neq 0$), кроме нормальных напряжений, возникнут также касательные напряжения $\tau(z, s)$ и крутящие моменты H_k . Касательные осевые сдвигающие напряжения $\tau(z, s)$ определяются по общей формуле (8.9) гл. I, откуда

$$\tau_{\omega}(z, s) = - \frac{H_{\omega}(z) S_{\omega}(s)}{J_{\omega} \delta(s)}. \quad (6.8)$$

Здесь $H_{\omega}(z)$ — изгибно-крутящий момент, который равен согласно третьей из формул (8.10) гл. I производной по переменной z от бимомента $B(z)$:

$$H_{\omega}(z) = \frac{dB(z)}{dz} = - P\omega_k \frac{k}{l} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.8), получим:

$$\tau_{\omega}(z, s) = \frac{P\omega_k}{J_{\omega}} \frac{k}{l} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \frac{S_{\omega}(s)}{\delta(s)}. \quad (6.10)$$

Из формулы (6.10) видно, что осевые касательные напряжения по длине стержня меняются по закону нечетной функции $\operatorname{sh} \frac{k}{l} z$. При $z=0$, т. е. в среднем поперечном сечении, эти напряжения равны нулю. В поперечном сечении касательные напряжения пропорциональны секторному статическому моменту $S_{\omega}(s)$, вычисляемому для отсеченной части сечения, и обратно пропорциональны толщине стенки стержня $\delta(s)$. Касательные напряжения τ , умноженные на толщину стенки $\delta(s)$, дают сдвигающие усилия $T = \tau\delta$, приходящиеся на единицу длины дуги контура сечения. Эти же усилия T приводятся к паре сил, действующей в плоскости поперечного сечения и равной изгибно-крутящему моменту

$$H_{\omega}(z) = \int \tau \delta d\omega.$$

Кроме изгибно-крутящих моментов $H_{\omega}(z)$, в поперечных сечениях стержня возникнут также и крутящие моменты H_k , вычисляемые по формуле (5.7) гл. I. Для этих моментов на основании формул (5.7) гл. I и (6.5) получаем:

$$H_k(z) = GJ_d \theta'(z) = P\omega_k \frac{k}{l} \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}. \quad (6.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что общий крутящий момент $H(z)$, равный по формуле (8.11) гл. I сумме моментов $H_{\omega}(z)$ и $H_k(z)$, при действии одной только продольной силы равен нулю:

$$H(z) = H_{\omega}(z) + H_k(z) = 0. \quad (6.12)$$

Формула (6.12), полученная на основании формул (6.9) и (6.11), выражает собою одно из условий равновесия части стержня, лежащей по одну сторону от сечения.

8. В качестве примера рассмотрим несимметричный профиль, изображенный на рис. 67. Главные оси обозначены через x и y ;

вспомогательные центральные оси — через ξ и η ; угол между центральными и главными осями $\varphi = 21^\circ 42'$.

Площадь сечения и главные моменты инерции имеют следующие значения:

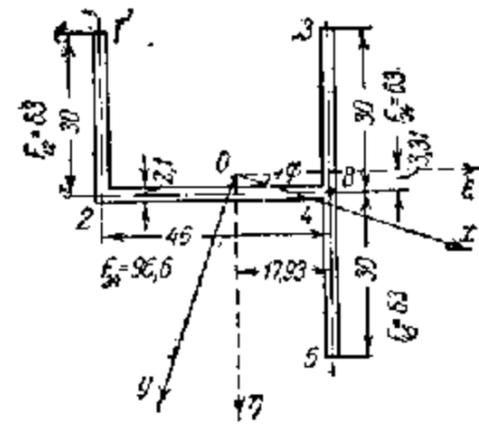


Рис. 67.

$$F = 285,6 \text{ см}^2,$$

$$J_x = 43040 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 120300 \text{ см}^4.$$

Для определения координат центра изгиба выберем в качестве вспомогательного полюса B — точку 4, находящуюся на пересечении оси горизонтального элемента с осью правой вертикальной стенки, и построим относительно этого полюса эпюры секториальных площадей ω_B (рис. 68, а).

Вычисляя интегралы от произведений эпюр ω_B на x и ω_B на y

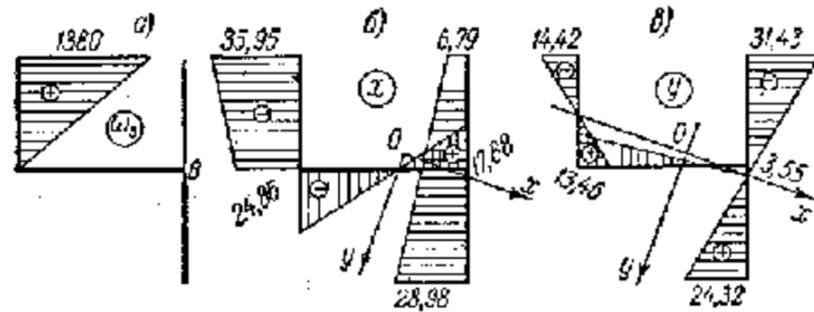


Рис. 68.

(рис. 68, б и в) по площади всего поперечного сечения, получим:

$$J_{\omega x} = \int_F \omega_B x dF = -1402000 \text{ см}^5,$$

$$J_{\omega y} = \int_F \omega_B y dF = -223000 \text{ см}^5.$$

Формулы (7,5) гл. I для координат центра изгиба, отсчитываемых от вспомогательного полюса B в направлении главных осей, дают:

$$x_x = \frac{J_{\omega y}}{J_x} = -5,18 \text{ см}, \quad x_y = -\frac{J_{\omega x}}{J_y} = 11,66 \text{ см}.$$

Так как вспомогательный полюс B имеет по главным осям координаты (рис. 68)

$$b_x = 17,88 \text{ см}, \quad b_y = -3,55 \text{ см},$$

то координаты центра изгиба A по главным осям будут:

$$a_x = 12,70 \text{ см}, \quad a_y = 8,11 \text{ см}.$$

По этим данным легко подсчитать расстояния центра изгиба от осей горизонтального и правого вертикального элементов поперечного сечения; они будут соответственно равны 8,93 см и 9,13 см (рис. 69, а).

Помещая полюс в центр изгиба A и считая, что начальная точка отсчета секториальных площадей M_0 отстоит от левой вертикальной оси на расстоянии t (рис. 69, а), строим эпюры секториальных площадей и из условия $S_{\omega} = \int \omega dl = 0$ находим $t = 41,73 \text{ см}$.

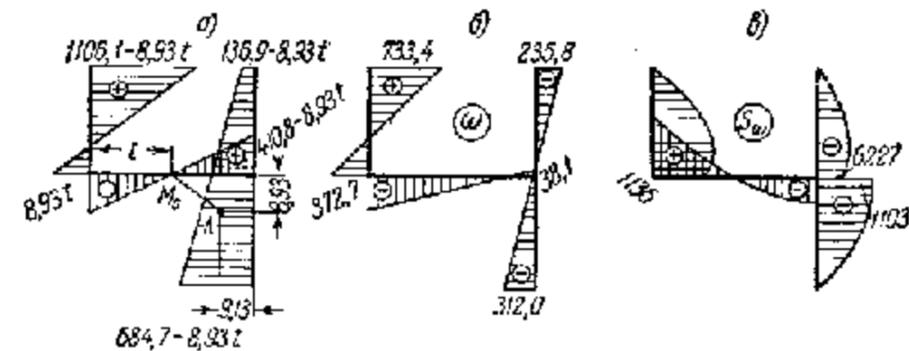


Рис. 69.

На рис. 69, б дана эпюра главных секториальных площадей ω , построенная после определения положения начальной секториальной точки M_0 . На рис. 69, в дана эпюра секториальных статических моментов S_{ω} . По эпюре ω вычисляем секториальный момент инерции. Крутильное сопротивление определяем по формуле (5,8) гл. I при коэффициенте α , принятом равным единице:

$$J_d = \sum \frac{\omega^3}{3} = 419,8 \text{ см}^4.$$

Из эпюры секториальных площадей (рис. 69, б) видно, что линейное распределение напряжений σ по сечению имеет место только в частном случае, когда продольная сила P приложена в одной из трех точек профильной линии, для которых секториальная площадь ω равна нулю. При любом же ином положении силы P в поперечных сечениях возникнут дополнительные (секториальные) напряжения, связанные с деформацией сечения. Эти напряжения при граничных условиях, указанных в п. 2 настоящего параграфа для стержня с началом отсчета координаты z в среднем поперечном сечении, определяются для произвольной точки поперечного сечения, отстоящего от среднего поперечного сечения на расстоянии z , по формуле (6,6), которую мы запишем теперь в виде:

$$\sigma_{\omega} = -\frac{P \omega h}{J_d} \omega(s) \varphi(k, z),$$

где

$$\varphi(k, z) = \frac{\text{ch } \frac{h}{l} z}{\text{ch } \frac{k}{2}} \quad (6.13)$$

134 МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ [гл. II

Функция $\varphi(k, z)$, как видно из (6.13), зависит от положения точки по длине стержня и от упругой характеристики k , вычисляемой по формуле (2.2). В данном случае, поскольку мы рассматриваем половину стержня (координата z отсчитывается от среднего сечения), при вычислении k мы должны под l понимать половину длины стержня.

Функция $\varphi(k, z)$ характеризует изменение секториальных деформаций по длине стержня. На рис. 70 приведены графики функции $\varphi(k, \alpha)$, построенные для разных длин стержня при коэффициенте Пуассона $\mu = \frac{G}{E} = 0,4$. На этих графиках по оси абсцисс отложены относительные расстояния $\alpha = \frac{z}{l/2}$, выраженные в долях половины длины стержня и отсчитываемые от среднего поперечного сечения, по оси ординат — величины $\varphi(k, \alpha)$.

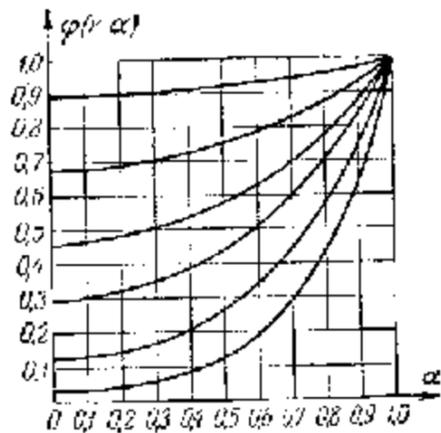


Рис. 70.

Графики показывают, что секториальные деформации сечения, а следовательно, и дополнительные напряжения σ_{ω} , с удалением от концов стержня к середине уменьшаются, причем степень уменьшения при данных размерах поперечного сечения стержня и заданном коэффициенте Пуассона μ зависит от длины стержня l . С увеличением длины стержня секториальные нормальные напряжения в большей степени уменьшаются в средней его части. Для весьма длинных стержней эти напряжения носят местный характер и, следовательно, согласуются с принципом Сен-Венана. При $k \rightarrow \infty$, т. е. для бесконечно длинного стержня, секториальные нормальные напряжения всюду равны нулю, за исключением концевых сечений $\alpha = -1$ или $\alpha = \frac{l}{2}$, для которых функция φ принимает единичные значения. Действительно, выражая гиперболические косинусы по известным формулам Эйлера, можем функцию φ представить в виде

$$\varphi = \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{2} \alpha}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} = \frac{e^{\frac{k}{2} \alpha} + e^{-\frac{k}{2} \alpha}}{e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}}} = e^{\frac{k}{2}(\alpha-1)} \frac{1 + e^{-k\alpha}}{1 + e^{-k}}$$

Из этой формулы видно, что для всех значений α , заключенных между нулем и единицей (или, что то же самое, — для всех значений z , заключенных между нулем и $\frac{l}{2}$), функция φ при $k \rightarrow \infty$ обращается в нуль, а при $\alpha = 1$ функция φ принимает значение, равное единице, независимо от величины k .

Переходя к вычислению эйлер нормальных напряжений σ по поперечному сечению, рассмотрим случай, когда сжимающая сила приложена в точке 2 (рис. 71). Изгибно-крутящий бимомент \bar{B} вычисляется здесь по формуле

$$\bar{B} = -P\omega_2.$$

Полагая в этой формуле $P = 50 \text{ т}$ и замечая, что для точки 2 $\omega_2 = -372,7 \text{ см}^2$, получим:

$$B = 50\,000 \cdot 372,7 = 18,635 \cdot 10^9 \text{ кг см}^2, \tag{6.14}$$

$$\sigma_{\omega} = \varphi(k, \alpha) \frac{\bar{B}}{J_{\omega}} = \varphi(k, \alpha) \frac{18,635 \cdot 10^9}{15,868 \cdot 10^8} \omega(s) = 1,174 \omega(s) \varphi(k, \alpha).$$

Прибавляя напряжения, определяемые по формуле (6.14), к напряжениям, которые получаются по обычным формулам сопротивления материалов от осевой сжимающей силы $N = -P = -50 \text{ т}$ и от изгибающих моментов $M_x = Py_2$ и $M_y = Px_2$, получим:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} = -\frac{50\,000}{285,6} = -175,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y} x_2 = 10,334 x_2,$$

$$\sigma_y = \frac{M_x}{J_x} y_2 = -15,637 y_2.$$



Рис. 71.

Ниже, в табл. 15 даны нормальные напряжения, вычисленные для точек 1, 2, 3, 4, 5 поперечного сечения по трехчленной формуле сопротивления материалов: $\sigma = \sigma_0 + \sigma_x - \sigma_y$. Эти напряжения зависят только от положения точки на контуре профильной линии и не меняются по длине стержня.

Таблица 15

Точка	1	2	3	4	5
$\sigma \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	-321,1	-642,5	+386,6	+65,2	-255,9

Дополнительные (секториальные) нормальные напряжения σ_{ω} , определяемые по формуле (6.14) для стержня длиной $l = 900 \text{ см}$, для шести значений $\alpha = \frac{2z}{l}$ приведены в табл. 16. Эти напряжения являются уже функцией двух переменных: α и s . Переменная α определяет поло-

жение точки по длине стержня, и влияние ее определяется функцией $\varphi(k, \alpha)$, которая при $k = 1,464$ и заданных значениях α имеет значения:

$$\begin{aligned} \varphi(k; 0) &= 0,43917, \\ \varphi(k; 0,2) &= 0,4581, \\ \varphi(k; 0,4) &= 0,5167, \\ \varphi(k; 0,6) &= 0,6196, \\ \varphi(k; 0,8) &= 0,7762, \\ \varphi(k; 1) &= 1. \end{aligned}$$

Переменная z определяет положение точки на поперечном сечении средней поверхности данного стержня, и влияние ее определяется секторными координатами ω_k .

Таблица 16

α	Напряжения σ_{ω} в точках:				
	1	2	3	4	5
0	+ 378,1	- 192,2	- 121,6	+ 19,7	- 160,9
0,2	+ 394,5	- 200,5	- 126,9	+ 20,5	- 167,8
0,4	+ 445,0	- 226,1	- 148,1	+ 23,1	- 189,3
0,6	+ 533,6	- 271,1	- 171,5	+ 27,7	- 226,9
0,8	+ 668,4	- 339,7	- 214,9	+ 34,7	- 284,4
1,0	+ 861,2	- 437,6	- 276,9	+ 44,7	- 366,4

Складывая по сечениям напряжения, выписанные в табл. 15, с дополнительными напряжениями табл. 16, получим полные напряжения σ от сжимающей силы $P = 50 \text{ т}$, приложенной в точке 2.

Значения полных напряжений для характерных точек поперечных сечений приведены в табл. 17.

Таблица 17

α	Напряжения σ в точках:				
	1	2	3	4	5
0	+ 57,0	- 834,7	+ 265,0	- 84,9	- 95,0
0,2	+ 73,4	- 843,0	+ 259,7	+ 85,7	- 81,9
0,4	+ 123,9	- 868,6	+ 243,5	+ 88,3	- 66,6
0,6	+ 212,5	- 913,6	- 215,1	+ 92,9	- 29,0
0,8	+ 347,3	- 982,2	+ 171,7	+ 99,9	- 28,5
1,0	+ 540,1	- 1080,1	+ 110,3	+ 109,9	- 110,5

На рис. 72, а, б, в по данным табл. 17 построены эпюры напряжений для сечений $\alpha = 0; 0,5; 1,0$. На этих эпюрах для сравнения

пунктиром нанесены напряжения, взятые из табл. 15, определяемые по обычной теории сопротивления материалов. Дополнительные напряжения σ_{ω} и в этом случае, как мы видим, достигают весьма больших значений.

При внецентричном сжатии в стержне, помимо нормальных напряжений, возникнут вследствие появления секториальной деформации также и касательные напряжения. Эти напряжения складываются из осевых напряжений, которыми обуславливаются сдвигающие усилия,

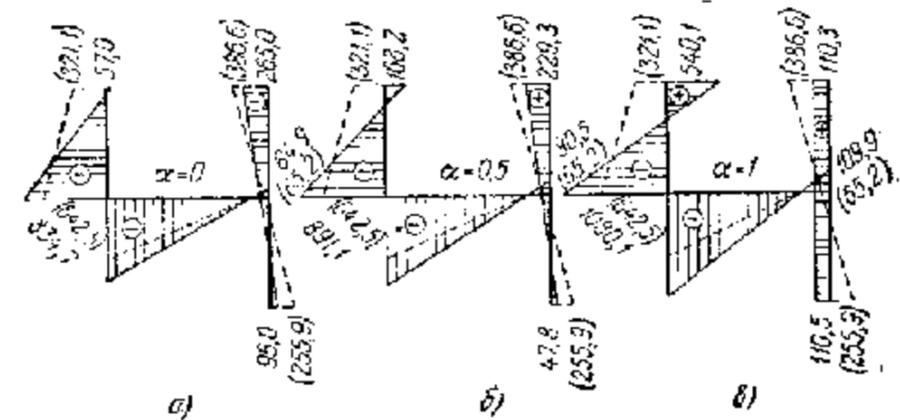


Рис. 72.

действующие по направлению касательной к дуге профильной линии, и напряжений, приводящихся в каждой точке контура к круглящей паре. Осевые сдвигающие напряжения определяются по формуле (6.8), где изгибно-крутящий момент $H_{\omega}(z)$ характеризует изменение напряжений τ_{ω} по длине стержня, а секториально-статический момент $S_{\omega}(s)$ и толщина стенки стержня $\delta(s)$ характеризуют изменение напряжений τ_{ω} по поперечному сечению; при постоянной величине $\delta(s)$ (как в нашем примере) изменение напряжений τ_{ω} по поперечному сечению определяется одной функцией $S_{\omega}(s)$. Этот момент для произвольной точки сечения вычисляется по формуле (6.11) гл. I:

$$S_{\omega}(s) = \int_{F(s)} \omega dF. \quad (6.15)$$

Интеграл в формуле (6.15) распространяется на отсеченную часть сечения, расположенную по одну сторону от данной точки на контуре. Эпюры секториальных статических моментов приведены на рис. 69, в.

По длине стержня, как это видно из формулы (6.10), касательные напряжения меняются по закону нечетной функции $\text{sh} \frac{k}{l} z$, принимая нулевые значения в середине длины стержня (при $z = 0$) и наибольшие значения на концах стержня ($z = \pm \frac{l}{2}$).

Подставляя в формуле (6.10) $z = \frac{l}{2}$, получим:

$$\tau_{\omega} = \frac{P\omega_k}{J_{\omega}\delta} \frac{k}{l} S_{\omega}(s) \text{sh} \frac{k}{2}.$$

138 МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ [гл. II

Как показано выше, осевые касательные напряжения в любом поперечном сечении статически приводятся к моменту $H_k(z)$, названному нами, в отличие от крутящего момента $H_k(z)$ при чистом кручении, изгибно-крутящим моментом. Помимо $H_k(z)$, в сечении стержня возникнет и крутящий момент $H_k(z)$, обусловливаемый неравномерностью распределения касательных напряжений по толщине стенки и вычисляемый по формуле (6.11). На рис. 73, а показан график изменения моментов $H_k(z)$ по длине стержня.

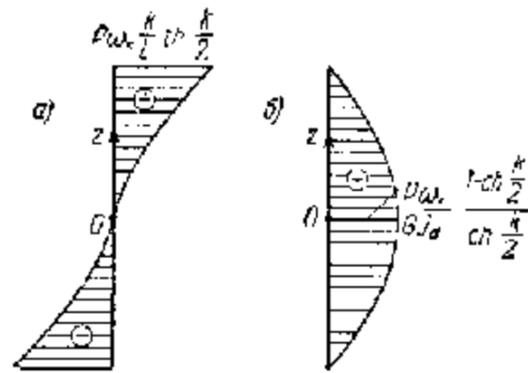


Рис. 73.

помимо деформаций осевых удлинений и изгиба, будет также испытывать и деформации кручения. Угол закручивания в рассматриваемом случае (при $z=0$ в середине длины стержня) определяется по первой из формул (6.5). На рис. 73, б дан график изменения угла θ по длине стержня.

Как ранее указывалось, тонкостенный стержень при внецентренном действии продольной силы, помимо деформаций осевых удлинений и изгиба, будет также испытывать и деформации кручения. Угол закручивания в рассматриваемом случае (при $z=0$ в середине длины стержня) определяется по первой из формул (6.5). На рис. 73, б дан график изменения угла θ по длине стержня.

Как ранее указывалось, тонкостенный стержень при внецентренном действии продольной силы,

§ 7. Кручение стержня при действии продольной сдвигающей силы, приложенной в произвольной точке

1. Рассмотрим тонкостенный стержень, находящийся под действием продольной сдвигающей силы, приложенной в произвольном месте срединной поверхности стержня. Эта сила, кроме напряжений от осевого растяжения (сжатия) и изгиба, вызовет также дополнительные напряжения от кручения. Пусть продольная сила P , совпадающая по направлению с положительным направлением оси z , приложена в произвольной точке $z=t$, $s=k$ срединной поверхности стержня (рис. 74). Этой силе будет соответствовать внешний бимомент $\bar{B} = P\omega_k$, равный произведению силы P на значение секториальной координаты ω_k в точке приложения этой силы.

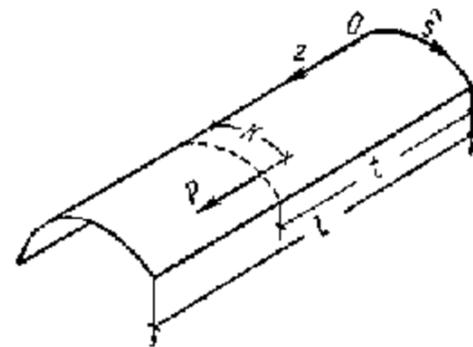


Рис. 74.

Так как в точке $z=t$, $s=k$ приложена внешняя продольная сила P , создающая внешний сосредоточенный бимомент $\bar{B} = P\omega_k$, то значение начального фактора B_t при положительном направлении силы P (в сторону положительной оси z) и при $\omega_k > 0$ для значений $z > t$ будет противоположным значению \bar{B} (см. рис. 64, з), а поэтому необходимо считать, что

$B_t = -\bar{B} = -P\omega_k$. В этом случае формулы табл. 7 в развернутой форме примут следующий вид:

Таблица 18

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{GJ_d} B_0$	$\frac{1}{GJ_d} H_0$	$\frac{1}{GJ_d} B_t = -\frac{1}{GJ_d} P\omega_k$
$\theta(z)$	1	$\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \text{ch} \frac{k}{l} z$	$z - \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \text{ch} \frac{k}{l} (z - t)$
$\theta'(z)$	0	$\text{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \text{sh} \frac{k}{l} z$	$1 - \text{ch} \frac{k}{l} z$	$-\frac{k}{l} \text{sh} \frac{k}{l} (z - t)$
$\frac{1}{GJ_d} B(z)$	0	$-\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z$	$\text{ch} \frac{k}{l} z$	$\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z$	$\text{ch} \frac{k}{l} (z - t)$
$\frac{1}{GJ_d} H(z)$	0	0	0	1	0

Эти формулы справедливы для участка стержня, расположенного за сечением $z=t$, т. е. при $z \geq t$; для участка же стержня, расположенного ближе сечения $z=t$, т. е. при $z < t$, в приведенных формулах нужно удержать только члены, содержащие начальные параметры θ_0 , θ'_0 , B_0 и H_0 , и отбросить члены, содержащие внешнюю нагрузку $\bar{B} = P\omega_k$.

Формулы табл. 18 справедливы не только в случае, когда внешний бимомент возникает при действии одной сосредоточенной силы P , но и при воздействии нескольких сил, сосредоточенных или как угодно распределенных по сечению $z=t$; в последних случаях \bar{B} вычисляется по соответствующим формулам (6.1) и (6.2).

Начальные параметры θ_0 , θ'_0 , B_0 и H_0 определяются из граничных условий. Как и в случае поперечных сил, рассмотрим частные случаи граничных условий.

а) Стержень на концах шарнирно оперт. Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad & \theta=0, \quad B=0; \\ \text{при } z=l \quad & \theta=0, \quad B=0. \end{aligned}$$

Начальные параметры, определенные из этих граничных условий при помощи табл. 18, имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 0, \\ \theta'_0 &= \frac{\bar{B}}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[1 - k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t)}{\operatorname{sh} k} \right], \\ B_0 &= 0, \\ H_0 &= \bar{B} \frac{1}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Основные расчетные факторы будут вычисляться по следующим формулам:

Для участка $0 \leq z < l$

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ \theta'(z) &= \theta'_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ B(z) &= -GJ_d \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \\ H(z) &= H_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Для участка $t \leq z \leq l$

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right) - \frac{P\omega_k}{GJ_d} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right], \\ \theta'(z) &= \theta'_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t), \\ B(z) &= -GJ_d \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - P\omega_k \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t), \\ H(z) &= H_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Начальные параметры θ'_0 и H_0 определяются по формулам (7.1).

б) Стержень с жестко заданными концами. Граничные условия для этого случая имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \theta &= 0, \quad \theta' = 0; \\ \text{при } z=l \quad \theta &= 0, \quad \theta' = 0. \end{aligned}$$

Начальные параметры, удовлетворяющие этим условиям, определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 0, \\ \theta'_0 &= 0, \\ B &= \bar{B} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} t - k \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t) - \operatorname{ch} k + 1}{2 + k \operatorname{sh} k - 2 \operatorname{ch} k}, \\ H_0 &= -\bar{B} \frac{\frac{k}{l} \left[\operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-t) + \operatorname{sh} \frac{k}{l} t - \operatorname{sh} k \right]}{2 + k \operatorname{sh} k - 2 \operatorname{ch} k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Пользуясь табл. 18 и учитывая при этом (7.4), составляем формулы для вычисления основных расчетных факторов:

Для участка $0 \leq z < l$

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{B_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ \theta'(z) &= -\frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ B(z) &= B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z, \\ H(z) &= H_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Для участка $t \leq z \leq l$

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \frac{B_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right) - \\ &\quad - \frac{P\omega_k}{GJ_d} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right], \\ \theta'(z) &= -\frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \\ &\quad + \frac{P\omega_k}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t), \\ B(z) &= B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - P\omega_k \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t), \\ H(z) &= H_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

в) Стержень, у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно закреплен. Предполагаем, что заделан край $z=0$ и, следовательно,

$$\text{при } z=0 \quad \theta = 0, \quad \theta' = 0.$$

Граничные условия на краю $z=l$ будут иметь вид:

$$\text{при } z=l \quad \theta = 0, \quad B = 0. \quad (7.7)$$

(Остальные два начальных параметра B_0 и H_0 , определенные из условий (7.7), будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} B_0 = \bar{B} &= \frac{\frac{l}{k} \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t)}{\frac{l}{k} \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} k}, \\ H_0 = \bar{H} &= \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t) - \operatorname{ch} k}{\frac{l}{k} \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Формулы же определения основных расчетных факторов такие же, как и в предыдущем случае граничных условий; начальные же параметры B_0 и H_0 в них должны определяться по формулам (7.8).

г) Стержень, у которого один конец жестко заделан, а другой свободен (консоль). Полагаем, что заделка относится к краю $z=0$ и, следовательно, как и в предыдущих случаях:

$$\text{при } z=0 \quad \theta(0)=0, \quad \theta'(0)=0.$$

Граничные условия на другом краю имеют вид:

$$\text{при } z=l \quad B(l)=0, \quad H(l)=0.$$

Начальные параметры имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 0, \\ \theta'_0 &= 0, \\ B_0 &= \bar{B} = \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l-t)}{\operatorname{ch} k}, \\ H_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Подставляя найденные значения начальных параметров (7.9) в соотношения (7.5) и (7.6), получим формулы для определения основных расчетных факторов и для этого вида граничных условий.

2. Выведенные выше формулы для изгибно-крутильных факторов от сосредоточенной продольной силы, приложенной в произвольной точке средней поверхности стержня, позволяют на основании закона независимости действия сил определить угол закручивания, деформацию и секториальные статические факторы от поверхностной продольной нагрузки, которая может быть либо сосредоточенной, либо распределенной непрерывно по средней поверхности стержня.

Выведенные в этом параграфе формулы дают также возможность определить секториальные перемещения и силы от сосредоточенного

изгибающего момента, действующего в касательной плоскости к средней поверхности стержня.

Пусть в точке $z=l$, $s=k$ средней поверхности стержня в касательной плоскости к этой поверхности приложен сосредоточенный момент M , образованный парой продольных сил P , отстоящих друг от друга на расстоянии Δs (рис. 75). Величины M , P и Δs связаны следующей зависимостью:

$$P = \frac{M}{\Delta s}. \quad (7.10)$$

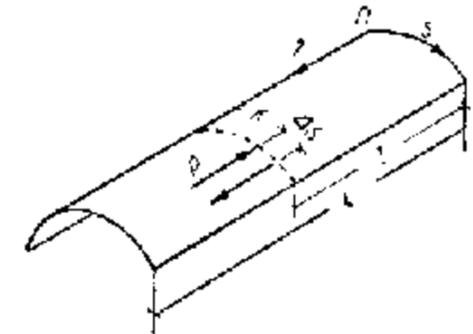


Рис. 75.

Из изложенного в п. 1 этого параграфа видно, что изгибно-крутильные факторы от воздействия сосредоточенного внешнего бимомента $\bar{B} = P\omega_k$ в окончательном виде, после определения по граничным условиям значений начальных параметров, пропорциональны этому бимоменту; поэтому мы можем представить их в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \theta_1(z) P\omega_k, \\ \theta'(z) &= \theta'_1(z) P\omega_k, \\ B(z) &= B_1(z) P\omega_k, \\ H(z) &= H_1(z) P\omega_k. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

где $\theta_1(z)$, $\theta'_1(z)$, $B_1(z)$ и $H_1(z)$ обозначают те же изгибно-крутильные факторы, но от воздействия единичного бимомента, приложенного к точке $z=t$, $s=k$; ω_k обозначает секториальную координату в точке K поперечного сечения.

Пусть $\Phi(z)$ обозначает любой из изгибно-крутильных факторов $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $B(z)$ и $H(z)$. На основании (7.11) мы можем написать

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) P\omega_k.$$

В точке, отстоящей от K на расстоянии Δs , секториальная координата тоже получит приращение, которое мы обозначим через $\Delta\omega_k$.

Тогда для фактора $\Phi(z)$ от действия пары сил (рис. 75) мы можем, рассматривая формулы табл. 18 как функции влияния, написать

$$\Phi_M(z) = \Phi_1(z) [-P\omega_k + P(\omega_k + \Delta\omega_k)] = \Phi_1(z) P\Delta\omega_k.$$

Подставляя сюда P по формуле (7.10) и переходя затем к пределу при $\Delta s \rightarrow 0$, получим:

$$\Phi_M(z) = \Phi_1(z) M \left(\frac{\Delta\omega_k}{\Delta s} \right)_{\Delta s \rightarrow 0} = \Phi_1(z) M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_{s=k}.$$

Таким образом, выражения для изгибно-крутильных факторов от воздействия сосредоточенного изгибающего момента M , лежащего в касательной плоскости в точке $z = l$, $s = k$, примут вид:

$$U(z) = U_1(z) M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_{s=k},$$

$$U'(z) = U'_1(z) M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_{s=k},$$

$$B(z) = B_1(z) M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_{s=k},$$

$$H(z) = H_1(z) M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_{s=k}.$$

Из этих выражений видно, что изгибно-крутильные факторы от действия сосредоточенного изгибающего момента M , лежащего в касательной плоскости к срединной поверхности в точке $z = l$, $s = k$, выражаются такими же формулами, как и от действия сосредоточенной продольной силы P , приложенной в той же точке $z = l$, $s = k$, с заменой множителя $P\omega_k$ на $M \left(\frac{d\omega}{ds} \right)_k$, т. е. они пропорциональны производной по переменной s от секториальной координаты ω в точке K .

Если момент M приложен в точке, где производная $\frac{d\omega}{ds}$ равна нулю, то все изгибно-крутильные факторы обратятся в нуль. Из геометрических соображений и способа получения главной секториальной площади ω следует, что касательная плоскость к срединной поверхности стержня в точке, где $\frac{d\omega}{ds} = 0$, проходит через центр изгиба. Таким образом, в точке, где $\frac{d\omega}{ds} = 0$, стержень будет находиться в условиях центрального поперечного изгиба. К этому же выводу мы пришли и ранее при рассмотрении вопроса о действии изгибающего момента, замененного парой поперечных сил (см. рис. 62, б)*).

В § 1 на рис. 32, 36, а и 39, а даны эпюры секториальных площадей для двутавра, шпеллера и зетового сечения; по ним легко получить для этих же профилей эпюры $\frac{d\omega}{ds}$; они будут иметь вид, показанный на рис. 76, а, б и в.

По этим эпюрам мы можем судить, что моменты, приложенные в плоскостях стенок двутавра и зетового профиля, дадут только попе-

* Д. и Л. Фенгель в своей книге «Сила и деформация» в главе о кручении тонкостенных стержней (т. II, стр. 130) приводят такое утверждение: «В случае чистого изгиба плоскость действия внешних сил можно переместить параллельно самой себе без изменения распределения напряжений в балке». Это утверждение, как мы видим, неправильно. Напряжения в тонкостенном стержне при чистом изгибе зависят не только от направления плоскости действия момента, но также и от способа осуществления этого момента и положения плоскости его действия.

речный изгиб и не вызовут крутильного эффекта, так как плоскости стенок проходят через центр изгиба. Моменты же, приложенные в плоскостях полок всех трех профилей, а также в плоскости стенки шпеллера, помимо поперечного изгиба, вызовут дополнительные изгибно-крутильные напряжения, причем, поскольку эпюры $\frac{d\omega}{ds}$ имеют для

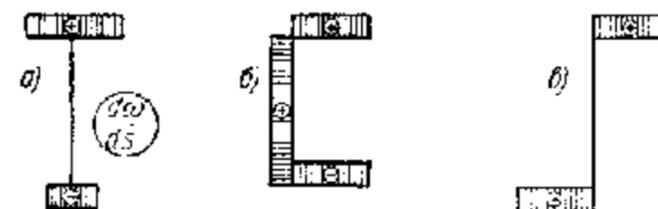


Рис. 76.

каждого элемента постоянное значение, то место приложения момента в каждом элементе безразлично.

Заметим, что все наши рассуждения относились к случаю, когда изгибающий момент действует в точке поперечного сечения стержня. В этом случае мы можем представлять изгибающий момент как парой продольных сил, так и статически эквивалентной ей парой поперечных

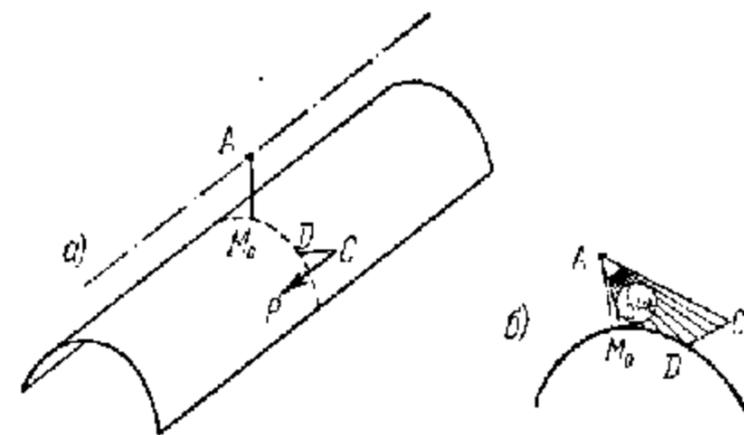


Рис. 77.

сил, поскольку они приложены к бесконечно малому элементу $ds dz$ срединной поверхности стержня в пределах одной пластинки.

3. Рассмотрим, наконец, случай, когда продольная сила приложена вне сечения стержня и передается на него при помощи жесткой консоли, прикрепленной в некоторой точке контура D (рис. 77, а).

Докажем следующую теорему: Если к тонкостенному стержню, обладающему недеформируемым контуром поперечного сечения и не имеющему деформаций сдвига, в какой-нибудь точке D прикреплена под прямым углом к образующей стержня жесткая консоль CD , то продольное перемещение конца консоли (точки C) в самом общем случае деформации стержня складывается из перемещений,

146 МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ [гл. II

определяемых законом плоских сечений, и перемещения, пропорционального секториальной площади ω_C , основанием которой служит линия M_0DC (M_0 — начальная точка отсчета главных секториальных площадей), и полюс находится в центре изгиба A (рис. 77, б).

Продольное перемещение конца консоли (точки C , рис. 78, а) складывается из продольного перемещения u_D основания консоли (точки D) и относительного продольного перемещения u_{CD} точки C по отношению к точке D , возникающего вследствие поворота консоли CD относительно прямой $n-n$, лежащей в плоскости P поперечного сечения $l=const$ и проходящей через точку D под прямым углом к консоли CD :

$$u_C = u_D + u_{CD}. \quad (7.12)$$

Так как точка D лежит на срединной поверхности стержня, то u_D определяется по формуле (3.16) гл. I:

$$u_D = \xi - \xi' x_D - \eta' y_D - \theta' \omega_D, \quad (7.13)$$

где x_D , y_D и ω_D — главные линейные и секториальная координаты точки D .

Обозначив через α угол, который образует направление консоли

с осью x , а через h — длину перпендикуляра из центра изгиба на направление консоли, мы можем на основании (3.9) гл. I определить проекцию перемещения точки D на направление консоли:

$$v_D = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta h. \quad (7.14)$$

Через образующую стержня, проходящую через точку D и консоль CD , проведем плоскость P (рис. 78, б). Пунктиром на этом рисунке показана проекция на плоскость P образующей стержня, проходящей через точку D после деформации стержня. Так как по условию консоль CD жестко прикреплена к контуру под прямым углом к образующей, то она после деформации повернется в продольной плоскости на некоторый угол, тангенс которого с точностью до величины второго порядка малости мы можем определить как производную по переменной z от перемещения v_D :

$$\frac{v_D(z+dz) - v_D(z)}{dz} = \frac{dv_D}{dz} = v_D'$$

Умножая v_D' на длину консоли CD , которую мы обозначим через S_{CD} , получим величину продольного перемещения u_{CD} точки C вследствие указанного поворота консоли CD после деформации:

$$u_{CD} = -v_D' S_{CD}. \quad (7.15)$$

Происхождение знака минус в формуле (7.15) легко объяснить по рис. 78, б.

Подставляя в (7.15) выражение (7.14), продифференцированное один раз по переменной z , и замечая, что

$$S_{CD} \cos \alpha = x_C - x_D, \quad S_{CD} \sin \alpha = y_C - y_D, \quad S_{CD} h = \omega_{CD},$$

получим

$$u_{CD} = -\xi' (x_C - x_D) - \eta' (y_C - y_D) - \theta' \omega_{CD}. \quad (7.16)$$

где x_C и y_C — главные линейные координаты точки C , а ω_{CD} — удвоенная площадь треугольника, основанием которого служит длина консоли CD , а вершина лежит в центре изгиба.

Подставляя в формулу (7.12) выражения (7.13) и (7.16) и замечая, что

$$\omega_D + \omega_{CD} = \omega_C,$$

получим

$$u_C = \xi - \xi' x_C - \eta' y_C - \theta' \omega_C, \quad (7.17)$$

что и подтверждает высказанную теорему.

Теперь можно распространить понятие обобщенных внешних сил \bar{N} , \bar{M}_x , \bar{M}_y и \bar{B} , эквивалентных заданной силе P в смысле возможной работы на перемещениях на плоскости сечения $l=const$, и на случай, когда сила приложена вне контура поперечного сечения и передается на сечение при помощи жесткой консоли. Для этих обобщенных сил формулы будут совершенно аналогичны формулам (6.3):

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= P \cdot 1, \\ \bar{M}_x &= P y_C, \\ \bar{M}_y &= -P x_C, \\ \bar{B} &= P \omega_C, \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

К последней из формул (7.18) мы можем прийти непосредственно, исходя из следующей теоремы: Если продольная сила приложена вне сечения стержня и передается на сечение при помощи жесткой консоли, прикрепленной в некоторой точке контура D (рис. 79) и лежащей в плоскости поперечного сечения стержня, то эта сила будет вызывать бимомент, равный произведению силы P на удвоенную секториальную площадь AM_0DC , ограниченную двумя радиусами-векторами, проведенными из центра изгиба A в начальную точку контура M_0 и в точку C приложения силы P , контуром сечения и осью консоли.

Пусть e — длина консоли. Перенесем силу P в точку D ; тогда в точке D , кроме силы P , мы должны приложить еще момент Pe . Заменить продольную силу P статически эквивалентными величинами в данном случае можно, поскольку мы находимся в пределах жесткой консоли (продольные перемещения консоли следуют закону плоскости).

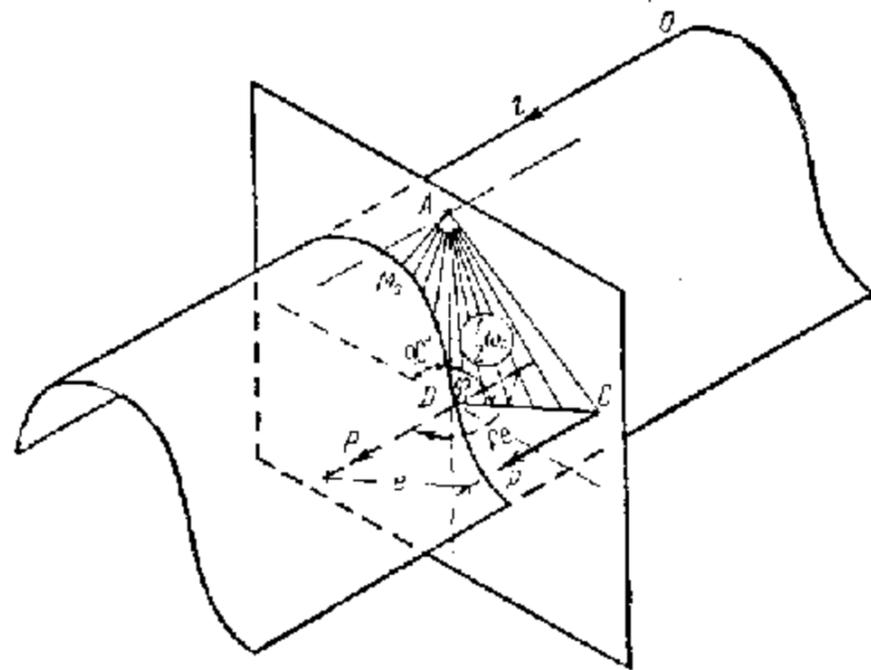


Рис. 79.

Сила P , приложенная в точке D профильной линии, вызовет бимомент $P\omega_D$, где ω_D — удвоенная площадь AM_0D . Момент же в заделке (точке D), равный Pe и действующий в плоскости консоли, мы разложим на два компонента: на момент, действующий в плоскости радиус-вектора AD , и момент, действующий в плоскости, перпендикулярной к AD . Первый момент, поскольку плоскость действия его проходит через центр изгиба, не вызовет кручения; второй момент $Pe \sin \varphi$ вызовет бимомент, равный $\overline{AD} \cdot Pe \sin \varphi$, где \overline{AD} — расстояние между точками A и D , но $\overline{AD} \cdot e \sin \varphi$ есть удвоенная площадь ΔADC . Складывая оба бимомента, получим

$$\overline{B} = P\omega_D + P\omega_{\Delta ADC} = P\omega_C,$$

где ω_C — удвоенная площадь AM_0DC . Теорема доказана и мы другим путем пришли к прежде полученной формуле.

4. В соответствии с четырьмя внешними статическими факторами (7.18) напряжение в тонкостенном стержне при действии продольной силы P в общем случае будет определяться также четырехчленной формулой (8.5) гл. I. Как уже не раз говорилось, нас в этой работе интересует главным образом четвертый член этой формулы, относя-

щийся к дополнительным напряжениям от кручения под воздействием внешнего продольного бимомента $\overline{B}(z)$.

Бимомент — новый силовой фактор, представляющий собою, по существу, систему продольных сил, статически эквивалентную нулю. Поскольку бимомент пропорционален секториальной площади ω_C , то напряжения и деформации стержня при действии продольной силы P зависят не только от положения силы в плоскости сечения $t = \text{const}$, но также и от способа передачи этой силы на стержень (от точки D — присоединения консоли к стержню). С изменением положения точки D меняется секториальная площадь ω_C , и, следовательно, меняется величина бимомента и соответствующих ему напряжений и деформаций стержня, определяемых законом секториальных площадей.

Бимомент $B(z)$ в произвольном сечении стержня определяется интегрированием дифференциального уравнения

$$B''(z) - \frac{k^2}{2} B = 0; \quad (7.19)$$

при заданных граничных условиях на концах стержня и при выполнении условий сопряжения участков стержня в сечении $z = t$; уравнение (7.19) получается из уравнения (3.1) при использовании первой формулы (2.5).

Б. В качестве примера рассмотрим стержень, находящийся под действием внецентренно приложенных растягивающих сил P . Пусть C — точка приложения силы; D_1 и D_2 — точки присоединения жестких консолей к стержню соответственно в сечениях $z = 0$ и $z = l$; A — центр изгиба; M_0 — начальная точка отчета секториальных площадей (рис. 80).

Из четырех обобщенных силовых факторов, на которые может быть разложена заданная внешняя сила P , мы займемся только одним — внешними бимоментами. Эти внешние бимоменты имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \text{в сечении } z = 0 \quad \overline{B}_1 &= P\omega_{1C}, \\ \text{в сечении } z = l \quad \overline{B}_2 &= P\omega_{2C}, \end{aligned}$$

где ω_{1C} и ω_{2C} — главные секториальные координаты точки C в сечениях $z = 0$ и $z = l$ (на рис. 80 это удвоенные заштрихованные площади AM_0D_1C и AM_0D_2C). Зная бимоменты на концах стержня, мы можем легко определить бимомент для произвольного поперечного сечения $z = \text{const}$. Так как внешняя нагрузка представлена сосредоточенными продольными силами, то при определении бимомента будем исходить из однородного дифференциального уравнения (7.19).

Общий интеграл этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка может быть представлен в виде:

$$B(z) = C_1 \operatorname{sh} \frac{k}{2} z + C_2 \operatorname{ch} \frac{k}{2} z, \quad (7.20)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad B(0) &= \bar{B}_1 = P\omega_{1C}, \\ \text{при } z=l \quad B(l) &= \bar{B}_2 = P\omega_{2C}. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные будут иметь значения:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\bar{B}_2 - \bar{B}_1 \operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}, \\ C_2 &= \bar{B}_1. \end{aligned}$$

а для бимоента в произвольном сечении будем иметь формулу:

$$B(z) = \frac{P}{\operatorname{sh} k} \left[\omega_{2C} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \omega_{1C} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right]. \quad (7.21)$$

По найденному бимоенту $B(z)$ легко определить дополнительные

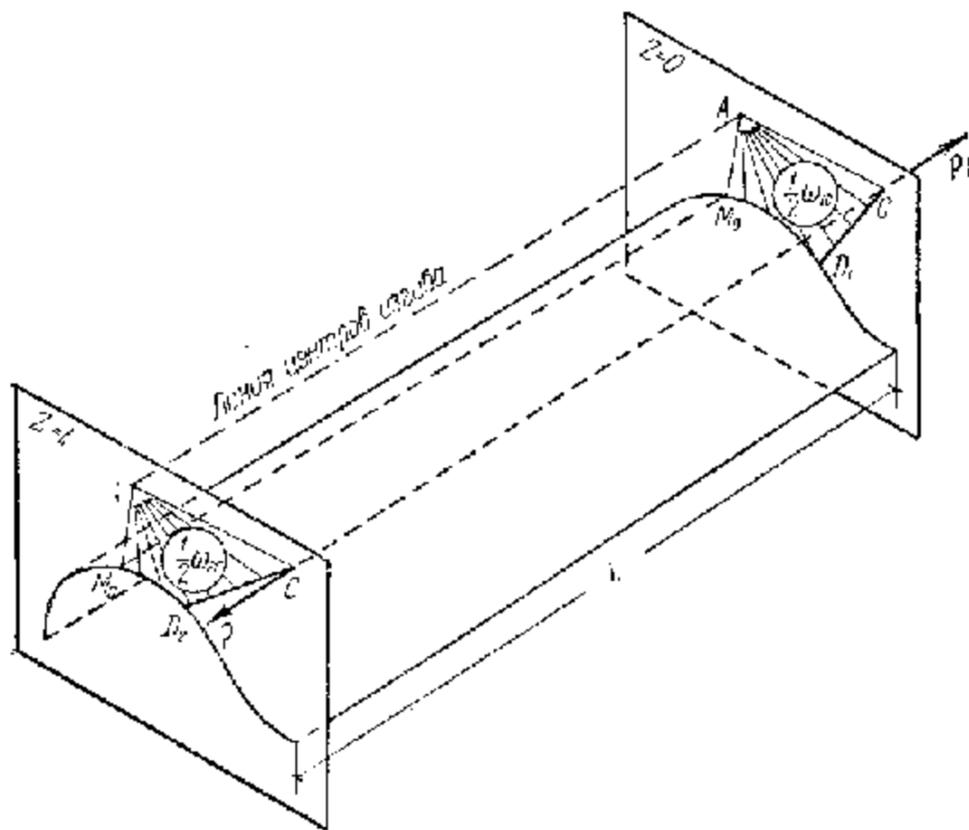


Рис. 80.

нормальные напряжения, возникающие вследствие кручения стержня при действии продольной силы:

$$\sigma_{\omega}(z, s) = \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s).$$

Пользуясь выражениями (7.18) и (7.21), перепишем общую формулу (8.5) гл. I для вычисления нормальных напряжений следующим образом:

$$\sigma(z, s) = P \left\{ \frac{1}{F} + \frac{x_C}{J_y} x(s) + \frac{y_C}{J_x} y(s) + \frac{\omega(s)}{J_{\omega} \operatorname{sh} k} \left[\omega_{1C} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (l-z) + \omega_{2C} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right] \right\}. \quad (7.22)$$

Если для точки C приложения силы P секториальные координаты имеют равные значения, т. е. $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$, то формула (7.22) будет иметь более простой вид:

$$\sigma(z, s) = P \left[\frac{1}{F} + \frac{x_C}{J_y} x(s) + \frac{y_C}{J_x} y(s) + \frac{\omega_C}{J_{\omega}} \omega(s) \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right]. \quad (7.23)$$

Если при этом сила приложена в центре тяжести сечения, то $x_C = y_C = 0$ и формула (7.23) еще упрощается:

$$\sigma(z, s) = P \left[\frac{1}{F} + \frac{\omega_C}{J_{\omega}} \omega(s) \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right]. \quad (7.24)$$

6. Мы рассмотрели общий случай задачи об определении бимоента от заданной продольной нагрузки. В случае, когда заданная продольная нагрузка представляет собой уравновешенную систему сил, бимомент от нее инвариантен по отношению к полюсу и началу отсчета секториальных площадей. Другими словами, бимомент от любой продольной уравновешенной нагрузки, распределенной по сечению непрерывно или состоящей из сосредоточенных сил, не зависит от центра изгиба и начала отсчета секториальных площадей.

Докажем это. Пусть продольная нагрузка состоит из сосредоточенных сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, приложенных в точках ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) поперечного сечения.

Согласно принципу независимости действия сил бимомент от суммы сил равен сумме бимоментов от каждой силы в отдельности:

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^n P_i \omega_i, \quad (7.25)$$

где ω_i — секториальная площадь, отсчитываемая от начальной точки до точки приложения силы P_i , а полюс находится в центре изгиба.

Обозначим через $\bar{\omega}_i$ секториальную площадь с полюсом в произвольной точке и произвольным началом отсчета секториальных площадей.

дей; тогда связь между секторными координатами $\bar{\omega}_i$ и ω_i на основании (7.8) гл. I можно представить в виде

$$\omega_i = \bar{\omega}_i - ax_i - by_i + c, \quad (7.26)$$

где x_i и y_i — координаты i -й точки; a , b , c — некоторые коэффициенты, зависящие от положения полюса и начала отсчета секторной площади ω_i .

Формула (7.25) после подстановки в нее выражения (7.26) примет вид:

$$\sum_{i=1}^n P_i \omega_i = \sum_{i=1}^n P_i \bar{\omega}_i + \sum_{i=1}^n P_i (ax_i + by_i + c). \quad (7.27)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (7.27) представляет собой момент от продольных сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ относительно прямой, определяемой коэффициентами a , b и c *). В случае нагрузки, статистически эквивалентной нулю, этот момент равен нулю, какова бы ни была прямая, выбранная в плоскости поперечного сечения. Отсюда следует равенство

$$\sum_{i=1}^n P_i \omega_i = \sum_{i=1}^n P_i \bar{\omega}_i$$

подтверждающее высказанное положение.



Рис. 81.

§ 8. О принципе Сен-Венана в теории тонкостенных стержней

1. Из наложенного в предыдущем параграфе видно, что отклонение от закона плоских сечений и кручение стержня могут иметь место не только при действии поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, но также и при отсутствии какой бы то ни было крутящей нагрузки. Закон линейного распределения нормальных напряжений по сечению при растяжении или сжатии стержня, не имеющего на концах жестких диафрагм, оказывается справедливым только в частном случае приложенная продольная нагрузка, а именно, когда опорные бимоменты от этой нагрузки равны нулю (рис. 81).

Из формулы (7.24) следует, что кручение стержня может иметь место и в случае центрального растяжения, когда сила приложена по линии центров тяжести сечений. Явление кручения стержня при осе-

* Действительно, из аналитической геометрии известно, что расстояние от произвольной точки (x_i, y_i) на плоскости до прямой $ax + by + c = 0$ с точностью до коэффициента пропорциональности определяется по формуле:

$$ax_i + by_i + c.$$

вом растяжении легко показать на примере стержня зетового профиля. Из эпюры секторных площадей, приведенной на рис. 39, а, видно, что в условиях степенного кручения стенка зетового стержня, нагруженного по концам крутящими моментами, испытывает равномерное растяжение (сжатие). На основании принципа взаимности можно утверждать и обратное, а именно: зетовый профиль при растяжении (сжатии) одной только стенки, наряду с деформациями удлинений (укорочений) получит также и деформацию кручения. Действительно, передавая на одну только стенку стержня продольную силу, мы получим бимомент от этой силы, отличный от нуля. Этот бимомент в произвольном сечении $z = \text{const}$ вычисляется по формуле (7.21):

$$B(z) = \frac{P\omega_c}{\text{sh } k} \left[\text{sh } \frac{k}{l} z + \text{sh } \frac{k}{l} (l - z) \right] = P\omega_c \frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}}, \quad (8.1)$$

где ω_c — секторная площадь в центре тяжести сечения (середины стенки), т. е. в точке приложения осевой силы P , передающейся только на стенку. Этому бимоменту соответствует деформация кручения $\theta(z)$, определяемая дифференциальным уравнением (2.5):

$$EJ_{\omega} \theta''(z) = -B(z).$$

Под влиянием растяжения стенки, в полках по линии их контакта со стенкой возникнут сдвигающие усилия (рис. 82, а), вследствие чего полки, помимо деформации растяжения, получат также каждая в своей плоскости и деформацию изгиба, выпуклостью в сторону стенки. В результате изгиба полки в разные стороны стержень получит деформацию кручения при отсутствии крутящих моментов (рис. 82, б).

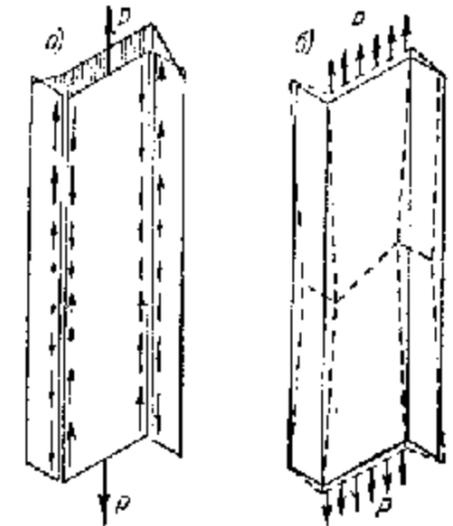


Рис. 82.

Такая центрально приложенная продольная растягивающая нагрузка, помимо напряжения $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, вызывает также дополнительные напряжения $\sigma_{\omega} = \frac{B}{J_{\omega}}$. Напряжения σ_{ω} , возникающие от бимомента B , в отличие от осевого напряжения $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ не остаются постоянными по длине стержня, а изменяются по тому же закону, что и бимомент B (8.1). Согласно принципу Сен-Венана напряжения, вызываемые уравновешенной (в сечении) внешней нагрузкой, носят местный характер и быстро затухают по мере удаления от места приложения этой нагрузки. Это

утверждение несправедливо в отношении тонкостенных стержней. Хотя бимоменты представляют собой уравновешенную систему сил, но теоретические и экспериментальные исследования показывают, что напряжения σ_w от бимоментов, приложенных на концах тонкостенного стержня с открытым контуром, вследствие пространственной деформации такого стержня, выражающейся в кручении, как правило, не носят характера местных напряжений. В применении к тонкостенным стержням, имеющим в поперечном сечении неизменяемый открытый профиль (и вообще к оболочкам), принцип Сен-Венана практически не соблюдается и имеет ограниченную область применения.

В рассматриваемом случае загрузки секториальные напряжения σ_w по мере удаления от концов стержня к середине, как видно из закона изменения их по длине стержня (8.1), затухают, причем степень затухания зависит от относительной упругой характеристики $k^2 = l^2 \frac{GJ_d}{EJ_w}$.

Чем меньше величина k , тем затухание будет медленнее, и, наоборот, чем больше k , тем затухание будет быстрее. В предельном случае, когда $k \rightarrow 0$, эпюра напряжений по длине стержня будет стремиться к прямой, параллельной оси стержня; напряжения σ_w на всей длине стержня останутся постоянными. Этому случаю в теории изгиба соответствует задача о чистом изгибе балок. При $k \rightarrow \infty$, как это показано в § 6 на примере Ч-образного сечения

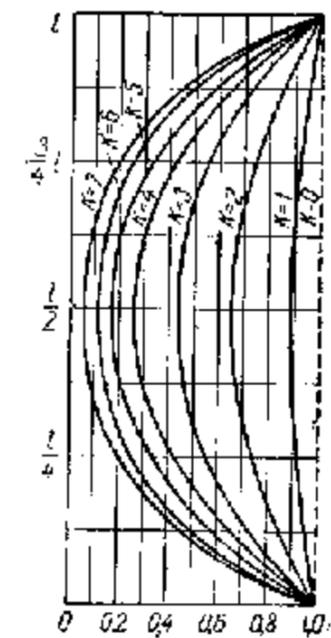


Рис. 83.

стержня, напряжения σ_w носят местный характер.

Представление о характере изменения бимомента (или продольного нормального напряжения σ_w) вдоль пролета стержня при различных значениях упругой характеристики можно получить из рис. 83. На этом

рисунке дан график изменения функции $\frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}}$, входящей в

состав формулы бимомента (а, следовательно, и напряжения σ_w) и определяющей закон изменения как $B(z)$, так и $\sigma_w(z)$ по переменной z для значений $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 ; для сравнения дан также график для предельного случая $k = 0$.

Значения функции $\frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}}$ имеют следующие числовые значения

в сечениях $z = \frac{1}{4}l, \frac{1}{2}l$ и $\frac{3}{4}l$ (табл. 19).

Что касается величины относительной упругой характеристики k , то, как можно судить по формуле

$$k = l \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_w}},$$

эта величина зависит в основном от толщины δ стержня, его длины l и взаимного расположения пластинок (стенки, полки и т. д.), составляющих стержень, друг относительно друга.

Оставляя неизменным контур поперечного сечения и длину стержня и меняя только толщину его, можем убедиться, что чем меньше

Таблица 19

k	$\frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}}$	
	при $z = \frac{1}{4}l$ и $\frac{3}{4}l$	при $z = \frac{1}{2}l$
1	0,915	0,887
2	0,731	0,648
3	0,550	0,425
4	0,410	0,266
5	0,308	0,163
6	0,234	0,099
7	0,179	0,060

толщина δ , тем меньше будет величина k и наоборот, потому что в жесткость GJ_d толщина входит в кубе, а секториальная жесткость EJ_w зависит от толщины линейно. Таким образом, чем меньше толщина δ пластинок, составляющих стержень, тем затухание секториальных напряжений (а также бимоментов) по длине стержня будет медленнее.

От длины стержня, при прочих неизменных условиях, k зависит линейно; затухание напряжений по длине стержня тем больше, чем больше длина стержня. В § 6 зависимость эта обоснована на примере Ч-образного стержня и графически представлена на рис. 70.

Зависимость k от взаимного расположения друг по отношению к другу пластинок, составляющих стержень (при прочих равных условиях), поясним на примере стержня Z-го профиля. Рассмотрим этот стержень как тонкостенную систему, составленную из трех узких пластинок, примыкающих друг к другу (стенка к полкам) под прямыми углами. Полки такого стержня (рис. 82, б) при изгибе в своей плоскости от действия центрально приложенной (только к стенке) продольной нагрузки встречают со стороны стенки слабое сопротивление, поскольку стенка, при расположении полок в разные стороны, будет испытывать

кручение. Вследствие кручения, которому тонкостенный стержень открытого профиля при небольшой толщине пластинок оказывает весьма слабое сопротивление, затухание напряжений от бимоментов в этом стержне будет медленным.

Другое дело, если все три пластинки Z-го профиля расположить в одной плоскости, т. е. повернуть каждую полку на 90° , тогда мы будем иметь пластинку, состоящую из трех узких полосок (рис. 84, а).

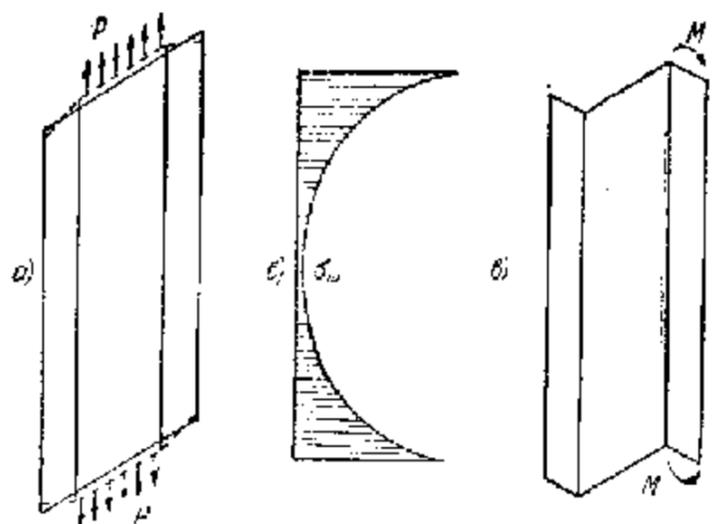


Рис. 84.

В этом случае уравновешенная продольная нагрузка, приложенная на концах средней пластинки, вследствие того, что крайние полоски, монолитно связанные с средней пластинкой, не могут прогибаться в своей плоскости, вызовет напряжения только в непосредственной близости от точек приложения нагрузки (рис. 84, б), причем напряжения эти обусловятся главным образом деформацией сдвига. Положения пластинок по отношению друг к другу, промежуточные между двумя выше рассмотренными, естественно, будут давать и степень затухания напряжений σ_x по длине также промежуточную, заключающуюся между степенями затухания, относящимися к взаимному расположению пластинок 0° и 90° .

Явление кручения и связанная с ним деформация сечения могут иметь место и в случае, когда к концам стержня приложены изгибающие моменты. Так, например, если моменты в случае зетового профиля приложены на концах одной полки (рис. 84, в), то бимоменты, а следовательно, и углы закручивания $\theta(z)$ и напряжения σ_x будут отличны от нуля. Отсюда следует, что понятие чистого изгиба, как в рассмотренном выше понятие чистого растяжения, в свете изложенной здесь теории требует уточнения.

Следует вообще заметить, что описанное здесь и в § 6 явление закручивания стержня при действии продольной силы имеет место лишь в случае, когда концы стержня не закреплены от продольных дефор-

маций, т. е. когда концевые сечения стержня могут свободно деформироваться (получать перемещения из своей плоскости). Такие граничные условия носят теоретический характер. В действительности концы стержней металлических конструкций обычно как-то закреплены, имеют ребра жесткости или планки, которые в той или иной степени оказывают сопротивление деформации сечения. С увеличением жесткости диафрагмы влияние секториальных факторов при внецентренном действии продольной силы уменьшается. Если диафрагмы обладают бесконечно большой жесткостью, то концевые сечения, а следовательно, и сечения в произвольной точке $z = \text{const}$, при действии продольной силы остаются плоскими. Дополнительные секториальные факторы в этом предельном случае обращаются в нуль.

Описанное здесь и в двух предыдущих параграфах закручивание тонкостенного стержня при действии растягивающей силы или бимоментов экспериментально подтверждается на моделях, показанных на рисунках 85 и 86.

На рис. 85 показано действие растягивающей силы. Модель в этом случае (рис. 85, а) представляет собою тонкостенный стержень I зетового профиля, имеющий по концам опорные уголки: уголок 2 прикреплен неподвижно к станине 5, другой уголок 3 может перемещаться по направляющей, прикрепленной к станине.

Опорные уголки имеют по три пальца, на которые свободно накладываются втулки 4, закрепленные на торцах стержня. Оси втулок расположены в центре тяжести профиля и на его полках в точках, для которых главные секториальные площади равны нулю. Сквозь втулки и пальцы просверлены (в собранном виде) отверстия для пропуска штырей, с помощью которых осуществляется жесткое соединение стержня с опорными уголками. Подвижной уголок перемещается по специальной направляющей корытного сечения, имеющей на одном конце вертикальную стенку 6. Сквозь эту стенку свободно пропущен натяжной винт, прикрепленный соосно одним концом к подвижному уголку (опора стержня). В винте прорезана шпоночная канавка для направляющей шпонки, укрепленной в вертикальной стенке. На свободный конец винта надет штурвал 7, при вращении которого винту сообщается только поступательное перемещение, передаваемое подвижной опоре и вызывающее растяжение тонкостенного стержня. Стержень может растягиваться двумя способами:

а) Растяжение осуществляется одной силой, приложенной в центре тяжести сечения. В этом случае помимо растяжения наблюдается также и закручивание стержня, возникающее вследствие деформации сечения. Угол закручивания фиксируется стрелкой прибора, расположенного в середине пролета стержня (рис. 85, а).

б) Растяжение осуществляется двумя одинаковыми силами, приложенными к полкам в двух таких точках, для которых секториальные площади равны нулю. В этом случае имеет место только растяжение без закручивания и стрелка, фиксирующая закручивание, остается неподвижной (рис. 85, б).

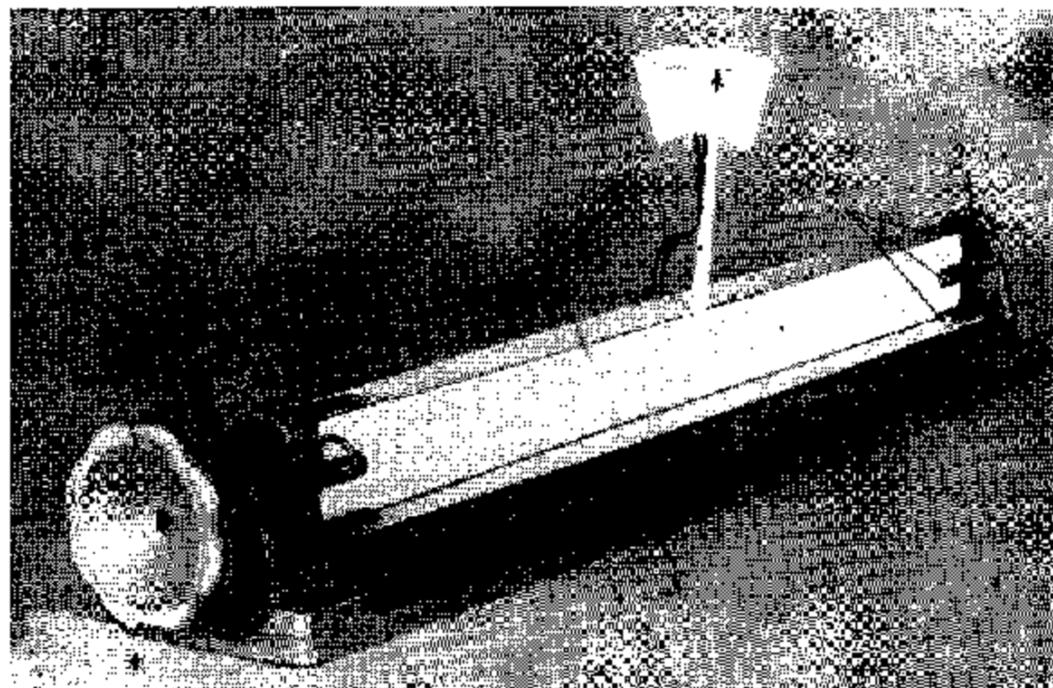


Рис. 85, а.

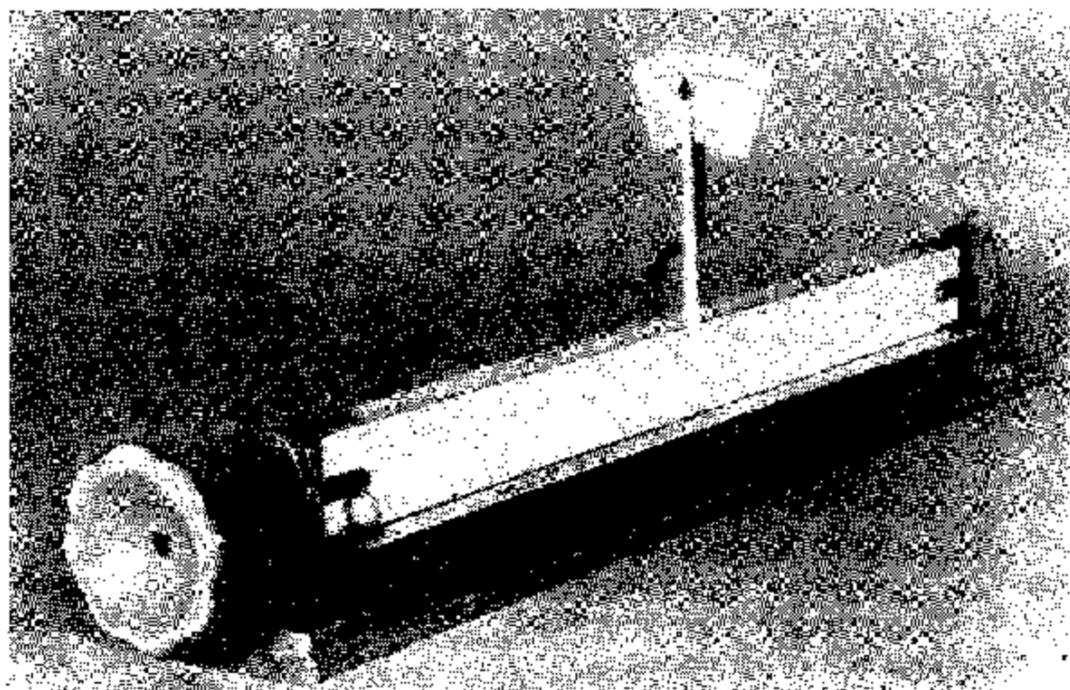


Рис. 85, б.

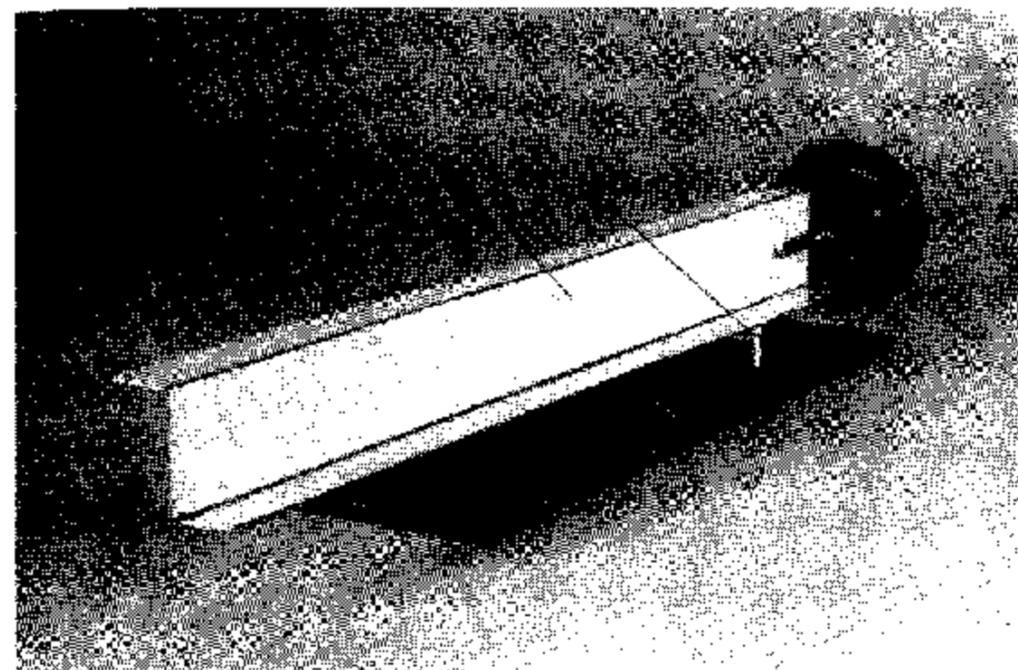


Рис. 86, а.

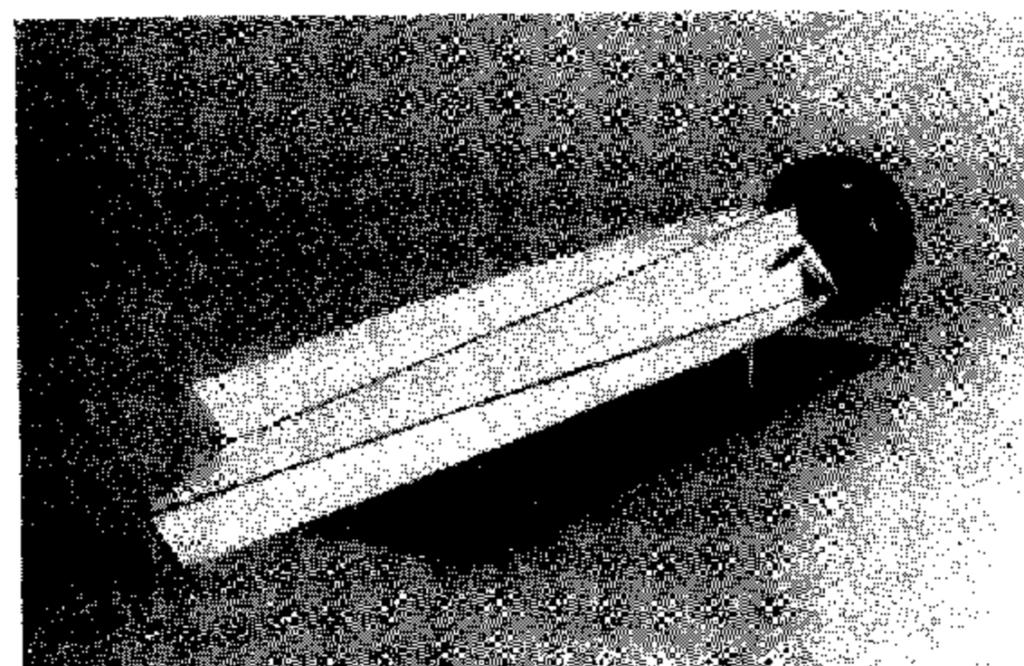


Рис. 86, б.

На рис. 86 показана модель, позволяющая осуществить загрузку стержня одним только бимоментом.

Модель представляет собою тонкостенный стержень *I* зетового профиля с одним свободным концом. Около другого конца стенка стержня жестко прикреплена к вертикальной планке 2, связанной со станиной 3 (рис. 86, а). К этому же торцу стержня соосно приклепан винт со свободно посаженной на него скобой 4, могущей занимать любое положение относительно стенки и полка зетового профиля. На конец винта надет штурвал 5, вращая который мы растягиваем стержень вдоль его оси и одновременно прижимаем скобу к тем точкам поперечного сечения стержня, которых эта скоба касается (сжимаем соответствующие волокна стержня). Таким способом осуществляется передача бимоментной нагрузки к торцу зетового профиля. Максимального значения бимомент достигает, когда скоба поставлена в крайнее наклонное положение.

Деформация вызывает кручение, которое ясно видно на модели (рис. 86, б) и может быть зафиксировано индикатором, установленным у свободного конца тонкостенного стержня.

§ 9. Аналогии с элементарной теорией изгиба балок

1. В предыдущих параграфах была изложена теория стесненного кручения, имеющего место при произвольном законе распределения по длине стержня внешнего крутящего момента и при различных граничных условиях,

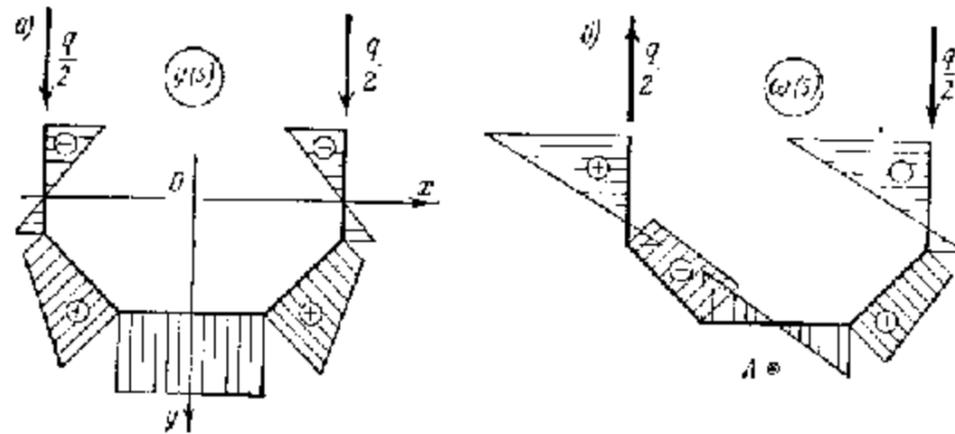


Рис. 87.

и характеризующегося возникновением в поперечных сечениях стержня не только касательных, но и нормальных напряжений. Эта теория по своему построению идентична существующей элементарной теории изгиба балок. Как неоднократно ранее указывалось, теория изгиба балок, основанная на законе плоских сечений, вытекает как частный случай из предложенной новой теории, основанной на более общем законе секториальных площадей. Рассматривая отдельно теорию стесненного кручения тонкостенного стержня, описываемую в приведенных ранее

формулах и уравнениях одной только функцией углов закручивания $\theta(z)$, мы видим, что эта теория в своем математическом оформлении аналогична элементарной теории изгиба балок.

Эта аналогия представлена ниже в сводке основных формул по теории изгиба и теории стесненного кручения (табл. 20).

Таблица 20

Изгиб в плоскости Oyz (закон плоских сечений (рис. 87, а))	Стесненное кручение (закон секториальных площадей (рис. 87, б))
$J_x = \int_F y^2 dF$	$J_\omega = \int_F \omega^2 dF$
$S_x = \int_F y dF$	$S_\omega = \int_F \omega dF$
$\eta = \eta(z)$	$\theta = \theta(z)$
$\eta' = \frac{d\eta}{dz}$	$\theta' = \frac{d\theta}{dz}$
$M_x = -EJ_x \eta''$	$B = -EJ_\omega \theta''$
$Q_y = M_x' = -EJ_x \eta'''$	$H_\omega = B' = -EJ_\omega \theta'''$
$\sigma_x = \frac{M_x(z)}{J_x} y(s)$	$\sigma_\omega = \frac{B(z)}{J_\omega} \omega(s)$
$\tau_x = -\frac{Q_y(z) S_x(s)}{J_x^2(s)}$	$\tau_\omega = -\frac{H_\omega(z) S_\omega(s)}{J_\omega^2(s)}$
$q_y = q_y(z)$	$m = m(z)$

Аналогия между теорией изгиба и теорией стесненного кручения, как видно из табл. 20, выражается в том, что основным факторам η, η', M_x, Q_y , представляющим собою в теории изгиба балок соответственно прогиб, девиацию (угол поворота сечения), момент и поперечную силу, в теории стесненного кручения соответствуют основные факторы θ, θ', B и H_ω , представляющие собою соответственно угол закручивания, меру деформации, бимомент и изгибно-крутящий момент.

Внешней погонной поперечной нагрузке q_y соответствует внешний погонный крутящий момент m . Нормальные и касательные напряжения σ_ω и τ_ω выражаются формулами, совершенно аналогичными формулам σ_x и τ_x в случае изгиба. То же можно сказать и о геометрических характеристиках J_x, S_x, J_ω и S_ω .

Отличие изложенной здесь теории кручения от теории изгиба состоит в том, что вместо дифференциального уравнения

$$EJ_x \eta^{IV} = q_y \tag{9.1}$$

которым мы пользуемся в теории изгиба балок, нам в теории стесненного кручения приходится пользоваться несколько более сложным

дифференциальным уравнением

$$EJ_{\omega} \psi^{IV} - GJ_d \psi'' = m. \quad (9.2)$$

Наличие в уравнении (9.2) члена со второй производной от угла закручивания θ , как это отмечалось ранее, обусловлено неравномерностью распределения по толщине стержня касательных напряжений, параллельных профильной линии.

2. Исследования, однако, показывают, что для цилиндрических и призматических оболочек открытого профиля и стержней, состоящих из тонких пластинок, с отношением толщины к характерному размеру поперечного сечения порядка 0,02 и менее, крутильная жесткость GJ_d как величина, пропорциональная кубу толщины, без ощутительной погрешности может быть принята равной нулю. Это допущение равносильно допущению, что крутящие моменты, возникающие вследствие неравномерного распределения касательных напряжений по толщине стенки, равны нулю.

Отбрасывая в уравнении (9.2) для строительных ребристых сводов — оболочек и складчатых систем член с ψ'' , т. е. полагая, что касательные напряжения, параллельные срединной поверхности, по толщине стенки распределяются равномерно и, следовательно, эти напряжения в случае кручения приводятся к крутящему моменту

$$H = H_{\omega} = -EJ_{\omega} \psi''',$$

получим:

$$EJ_{\omega} \psi^{IV} = m. \quad (9.3)$$

Последнее уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (9.1) изгиба обыкновенной балки.

Из отмеченных выше аналогий вытекает следующее важное предложение:

все известные в сопротивлении материалов и в строительной механике аналитические методы расчета балок и стержневых изгибаемых систем, основанные на законе плоских сечений, целиком могут быть обобщены и распространены на теорию стесненного кручения тонкостенных стержней, систем, составленных из таких стержней, и ребристых сводов-оболочек.

Таким образом, все четыре основные величины теории стесненного кручения (угол закручивания θ , соответствующий прогибу η ; производная ψ , определяющая в силу (3.16) гл. 1 меру абсолютной деформации сечения и соответствующая в теории изгиба балок девиация η' ; бимомент B , соответствующий изгибающему моменту M_x , и крутящий момент H_{ω} , соответствующий поперечной силе Q_y) могут быть определены хорошо известными аналитическими или графическими методами теории изгиба балок. Так, например, если стержень-оболочка длиной l находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = q_y$, направленной параллельно оси Oy и приложенной с эксцентриситетом e относительно линии центров изгиба, и если граничные условия на

концах $z = 0$ и $z = l$ соответствуют шарнирному закреплению (т. е. в случае изгиба на этих концах обращаются в нуль прогибы η и моменты M_x , а в случае стесненного кручения — угол закручивания θ и бимомент B), то для изгибающего момента M_x и прогиба η и соответственно для бимомента B и угла закручивания θ будем иметь совершенно идентичные формулы:

$$\left. \begin{aligned} M_x(z) &= \frac{qz}{2}(l-z), & \eta(z) &= \frac{qz}{24EI_x}(l^3 - 2lz^2 + z^3), \\ B(z) &= \frac{mz}{2}(l-z), & \theta(z) &= \frac{mz}{24EI_{\omega}}(l^3 - 2lz^2 + z^3). \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Последние две формулы (9.4) получаются из первых двух, на основании высказанного предложения, путем замены q на $m = qe$, J_x на J_{ω} , η на θ и M_x на B .

Изгибающий момент M_x и прогиб η принимают наибольшие значения в середине пролета:

$$\max M_x = \frac{ql^2}{8}, \quad \max \eta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}.$$

Аналогично бимомент B и угол закручивания θ будут иметь наибольшие значения также в середине пролета:

$$\max B = \frac{ml^2}{8}, \quad \max \theta = \frac{5}{384} \frac{ml^4}{EI_{\omega}}.$$

Продольные нормальные напряжения $\sigma(z, s)$ в любой точке (z, s) в рассматриваемом случае нагрузки будут вычисляться по двучленной формуле

$$\sigma(z, s) = \frac{M_x(z)}{J_x} y(s) + \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s).$$

3. Таким же способом, исходя из приведенной здесь аналогии и не делая всех выкладок, связанных с определением постоянных интегрирования уравнения (9.3), мы можем для неразрезного тонкостенного стержня (или неразрезной цилиндрической оболочки), у которого опорные сечения (крайние и промежуточные) закреплены от углов закручивания, сразу написать уравнение трех бимоментов:

$$l_n B_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) B_n + l_{n+1} B_{n+1} = -6(R_n^{\phi, n} + R_n^{\phi, n+1}), \quad (9.5)$$

где l_n, l_{n+1} — пролеты; B_{n-1}, B_n, B_{n+1} — опорные бимоменты; $R_n^{\phi, n}, R_n^{\phi, n+1}$ — правая и левая фиктивные опорные реакции от «загруженных» эпюрами бимоментов однопролетных статически определимых балок основной системы.

Уравнение (9.5) получается из уравнения трех моментов путем замены величин из теории изгиба балок соответствующими им величинами из теории кручения.

4. Для металлических тонкостенных стержней с отношением толщины стенки к характерному поперечному размеру порядка 0,1

крутящие моменты, возникающие вследствие неравномерного распределения касательных напряжений по толщине стенки, играют уже существенную роль, и для таких стержней нельзя полагать жесткость GJ_d равной нулю.

Задача об изгибном кручении стержня в этом более общем случае описывается уравнением (9.2), имеющим математическую аналогию с уравнением теории поперечного изгиба предварительно растянутой балки, т. е. с уравнением

$$EJ_T^{IV} - P\gamma_1'' = q,$$

где P — растягивающая сила.

Из этой аналогии следует, что при решении задачи об изгибном кручении стержня с учетом сеп-венановской жесткости чистого кручения могут быть также широко использованы известные в сопротивлении материалов и в прикладной теории упругости аналитические методы расчета предварительно растянутых балок. Так, например, уравнения трех бимоментов для многопролетного тонкостенного стержня, имеющего постоянную, отличную от нуля, жесткость GJ_d , могут быть получены из уравнений трех моментов многопролетной балки, растягиваемой силой P и имеющей идентичные условия со стержнем в задаче об изгибном кручении как в отношении внешней нагрузки, так и в отношении опорных закреплений.

Эти уравнения имеют вид:

$$a_{n, n-1} B_{n-1} + a_{n, n} B_n + a_{n, n+1} B_{n+1} = \theta'_{B(n)} - \theta'_{A(n+1)}, \quad (9.6)$$

где B_{n-1} , B_n , B_{n+1} — опорные бимоменты трех последовательно расположенных опорных сечений; $a_{n, n-1}$, $a_{n, n}$ и $a_{n, n+1}$ — коэффициенты, вычисляемые в самом общем случае по формулам:

$$a_{n, n-1} = \frac{\text{sh } k_n - k_n l_n}{k_n^2 \text{sh } k_n} \frac{l_n}{EJ_{\omega, n}},$$

$$a_{n, n} = \frac{k_n \text{ch } k_n - \text{sh } k_n}{k_n^2 \text{sh } k_n} \frac{l_n}{EJ_{\omega, n}} + \frac{k_{n+1} \text{ch } k_{n+1} - \text{sh } k_{n+1}}{k_{n+1}^2 \text{sh } k_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{EJ_{\omega, n+1}},$$

$$a_{n, n+1} = \frac{\text{sh } k_{n+1} - k_{n+1} l_{n+1}}{k_{n+1}^2 \text{sh } k_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{EJ_{\omega, n+1}},$$

причем k_n , k_{n+1} — упругие характеристики стержня в пролетах n , $n+1$, расположенных по обе стороны от n -й опоры; $J_{\omega, n}$, $J_{\omega, n+1}$ — главные секторные моменты инерции сечений стержня в этих пролетах.

Величины $\theta'_{B(n)}$, $\theta'_{A(n+1)}$, входящие в правые части уравнений (9.6), обозначают меру деформации стержней n , $n+1$ в n -м опорном сечении основной (разрезанной на опоры) системы. Индексы B , A обозначают правый и левый концы стержней n , $n+1$ основной системы.

Величины $\theta'_{B(n)}$, $\theta'_{A(n+1)}$ в каждом частном случае нагрузки могут быть определены изложенным выше методом начальных параметров при граничных условиях для стержня, имеющего на концах шарнирные закрепления. Каждое из уравнений (9.6) при фиксированном n выражает собой условие непрерывности деформации стержня на n -й опоре, аналогичное в теории неразрезных балок условию непрерывности деформации (угла наклона касательной к линии прогибов). Давая индексу n последовательные значения 1, 2, 3, ..., получим полную систему трехчленных уравнений, имеющую структуру, одинаковую с уравнениями трех моментов в теории неразрезных балок. Этими уравнениями определяются опорные бимоменты.

§ 10. Практический метод расчета складчатых систем и оболочек, усиленных поперечными ребрами

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что строительные оболочки и складчатые системы, усиленные в поперечном направлении ребрами, с достаточной для практики степенью точности можно рассматривать как пространственные тонкостенные системы, обладающие в поперечном сечении жестким (недеформируемым) контуром [40, 42]. Кроме того, в ребристых строительных оболочках и складках, толщина которых по сравнению с остальными геометрическими размерами в поперечном сечении очень мала, можно считать крутильную жесткость GJ_d равной нулю и исходить, следовательно, при расчете на кручение из дифференциального уравнения (9.3).

Рассмотрим в качестве примера тонкостенную пятигранную складку, представленную на рис. 88. Определим напряжения в такой складке от вертикальной равномерно распределенной нагрузки, действующей в плоскости крайней правой грани.

Поскольку поперечное сечение складки имеет одну ось симметрии, то центр изгиба лежит на оси симметрии. Расстояние от центра изгиба по оси симметрии (оси y) до точки пересечения этой оси с профильной линией складки определяется по второй из формул (7.5) гл. I:

$$a_y = a_y - b_y = -\frac{J_{\omega, B} x}{J_y} = -\frac{\int_F \omega_B x dF}{\int_F x^2 dF}.$$

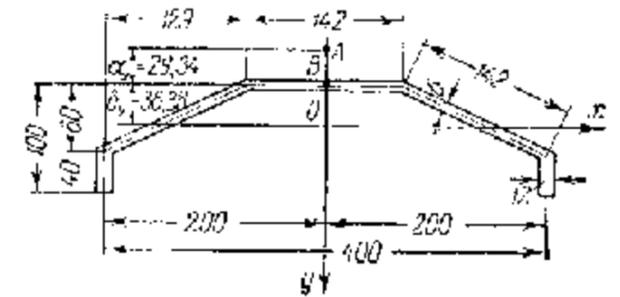


Рис. 88.

На рис. 89 приведены эпюры секториальных площадей ω_B и расстояний x и y для точек контура сечения. По этим эпюрам получим следующие значения геометрических характеристик: секториальный центрбежный момент инерции:

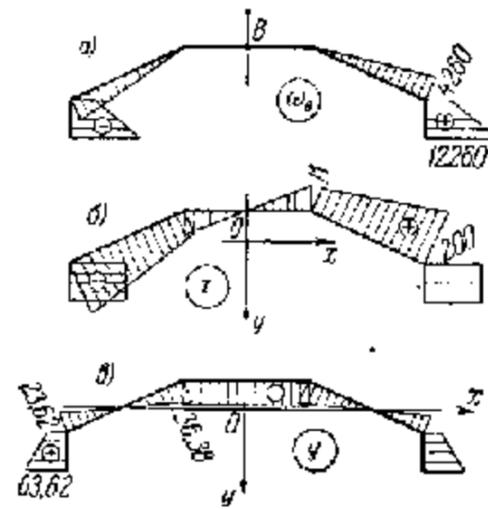


Рис. 89.

$$J_{\omega_B x} = \int_F \omega_B x dF = 2156 \cdot 10^6 \text{ см}^3,$$

осевые моменты инерции:

$$J_x = \int_F y^2 dF = 36,58 \cdot 10^8 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = 73,48 \cdot 10^8 \text{ см}^4,$$

координата центра изгиба:

$$a_y = a_x - b_y = -29,34 \text{ см}.$$

На рис. 90, а изображена эпюра главных секториальных площадей ω , представляющая закон изменения напряжений σ_{ω} от кручения.

Беря интеграл от произведения квадратов ординат этой эпюры по площади F , получим секториальный момент инерции:

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = 18040 \cdot 10^8 \text{ см}^6.$$

На рис. 90, б дана эпюра секториальных статических моментов $S_{\omega}(s)$, характеризующих изменения по сечению дополнительных сдвигающих напряжений τ_{ω} .

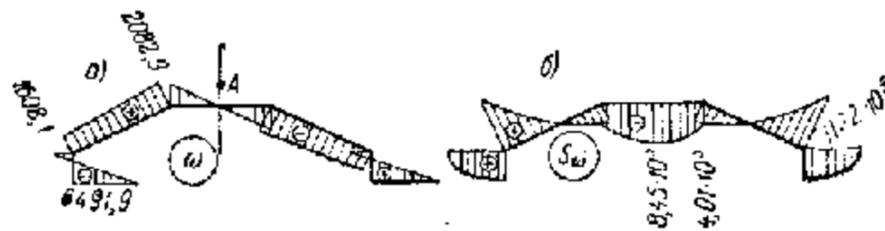


Рис. 90.

Мы имеем теперь все данные для определения дополнительных напряжений (нормальных и касательных) от кручения.

Обозначим через M , Q , q и e соответственно изгибающий момент, поперечную силу, внешнюю равномерно распределенную поперечную нагрузку и эксцентриситет этой нагрузки.

Опираясь на математическую аналогию между изгибом и кручением и пользуясь формулами (9.4), можно написать:

$$B(z) = \frac{m}{q} M(z) = e M(z),$$

$$H_{\omega}(z) = \frac{m}{q} Q(z) = e Q(z).$$

Отсюда получим формулы для напряжений σ_{ω} и τ_{ω} :

$$\sigma_{\omega} = \frac{Me}{J_{\omega}} \omega(s), \quad \tau_{\omega} = - \frac{Qe}{J_{\omega}^{\omega}} S_{\omega}(s).$$

Полные напряжения σ и τ от нагрузки, вызывающей изгиб в вертикальной плоскости и кручение, определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{y}{J_x} + \frac{e\omega}{J_{\omega}} \right) M, \\ \tau &= - \left[\frac{S_x(s)}{J_x} + \frac{eS_{\omega}(s)}{J_{\omega}} \right] \frac{Q}{e}. \end{aligned} \right\} (10.1)$$

Поскольку мы использовали аналогию между изгибом и кручением, формулы (10.1) могут быть применены во всех случаях, когда опорные сечения в отношении изгибных и изгибно-крутильных факторов имеют одинаковые условия. Например, эти формулы справедливы в случае шарнирного закрепления отдельных граней, когда все сечение, будучи закрепленным при наличии жесткой в своей плоскости диафрагмы, может свободно перемещаться из плоскости (демплашироваться). Этими формулами можно также воспользоваться в случае, когда складка в опорных сечениях жестко заделана от поперечных и продольных перемещений.

На рис. 91, а даны эпюры максимальных напряжений σ_{ω} от кручения при нагружении обеих крайних граней рассматриваемой складки равномерной обратно симметричной нагрузкой $q = 100 \text{ кг/м}$. Пролет складки $l = 10 \text{ м}$. Опорные сечения имеют шарнирные закрепления.

На рис. 91, б приведена эпюра σ_x от изгиба той же поперечной нагрузкой при симметричном нагружении.

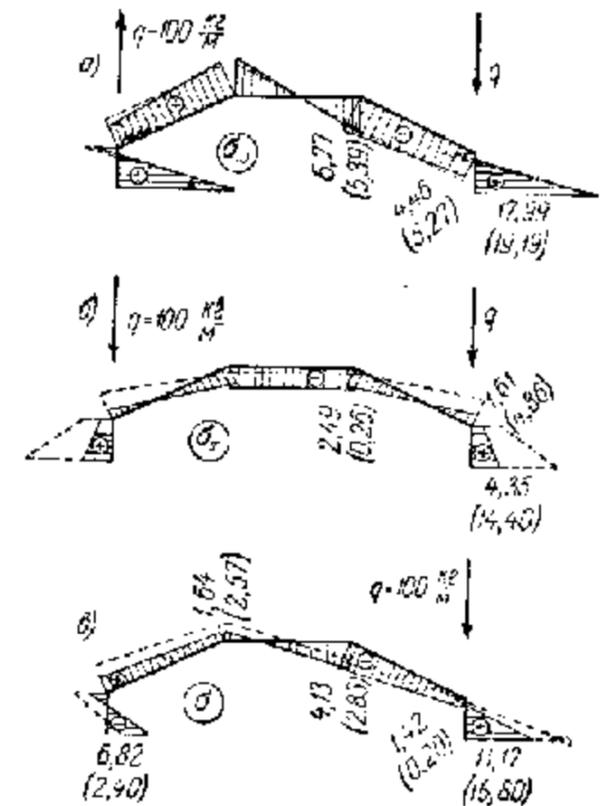


Рис. 91.

На рис. 91, *a* даны полные напряжения $\sigma = \sigma_x + \sigma_{\theta}$, от односторонней нагрузки $q = 100 \text{ кг/м}$, полученные методом наложения эпюр, представленных на рис. 91, *a* и *б*. На всех трех рисунках указаны схемы загрузки. Наибольшие нормальные напряжения как при изгибе, так и при кручении в рассматриваемом случае нагрузки возникают в среднем поперечном сечении. На всех приведенных эпюрах пунктиром показаны напряжения, полученные по более точной теории складчатых оболочек, позволяющей учесть деформации контура сечения [40]. Характерные числовые значения этих напряжений даны в скобках.

Из сравнения сплошных эпюр с пунктирными следует, что деформации контура сечения имеют значительно большее влияние при изгибе в плоскости симметрии, чем при кручении.

Тонкостенные складчатые системы, не усиленные поперечными жесткими ребрами при действии поперечной нагрузки, вызывающей изгиб, следует рассчитывать с учетом деформаций контура сечения. При действии же крутящей нагрузки эти системы с достаточной для практики точностью могут быть рассчитаны по изложенной здесь теории секториальных площадей. Если складчатая система усилена поперечными ребрами, то с увеличением жесткости ребер влияние деформации контура сечения весьма быстро уменьшается. Пунктирные эпюры приближаются к сплошным.

Риблистые складчатые системы, применяемые в тонкостенных железобетонных покрытиях, при действии поперечных нагрузок (симметричных и несимметричных) ведут себя как пространственные тонкостенные сплошные системы, обладающие недеформируемым контуром. Такие системы нужно рассчитывать по изложенной здесь теории, основанной на законе секториальных площадей.

В качестве примера приведем некоторые результаты расчета цилиндрической ребристой деревянной оболочки пролетом $l = 100 \text{ м}$, выстроенной в СССР в 1935 г. [40]*). Поперечное сечение этой оболочки, очерченное по дуге окружности, состоит из участков различной толщины и имеет в верхней (центральной) части ослабление для устройства светового фонаря; сечение имеет одну ось симметрии (рис. 92, *a*). Общий вид оболочки дан на рис. 92, *б*. Криволинейными краями оболочка опирается на жесткие в своей плоскости диафрагмы. Координата центра изгиба a_y и секториальный момент инерции J_{ω} вычисляются по формулам (1.21) и (1.22). Приведем основные геометрические характеристики сечения относительно главных осей:

$$F = 39\,080 \cdot 10^3 \text{ см}^2, \quad J_x = 6120 \cdot 10^8 \text{ см}^4,$$

$$a_x = 0, \quad J_y = 49\,340 \cdot 10^8 \text{ см}^4,$$

$$a_y = -985 \text{ см}, \quad J_{\omega} = 12\,600 \cdot 10^9 \text{ см}^6.$$

*) Конструкция этой оболочки была разработана под руководством профессоров Г. Г. Карженя и М. Е. Когана.

На рис. 93, *a* даны эпюры нормальных напряжений σ_x в среднем поперечном сечении оболочки от изгиба равномерной поперечной на-

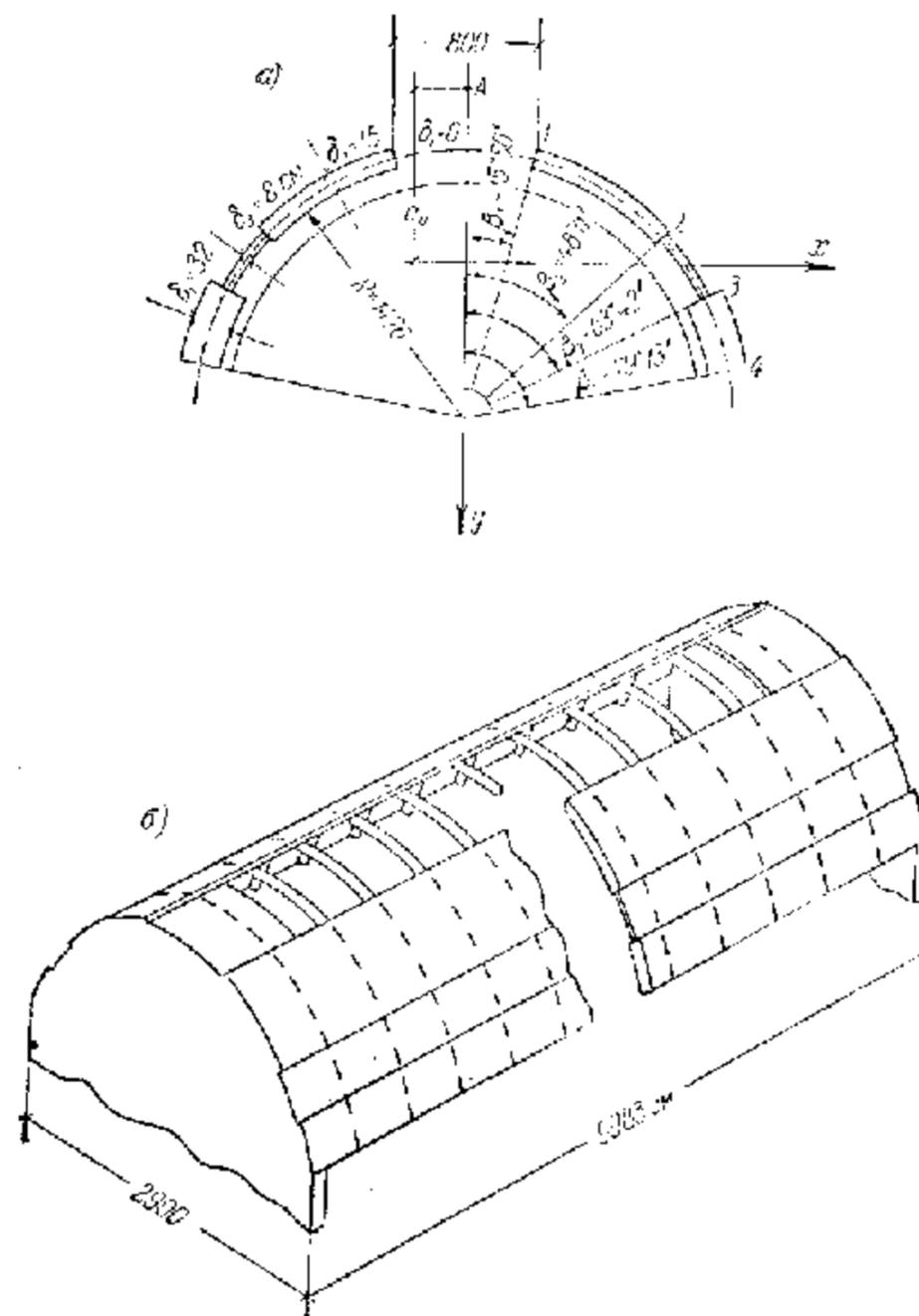


Рис. 92.

грузкой $q = 100 \text{ кг/м}$, действующей симметрично относительно оси симметрии (схема загрузки показана на том же рис. 93).

На рис. 93, *б* даны эпюры напряжений σ_{θ} от вертикальной обратно симметричной нагрузки (схема загрузки показана на этом же рисунке), вызывающей только кручение.

Для случая загрузки одной стороной нагрузкой $q = 100 \text{ кг/м}$ на рис. 93, а даны суммарные эпюры напряжений $\sigma = \sigma_x + \sigma_m$, полученные методом наложения эпюр от изгиба и кручения. Пунктирами на этих эпюрах и цифрами в скобках показаны напряжения, найденные по предложенному автором более точному методу, позволяющему учесть деформации контура сечения [51].

На этом примере мы еще раз убеждаемся в том, что дополнительные напряжения от кручения, возникающие вследствие нецентрального (по отношению к центру изгиба) действия поперечной нагрузки, достигают весьма больших значений.

То обстоятельство, что поперечные сечения оболочки после деформации не остаются плоскими, играет весьма существенную роль в пространственной работе тонкостенных стержней и оболочек.

§ 11. Стержни и оболочки, поперечные сечения которых обладают только одной степенью свободы

1. Приложим нашу теорию к расчету пространственных конструкций типа тонкостенных стержней с поперечными сечениями, обладающими в отношении поперечных перемещений только одной степенью свободы. Мы будем считать, что рассматриваемые конструкции имеют закрепления, исключаящие изгиб таких конструкций как балок. Поперечные сечения при таком закреплении могут только поворачиваться относительно некоторой прямой, представляющей собой,

в общем случае, заданную мгновенную ось вращения. Примером таких конструкций могут служить ребристые цилиндрические и призматические покрытия, по одному продольному краю шарнирно прикрепленные к неподвижной опорной продольной стене и свободные по другому продольному краю.

Рассмотрим в качестве примера тонкостенную пространственную конструкцию типа цилиндрической оболочки открытого профиля, подкрепленную поперечными ребрами и находящуюся под действием заданной поперечной нагрузки. Предположим, что по одному продольному краю оболочка соединена с неподвижной продольной опорной стеной при помощи цилиндрического шарнира, по другому же продольному краю оболочка не имеет никаких закреплений (рис. 94, а). На

поперечных краях оболочки может иметь любые закрепления. Считая профиль оболочки при наличии ребер жестким, мы приходим к выводу, что поперечное сечение оболочки $z = \text{const}$ в отношении перемещений в плоскости этого сечения обладает одной только степенью свободы. Перемещения любой точки сечения могут быть выражены через угол $\theta = \theta(z)$ поворота этого сечения относительно неподвижной точки C . Этот угол, как и ранее, мы считаем положительным, если поперечное сечение $z = \text{const}$ при взгляде на него против направления оси Oz поворачивается по часовой стрелке.

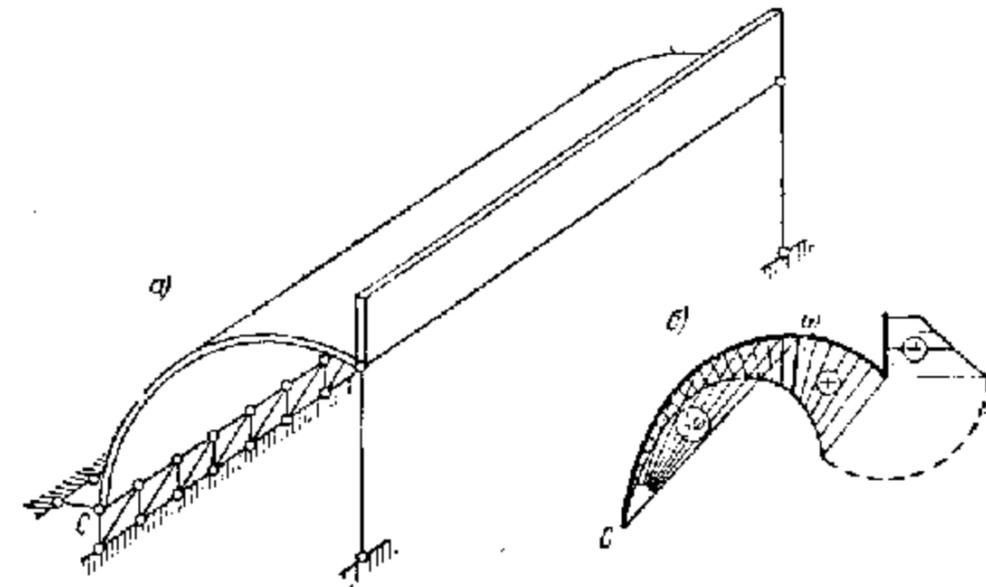


Рис. 94.

Согласно теории тонкостенных стержней деформация кручения сопровождается деформацией сечения. Эта деформация в рассматриваемом случае описывается законом секторных площадей с полюсом в неподвижной точке C . Начало отсчета секторной площади $\omega(s)$ зависит от способа закрепления точек опорного продольного края оболочки в отношении продольных перемещений. Если оболочка по опорному шарнирному краю закреплена также и от продольных перемещений, и, следовательно, этот край не может получить деформации удлинения, то неподвижная точка C поперечного сечения оболочки является также и секторной начальной точкой (рис. 94, б). При описанном здесь способе прикрепления оболочки к опорной стене могут возникать не только нормальные и поперечные силы, но также и действующие в продольном направлении сдвигающие усилия. Эти усилия при действии на оболочку одной только внешней поперечной нагрузки будут пропорциональны секторному статическому моменту (6.11) гл. I:

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF,$$

вычисленному для всего поперечного сечения. Если же продольный край оболочки в каждой своей точке закреплен от перемещений в плоскости поперечного сечения и имеет свободную подвижность в продольном направлении (рис. 95, а), то в этом случае по опорному краю должны обращаться в нуль сдвигающие усилия. Отсюда следует, что при действии на оболочку одной только поперечной нагрузки, равнодействующая продольных нормальных усилий в любом поперечном сечении должна быть равна нулю. Так как равнодействующая пропорциональна секториальному статическому моменту, то начальная секториальная точка C' в случае продольной подвижности опорного края определяется из условия

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = 0.$$

Эпора секториальных площадей для оболочки с продольно-подвижным опорным краем, удовлетворяющая этому условию, показана на рис. 95, б.

Система дифференциальных уравнений равновесия элементарной поперечной полоски, выделенной из стержня-оболочки, в нашем случае сводится к одному дифференциальному уравнению относительно функции угла кручения $\theta(z)$:

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m. \quad (11.1)$$

В этом уравнении угол поворота $\theta(z)$ и внешний погонный крутящий момент $m(z)$ рассматриваются относительно неподвижной в плоскости поперечного сечения точки C , представляющей собой центр вращения сечения $z = \text{const}$. Полюс секториальной площади выбирается в той же точке C . За начало отчета секториальной площади принимается точка C ,

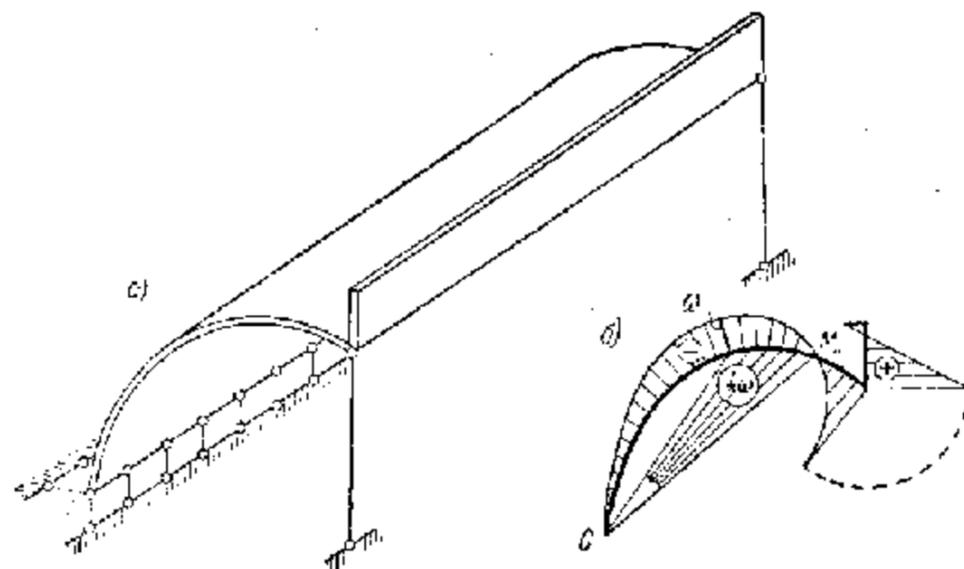


Рис. 95.

если опорный продольный край закреплен от продольных перемещений. Если же опорный край имеет свободную продольную подвижность, то начальная секториальная точка находится из условия обращения в нуль секториального статического момента.

Ранее мы отметили, что для складчатых призматических и цилиндрических систем жесткость при кручении GJ_d можно принять равной нулю. В этом случае уравнение (11.1) примет более простой вид:

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} = m.$$

Определив из этого уравнения функцию кручения $\theta(z)$ при соответствующих граничных условиях на поперечных краях, мы сможем найти продольные нормальные и касательные напряжения по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z, s) &= \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s), \\ \tau(z, s) &= -\frac{H_{\omega}(z)}{J_{\omega}^2(s)} S_{\omega}(s). \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Для вычисления этих напряжений можно также воспользоваться аналогией между изгибом и кручением. В этом случае входящие в формулы (11.2) бимомент $B(z)$ и изгибно-крутящий момент $H_{\omega}(z)$ определяются как соответствующие им в теории балок изгибающий момент и поперечная сила с заменой поперечной погонной нагрузки $q(z)$ на внешний погонный крутящий момент $m(z) = q(z)e$. Здесь e — эксцентриситет приложения нагрузки $q(z)$ относительно опорной продольной линии.

Если оболочка, находящаяся под действием поперечной нагрузки, представляет собой многопролетную неразрезную конструкцию, опирающуюся на жесткие в своих плоскостях поперечные диафрагмы и имеющую по опорному продольному краю шарнирное закрепление, то, пользуясь уравнением трех бимоментов (9.5), нетрудно получить решение задачи и в этом случае.

2. Рассмотрим более сложные системы с одной степенью свободы для поперечных перемещений сечения $z = \text{const}$. Такая система, состоящая в поперечном сечении из двух жестких дисков, шарнирно-соединенных между собой, приведена на рис. 96. Она состоит из цилиндрической оболочки и призматической складки, которые соединены между собой. Мы по-прежнему будем считать, что на систему действует только поперечная нагрузка, и система может иметь любые закрепления на поперечных краях.

Предположим сначала, что шарнирно-опертый продольный край CC закреплен от продольных перемещений, шарнирно-опертый край C_2C_2 имеет свободную продольную подвижность, средний же цилиндрический шарнир C_1C_1 устраивает взаимные продольные перемещения складки и оболочки. При таком закреплении продольных краев возникающие в опорном крае CC сдвигающие усилия воспринимаются неподвижной опорной стеной,

Для решения задачи нам прежде всего необходимо выяснить закон изменения по поперечному сечению системы продольных перемещений, возникающих вследствие деформации сечения.

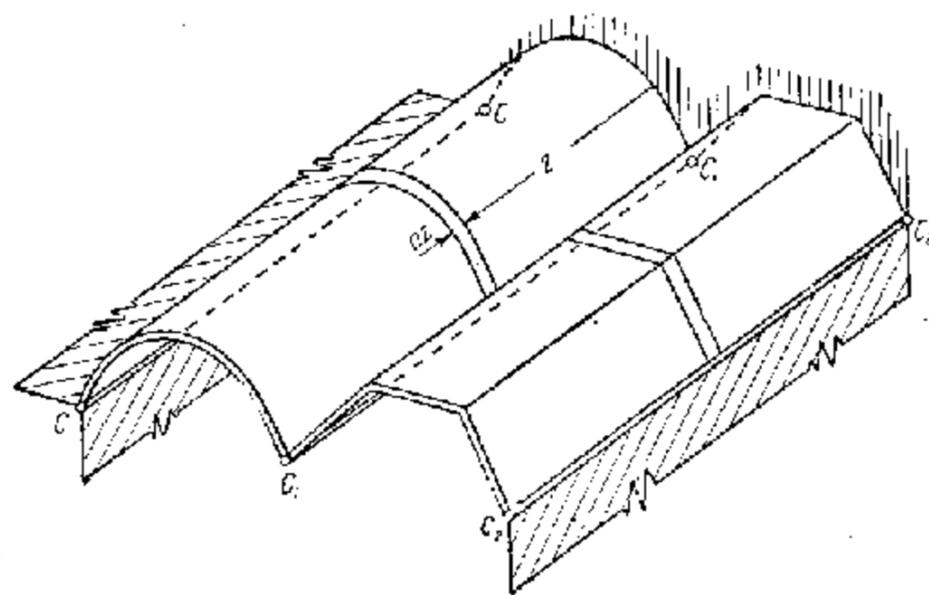


Рис. 96.

Так как продольный край CC лишен продольной подвижности, то выберем полюс и начало отсчета секториальной площади оболочки в неподвижной точке C , представляющей собой центр вращения поперечного сечения оболочки. Полюс же секториальной площади для складки возьмем в центре вращения складки в точке C_2 (рис. 97, а).

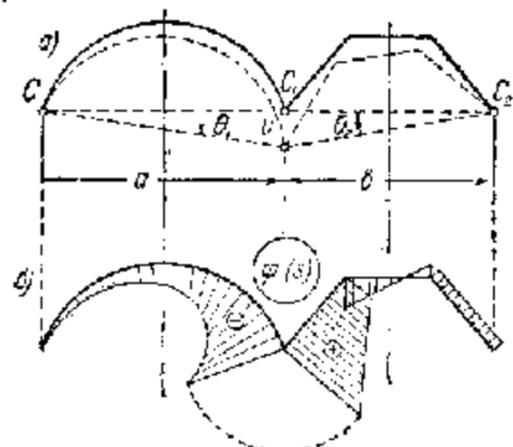


Рис. 97.

Поскольку наша система обладает в плоскости поперечного сечения одной степенью свободы, эюры секториальных площадей складки и оболочки связаны дополнительным условием и, следовательно, угол поворота поперечного сечения складки θ_2 определяется углом поворота поперечного сечения оболочки θ_1 (рис. 97, а). В дальнейшем мы за обобщенное поперечное перемещение, через которое выражается поперечное перемещение

любой точки сечения $z = \text{const}$ нашей системы, примем прогиб v среднего цилиндрического шарнира. При этом для углов поворота θ_1 и θ_2 будем иметь следующие очевидные формулы:

$$\theta_1 = \frac{v}{a}, \quad \theta_2 = \frac{v}{b},$$

где a и b представляют собой хорды профилей оболочки и складки соответственно.

Определив зависимость между углами поворота θ_1 и θ_2 , нетрудно построить эюру продольных перемещений в поперечном сечении нашей системы. Эта эюра на части профиля, принадлежащей оболочке, будет меняться по закону $\varphi_1(s) = \frac{\omega_1(s)}{a}$, где $\omega_1(s)$ — секториальная площадь, рассматриваемая в пределах оболочки; полюс и начало отсчета этой площади находятся в точке C . Эюра продольных перемещений на части профиля, принадлежащей складке, будет меняться по закону $\varphi_2(s) = \frac{\omega_2(s)}{b}$, где $\omega_2(s)$ — эюра секториальной площади для складки; полюс этой площади находится в точке C_2 , начало отсчета — точка M (рис. 97, б) — выбирается из условия равенства ординат эюр φ_1 и φ_2 в среднем цилиндрическом шарнире C_1 , поскольку оболочка и складка на продольной линии C_1C_1 не имеют взаимной продольной подвижности. Закон распределения продольных перемещений $\varphi(s)$ всей системы в целом представлен на рис. 97, б*).

Перейдем теперь к составлению дифференциального уравнения равновесия элементарной поперечной полоски, выделенной из нашей системы. Для этого мы применим принцип возможных перемещений Лагранжа. Согласно этому принципу сумма работ всех сил, действующих на нашу элементарную поперечную полоску, на любом возможном для этой полоски перемещении равна нулю.

Примем за виртуальное перемещение нашей полоски единичный прогиб среднего цилиндрического шарнира $v = 1$. Составим выражение работы на этом прогибе сдвигающих усилий, представляющих собою действие отброшенных частей системы на нашу поперечную полоску единичной ширины:

$$\begin{aligned} A &= \int_{S_1} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial z} \theta_1 h_1 ds + \int_{S_2} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial z} \theta_2 h_2 ds = \\ &= \int_{S_1} \frac{1}{a} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial z} d\omega_1 + \int_{S_2} \frac{1}{b} \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial z} d\omega_2. \end{aligned} \quad (11.3)$$

В этом выражении первый интеграл распространяется на профиль оболочки, второй — на профиль складки, $h_1(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки C на касательную к оболочке в данной точке профильной линии, $h_2(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного из секториального центра складки (точки M) на касательную к профилю складки в данной точке.

*) Обращаем внимание на то, что положительная секториальная площадь соответствует одинаковым направлениям вращения подвижного радиуса вектора и отсчета угла закручивания θ .

Преобразуем выражение (11.3) интегрировав по частям:

$$A = \left[\frac{1}{a} \frac{d(\tau\delta)}{dz} \omega_1 \right]_{C_1} - \int_a^1 \frac{d^2(\tau\delta)}{ds^2} \omega_1 ds + \\ + \left[\frac{1}{b} \frac{d(\tau\delta)}{dz} \omega_2 \right]_{C_2} - \int_b^1 \frac{d^2(\tau\delta)}{ds^2} \omega_2 ds. \quad (11.4)$$

В этом выражении проинтегрированные члены исчезают, так как в точке C секториальная площадь ω_1 равна нулю, в точке C_1 распределение продольных перемещений непрерывно, а в точке C_2 отсутствуют продольные сдвигающие усилия.

С помощью формулы (5.10) гл. I преобразуем виртуальную работу сдвигающих усилий (11.4) к следующему виду:

$$A = \int \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \omega_1 dF + \int \frac{1}{b} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \omega_2 dF. \quad (11.5)$$

Так как на части профиля, принадлежащей цилиндрической оболочке, продольные нормальные напряжения меняются по закону

$$\sigma(z, s) = -E\theta_1^c(z) \omega_1(s),$$

а на части профиля, принадлежащей призматической оболочке, по закону

$$\sigma(z, s) = -E\theta_2^c(z) \omega_2(s),$$

то, подставляя эти выражения в формулу (11.5), окончательно получим

$$A = -EJ_\varphi \varphi^{IV}(z), \quad (11.6)$$

где постоянная J_φ определяется по формуле

$$J_\varphi = \int \varphi^2 ds = \int \frac{1}{a^2} \omega_1^2 dF + \int \frac{1}{b^2} \omega_2^2 dF.$$

Ранее мы отметили, что для призматических и цилиндрических систем, обладающих недеформируемым контуром поперечного сечения, крутильную жесткость GJ_d можно полагать равной нулю. Поэтому нам остается лишь определить работу внешней поперечной нагрузки, приходящейся на выделенную поперечную полоску единичной ширины, на прогибе $v=1$ среднего цилиндрического шарнира.

Предположим, что на эту полоску действует вертикальная нагрузка, состоящая как из сосредоточенных, так и из распределенных нагрузок. Мы будем считать, что в продольном направлении любая из этих нагрузок представляет собой известную функцию от z (рис. 98).

Для виртуальной работы этой нагрузки, которую мы обозначим через $m(z)$, получим следующее выражение:

$$m(z) = \frac{1}{a} \left[\sum_{i=1}^n p_i(z) s_i + \int p(z, s) ds \right] + \\ + \frac{1}{b} \left[\sum_{j=1}^m p'_j(z) s'_j + \int p'(z, s') ds' \right]. \quad (11.7)$$

В этой формуле $p_i(z)$ — внешние погонные нагрузки, сосредоточенные в поперечном направлении и приложенные в точках s_i поперечного сечения $z = \text{const}$ оболочки (рис. 98); $p(z, s)$ — распределенная в пределах оболочки внешняя поверхностная нагрузка (координата s отсчитывается от неподвижной точки C); $p'_j(z)$ — внешние погонные нагрузки, сосредоточенные в поперечном направлении и приложенные в точках s'_j поперечного сечения $z = \text{const}$ складки; $p'(z, s')$ — распределенная в пределах складки внешняя поверхностная нагрузка (координата s' отсчитывается от точки C_2).

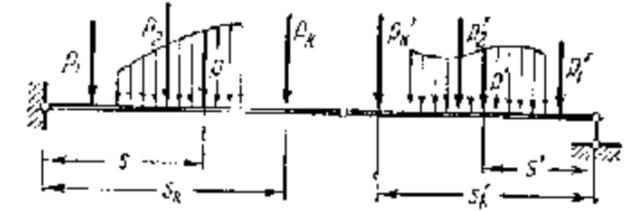


Рис. 98.

Складывая выражения (11.6) и (11.7), получим следующее дифференциальное уравнение относительно обобщенного прогиба $v(z)$:

$$EJ_\varphi v^{IV}(z) = m(z). \quad (11.8)$$

Определив из этого уравнения искомую функцию $v(z)$ при заданных граничных условиях на поперечных краях, мы по формулам (11.2) сможем найти распределение продольных нормальных и касательных напряжений в нашей системе. При этом бимомент B определится по формуле:

$$B = -EJ_\varphi v''(z).$$

При решении нашей задачи мы положили крутильную жесткость GJ_d равной нулю. Если же поперечные размеры нашей системы таковы, что необходимо учитывать в сечении $z = \text{const}$ крутящий момент H_k , то к левой части уравнения (11.8) нужно добавить слагаемое, выражающее виртуальную работу крутящих моментов системы, действующих на поперечную полоску единичной ширины сечения, на прогибе $v=1$. Для этой работы мы получим следующее значение:

$$A' = G \left(\frac{1}{a^2} J_d + \frac{1}{b^2} J_d' \right) v''(z) = GJ_d v''(z), \quad (11.9)$$

где J_d и J_d' представляют собой соответственно моменты инерции при чистом кручении цилиндрической и складчатой оболочек нашей системы.

Дифференциальное уравнение (11.8) примет вид:

$$EJ_\varphi v^{IV}(z) - GJ_d v''(z) = m(z). \quad (11.10)$$

3. Остановимся теперь на иных видах закрепления продольных краев рассматриваемой системы. Заметим, что все наши рассуждения останутся без изменений, за исключением определения начальных секториальных точек для оболочки и складки.

Так, например, когда оба шарнирно-опертых продольных края имеют свободную продольную подвижность, а средний цилиндрический шарнир устраняет взаимные продольные перемещения складки и оболочки, то начальную секториальную точку для части профиля, принадлежащего оболочке, мы должны будем выбрать из условия

$$\int \varphi ds = 0,$$

где интеграл распространяется на все поперечное сечение нашей системы. При этом эшора $\varphi(s)$ должна быть непрерывна в точке C_1 (рис. 99, а).

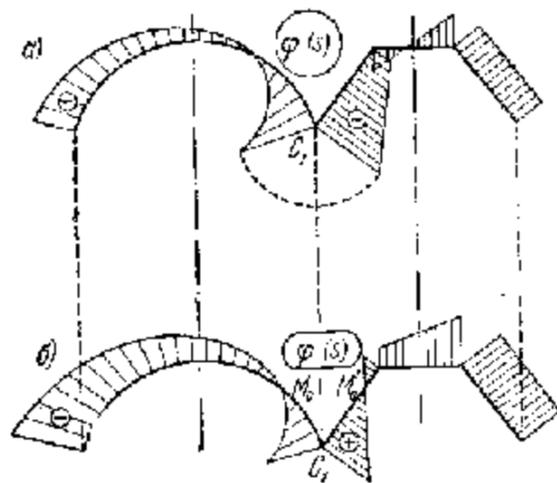


Рис. 99.

Если же предположить, что не только продольные края, но и средний цилиндрический шарнир не воспринимает сдвигающих усилий (складка и оболочка имеют взаимную продольную подвижность по линии C_1C_1), то в этом случае начальные секториальные точки для частей профиля CC_1 и C_1C_2 найдутся соответственно из условий:

$$\int \varphi_1 ds = 0, \quad \int \varphi_2 ds = 0.$$

Здесь первый интеграл рассматривается в пределах цилиндра, второй — в пределах складки. Очевидно, что при этом продольные перемещения, изменяющиеся в поперечном сечении по закону $\varphi(s)$, на продольной линии C_1C_1 терпят разрыв непрерывности (рис. 99, б).

4. Так как уравнение (11.10), или в более простом случае (11.8), по своему виду совпадает с соответствующим уравнением теории тонкостенных стержней, то отсюда следует, что положенные выше методы расчета таких стержней, как однопролетных, так и многопролетных, целиком распространяются и на пространственные системы рассматриваемого здесь типа. В частности, с успехом могут быть использованы методы математических аналогий с классической теорией изгиба балок, изложенные в § 9. Надо только иметь в виду, что применительно к сложным тонкостенным системам, обладающим в поперечном сечении одной степенью свободы, под основными искомыми геометрическими и статическими величинами следует понимать обобщенные перемещения и обобщенные внутренние силы, отвечающие принятому для данной системы закону распределения перемещений точек в поперечном сечении и закону деформации сечения. Поясним сказанное примером. Предположим, что оболочка, представленная на рис. 96, на поперечных краях имеет простое опирание, при котором на этих краях обращаются в нуль прогибы и продольные нормальные напряжения. Пусть такая

оболочка находится под действием равномерно распределенной по длине погонной нагрузки $q = \text{const}$. При решении этой задачи мы можем на основании методов математической аналогии воспользоваться готовыми формулами (5.9) и (5.10), заменив в этих формулах θ и θ' соответственно на v и v' , J_ω на J_φ и определив величины J_a и m из формул (11.9) и (11.7).

б. Если представленная на рис. 96 система имеет на линии сопряжения двух оболочек не шарнирное, а жесткое соединение, то деформация такой системы произойдет вследствие деформации изгиба оболочек в поперечном направлении. Такой деформации будут соответствовать упругие поперечные изгибающие моменты, играющие существенную роль в нашей теории цилиндрических и призматических оболочек средней длины [51]. Сохраняя для такой системы принятый выше закон деформации сечения и раскрывая дополнительное условие непрерывности угловой деформации в промежуточной точке C_1 , получим для обобщенного прогиба $v = v(x)$ уравнение:

$$EJ_\varphi v^{IV} - GJ_a v'' - kv = m. \quad (11.11)$$

Здесь дополнительная упругая характеристика k вычисляется по формуле:

$$k = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \frac{1}{\delta_{11}},$$

в которой δ_{11} — взаимное угловое перемещение в шарнире C_1 от единичного момента. Это перемещение определяется обычными методами строительной механики для рамы-полоски единичной ширины.

Уравнение (11.11) приводится к уравнению предложенной нами общей технической теории балок, пластинок и оболочек в упругой среде с двумя обобщенными упругими характеристиками:

$$v^{IV} - 2r^2 v'' + s^2 v = \frac{1}{EJ_\varphi} m.$$

Общее решение этого уравнения в фундаментальных функциях метода начальных параметров дано в работе [51].

§ 12. Изгибное кручение цилиндрической оболочки с длинным прямоугольным вырезом (приближенное решение)

1. Рассмотрим конструкцию типа цилиндрической или призматической оболочки, ослабленную в средней своей части одним или несколькими достаточно длинными прямоугольными вырезами. Будем считать, что оболочка подкреплена в продольном направлении стрингерами и пластинками и в поперечном — шпангоутами. К такого рода конструкциям могут быть отнесены: корпус фюзеляжа самолета, корпус корабля, покрытие типа свода-оболочки, имеющее в верхней своей части световые проемы. Не уменьшая в принципиальной своей части

общности излагаемого ниже метода, будем считать, что рассматриваемая оболочка как пространственная система имеет две плоскости симметрии: продольную вертикальную и поперечную также вертикальную. Такая конструкция при наличии одного выреза будет по длине состоять из трех частей: одной средней оболочки открытого профиля длиной $2l$ и двух крайних оболочек, каждая — закрытого профиля длиной a (рис. 100).

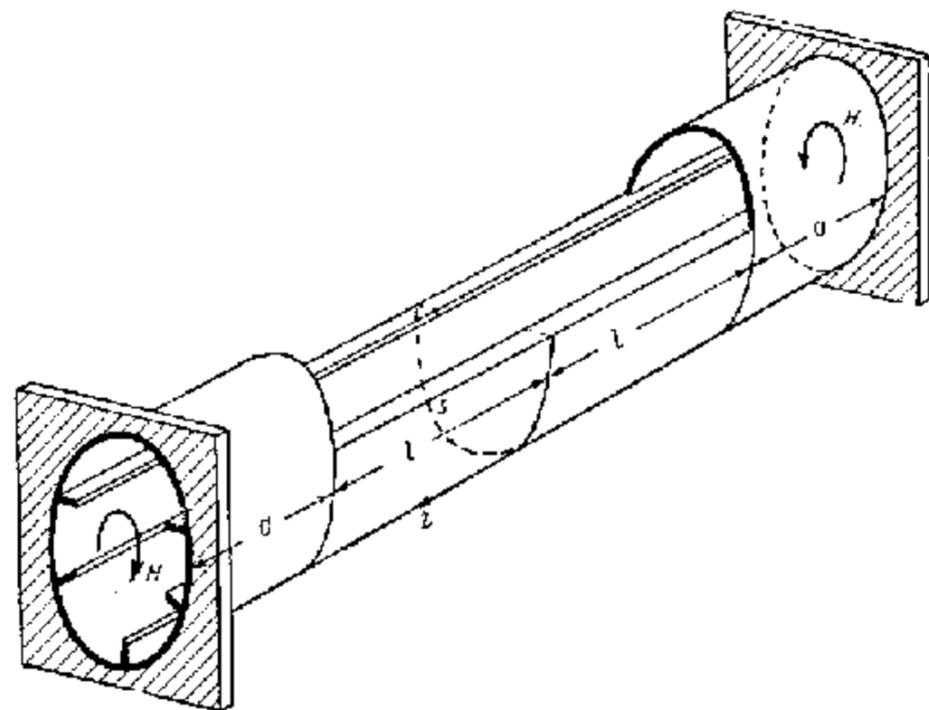


Рис. 100.

Продольную координату z условимся отсчитывать от среднего поперечного сечения, совпадающего с плоскостью симметрии.

Предположим, что оболочка на поперечных краях $z = \pm(l + a)$ имеет жесткие диафрагмы, устраняющие на этих краях деформацию контура и депланацию сечения. Такие диафрагмы вместе с промежуточными шпангоутами приближают рассматриваемую оболочку к пространственной системе типа тонкостенного стержня, переменного по длине сечения.

2. Пусть оболочка находится под действием крутящих моментов H , приложенных в плоскостях опорных сечений. Такая нагрузка вызовет в оболочке деформацию изгибного кручения, сопровождающуюся депланацией поперечных сечений.

На среднем участке (профиль оболочки показан на рис. 101, а); деформация изгибного кручения описывается законом секториальных площадей, отсчитываемых от точки профиля, лежащей на оси симметрии. Полюсом этих площадей служит точка A , лежащая также на оси симметрии. Положение точки A определяется из условия ортогональности функций $x = x(s)$ и $\omega = \omega(s)$.

Эпюра секториальных площадей распространяется на все участки профиля средней части стержня, в том числе на продольные стрингеры и пластинки (рис. 101, б); геометрические характеристики сечения этой части стержня вычисляются в главных координатах также для всех участков профиля, как изложено в п. 7 § 1.

Все основные расчетные величины изгибного кручения на участке $-l \leq z \leq l$ выреза могут быть определены по общим формулам метода

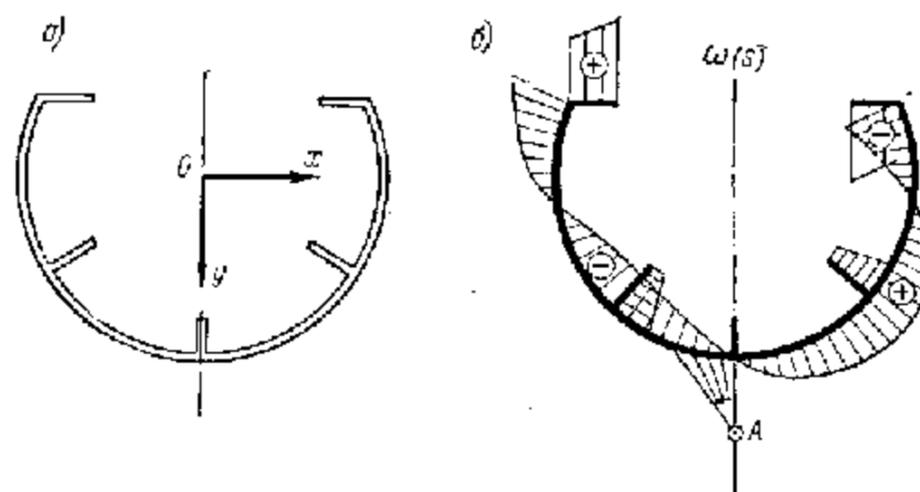


Рис. 101.

начальных параметров, приведенных в табл. 3 § 3. Полагая в начальном сечении $z = 0$, $\theta_0 = 0$, $B_0 = 0$ и принимая во внимание, что крутящий момент H в рассматриваемом случае остается постоянным по длине стержня, получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0' \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{H}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ \theta' &= \theta_0' \operatorname{ch} \frac{k}{l} z + \frac{H}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ \frac{k}{l} B &= -\theta_0' GJ_d \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + H \operatorname{sh} \frac{k}{l} z. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Здесь остается неопределенной величина θ_0' , характеризующая степень абсолютной депланации в начальном сечении $z = 0$.

Таким образом, функции $\theta(z)$, $\theta'(z)$, $B(z)$ определяются на среднем участке с точностью до произвольного параметра θ_0' формулами (12.1) при заданной обобщенной характеристике стержня, определяемой по формуле (2.2) и заданном крутящем моменте H . Продольное нормальное напряжение $\sigma = \sigma(z, s)$ и продольное перемещение $u = u(z, s)$ при изгибном кручении, вызванном опорными крутящими моментами, определяются из формул (3.16) и (5.6) гл. I:

$$u = -\theta' \omega, \quad \sigma = -E\theta'' \omega. \quad (12.2)$$

На каждом из крайних участков рассматриваемая конструкция представляет собою замкнутую цилиндрическую короткую оболочку. Такую оболочку при наличии в торцовом сечении жесткой диафрагмы, устраняющей как деформацию контура, так и деформацию сечения, в случае кручения можно рассматривать как безмоментную систему, т. е. считать, что по толщине стенки нормальные и касательные напряжения распределяются равномерно. В этой оболочке при отсутствии поверхностной нагрузки нормальные напряжения, относительные к площадкам продольного сечения, будут равны нулю*).

Сдвигающие усилия T могут быть определены приближенно по формуле чистого кручения. Считая эти усилия постоянными (не зависящими от координат z и s) и приравнявая в каком-либо поперечном сечении крутящий момент от этих сил заданному крутящему моменту оболочки H , получим

$$\oint Th ds = H, \quad (12.3)$$

где h — перпендикуляр на направление касательной к линии профиля. Из формулы (12.3) имеем:

$$T = \frac{H}{\Omega},$$

где Ω — удвоенная площадь, ограниченная контуром профиля оболочки. Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial(\sigma z)}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

можно получить простую формулу для продольного нормального напряжения $\sigma = \sigma(s)$, показывающую, что это напряжение не зависит от координаты z .

Из закона Гука $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial z}$ получаем формулу для продольного перемещения $u = u(z, s)$ при жестком закреплении опорного сечения оболочки $z = l + a$:

$$u = - \frac{\sigma(s)(l + a - z)}{E}. \quad (12.4)$$

Знак минус в формуле показывает, что на участке $l \leq z \leq l + a$ перемещение u при положительном растягивающем напряжении и при неподвижности края $z = l + a$ будет иметь отрицательное значение, показывающее, что точка перемещается против направления положительной оси Oz .

*). Равенство нулю этих напряжений нетрудно получить, составив сумму проекций на нормаль к поверхности всех сил, приложенных к бесконечно малому элементу поверхности $dz ds$.

Из формулы (12.4) при $z = l$ получаем

$$\sigma = - \frac{E}{a} u. \quad (12.5)$$

Этой формулой приближенно устанавливается закон пропорциональности между напряжениями σ и перемещениями u в точках края, примыкающих к средней оболочке. Формула (12.5) напоминает гипотезу Вилкаса в элементарной теории изгиба балки на упругом основании.

Имея формулы (12.1), (12.2), (12.4), мы можем раскрыть условие упругого сопряжения оболочек в плоскости их контакта $z = l$. Для продольных перемещений условие непрерывности в точках линии $z = l$ на участке контакта приводит к уравнению

$$u_k = u_c,$$

где u_k и u_c — продольные перемещения, относящиеся соответственно к крайней и средней оболочкам.

Определяя в уравнении (12.5) u_k по формуле (12.2), получим

$$\sigma_k = \frac{EY\omega}{a}. \quad (12.6)$$

Выделим теперь в окрестности контактной (пограничной) линии $z = l$ сколь угодно узкую поперечную полосу и приложим к этой полоске на участке контакта продольные нормальные усилия $\sigma_k \delta_k$ и $\sigma_c \delta_c$, действующие соответственно со стороны крайней и средней оболочек.

В соответствии с основными положениями теории тонкостенных стержней, вытекающими из вариационного метода и закона секториальных площадей, мы должны условие равновесия элементарной поперечной полоски в зоне контакта представить в виде уравнения работ всех продольных сил, приложенных к полоске на возможных для этой полоски перемещениях, определяемых при изгибом кручением законом секториальной деформации. Это условие имеет вид:

$$\int_F (\sigma_c \delta_c - \sigma_k \delta_k) \omega ds = 0, \quad (12.7)$$

где δ_k и δ_c — толщины элементов оболочки соответственно на крайнем и среднем участках.

Подставляя в уравнение (12.7) напряжения, определяемые при $z = l$ по формулам (12.2) и (12.6) и делая соответствующие преобразования, будем иметь:

$$\theta'' - \frac{Y}{a} \theta' = 0, \quad (12.8)$$

Входящая в это уравнение безразмерная величина ν вычисляется по формуле

$$\nu = \frac{\int_{F_k} \omega^2 dF_k}{\int_{F_0} \omega^2 dF_0} = \frac{J_{\omega k}}{J_{\omega 0}}.$$

Здесь числитель представляет собой секторный бимомент инерции $J_{\omega k}$, относящийся к крайней оболочке. Этот бимомент следует вычислять для сечения на участке контакта крайней оболочки со средней с учетом площадей пластинок и стрингеров крайней оболочки. Величина, стоящая в знаменателе, определяется как секторный бимомент инерции профиля, относящегося к средней оболочке. Если поперечные сечения крайней и промежуточной оболочек таковы, что их бимоменты инерции $J_{\omega k}$ и $J_{\omega 0}$ на участке сопряжения между собой равны, то $\nu = 1$.

Раскрывая обобщенное граничное условие (12.8) при помощи формул (12.1), в которых следует положить $z = l$ и принимая во внимание формулу (2.2), после несложных преобразований получим

$$\theta'_0 = \frac{Hl^2}{EJ_{\omega} k^2} (1 - k_1 \nu),$$

где безразмерный коэффициент k_1 вычисляется по формуле

$$k_1 = \frac{1}{a \left(\frac{k}{l} \operatorname{sh} k + \frac{\nu}{a} \operatorname{ch} k \right)}. \quad (12.9)$$

Подставляя теперь найденную величину θ'_0 в первую из формул (12.1), получим

$$\theta(z) = \frac{Hl^2}{EJ_{\omega} k^2} \left(z - k_1 \nu \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right). \quad (12.10)$$

Этой общей формулой определяется угол кручения оболочки на среднем участке в любом поперечном сечении $z = \text{const}$.

Формула для бимоментов (2.5) на этом участке будет иметь вид:

$$B = -EJ_{\omega} \theta' = Hk_1 \nu \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z.$$

Из этой формулы видно, что бимомент принимает наибольшее значение при $z = l$, т. е. на линии сопряжения средней оболочки с крайней. Эпюры бимоментов, как и эпюры углов закручивания, на среднем участке $l \gg z \gg -l$ относительно начала отсчета координаты z будут косинусоидальными.

После определения бимоментов нормальные напряжения в рассматриваемом случае изгибного кручения оболочки вычисляются по одночленной формуле

$$\sigma = \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s).$$

Эти напряжения по абсолютной величине достигают максимальных значений в опорных для средней оболочки сечениях $z = \pm l$ в тех точках, для которых ординаты главной секторной площади $\omega(s)$, принимают наибольшие значения (рис. 101, б).

3. Приведенные выше формулы для угла кручения и бимоменты получены с учетом жесткости GJ_d чистого кручения оболочки на открытом участке, т. е. с учетом, как отмечалось уже неоднократно ранее, неравномерного распределения касательных напряжений по толщине стенки оболочки. Исследования показывают, что для тонкой открытой оболочки фактор жесткости чистого кручения имеет второстепенное значение. Для такой оболочки эту жесткость можно считать равной нулю, что будет равносильно допущению о том, что касательные напряжения по толщине стенки распределяются равномерно.

Формулы для открытой оболочки, обладающей нулевой жесткостью при чистом кручении, могут быть получены из приведенных выше более общих формул путем предельного перехода.

Выведем, например, формулу для угла закручивания $\theta(z)$. Полагая, что при $GJ_d = 0$ коэффициент k также равен нулю, разлагая гиперболические функции в ряд и ограничиваясь в этих рядах членами до второго порядка малости включительно, из выражений (12.9) и (12.10) получим:

$$k_1 = \frac{1}{\nu \left[1 + \frac{\alpha k^2}{\nu} \left(\frac{1}{l} + \frac{\nu}{2a} \right) \right]} = \frac{1}{\nu} \left[1 - \frac{\alpha k^2}{\nu} \left(\frac{1}{l} + \frac{\nu}{2a} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \theta(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Hl^2}{EJ_{\omega} k^2} \left\{ z - \left[1 - \frac{\alpha k^2}{\nu} \left(\frac{1}{l} + \frac{\nu}{2a} \right) \right] \left(1 + \frac{k^2 z^2}{6l^2} \right) z \right\} = \\ &= \frac{Hl^2}{EJ_{\omega}} \left[\frac{a}{\nu} \left(\frac{1}{l} + \frac{\nu}{2a} \right) - \frac{z^2}{6l^2} \right] z. \end{aligned}$$

Бимомент $B(z)$ в этом частном случае будет иметь вид:

$$B(z) = -EJ_{\omega} \theta'(z) = Hz.$$

§ 13. Экспериментальное подтверждение теории тонкостенных стержней

В лаборатории строительной механики ЦНИИС в 1938—39 г. были проведены эксперименты над металлическими тонкостенными балками открытого сечения с целью проверки правильности предложенной автором четырехчленной формулы (8.5) гл. I для нормальных напряжений при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_y} x + \frac{M_y}{J_x} y + \frac{B}{J_{\omega}} \omega.$$

Рассмотрим результаты испытаний сварной балки П-образного сечения при совместном действии изгиба и кручения. Балка была изготовлена из листовой стали марки Ст. 3 толщиной $\delta = 5$ мм, пролетом $l = 2700$ мм. Благодаря специально изготовленным опорным частям и отсутствию жестких, силовых диафрагм, обеспечивалась возможность поворота сечения относительно вертикальной и горизонтальной осей его, а также свободных продольных перемещений отдельных точек сечения (деформация сечения) и исключалась возможность возникновения угла закручивания на опорах. Поперечная нагрузка прикладывалась по середине пролета центрально и с разными эксцентриситетами относительно центра изгиба.

Измерительные приборы (рычажные тензометры) были поставлены в двух сечениях по длине образца, на расстоянии 101 см от опор. По контуру каждого сечения было поставлено по пятнадцать приборов. По ширине каждого из трех основных элементов балки было расположено по четыре тензометра. Показания тензометров дали возможность выявить закон распределения напряжений по ширине каждого элемента и по сечению в целом.

Физические характеристики материала образца: модуль продольной упругости E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ — были определены заранее лабораторией испытания материалов МГУ. Величины их следующие:

$$E = 2,15 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad G = 0,815 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad \mu = 0,334.$$

Измеренные деформации были обработаны по способу наименьших квадратов и разложены на четыре составляющие, соответствующие четырем видам работы балки: вертикальный изгиб и кручение (основные напряжения), горизонтальный изгиб и продольное растяжение (дополнительные напряжения). На рис. 102 показаны напряжения по сечению образца для центрального и трех случаев нецентрального приложения нагрузок с эксцентриситетами $e = 2,29$ см; $e = 4,66$ см и $e = 6,82$ см. На графиках нанесены:

- результаты, полученные из эксперимента;
- результаты, полученные после обработки экспериментальных данных способом наименьших квадратов;
- напряжения, полученные теоретическим расчетом.

Достаточно хорошее совпадение экспериментальных и теоретических кривых свидетельствует о том, что при совместном действии изгиба и кручения нормальные напряжения в поперечном сечении тонкостенных стержней-балок распределяются по закону секторных площадей.

Желающих подробнее ознакомиться с постановкой самих экспериментов и их результатами отсылаем к опубликованным в печати материалам [27, 28].

Кроме обработки результатов экспериментов, проведенных непосредственно в лаборатории ЦНИПСа, с той же целью были обработаны по

предложенной нами четырехчленной формуле эксперименты, проведенные Бахом в 1909.—10 г. [211].

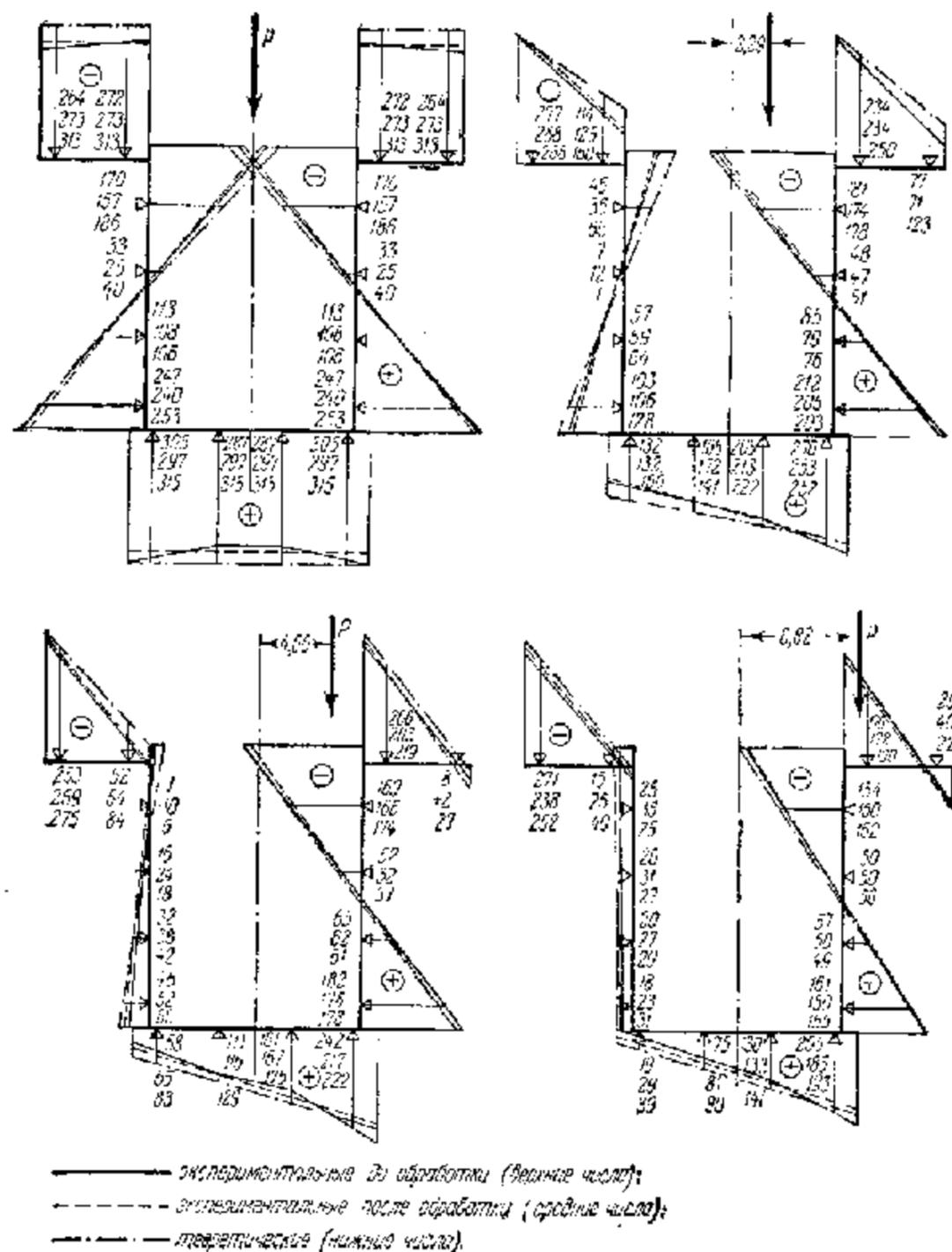


Рис. 102.

Производя опыты над металлической балкой корытного сечения (швеллер, рис. 103, а), Бах установил, что поперечная нагрузка, действующая перпендикулярно к плоскости симметрии швеллера и прохо-

дящая через центр тяжести его, наряду с деформациями изгиба вызывает также и деформации кручения. Деформации удлинений четырех крайних волокон швеллера при произвольном положении нагрузки не следуют закону плоских сечений.

При действии поперечной нагрузки в плоскости стенки швеллера (рис. 103, б) деформации от кручения в опытах Баха оказались значи-

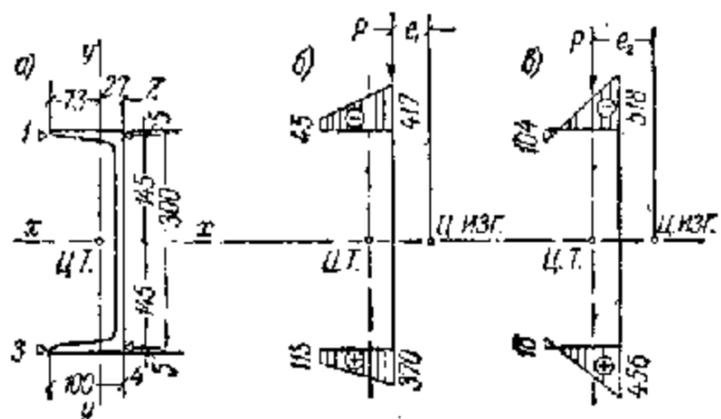


Рис. 103.

тельно меньше, чем в случае приложения нагрузки в центре тяжести сечения (рис. 103, в) (деформации удлинения в стенке швеллера не замерялись).

Обнаружив опытным путем отклонения от закона плоских сечений при действии поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, Бах, однако, не

дал исчерпывающего объяснения этому явлению, объяснив его несимметричностью профиля.

Результаты опытов Баха, пересчитанные для напряжений в $кг/см^2$, приведены в табл. 21. Испытания I относятся к случаю, когда нагрузка проходит в срединной плоскости стенки швеллера (рис. 103, б); испытания II — к случаю, когда нагрузка проходит через центр тяжести сечения (рис. 103, в). Для сравнения в этой же таблице приведены данные для напряжений, полученные по исследованиям Вебера и по теории автора.

Таблица 21

Испытания	I				II			
	1	2	3	4	1	2	3	4
По Баху	205,7	-108,7	-205,7	+108,7	+357,9	-189,0	-357,9	+189,0
По Веберу	203,0	-123,0	-200,0	+123,0	+337,0	-207,0	-337,0	+207,0
По теории автора	+201,0	-106,2	-201,0	+106,2	+337,0	-178,0	-337,0	+178,0

Хорошее совпадение теоретических результатов, полученных автором, и экспериментальных данных указывает на то, что обработка подобного рода экспериментов по четырехчленной формуле дает правильные результаты.

§ 14. Расчет стержней с учетом продольных изгибающих моментов

Изложенная выше теория относится к тонкостенным стержням типа длинных оболочек, имеющих весьма малую толщину. Эта теория основана на допущении о том, что нормальные напряжения по толщине стенки распределяются равномерно; такое допущение равносильно пренебрежению продольными изгибающими моментами ввиду незначительности их роли в общем напряженном состоянии тонкостенного стержня. Такое же допущение лежит и в основе нашей общей технической теории оболочек и пространственных складчатых систем и позволяет в значительной мере упростить методы их расчета. Основанием к такому допущению послужили многочисленные теоретические и экспериментальные исследования по тонким цилиндрическим и призматическим оболочкам средней длины, проведенные как самим автором, так и другими исследователями.

Область применения этой теории, как, впрочем, и любой теории, основанной на известных допущениях, не может быть четко ограничена, так как она зависит от многих обстоятельств, да и само понятие «тонкостенный стержень» не является чем-то раз навсегда определенным и зависит от характера задачи, целей расчета, вида нагрузок и т. д.

Основное в нашей теории — это учет деформации сечения и влияние ее на работу стержня. В теории тонкостенных стержней открытого профиля это выливается в форму закона секторных площадей, являющегося обобщением закона плоских сечений. В теории тонкостенных стержней замкнутого профиля так же, как и в теории деформации стержней сплошного сечения, как будет показано в § I гл. IV и в § I гл. V, закон секторных площадей неприменим, и влияние деформации учитывается не обобщенной секторной координатой $\omega(s)$, а другой обобщенной координатой деформации $\varphi(x, y) = \chi y$; могут встретиться случаи, когда обобщенная координата деформации $\varphi(x, y)$ будет иметь и другое аналитическое выражение.

Ниже будет показано, как нужно видоизменить выражения обобщенных координат в поперечном сечении упругого стержня открытого профиля, чтобы учесть влияние продольных изгибающих моментов, или, что одно и то же, учесть влияние неравномерного распределения по толщине стенок продольных нормальных напряжений. Продольный изгибающий момент, приходящийся на единицу длины, выражается, как известно из теории пластинок, следующей формулой:

$$M_1 = -\frac{Et^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} \right).$$

Здесь выражение $\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}$ представляет собой изменение кривизны в поперечном направлении стержня. Для тонкостенных стержней эта деформация кривизны равна нулю, так как профиль стержня считается

абсолютно жестким и поэтому

$$M_1 = -\frac{E\zeta^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Для нормальной составляющей вектора полного перемещения мы имеем формулу (3.10) гл. I:

$$w(z, s) = -\xi(z) \sin \alpha(s) + \eta(z) \cos \alpha(s) + \theta(z) t(s),$$

где $\alpha(s)$ — угол между касательной к профильной линии в данной точке (s) и осью Ox ; $t(s)$ — величина перпендикуляра, опущенного из произвольного секториального центра A на нормаль к профильной ли-

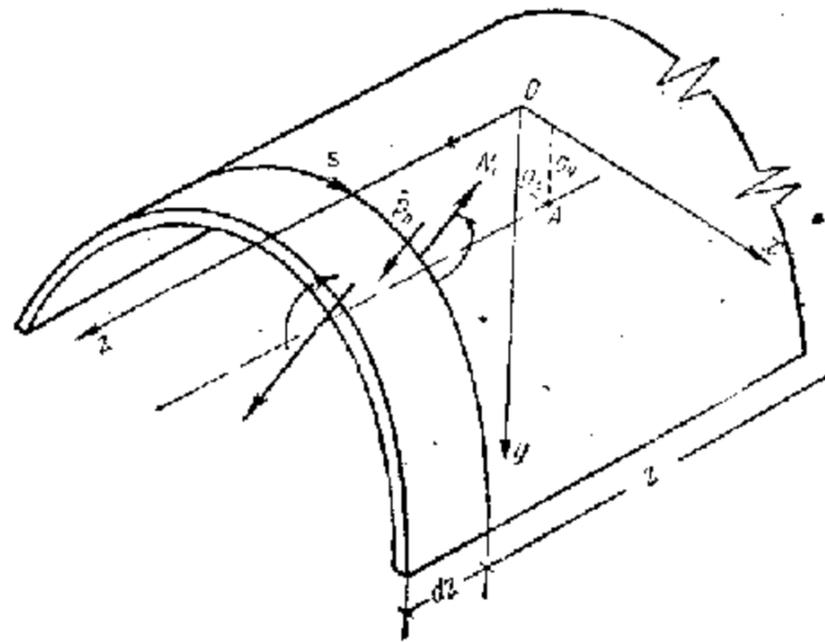


Рис. 104.

нии в данной точке (s) ; ξ и η — поступательные перемещения точки A ; θ — угол поворота сечения в своей плоскости относительно точки A .

Таким образом

$$M_1(z, s) = -\frac{E\zeta^3}{12} [-\xi''(z) \sin \alpha(s) + \eta''(z) \cos \alpha(s) + \theta''(z) t(s)].$$

Связанная с этим моментом поперечная сила N_1 , приходящаяся на единицу длины, будет иметь вид:

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial z} = -\frac{E\zeta^3}{12} [-\xi'''(z) \sin \alpha(s) + \eta'''(z) \cos \alpha(s) + \theta'''(z) t(s)]^*.$$

Чтобы учесть влияние продольных изгибающих моментов на работу тонкостенного стержня, нам нужно внести поправочные члены в диф-

* Формула для поперечной силы N_1 , известная из теории пластинок, имеет следующий вид: $N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial s}$, где H — интенсивность крутящего момента

ференциальные уравнения (6.14) гл. I, появляющиеся при проектировании поперечной силы N_1 на соответствующие оси. Это равносильно введению в рассмотрение некоторой дополнительной нормальной поверхностной нагрузки \bar{p}_n , действующей на полоску единичной ширины $dz = 1$ и равной разности поперечных сил, приложенных в сечениях $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ (рис. 104):

$$\bar{p}_n = \frac{\partial N_1}{\partial z} = -\frac{E\zeta^3}{12} [-\xi^{IV}(z) \sin \alpha(s) + \eta^{IV}(z) \cos \alpha(s) + \theta^{IV}(z) t(s)].$$

Ясно, что \bar{p}_n не даст составляющей на ось Oz , поэтому первое уравнение (6.14) гл. I останется без изменения; дополнительные члены получат три последних уравнения (6.14) гл. I.

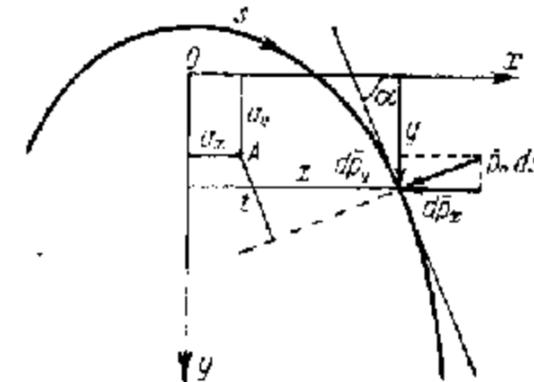


Рис. 105.

Обозначим через $d\bar{p}_x$, $d\bar{p}_y$ и dm проекции на оси x , y и момент от дополнительной нормальной силы $\bar{p}_n ds$, относящейся к произвольной точке сечения с текущей координатой s .

В соответствии с принятым правилом знаков будем иметь (рис. 105):

$$\begin{aligned} d\bar{p}_x &= -\bar{p}_n \sin \alpha(s) ds, \\ d\bar{p}_y &= \bar{p}_n \cos \alpha(s) ds, \\ dm &= d\bar{p}_y (x - a_x) - d\bar{p}_x (y - a_y) = \\ &= \bar{p}_n [(x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha] ds = \bar{p}_n t ds. \end{aligned}$$

Переходя к обобщенным силам и интегрируя эти выражения по всему контуру поперечного сечения, получим для добавочных членов второго, третьего и четвертого уравнений системы (6.14) гл. I

та, вычисляемая по формуле $H = \frac{E\zeta^3}{12} (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s}$. В случае тонкостенных стержней $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$, так как производная от крутящего момента по s содержит деформацию кривизны профиля стержня $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$.

соответственно выражения:

$$\begin{aligned}\bar{p}_x &= -E\xi^{IV} \int \sin^2 \alpha(s) dJ + E\eta^{IV} \int \sin \alpha(s) \cos \alpha(s) dJ + \\ &\quad + E\theta^{IV} \int t(s) \sin \alpha(s) dJ, \\ \bar{p}_y &= E\xi^{IV} \int \sin \alpha(s) \cos \alpha(s) dJ - E\eta^{IV} \int \cos^2 \alpha(s) dJ - \\ &\quad - E\theta^{IV} \int t(s) \cos \alpha(s) dJ, \\ \bar{m} &= E\xi^{IV} \int t(s) \sin \alpha(s) dJ - E\eta^{IV} \int t(s) \cos \alpha(s) dJ - E\theta^{IV} \int t^2(s) dJ.\end{aligned}$$

Присоединяя эти дополнительные члены к соответствующим уравнениям (6.14) гл. I и объединяя коэффициенты при ξ^{IV} , η^{IV} и θ^{IV} , получим те же уравнения, но в этих уравнениях геометрические характеристики J_x , J_y , J_{xy} и J_ω , $J_{\omega x}$, $J_{\omega y}$ будут определяться формулами, отличающимися от соответствующих формул (6.9) — (6.13) гл. I наличием дополнительных слагаемых, отражающих влияние продольных изгибающих моментов, а именно:

$$\left. \begin{aligned}J_x &= \int y^2(s) dF + \int \cos^2 \alpha(s) dJ, \\ J_y &= \int x^2(s) dF + \int \sin^2 \alpha(s) dJ, \\ J_{xy} &= \int x(s)y(s) dF - \int \sin \alpha(s) \cos \alpha(s) dJ, \\ J_{\omega x} &= \int \omega(s)x(s) dF - \int t(s) \sin \alpha(s) dJ, \\ J_{\omega y} &= \int \omega(s)y(s) dF + \int t(s) \cos \alpha(s) dJ, \\ J_\omega &= \int \omega^2(s) dF + \int t^2(s) dJ.\end{aligned} \right\} (14.1)$$

В этих формулах приняты обозначения:

$$dF = \delta ds, \quad dJ = \frac{\delta^3}{12} ds = \frac{\delta^2}{12} dF,$$

где толщина $\delta = \delta(s)$ рассматривается как функция переменной s . Интегралы распространяются на всё поперечное сечение.

К таким же результатам придем, исходя из других соображений. Предположим, что продольные нормальные напряжения по толщине стенки меняются по линейному закону (рис. 106, а, б). Положение произвольной точки M поперечного сечения будет теперь функцией двух переменных: координаты s , отсчитываемой от некоторой начальной точки вдоль контурной линии до точки M_1 , и расстояния n , отсчитываемого от профильной линии по нормали к ней (рис. 106, а).

По существу мы здесь имеем дело с явлением, рассмотренным нами в § 7, а именно: с случаем, когда продольная сила приложена не

непосредственно в какой-либо точке профильной линии, а находится вне контура и действие ее передается на стержень при помощи жесткой консоли, нормальной к профильной линии. В данном случае мы должны рассматривать нормаль в любой точке профильной линии как консоль, распространенную по обе стороны от профильной линии. Длина консоли меняется от нуля до половины толщины стержня в данном месте, а каждая точка консоли рассматривается как точка приложения продольной силы.

Обозначим через $x(s, n)$, $y(s, n)$, $\omega(s, n)$ соответственно обобщенные линейные и секторную координаты произвольной точки (s, n) поперечного сечения стержня, а через $x(s)$, $y(s)$ и $\omega(s)$ те же координаты, но относящиеся к точке s профильной линии; из рис. 106, а, б найдем следующие зависимости между ними:

$$\left. \begin{aligned}x(s, n) &= x(s) - n \sin \alpha(s), \\ y(s, n) &= y(s) + n \cos \alpha(s), \\ \omega(s, n) &= \omega(s) + nt(s).\end{aligned} \right\} (14.2)$$

Функции $\sin \alpha(s)$ и $\cos \alpha(s)$ могут быть представлены в другой форме — как производные по переменной s от соответствующих координат, а именно:

$$\begin{aligned}\sin \alpha(s) &= \frac{dy(s)}{ds} = y', \\ \cos \alpha(s) &= \frac{dx(s)}{ds} = x'.\end{aligned}$$

Так как обобщенные координаты являются функциями двух переменных s и n , то геометрические характеристики выражаются при помощи двойных интегралов, в которых $ds dn$ представляет элемент площади поперечного сечения, а интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения с пределами интегрирования по

переменной n от $-\frac{\delta}{2}$ до $+\frac{\delta}{2}$ [$\delta = \delta(s)$ — толщина стержня] и по переменной s — по всему контуру поперечного сечения. Ввиду того, что переменная n входит в выражения обобщенных координат, как видно из (14.2), в очень простой линейной форме, то, выполняя интегрирование по n , мы можем свести двойные интегралы к контурным интегралам. Геометрические характеристики после таких преобразова-

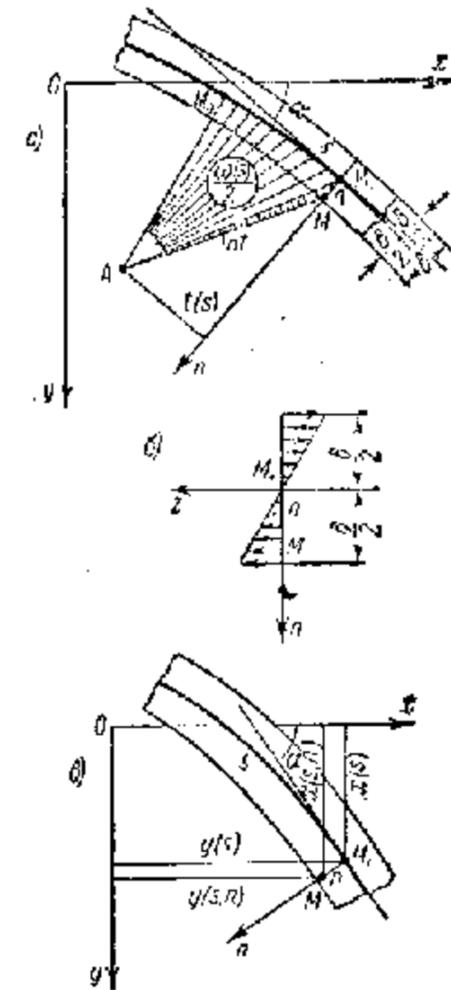


Рис. 106.

ний будут выражаться следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 S_x &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int y(s, n) ds dn = \int y(s) dF, \\
 S_y &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int x(s, n) ds dn = \int x(s) dF, \\
 J_x &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int y^2(s, n) ds dn = \int y^2(s) dF + \int \cos^2 \alpha dJ, \\
 J_y &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int x^2(s, n) ds dn = \int x^2(s) dF + \int \sin^2 \alpha dJ, \\
 J_{xy} &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int y(s, n) x(s, n) ds dn = \int x(s) y(s) dF - \\
 &\quad - \int \sin \alpha \cos \alpha dJ, \\
 S_\omega &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int \omega(s, n) ds dn = \int \omega(s) dF, \\
 J_{\omega x} &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int x(s, n) \omega(s, n) ds dn = \int \omega(s) x(s) dF - \\
 &\quad - \int t(s) \sin \alpha(s) dJ, \\
 J_{\omega y} &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int y(s, n) \omega(s, n) ds dn = \int \omega(s) y(s) dF + \\
 &\quad + \int t(s) \cos \alpha(s) dJ, \\
 J_\omega &= \int_{(s)_{-l/2}}^{+l/2} \int \omega^2(s, n) ds dn = \int \omega^2(s) dF + \int t^2(s) dJ.
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

(14.4)

Мы пришли к полученным выше формулам (14.1); при этом S_x , S_y и S_ω вообще остались в том же виде, который они имеют без учета продольных изгибающих моментов. Нужно отметить, что, по существу, мы получили уточненные формулы только для характеристик $J_{\omega x}$, $J_{\omega y}$ и J_ω ; для моментов же инерции J_x , J_y и J_{xy} [формулы (14.1)] мы имеем обычные выражения сопротивления материалов.

Вследствие указанных соображений, определение главных центральных осей на основании выполнения условий $S_x = S_y = J_{xy} = 0$ происходит обычным порядком методом сопротивления материалов. Определение же главных секториальных координат и координат центра изгиба при учете продольных изгибающих моментов следует производить по уточненным формулам, которые получаются совершенно аналогично тому, как они были получены в § 7 гл. I.

Пусть B и A — полюсы с координатами (b_x, b_y) и (a_x, a_y) . В этом случае формула (4.3) гл. I для секториальной площади при переносе полюса в начальную точку примет вид:

$$\omega_A = \omega_B + (a_y - b_y)x - (a_x - b_x)y + C.$$

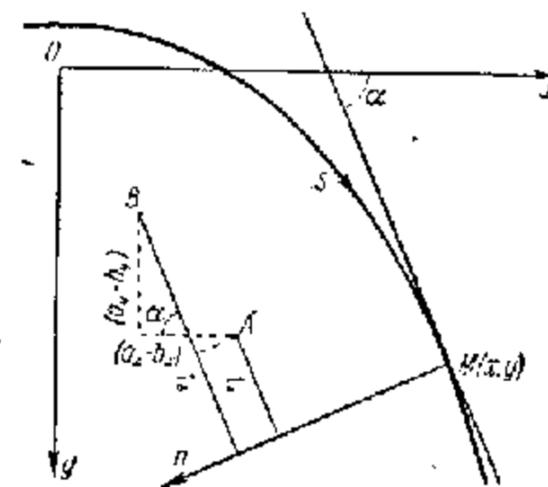


Рис. 107.

Из рис. 107 найдем выражения для функции $t(s)$ при переносе полюса:

$$t_A = t_B - (a_x - b_x) \cos \alpha(s) - (a_y - b_y) \sin \alpha(s).$$

Считая, что полюс B и начальная точка выбираются нами произвольно, а точка A является искомым центром изгиба, и составляя для ω_A и t_A условия $S_\omega = J_{\omega x} = J_{\omega y} = 0$ при помощи развернутых формул (14.4), получим три уравнения, из которых определим координаты a_x и a_y искомого центра изгиба и константу C , определяющую направление начального радиуса-вектора.

Формулы для определения указанных величин будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 a_x &= b_x + \frac{\int \omega_B(s) y(s) dF + \int t_B(s) \cos \alpha(s) dJ}{J_x}, \\
 a_y &= b_y - \frac{\int \omega_B(s) x(s) dF - \int t_B(s) \sin \alpha(s) dJ}{J_y}, \\
 C &= - \frac{\int \omega_B(s) s dF}{F}.
 \end{aligned} \right\} \tag{14.5}$$

При вычислении интегралов, как и в общей теории тонкостенных стержней, можно пользоваться графоаналитическими приемами строительной механики. К прежним эпюрам $x(s)$, $y(s)$ и $\omega_B(s)$ необходимо добавить еще эпюры:

$$\cos \alpha(s) = x'(s), \quad \sin \alpha(s) = y'(s) \quad \text{и} \quad t_B(s),$$

которые в большинстве практических случаев имеют также довольно простой вид.

Общие дифференциальные уравнения равновесия тонкостенного стержня остаются прежними [(7.3) гл. I]:

$$\begin{aligned} EF \zeta'' &= 0, \\ EJ_y \zeta'''' &= q_x, \\ EJ_x \eta'''' &= q_y, \\ EJ_\omega \theta'''' - GJ_d \theta'' &= m. \end{aligned}$$

§ 15. Поперечные изгибающие моменты в тонкостенных стержнях

1. Рассматривая тонкостенные стержни и ребристые оболочки как пространственные пластинчатые системы, обладающие недеформируемым контуром поперечного сечения, мы, наряду с нормальными и сдвигающими силами в поперечном сечении, неявным образом учитываем также поперечные изгибающие моменты, стремящиеся деформировать контур поперечного сечения. Эти моменты легко подсчитать, если известны сдвигающие осевые силы, действующие по продольной линии поперечного сечения. Выделяя для этой цели двумя поперечными сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ бесконечно малый элемент — полосу стержня или оболочки, мы должны в этих сечениях приложить осевые сдвигающие силы. При переходе от сечения $z = \text{const}$ к сечению $z + dz = \text{const}$ сдвигающие силы T в каждой точке контура получают приращения. Эти приращения с точностью до величин высшего порядка малости могут быть выражены как частные дифференциалы от $T(z, s)$ при изменении одной из независимых переменных:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial z} dz = \frac{\partial (Tz)}{\partial z} dz. \quad (15.1)$$

Подставляя вместо τ его выражение (8.9), получим формулу, по которой легко определяется интенсивность тангенциальной нагрузки в случае совместного действия на стержень изгиба и кручения. Зная тангенциальную нагрузку dT , мы можем из условия равновесия части выделенной полоски определить для какого-либо продольного сечения стержня поперечный изгибающий момент G , а также поперечную и нормальную силы Q и N (рис. 108). При вычислении силовых факторов G , N , Q продольного сечения стержня от внешней поверхностной нагрузки и от разности сдвигающих сил можно воспользоваться приемами графической статики, основанными

на теории веревочного многоугольника. Отметим здесь, что в случае сосредоточенной поперечной нагрузки, приложенной к какой-нибудь точке пролета, поперечные силы Q_x , Q_y и изгибно-крутящий момент H_ω [в формуле (8.9)] на незагруженном участке длины стержня остаются постоянными. Тангенциальная нагрузка от сдвигающих сил, определяемая по формуле (15.1), при $Q_x = \text{const}$, $Q_y = \text{const}$ и $H_\omega = \text{const}$ будет равна нулю. Следовательно, поперечные изгибающие моменты в рассматриваемом случае сосредоточенной нагрузки будут также равны нулю. Деформации контура сечения носят только местный характер и не влияют на распределение усилий в стенках стержня.

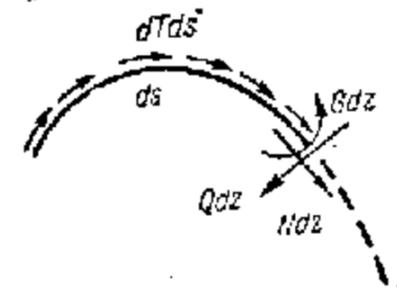


Рис. 108.

2. Поперечные изгибающие моменты G можно вычислить и другим, часто аналитическим путем, исходя из дифференциальных уравнений равновесия бесконечно малого элемента $dz ds$ срединной поверхности оболочки, которую мы рассматриваем в свете определенных статических и геометрических гипотез. Статические гипотезы состоят в следующих положениях. Цилиндрические оболочки произвольного очертания, подкрепленные продольными и поперечными ребрами (стрингерами и шпангоутами), при достаточно частом расположении этих ребер, мы рассматриваем как тонкостенную пространственную систему, в поперечных сечениях которой могут возникать одни только нормальные и сдвигающие усилия. Продольные изгибающие и крутящие моменты, вследствие их слабого влияния на напряженное состояние оболочки, принимаются равными нулю. По продольным сечениям оболочки, помимо нормальных и сдвигающих усилий, могут возникать также и поперечные силы. В силу таких статических гипотез за расчетную модель оболочки принимается тонкостенная пространственная система, состоящая по длине (вдоль образующей) как бы из бесконечного множества поперечных элементарных изгибаемых полосок. Каждая из таких полосок уподобляется плоскому кривому стержню, работающему в каждом своем сечении не только на растяжение (сжатие), но также и на поперечный изгиб и сдвиг. Взаимодействие между двумя смежными поперечными полосками в оболочке выражается в передаче с одной полоски на другую одна только сдвигающих и нормальных усилий. Такого рода пространственные системы, т. е. системы, наделенные различными физическими свойствами в продольном и поперечном направлении, мы будем называть *ортотропными пространственными системами*.

Статическая структура описанной расчетной модели показана на рис. 109. Стерженьками, расположенными в срединной поверхности оболочки, схематично обозначены связи, через которые от одной поперечной полоски к другой передаются продольные нормальные и сдвигающие усилия. Дифференциальные уравнения равновесия цилиндрической оболочки, в силу принятых статических условий, будут иметь

следующий вид (рис. 110):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma z)}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial s} + p &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{Q}{R} + q &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{N}{R} + r &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial s} - Q &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

где p, q, r — проекции вектора интенсивности поверхностной нагрузки соответственно на ось z , направление s и на нормаль к поверхности в данной точке, $R = R(s)$ — радиус кривизны профильной линии.

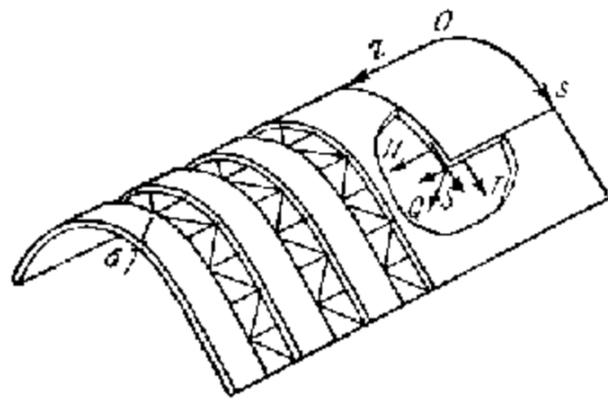


Рис. 109.

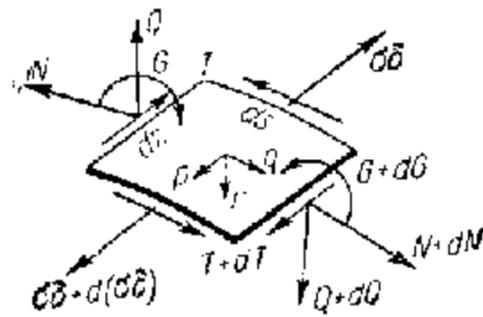


Рис. 110.

Система уравнений (15.2) путем исключения сил T, N, Q приводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2(\sigma z)}{\partial z^2} + \Omega G = P, \quad (15.3)$$

где P — функция, зависящая от компонентов внешней поверхностной нагрузки:

$$P = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(Rr); \quad (15.4)$$

Ω — дифференциальный оператор по переменной s :

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right). \quad (15.5)$$

Как будет показано ниже, этот оператор связан с законом секториальных площадей. Если поверхностные силы отсутствуют, то некоторые внутренние силы оболочки могут быть выражены через одну функцию $F = F(z, s)$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma z &= \Omega F, \quad T = -\Omega_1 \frac{\partial}{\partial z} F, \quad N = R \frac{\partial^2 F}{\partial z^2 \partial s^2}, \\ G &= -\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad Q = -\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

где Ω_1 — дифференциальный оператор третьего порядка также по переменной s :

$$\Omega_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial^3}{\partial s^3} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s}; \quad (15.7)$$

операторы Ω и Ω_1 связаны соотношением

$$\Omega F = \frac{\partial}{\partial s} (\Omega_1 F). \quad (15.8)$$

При $R \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \varphi$ и $R \rightarrow \infty$ первые три из соотношений (15.6) переходят в известные формулы Эри для плоской задачи теории упругости. Функция F может быть названа *функцией напряжений* для цилиндрической оболочки. Эта функция, как и в плоской задаче, в принятой нами расчетной модели, обусловленной только статическими гипотезами, играет роль основной статически-неопределимой величины. Если поверхностная нагрузка отлична от нуля, то к правым частям (15.6) следует добавить соответствующие частные решения неоднородных статических уравнений. Эти частные решения могут быть получены из уравнений (15.2) и предположения: $G = 0$ или $(\sigma z) = 0$. Во втором случае (при $\sigma z = 0$) частные интегралы для G, N и Q легко могут быть получены из (15.3) на основе закона секториальных площадей для моментов G .

3. Использование статических гипотез привело нас к одному уравнению (15.3) с двумя неизвестными функциями (σz) и G . Чтобы избежать этой неопределенности в решении задачи, необходимо получить еще одно уравнение. Это уравнение мы найдем из рассмотрения геометрической стороны задачи и использования геометрических гипотез.

Согласно геометрическим гипотезам, деформации поперечных удлинений оболочки и деформации сдвига, как величины, мало влияющие на состояние основных внутренних сил оболочки, принимаются равными нулю. Деформации оболочки в нашей расчетной модели происходят так, что линия срединной поверхности, перпендикулярные к образующей, в каждой точке остаются нерастяжимыми и углы между линиями главных кривизн (координатными линиями), прямые до деформации, остаются прямыми и после деформации.

Связь между деформациями оболочки $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ и α и ее перемещениями u, v и w выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \alpha &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{R} + \frac{\partial w}{\partial s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

200 МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ [гл. 15]

Первой из этих формул выражено относительное удлинение элемента вдоль образующей.

Вторая формула относится к удлинению элемента в направлении перпендикулярном к образующей. Это удлинение получается как сумма двух величин, из которых первая $\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)$ представляет собой относительное удлинение дуги ds , возникающее вследствие приращения v при переходе от точки M к точке N , а вторая $\left(-\frac{w}{R}\right)$ относится к ук-

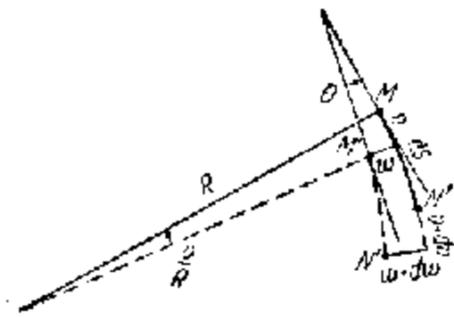


Рис. 111.

рочению дуги, происходящему вследствие перемещения точки M по внутренней нормали к поверхности на расстоянии w (рис. 111).

Третья формула определяет деформацию сдвига в срединной поверхности стержня.

Последняя, четвертая, формула относится к деформации изгиба элемента по дуге ds . Эта деформация кривизны получается как частная производная по

дуге s от угла $\theta = \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{\partial s}$, на который поворачивается касательная в точке M к дуге поперечного сечения при переходе элемента в деформированное состояние, обозначенное на рис. 111 пунктиром.

Исключая из этих уравнений перемещения u , v и w , получаем одно дифференциальное уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s} \right) - \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} = 0. \quad (15.10)$$

Исходя из геометрических гипотез об отсутствии деформаций поперечного удлинения и сдвига, т. е. считая, что

$$\varepsilon_2 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma = 0, \quad (15.11)$$

получаем

$$\Omega \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} = 0. \quad (15.12)$$

Это весьма важное в нашей теории уравнение неразрывности деформаций, предложенное нами еще в работах [35, 36], показывает, что деформации изгиба $\varepsilon = \varepsilon(z, s)$ поперечной элементарной полоски (деформация профиля оболочки) при гипотезах (15.12) в общем случае сопровождается деформацией растяжения оболочки вдоль образующей (депланацией поперечного сечения).

Для ребристых оболочек и тонкостенных стержней мы принимаем еще гипотезу об отсутствии деформаций контура поперечного сечения,

т. е. полагаем $\varepsilon = 0$. Для этого случая уравнение (15.12) принимает более простой вид, а именно:

$$\Omega \varepsilon_1 = 0, \quad (15.13)$$

где оператор Ω выражается формулой (15.5). Покажем, что оператор Ω связан с законом секторных площадей. В раскрытом виде уравнение (15.13) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s} \right) = 0. \quad (15.14)$$

Это — дифференциальное уравнение четвертого порядка, линейное, с переменными коэффициентами, зависящими от радиуса кривизны $R = R(s)$. Введем новую функцию $\varphi(z, s)$, определяемую уравнением

$$\varphi = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial s}. \quad (15.15)$$

Отсюда ε_1 выражается через φ следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \int_0^s \varphi(z, s) ds + Z_1(z), \quad (15.16)$$

где $Z_1(z)$ — произвольная функция координаты z .

Вводя в уравнение (15.14) вместо ε_1 новую функцию φ , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\varphi}{R} \right) = 0. \quad (15.17)$$

Принтегрируем это уравнение один раз по переменной s и обозначим новую произвольную функцию от z через $Z_2(z)$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{\varphi}{R} = Z_2(z). \quad (15.18)$$

Если обозначить через $\alpha = \alpha(s)$ угол, образуемый касательной к профильной линии в точке s с осью x , то из чисто геометрических соображений следуют зависимости:

$$ds = R d\alpha; \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha. \quad (15.19)$$

Пользуясь зависимостями (15.19), можно произвести замену независимого переменного s на α в уравнении (15.18) и получить

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \varphi = R Z_2. \quad (15.20)$$

Однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \varphi = 0, \quad (15.21)$$

как известно из теории дифференциальных уравнений, удовлетворяет функция

$$\varphi = A \sin \alpha + B \cos \alpha. \quad (15.22)$$

Решение неоднородного уравнения (15.20) найдем из решения однородного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Для этого дифференцируем функцию (15.22) по α , считая, что произвольные функции A и B являются функциями не только z , но также и α :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \sin \alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cos \alpha + A \cos \alpha - B \sin \alpha,$$

и полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \sin \alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cos \alpha &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &= A \cos \alpha - B \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Последнее уравнение при тех же предположениях дифференцируем еще раз по α :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cos \alpha - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \sin \alpha - A \sin \alpha - B \cos \alpha.$$

Подставляя этот результат вместе с выражением (15.22) в формулу (15.20), получаем

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cos \alpha - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \sin \alpha = RZ_4. \quad (15.24)$$

Решая это уравнение совместно с первым уравнением (15.23) относительно $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= Z_4 R \cos \alpha, \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= -Z_4 R \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (15.25)$$

Отсюда интегрированием по α получаем:

$$\left. \begin{aligned} A &= Z_4 \int_0^s R \cos \alpha \, d\alpha + Z_2(z), \\ B &= -Z_4 \int_0^s R \sin \alpha \, d\alpha + Z_3(z), \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

где $Z_2(z)$ и $Z_3(z)$ — новые произвольные функции, зависящие только от переменного z . Интегралы, стоящие в правой части уравнения (15.26), легко вычисляются при использовании зависимостей (15.19). Решение уравнения (15.20) можем записать в виде:

$$\varphi = Z_2 \sin \alpha + Z_3 \cos \alpha + Z_4 (x \sin \alpha - y \cos \alpha), \quad (15.27)$$

и, следовательно, для ϵ_1 , определяемого формулой (15.16), будем иметь:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= Z_1 + Z_2 \int_0^s \sin \alpha \, ds + Z_3 \int_0^s \cos \alpha \, ds + Z_4 \int_0^s (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \, ds = \\ &= Z_1 + Z_2 \int_0^s dy + Z_3 \int_0^s dx + Z_4 \int_0^s (x \, dy - y \, dx), \end{aligned}$$

или

$$\epsilon_1 = Z_1 + Z_2 y(s) + Z_3 x(s) + Z_4 \omega(s), \quad (15.28)$$

где $\omega(s) = \int_0^s (x \, dy - y \, dx)$.

Все произвольные функции интегрирования отнесены к $Z_1(z)$.

Геометрический смысл $\omega(s)$ удобнее выяснить, перейдя к полярным координатам ρ и ψ (рис. 112). Так как

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi,$$

то

$$dx = -\rho \sin \psi \, d\psi + d\rho \cos \psi,$$

$$dy = \rho \cos \psi \, d\psi + d\rho \sin \psi,$$

и, следовательно,

$$\omega(s) = \int_0^s (x \, dy - y \, dx) = \int_0^s \rho^2 \, d\psi,$$

где $\int_0^s \rho^2 \, d\psi$ [а отсюда и $\omega(s)$] представляет удвоенную площадь сектора, заключенного между двумя радиусами-векторами и дугой s , т. е. величину секторной площади. Формула (15.28), являющаяся решением дифференциального уравнения (15.14), совпадает с выведенной ранее в § 3 гл. I другим методом формулой

$$\epsilon = \zeta'(z) - \xi''(z) x(s) - \tau_1''(z) y(s) - \theta''(z) \omega(s).$$

В этой формуле роль произвольных функций интегрирования $Z_1(z)$, $Z_2(z)$, $Z_3(z)$, $Z_4(z)$ уравнения (15.14) играют величины $\zeta'(z)$, $-\xi''(z)$, $-\tau_1''(z)$, $-\theta''(z)$, имеющие определенный геометрический смысл. Обе формулы идентичны и представляют закон секторных площадей, частным случаем которого является закон плоских сечений.

4. Рассматривая оболочку, подкрепленную ребрами, как приведенную ортотропную упругую систему, представим закон Гука при гипотезах (15.11) в следующей упрощенной форме (коэффициент Пуассона μ

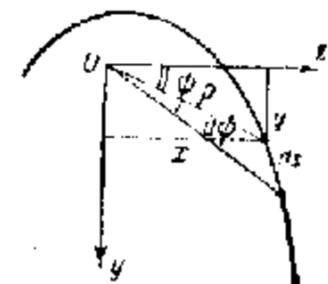


Рис. 112.

принимаем равным нулю):

$$\epsilon_s = \frac{1}{A} \sigma; \quad \kappa = -\frac{1}{D} G, \quad (15.29)$$

где A — жесткость оболочки при растяжении вдоль образующей; D — жесткость (приведенная, с учетом поперечных ребер) при изгибе оболочки по линии контура. Если ребра отсутствуют, то очевидно

$$A = E, \quad D = \frac{E\delta^3}{12}, \quad (15.30)$$

где E — модуль упругости при растяжении (сжатии); δ — толщина оболочки.

Внося (15.29) в уравнение (15.12) и присоединяя ранее полученное уравнение (15.3), получаем систему двух дифференциальных уравнений оболочки с двумя неизвестными функциями σ и G :

$$\frac{\partial^2(\sigma\delta)}{\partial z^2} + \Omega G = P, \quad \Omega\sigma - \frac{A}{D} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0. \quad (15.31)$$

Система (15.31) в отношении членов с производными по z имеет симметричное строение, что находится в полном соответствии с основными теоремами теории упругости.

При $R = \text{const}$ (для круговой оболочки) уравнения (15.31) будут иметь постоянные коэффициенты.

Если во втором уравнении (15.31) положить $D = \infty$, т. е. считать, что мы имеем дело с ребристой оболочкой или тонкостенным стержнем, в которых контур предполагается недеформируемым ($\kappa = 0$), то при $\sigma = Ae$ мы приходим к уравнению (15.13):

$$\Omega e = 0, \quad (15.32)$$

Отсюда для продольной деформации $e = e(z, s)$ в функции от контурной координаты s вытекает геометрический закон секторных площадей, подробно рассмотренный нами ранее.

Если в первом уравнении системы (15.31) положить $\sigma\delta = 0$, т. е. считать, что оболочка в поперечных сечениях работает на одни только сдвигающие усилия, как это имеет место, например, в случае гофрированной оболочки, то при $P = 0$ (однородная задача) приходим к уравнению

$$\Omega G = 0, \quad (15.33)$$

совершенно аналогичному уравнению (15.32). Значит поперечные изгибающие моменты $G = G(z, s)$ в функции от контурной координаты s также будут следовать закону секторных площадей. Этот закон, в отличие от аналогичного ему геометрического закона для деформаций удлинений $e = e(z, s)$, может быть назван *чисто статическим законом секторных площадей*. Обозначая сокращенно через $G(z, s)$ общий интеграл однородного уравнения (15.33), мы, на основании изложенного

выше, можем его записать в виде:

$$G(z, s) = Z_1(z) + Z_2(z)x(s) + Z_3(z)y(s) + Z_4(z)\omega(s), \quad (15.34)$$

где $Z_1(z)$, $Z_2(z)$, $Z_3(z)$ и $Z_4(z)$ — произвольные функции интегрирования; $x(s)$, $y(s)$ — текущие координаты точки профильной линии; $\omega(s)$ — текущая секторная координата этой точки.

Отдельным слагаемым в выражении (15.34) можно легко дать механическую интерпретацию. Первым членом представлен чистый изгиб поперечной полоски от момента G_0 , приложенного на начальном продольном крае $s = 0$ (рис. 113); вторым и третьим слагаемым представлены моменты в точке контура $x(s)$, $y(s)$ от сил q_{xp} и q_{yp} , параллельных осям координат и приложенных на начальном продольном крае $s = 0$; последний член относится к моменту от сдвигающих сил $T = T(z)$, имеющих по дуге профильной линии постоянную интенсивность. Произвольные функции $Z_1(z)$, $Z_2(z)$, $Z_3(z)$ и $Z_4(z)$, имеющие вполне определенный механический смысл, определяются из граничных условий на продольных краях оболочки.

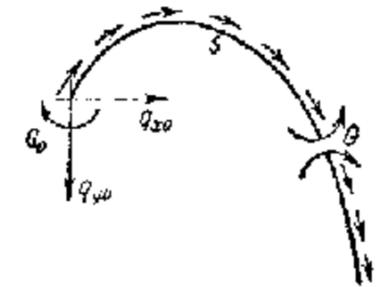


Рис. 113.

Если усилие $\sigma\delta \neq 0$, то, определив его из уравнения (15.32) и подставив его в первое уравнение системы (15.31), получим

$$\Omega G - \left[P - \frac{\partial^2(\sigma\delta)}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (15.35)$$

Общий интеграл этого неоднородного уравнения (15.35) мы можем представить в виде суммы двух интегралов:

$$G = g_1(z, s) + g_2(z, s), \quad (15.36)$$

где $g_1(z, s)$ — общий интеграл однородного уравнения, представленный формулой (15.34), а $g_2(z, s)$ — частный интеграл неоднородного уравнения (15.35). Таким образом мы видим, что в тонкостенных стержнях, наряду с осевыми силами, возникают поперечные изгибающие моменты G в поперечные и нормальные силы Q и N , действующие по площадкам продольного сечения. Одно из основных положений элементарной теории изгиба балок, заключающееся в том, что при изгибе продольные волокна балки не оказывают друг на друга давления, в применении к тонкостенным стержням является неверным. Для тонкостенных стержней и оболочек оказывается более естественным принять гипотезу не об отсутствии нормальных сил и моментов по продольным сечениям, а об отсутствии деформаций удлинений и изгиба, т. е. гипотезу о недеформируемости контура сечения.

Возвращаясь к эпюрам, показанным на рис. 91, а, б (см. пример расчета в § 10), мы замечаем, что, в случае изгиба в плоскости симметрии, деформации контура играют большую роль, чем в случае кру-

чения. Объясняется это тем, что при изгибе в поперечных сечениях возникают сдвигающие усилия, представляемые симметричной эпюрой. Моменты Q от этих усилий будут распределены также симметрично относительно оси y и вызовут симметричную деформацию контура сечения. Вследствие такой деформации расстояние между крайними точками контура изменится.

В случае же кручения изменение сдвигающих усилий по сечению, как видно из эпюры для секториальных статических моментов S_{ω} (рис. 90, б), представляется нечетной (обратносимметричной) функцией. Поперечные изгибающие моменты от этих усилий будут меняться по закону кососимметричной эпюры. В силу этого проекция расстояния между двумя симметричными точками контура на ось x не изменится. Деформация контура сечения при обратносимметричной нагрузке от кручения получается таким образом меньше, чем при симметричной нагрузке от изгиба в вертикальной плоскости.

ГЛАВА III

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ-ОБОЛОЧКИ, УСИЛЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

§ 1. Метод пространственного расчета многоопорных конструкций

Бимоментная теория изгибного кручения вместе с методами строительной механики позволяет также сравнительно просто рассчитать пространственные системы типа тонкостенных стержней, имеющие в пролете в произвольно заданных точках промежуточные опоры. К таким

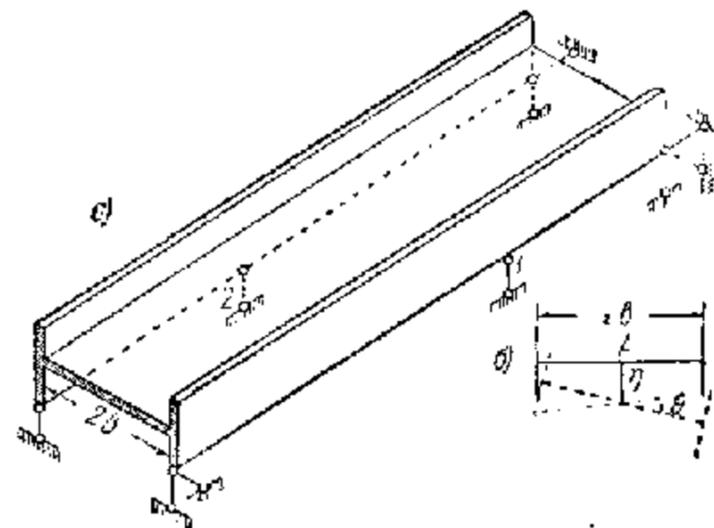


Рис. 114.

системам относятся, в частности, конструкции балочных мостов с косыми опорами (рис. 114), конструкции покрытий типа ребристых сводов-оболочек, имеющих по продольным краям стержневые опоры (рис. 115).

В целях простоты изложения будем считать, что рассматриваемая система в поперечном сечении имеет вертикальную ось симметрии. Предположим, что такая система находится под действием вертикальной нагрузки, равнодействующая которой для поперечной полоски единичной ширины лежит в плоскости симметрии профиля. Примером такой нагрузки является собственный вес конструкции. Такая нагрузка при отсутствии асимметричных опорных связей, согласно изложенной выше теории, вызовет только деформацию изгиба. Деформация же кручения будет отсутствовать, поскольку нагрузка будет проходить через линию

центров изгиба, лежащую также в продольной плоскости симметрии. При наличии же связей, расположенных на некотором расстоянии от оси симметрии профиля, конструкция, наряду с изгибом, будет испытывать и деформацию кручения, вызываемую реакциями опорных связей. Для определения этих реакций мы можем воспользоваться методами строительной механики, распространяя и обобщая эти методы на рассматриваемые здесь тонкостенные пространственные системы. Будем исходить из метода сил. Выберем в качестве основной системы тонкостенную однопролетную конструкцию, получающуюся из заданной путем

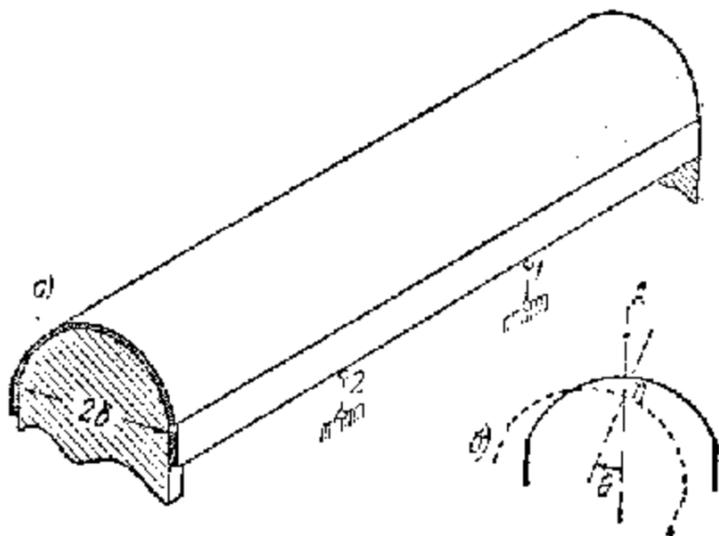


Рис. 115.

отбрасывания промежуточных опорных связей. Деформированное состояние такой системы при любом сложном нагружении может быть определено путем наложения элементарных состояний от изгиба и от изгибно-кручения. Поскольку в нашем примере внешняя нагрузка и опорные связи вертикальны, то из элементарных состояний основной системы нас будут интересовать состояния двух видов, а именно: чисто изгибные и изгибно-крутильные (рис. 114, б; 115, б).

Действие реакции какого-либо опорного стержня, не проходящей через центр изгиба, может быть приведено к загрузке основной системы сосредоточенной вертикальной нагрузкой, лежащей в плоскости симметрии и вызывающей чисто изгибную деформацию, и сосредоточенного крутящего момента, вызывающего деформацию изгибно-кручения. Вертикальный прогиб $\eta = \eta(z, t)$ стержня в каком-либо сечении $z = \text{const}$ от сосредоточенной вертикальной нагрузки P , действующей по оси симметрии в каком-либо другом сечении $t = \text{const}$ при шарнирном опирании концов стержня, определяется по формулам:

для значений $l \geq z \geq t$

$$\eta(z, t) = \frac{P(l-z)t}{6EJ_x l} [l^2 - (l-z)^2 - t^2], \quad (1.1)$$

для значений $t > z \geq 0$

$$\eta(z, t) = \frac{P(l-t)z}{6EJ_x l} [l^2 - (l-t)^2 - z^2]. \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) могут быть получены либо путем применения метода начальных параметров к дифференциальному уравнению изгиба балки в уравнении системы (7.3) гл. I, либо путем применения общей формулы Мора для перемещений

$$\eta(z, t) = \int_0^l \frac{M_z(s) M_t(st)}{EJ} ds, \quad (1.3)$$

где $M_z(s)$ и $M_t(s)$ — изгибающие моменты от единичных сил, приложенных в двух разных точках оси балки с абсциссами z и t . Формулы (1.1) и (1.2) представляют собой функцию влияния (функцию Грина) для задачи об изгибе однопролетной балки с шарнирными опорами на концах.

Угол кручения $\theta = \theta(z, t)$, возникающий в каком-либо сечении $z = \text{const}$ от сосредоточенного крутящего момента $H = Pe$, действующего в плоскости какого-либо другого сечения $t = \text{const}$, определяется по формулам (5.4) и (5.5) гл. II:

для значений $l \geq z \geq t$

$$\theta(z, t) = \frac{H}{GJ_d} \left[\frac{t}{l} (l-z) - \frac{t}{k} \frac{\text{sh} \frac{k}{l} t}{\text{sh} k} \text{sh} \frac{k}{l} (l-z) \right]; \quad (1.4)$$

для значений $t > z \geq 0$

$$\theta(z, t) = \frac{H}{GJ_d} \left[\frac{l-t}{l} z - \frac{t}{k} \frac{\text{sh} \frac{k}{l} (l-t)}{\text{sh} k} \text{sh} \frac{k}{l} z \right]. \quad (1.5)$$

Этими формулами представлена функция влияния (функция Грина) для задачи об изгибно-кручении однопролетной тонкостенной балки, имеющей на концах также шарнирное опирание.

Формула (1.4) переходит в формулу (1.5) при замене z на t , что находится в соответствии и с симметрией функции Грина, и с теоремой Бетти о взаимности перемещений: $\theta(z, t) = \theta(t, z)$.

В случае ребристых сводов оболочек, применяемых в строительном деле, а также в случае цилиндрических и призматических оболочек открытого профиля, широко применяемых в авиации и в судостроении, жесткость GJ_d сентенановского кручения является фактором второстепенного значения. Считая эту жесткость, а следовательно и величину k , равной нулю, мы можем упростить формулы (1.4) и (1.5). Для этого необходимо разложить гиперболические функции, входящие в формулы (1.4) и (1.5), в ряд, ограничиться двумя членами разложения для каждой функции и совершить предельный переход.

Упростим, например, формулу (1.4):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \eta(z, t) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{H}{6J_d} \times \\ &\times \left\{ \frac{t}{l} (l-z) - \frac{t}{k} \frac{k}{l} \frac{t \left(1 + \frac{k^2}{6l^2} t^2 \right) \frac{k}{l} (l-z) \left[1 + \frac{k^2}{6l^2} (l-z)^2 \right]}{k \left(1 + \frac{k^2}{6} \right)} \right\} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{H}{6J_d} \frac{t(l-z)}{l} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{k^2}{6l^2} t^2 \right) \left[1 - \frac{k^2}{6l^2} (l-z)^2 \right] \left(1 - \frac{k^2}{6} \right) \right\} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Hk^2}{6GJ_d} \frac{t(l-z)}{l^3} [l^2 - (l-z)^2 - t^2] = \\ &= \frac{H}{6EJ_m} \frac{t(l-z)}{l} [l^2 - (l-z)^2 - t^2]. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Формула (1.6) справедлива для значений $l \geq z \geq t$. Для значений $t > z \geq 0$ из формулы (1.5) получим

$$\eta(z, t) = \frac{H}{6EJ_m} \frac{z(l-t)}{l} [l^2 - (l-t)^2 - z^2]. \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) имеют совершенно одинаковое строение с формулами (1.1) и (1.2) и отличаются от них величинами, относящимися к определяемому перемещению, к нагрузке и к обобщенной геометрической характеристике. Идентичность этих формул является также следствием высказанных нами выше общих положений, относящихся к математической аналогии в теории стержней при изгибе и изгибном кручении.

Приведем теперь формулу для прогибов основной системы от внешней поперечной равномерно-распределенной нагрузки q , действующей в плоскости симметрии:

$$\eta(z) = \frac{qz^2}{24EJ_x} (l^3 - 2lz^2 + z^3). \quad (1.8)$$

Зная деформации нашей основной системы в рассмотренных здесь ее элементарных состояниях, мы можем теперь легко получить уравнения метода сил для искоемых реакций вертикальных промежуточных опор. Эти уравнения при числе n промежуточных опор имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2p} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь искоемые реакции X_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) считаются положительными, если они соответствуют растяжению опорных связей.

Коэффициенты и свободные члены уравнений (1.9) вычисляются по общим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \eta_{ij} + b\theta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3, \dots, n), \\ \delta_{iq} &= \eta_{iq} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

где i и j — порядковые номера уравнений и неизвестных; $\eta_{ij} = \eta(z_i, t_j)$ — прогиб в сечении i -й опоры от сосредоточенной единичной силы, соответствующей искомой реакции j -й опоры; $\theta_{ij} = \theta_{ij}(z_i, t_j)$ — угол кручения в сечении i -й опоры от сосредоточенного единичного крутящего момента $H_j = b$, действующего в плоскости, проходящей через j -ю опору.

Величина b представляет собой половину ширины конструкции (плечо крутящего момента). В соответствии с принятым правилом знаков эта величина будет положительной для опор, расположенных по рис. 114, 115 справа от оси симметрии и отрицательной для опор, расположенных слева от этой оси.

Свободный член δ_{iq} i -го уравнения вычисляется по формуле (1.8) как прогиб $\eta_i = \eta(z_i)$ от заданной нагрузки в сечении, проходящем через i -ю опору. Определив из уравнений (1.9) опорные реакции, мы можем затем с помощью приведенных выше формул для элементарных состояний основной системы по методу суперпозиции получить прогибы и углы закручивания заданной пространственной многоопорной системы. Нормальные и касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях системы, в рассмотренном здесь случае следует вычислять по двучленным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma(z, s) &= -E[\eta''(z)y(s) + \theta''(z)\omega(s)], \\ \tau(z, s) &= E\left[\eta'''(z)\frac{S_x(s)}{\delta(s)} + \theta'''(z)\frac{S_\omega(s)}{\delta(s)}\right]. \end{aligned}$$

§ 2. Стержни, усиленные планками

1. Изложенный в § 7 гл. II метод учета влияния продольной силы, приложенной в произвольной точке поперечного сечения стержня, имеет исключительно важное значение при расчете тонкостенных стержней (колонн и балок), усиленных поперечными планками. Этот метод в сочетании с общезвестными методами строительной механики позволяет учитывать влияние планок.

Назначение планок, в основном, это — увеличение жесткости стержня при работе его на кручение. С этой точки зрения стержень, усиленный планками, занимает некоторое промежуточное положение между стержнями с открытым контуром поперечного сечения, которые мы до сих пор рассматривали, и толкостенными стержнями с замкнутым контуром поперечного сечения, которые будут нами рассмотрены более подробно далее; теперь мы только отметим, что если в основе теории тонкостенных стержней с открытым контуром поперечного

сечения лежит гипотеза о недеформируемости контура поперечного сечения и пренебрежение деформациями сдвига, то при рассмотрении тонкостенных стержней с замкнутым контуром поперечного сечения

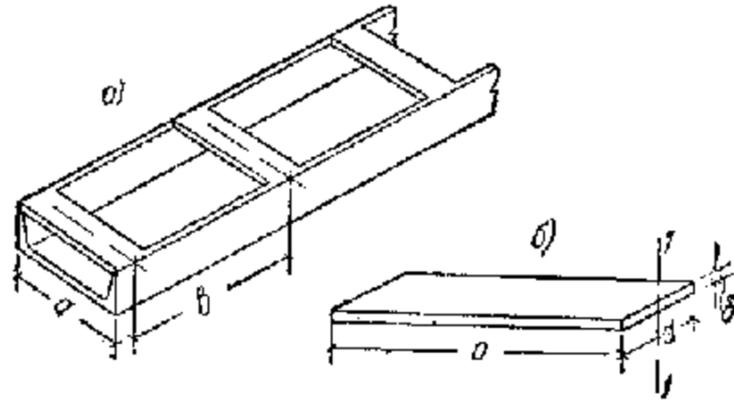


Рис. 116.

существенное значение имеют как раз те факторы, которыми мы пренебрегали в стержнях с открытым контуром, а именно: деформации контура и деформации сдвига. Принимая это во внимание, мы при рассмотрении работы стержней, усиленных планками, будем исходить

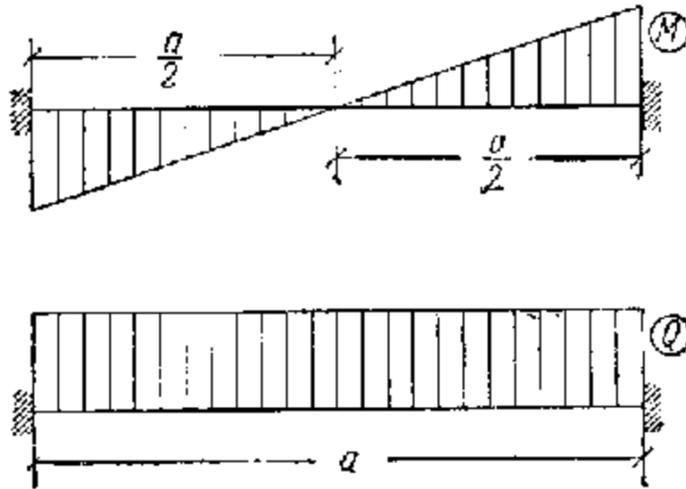


Рис. 117.

из следующих предположений: а) сам стержень считаем по-прежнему обладающим недеформируемым контуром поперечного сечения и деформациями сдвига в нем пренебрегаем; б) планки считаем деформируемыми в своей плоскости и деформации сдвига в них учитываем. 2. Рассмотрим тонкостенный стержень открытого сечения, усиленный планками (рис. 116, а). Число планок пусть будет *n*; расстояние между планками, а также размеры планок могут быть различными; прикрепление их к телу стержня будем предполагать жестким. Очевидно, что такой стержень с *n*-планками можно рассматривать как пространственную комбинированную конструкцию, состоящую из цилиндрической оболочки и плоской стержневой системы типа фермы Вирендсля. Изменение степени статической неопределимости такой конструкции, происходящее только от планок, будет равно 3*n*. Если же принять во внимание, что контур стержня мы считаем недеформируемым [и, следовательно, осевые (продольные) деформации планок

равными нулю] и что вследствие жесткого прикрепления планок к стержню эпюра моментов при работе планки на изгиб будет иметь вид кососимметричной трапеции (рис. 117) с нулевой точкой по середине длины планки, то, разрезав планку по середине, мы получим для нашей заданной системы основную систему с *n* неизвестными. За искомыми величинами принимаем возникающие в планках поперечные силы $Z_1, Z_2, \dots, Z_i, \dots, Z_n$ (рис. 118); для определения этих сил методами строительной механики получаем каноническую систему *n* уравнений:

$$\begin{cases} (\delta_{11} + \bar{\delta}_{11})Z_1 - \delta_{12}Z_2 + \dots + \delta_{1n}Z_n + \delta_{1q} = 0, \\ \delta_{21}Z_1 + (\delta_{22} + \bar{\delta}_{22})Z_2 + \dots + \delta_{2n}Z_n + \delta_{2q} = 0, \\ \dots \\ \delta_{n1}Z_1 + \delta_{n2}Z_2 + \dots + (\delta_{nn} + \bar{\delta}_{nn})Z_n + \delta_{nq} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Коэффициенты этих уравнений имеют следующий физический смысл: δ_{ik} — взаимное смещение концов в месте разреза *i*-й планки по направлению действующих сил от единичной силы, приложенной в *k*-й планке, происходящее без учета деформаций самих планок, а только вследствие деформации стержня;

$\bar{\delta}_{ii}$ — взаимное смещение концов *i*-й планки по направлению действующей силы от единичной силы, происходящее только вследствие деформации самой планки в своей плоскости и определяемое с учетом деформации сдвига планки;

δ_{iq} — взаимное смещение концов *i*-й планки по тому же направлению, происходящее в основной системе от заданной внешней нагрузки.

Коэффициенты $\bar{\delta}_{ii}$ вычисляются по общим правилам строительной механики и выражаются формулой

$$\bar{\delta}_{ii} = 2 \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{M^2}{EJ} ds + \nu \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{Q^2}{Gf} ds \right), \quad (2.2)$$

где *a* — длина планки; $J = \frac{2a^3}{12}$ — момент инерции планки относительно оси 1—1 (рис. 116, б); $F = \delta d$ — площадь поперечного сечения планки; ν — коэффициент, зависящий от формы планки (для планки прямоугольного сечения $\nu = 1,2$).

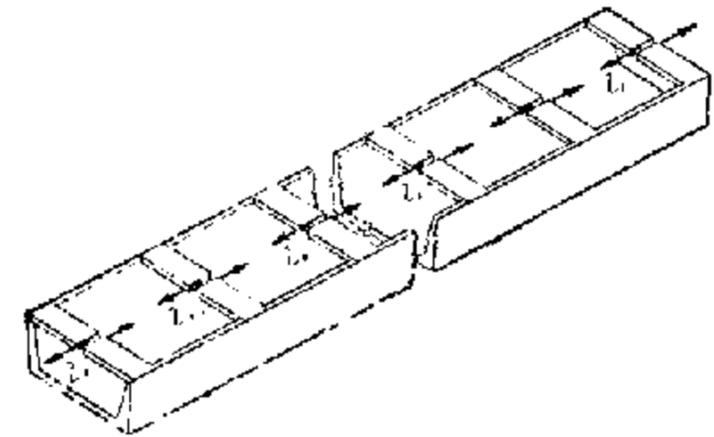


Рис. 118.

Пользуясь эшкурами M и Q , представленными для данного случая на рис. 117, на основании (2.2) получим

$$\bar{\delta}_{ii} = \frac{a^2}{12EJ} + \frac{1,2a}{GF} \quad (2.3)$$

Как видно из этой формулы, коэффициенты $\bar{\delta}_{ii}$ не зависят от положения планки по длине стержня.

Остановимся на вычислении коэффициентов $\bar{\delta}_{iq}$, представляющих взаимное смещение по направлению сил Z_i концов i -й планки в месте

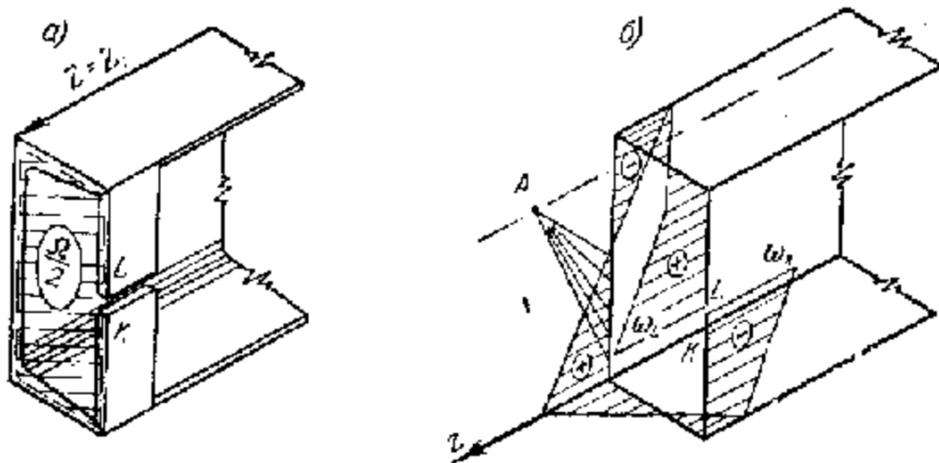


Рис. 119.

разреза, происходящее от заданной внешней нагрузки. Если обозначить концы планок в месте разреза буквами K и L (начальная и конечная точка при обходе контура в этом сечении по часовой стрелке), как показано на рис. 119, а, то будем иметь:

$$\bar{\delta}_{iq} = u_{qL} - u_{qK} \quad (2.4)$$

где u_{qL} и u_{qK} — перемещения $u(z)$ от действия внешней нагрузки q , соответственно в точках L и K .

Перемещения $u(z, s)$, происходящие вследствие закручивания стержня, согласно формуле (3.16) гл. I, выражаются следующим образом:

$$u(z, s) = -\theta'(z) \omega(s), \quad (2.5)$$

где $\theta'(z)$ — относительная депланация, зависящая только от координаты z , а $\omega(s)$ — секторная площадь, зависящая от положения точки на контуре поперечного сечения.

На основании (2.5) выражение (2.4) можно записать в виде

$$\bar{\delta}_{iq} = -\theta'_q(z_i) (\omega_L - \omega_K). \quad (2.6)$$

На рис. 119, б в сечении $z_i = \text{const}$, проходящем через ось i -й планки, показана эшкура секторных площадей с полюсом в центре эллипа A , причем ординаты эшкеры отложены по оси z , а не в плоскости

сечения, как мы это делали ранее. Из этого рисунка видно, что $\omega_L - \omega_K$ представляет собой удвоенную площадь, заключенную между профильной линией стержня и осью планки; обозначив эту удвоенную площадь через Ω , будем иметь на основании (2.6):

$$\bar{\delta}_{iq} = -\theta'_q(z_i) \Omega. \quad (2.7)$$

Таким образом, коэффициент $\bar{\delta}_{iq}$ от нагрузки [свободный член системы (2.1)] состоит из двух множителей: постоянного числа Ω , не зависящего от положения планки на оси z , и относительной депланации $\theta'_q(z)$, зависящей от внешней нагрузки q и от граничных условий, в которых паходятся концы стержня. Пользуясь методом начальных параметров, изложенным в главе II, функцию $\theta'(z)$ нетрудно найти для любого вида внешней поперечной и продольной нагрузки.

Нам осталось установить вид коэффициентов $\bar{\delta}_{ik}$, отражающих взаимное смещение в месте разреза i -й планки по направлению действующих сил Z_i от единичной силы, приложенной к k -й планке, причем сами планки (с разрезом) мы рассматриваем в данном случае как жесткие консоли.

В сечении $z_k = \text{const}$, в котором расположена k -я планка, действие планки заменено силами Z_k ; эти продольные силы передаются на тонкостенный стержень при помощи жестких консолей, какими являются, как сказано выше, половинки планок и, как показано в § 7 гл. II, создают внешний бимомент, величина которого равна

$$\bar{B}_k = Z_k (\omega_L - \omega_K).$$

Принимая во внимание, что

$$\omega_L - \omega_K = \Omega$$

и что мы вместо Z_k берем единичную силу, получим для бимомента, приложенного на месте k -й планки,

$$\bar{B}_k = \Omega. \quad (2.8)$$

Переходя к сечению $z_i = \text{const}$, в котором расположена i -я планка и взаимное смещение концов которой при действии в сечении $z_k = \text{const}$ бимомента \bar{B}_k представляет коэффициент $\bar{\delta}_{ik}$, мы по аналогии с выражением (2.6) можем написать

$$\bar{\delta}_{ik} = -\theta'_{B_k}(z_i) (\omega_L - \omega_K) = -\theta'_{B_k}(z_i) \Omega, \quad (2.9)$$

где Ω — удвоенная площадь, образованная профильной линией стержня и осью i -й планки, а $\theta'_{B_k}(z_i)$ — мера депланации в сечении $z_i = \text{const}$ от действия бимомента B_k , приложенного в сечении $z_k = \text{const}$. $\theta'_{B_k}(z_i)$ легко подсчитывается по формулам § 7 гл. II для различных граничных условий, в которых паходятся концы стержня. Так, например, для случая, когда стержень имеет по концам шарнирное опирание,

по второй из формул (7.3) гл. II (считая, что $z_i > z_k$), после подстановки значений θ'_0 и H_0 по (7.1) гл. II, получим после некоторых преобразований:

$$\theta'_{B_k}(z_i) = -\frac{B_k}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_i) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_k}{\operatorname{sh} k} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) и (2.8) в выражение (2.9), получим окончательно для коэффициента δ_{ik} формулу:

$$\delta_{ik} = \frac{\Omega^2}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_i) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_k}{\operatorname{sh} k} - 1 \right]^* \quad (2.11)$$

Как видно из этой формулы, δ_{ik} , так же как и коэффициенты δ_{iq} , зависят от координаты z и, кроме того, от взаимного расположения i -й и k -й планок.

Разрешив систему (2.1) и определив значения неизвестных Z_i , мы можем определить любое интересующее нас усилие и перемещение в стержне, усиленном планками, при любых граничных условиях на концах стержня, считая, что на стержень помимо основной заданной внешней нагрузки действует еще ряд бимоментных нагрузок ΩZ_i (по числу планок), приложенных в местах присоединения планок.

3. Поясним влияние планок на примере фахверкового прогона, составленного из двух швеллеров № 12, рассмотренного в § 1 п. 4 и в § 5 п. 2 гл. II (рис. 120). Поперечное сечение прогона и основные размеры даны на рис. 40; все необходимые данные, относящиеся к нагрузке и геометрическим характеристикам, приведены в § 1 и § 5 гл. II.

Как и ранее (§ 5 гл. II), полагаем, что концы прогона находятся в условиях, соответствующих шарнирному опиранию.

Пусть на каждом конце прогона приварено по одной планке, соединяющей кромки 1 и 3 (рис. 120, а). Будем считать планки одинаковыми.

* Данные выкладки проделаны для случая, когда бимомент B_k приложен в сечении $z_k = \text{const}$, а взаимное смещение ищем в сечении $z_i = \text{const}$, причем $z_i > z_k$. Для случая же, когда B_i приложен в сечении $z_i = \text{const}$, а взаимное смещение ищем в сечении $z_k = \text{const}$ и по-прежнему $z_i > z_k$, т. е. когда нам нужно получить δ_{ki} , мы пользуемся второй из формул (7.2) гл. II, и формула (2.10) примет вид:

$$\theta'_{B_i}(z_k) = -\frac{B_i}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_i) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_k}{\operatorname{sh} k} - 1 \right].$$

Подставляя значение $\theta'_{B_i}(z_k)$ в формулу (2.9), получим $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, как и должно быть в силу теоремы взаимности.

Размеры планок следующие: длина $a = 11,28$ см, ширина $d = 10$ см, толщина $\delta = 0,6$ см.

По формуле (2.3) вычисляем коэффициенты $\bar{\delta}_{11}$ и $\bar{\delta}_{22}$ уравнений (2.1), отражающие податливость самих планок. Так как большинство

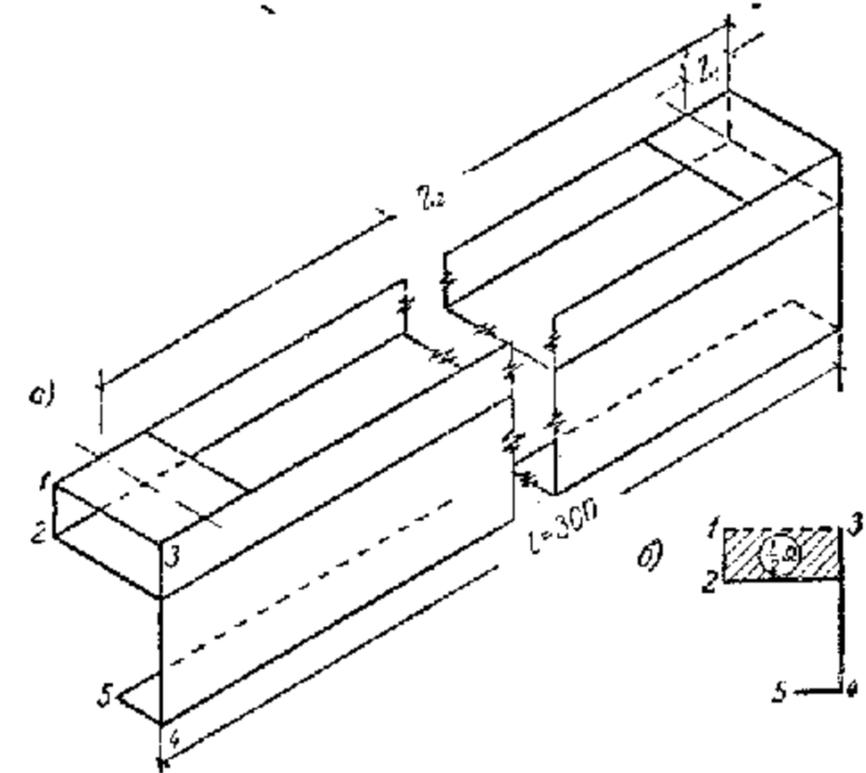


Рис. 120.

коэффициентов уравнений (2.1) содержит в качестве множителя величину GJ_d , то вместо $\bar{\delta}_{11}$ и $\bar{\delta}_{22}$ удобнее вычислять $GJ_d \bar{\delta}_{11}$ и $GJ_d \bar{\delta}_{22}$.

Находим последовательно:

$$\left. \begin{aligned} I &= \delta d = 6,0 \text{ см}^2, \\ J &= \frac{\delta d^3}{12} = 50,0 \text{ см}^4, \\ GJ_d \bar{\delta}_{11} &= GJ_d \bar{\delta}_{22} = J_d \left(\frac{a^3}{2,5 \cdot 12J} + \frac{1,2a}{F} \right) = 19,82^* \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Удвоенная величина площади, заключенной между контуром сечения и замыкающей планкой, равна (рис. 120, б):

$$\Omega = 113,5 \text{ см}^2.$$

При ширине планок $d = 10$ см мы должны считать, что одна планка присоединена к стержню в сечении $z = z_1 = 5$ см, а другая планка присоединена в сечении $z = z_2 = 295$ см.

* Во всех вычислениях силы берутся в кг, а длины в см.

Коэффициенты δ_{ik} , вычисляемые по формуле (2.11), для данного случая будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{\Omega^2}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_1) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_1}{\operatorname{sh} k} - 1 \right], \\ \delta_{22} &= \frac{\Omega^2}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_2) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_2}{\operatorname{sh} k} - 1 \right], \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{\Omega^2}{GJ_d} \frac{1}{l} \left[k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_2) \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_1}{\operatorname{sh} k} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

При длине прогона $l = 300$ см и значении $k = 6,782$ (§ 5 гл. II) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_1) &= \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_2 = 393,8, \\ \operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_2) &= \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_1 = 1,006, \\ \operatorname{sh} k &= 440,9, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} GJ_d \delta_{11} &= GJ_d \delta_{22} = 218,8, \\ GJ_d \delta_{12} &= GJ_d \delta_{21} = -42,26. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Наконец, коэффициенты δ_{iq} , играющие в уравнениях (2.1) роль свободных членов, на основании формул (2.7) и (5.9) гл. II, для данного вида граничных условий вычисляются по формуле

$$\delta_{iq} = -\Omega \frac{1}{GJ_d} \frac{ml}{k} \left[\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_i \right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_i \right)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right]. \quad (2.15)$$

В нашем случае будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1q} &= -\Omega \frac{1}{GJ_d} \frac{ml}{k} \left[\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_1 \right)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right], \\ \delta_{2q} &= -\Omega \frac{1}{GJ_d} \frac{ml}{k} \left[\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_2 \right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_2 \right)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}} \right]. \end{aligned} \right\}$$

Так как в случае равномерно распределенной внешней нагрузки $q = 9$ кг/см и эксцентриситете ее приложения $e = -7,11$ см, интен-

сивность крутящего момента имеет значение $m = -63,99$ кг и

$$\begin{aligned} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) &= -\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_2 \right) = 3,278, \\ \operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) &= -\operatorname{sh} \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z_2 \right) = 13,24, \\ \operatorname{ch} \frac{k}{2} &= 14,86, \end{aligned}$$

то получим

$$GJ_d \delta_{1q} = -GJ_d \delta_{2q} = 766800. \quad (2.16)$$

Система уравнений (2.1) на основании (2.12), (2.14) и (2.16) будет иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 238,6Z_1 - 42,26Z_2 &= -766800, \\ -42,26Z_1 + 238,6Z_2 &= 766800. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Решение этой системы дает для сил Z_1 и Z_2 , заменяющих действие плашек на стержень, следующие значения:

$$-Z_1 = Z_2 = 2730 \text{ кг.}$$

Как и следовало ожидать, в силу симметрии задачи силы эти равны по абсолютной величине и обратны по знаку. Этим силам соответствуют внешние бимоменты \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , приложенные к стержню в тех же сечениях и определяемые формулами:

$$\bar{B}_1 = Z_1 \Omega, \quad \bar{B}_2 = Z_2 \Omega.$$

Обозначая абсолютную величину этих бимоментов через \bar{B} , получим

$$\bar{B} = -\bar{B}_1 = -Z_1 \Omega = \bar{B}_2 = Z_2 \Omega = 309800 \text{ кг}\cdot\text{см}^2. \quad (2.18)$$

Теперь мы можем выяснить, как влияют планки на напряжения от кручения и на деформацию, возникающие в стержне под действием внешней нагрузки. Напряжения будем рассматривать в середине пролета, где они при нашей нагрузке (суммарные от изгиба и кручения) будут наибольшими. Так как нормальные напряжения от кручения определяются формулой

$$\sigma_{\tau} = \frac{B(z)}{J_{\omega}} \omega(s),$$

и величины $\omega(s)$ и J_{ω} , как известно, зависят только от формы профильной линии стержня, а влияние нагрузки определяется только величиной бимоменты $B(z)$ в интересующем нас сечении $z = \text{const}$, то для решения поставленного вопроса нет нужды сравнивать напряжения σ_{τ} , а достаточно ограничиться сравнением бимоментов $B(z)$, что мы и сделаем.

При отсутствии плашек на концах стержня бимомент от внешней нагрузки (в нашем случае — внешнего закручивающего

момента интенсивности $m = -63,99 \text{ кг}$, равномерно распределенного по длине стержня) будет определяться формулой (5.9) гл. II:

$$B_q(z) = m \frac{l^2}{k^2} \left[1 - \frac{\text{ch } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right],$$

в частности, при $z = \frac{l}{2}$ будем иметь:

$$B_q \left(\frac{l}{2} \right) = m \frac{l^2}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right) = -116800 \text{ кг} \cdot \text{см}^2. \quad (2.19)$$

При наличии плашек на концах стержня бимомент от воздействия той же нагрузки получится прибавлением к бимоменту (2.19) величины бимомента от воздействия внешних сосредоточенных бимоментов \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , заменяющих собой действие плашек на стержень.

Бимомент в любом сечении $z > z_1$ от воздействия внешнего бимомента \bar{B}_1 , приложенного в сечении $z_1 = \text{const}$, выражается третьей формулой (7.2) гл. II:

$$B(z) = -GJ_d \theta'_0 \frac{l}{k} \text{sh } \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \text{sh } \frac{k}{l} z - \bar{B}_1 \text{ch } \frac{k}{l} (z - z_1), \quad (2.20)$$

где θ'_0 и H_0 на основании (7.1) гл. II имеют вид:

$$\theta'_0 = \frac{\bar{B}_1}{GJ_d l} \left[1 - k \frac{\text{ch } \frac{k}{l} (l - z_1)}{\text{sh } k} \right]; \quad H_0 = \frac{\bar{B}_1}{l}.$$

Бимомент в любом сечении $z < z_2$ от воздействия внешнего бимомента \bar{B}_2 , приложенного в сечении $z_2 = \text{const}$, выражается третьей формулой (7.3) гл. II:

$$B(z) = -GJ_d \theta'_0 \frac{l}{k} \text{sh } \frac{k}{l} z + H_0 \frac{l}{k} \text{sh } \frac{k}{l} z, \quad (2.21)$$

где θ'_0 и H_0 на основании (7.1) гл. II имеют вид:

$$\theta'_0 = \frac{\bar{B}_2}{GJ_d l} \left[1 - k \frac{\text{ch } \frac{k}{l} (l - z_2)}{\text{sh } k} \right]; \quad H_0 = \frac{\bar{B}_2}{l}.$$

Объединяя формулы (2.20) и (2.21), принимая во внимание формулы (2.18) и выполняя несложные преобразования над гиперболическими функциями, получим формулу для бимомента в любом сечении $z_1 < z < z_2$ от воздействия внешних бимоментов \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , заменяющих действие обеих плашек на стержень:

$$B_{\text{пл}}(z) = -\frac{\bar{B}}{\text{sh } k} \text{ch } \frac{k}{l} z_1 \left[\text{sh } \frac{k}{l} z + \text{sh } \frac{k}{l} (l - z) \right]. \quad (2.22)$$

При $z = \frac{l}{2}$ (в середине пролета) этот бимомент будет иметь следующее значение:

$$B_{\text{пл}} \left(\frac{l}{2} \right) = 2\bar{B} \frac{\text{sh } \frac{k}{2}}{\text{sh } k} \text{ch } \frac{k}{l} z_1 = \bar{B} \frac{\text{ch } \frac{k}{l} z_1}{\text{ch } \frac{k}{2}}, \quad (2.23)$$

так как $\text{ch } \frac{k}{l} (l - z_2) = \text{ch } \frac{k}{l} z_1$.

Подставляя в (2.23) значения \bar{B} по (2.13) и значения

$$\text{ch } \frac{k}{2} = 14,86, \quad \text{ch } \frac{k}{l} z_1 = 1,006,$$

получим

$$B_{\text{пл}} \left(\frac{l}{2} \right) = 20980 \text{ кг} \cdot \text{см}^2. \quad (2.24)$$

Сравнивая (2.19) и (2.24), мы видим, что планки снижают величину бимомента в середине пролета, а следовательно, и величину продольных напряжений $\sigma_{\text{ср}}$ от кручения на $18\%_0$. Сами же планки при ширине каждой $d = 10 \text{ см}$ и общем пролете стержня $l = 300 \text{ см}$ закрывают всего $1/15$ часть пролета.

На рис. 121, а представлены графики бимомента при отсутствии плашек на концах и при наличии плашек.

Посмотрим теперь, как те же планки влияют на деформацию поперечных сечений стержня. Избегая лишних вычислений, мы будем рассматривать и сравнивать не сами относительные деформации $\theta'(z)$, а величины, отличающиеся от них только постоянным множителем GJ_d , а именно: $GJ_d \theta'(z)$. Следовательно, говоря о деформации, будем рассматривать пропорциональный ей крутящий момент.

При действии внешней нагрузки m на стержень, не усиленный планками, на основании (5.9) гл. II для нашего случая имеем

$$GJ_d \theta'_q(z) = m \frac{l}{k} \left[\frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right) - \frac{\text{sh } \frac{k}{l} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right]. \quad (2.25)$$

Как видно из формулы (2.5), относительная деформация равна нулю в середине пролета ($z = \frac{l}{2}$) и достигает наибольших значений по абсолютной величине на концах стержня при $z = 0$ и $z = l$; в силу симметрии деформации на концах стержня равны по абсолютной величине и обратны по знаку.

В нашем примере получим следующее значение для деформации при $z = 0$:

$$GJ_d \theta'_q(0) = m \frac{l}{k} \left(\frac{k}{2} - \frac{\text{sh } \frac{k}{2}}{\text{ch } \frac{k}{2}} \right) = -6774 \text{ кгсм}, \quad (2.26)$$

Относительная деформация от действия внешних бимоментов \bar{B}_1 и \bar{B}_2 , заменяющих собой действие на стержень двух концевых пла-

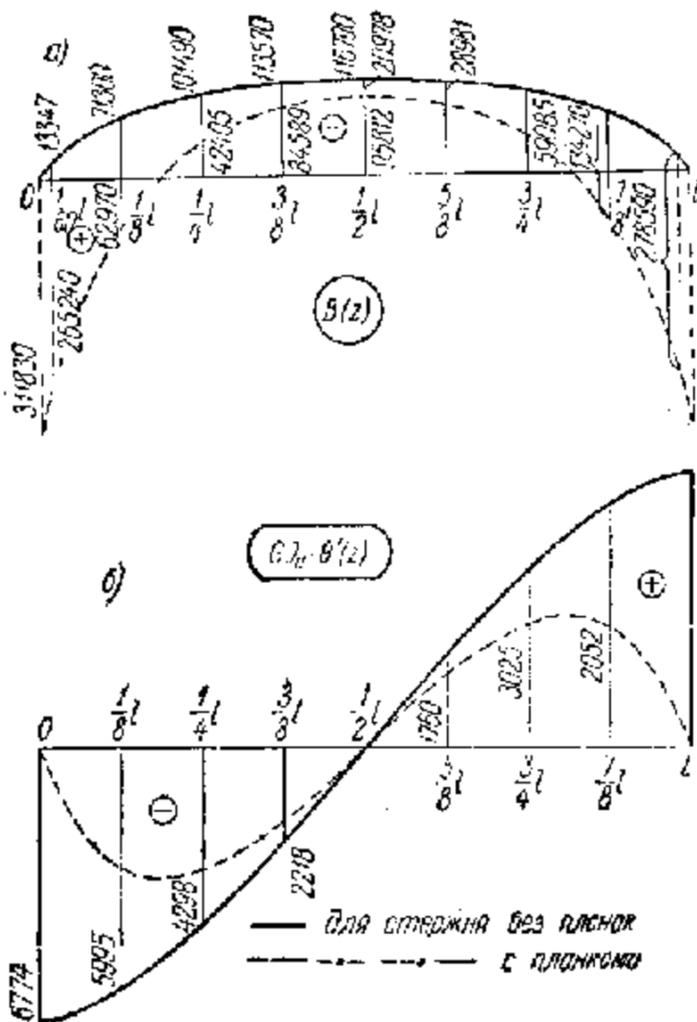


Рис. 121

нок, будет вычисляться для $z_1 < z < z_2$ по формулам (7.2) гл. II:

$$GJ_d \theta'_{пл}(z) = GJ_d \theta'_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - H_0 \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right),$$

где на основании (7.1) гл. II

$$GJ_d \theta'_0 = \frac{\bar{B}_1}{l} \left[1 - k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_1)}{\operatorname{sh} k} \right] + \frac{\bar{B}_2}{l} \left[1 - k \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} (l - z_2)}{\operatorname{sh} k} \right],$$

$$H_0 = \frac{\bar{B}_1}{l} + \frac{\bar{B}_2}{l}.$$

Для конца стержня $z = 0$ при соблюдении (2.18) мы будем иметь

$$GJ_d \theta'_{пл}(0) = \bar{B} \frac{k}{l} \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{l} z_2 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z_1}{\operatorname{sh} k},$$

что в данном конкретном случае дает:

$$GJ_d \theta'_{пл}(0) = 6240 \text{ кгсм.} \quad (2.27)$$

Сравнивая (2.27) с (2.26), мы видим, что планки шириной $d = 10 \text{ см}$, расположенные на концах стержня (условно отнесенные к сечениям z_1 и z_2), уменьшают деформацию на концах стержня на 92%. Если бы мы не учитывали податливости планок, пренебрегая в уравнениях (2.17) составляющими (2.12), то получали бы для $GJ_d \theta'_{пл}(0)$ более близкое по абсолютной величине к (2.26) значение, а именно:

$$GJ_d \theta'_{пл}(0) = 6714 \text{ кгсм,}$$

что составляет по абсолютному значению 99% от $GJ_d \theta'_0(0)$.

В сечениях же $z = z_1$ и $z = z_2$ при наличии жестких планок деформация от нагрузки вообще отсутствует, так как деформации от нагрузки и от влияния планок равны по абсолютной величине и обратны по знаку и, следовательно, в сумме дают нуль.

На рис. 121, б представлен график изменения величины $GJ_d \theta'(z)$ как для стержня, усиленного на концах планками, так и для свободного от планок. Из этого графика видно, как сильно сказывается на деформации поперечного сечения стержня наличие только двух планок на концах стержня.

На примере фахверкового прогона удобно выяснить еще один вопрос, а именно: произойдет ли существенное изменение в работе стержня, если планками мы соединим не кромки 1 и 3, как мы это делали выше, а другие кромки, например 2 и 5. Площадь замкнутого контура в этом случае значительно отличается от площади замкнутой части в первом случае, рассмотренном выше, и имеет следующее значение:

$$\Omega = 192,8 \text{ см}^2$$

(числовые данные приведены на рис. 40, а).

Пусть планки по длине стержня расположены в тех же местах, что и ранее, и поперечные размеры планок — ширина и толщина — будут прежние. Посмотрим, какие изменения произойдут в коэффициентах уравнений (2.17) и как изменится результат решения.

Вследствие изменения длины планки (теперь $a = 13,37 \text{ см}$) изменится величина коэффициента $\bar{\delta}_{пл}$, вычисляемого по формуле (2.12); для нашего случая получаем

$$GJ_d \bar{\delta}_{11} = GJ_d \bar{\delta}_{22} = 26,33. \quad (2.28)$$

Вследствие изменения площади Ω , величина коэффициентов $\bar{\delta}_{пл}$, вычисляемых по формулам (2.13), увеличится по сравнению с (1.14) в $\frac{192,8^2}{113,5^2} = 2,9$ раза (пропорционально отношению квадратов площадей Ω ,

так как все прочие величины, входящие в состав этих коэффициентов, не меняются). Новые значения коэффициентов будут:

$$\left. \begin{aligned} GJ_d \delta_{11} = GJ_d \delta_{22} = 631,3, \\ GJ_d \delta_{12} = GJ_d \delta_{21} = -122,0. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Наконец, коэффициенты δ_{iq} (2.16) увеличатся по сравнению с (2.17) в $\frac{192,8}{113,5} = 1,7$ раза (пропорционально отношению площадей Ω) и будут теперь равны

$$GJ_d \delta_{iq} = -GJ_d \delta_{2q} = 1303000.$$

Вместо системы (2.17) теперь будем иметь такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 657,6Z_1 - 122,0Z_2 = -1303000, \\ -122,0Z_1 + 657,6Z_2 = 1303000. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Для Z_1 и Z_2 получим следующие значения:

$$-Z_1 = Z_2 = 1671 \text{ кг},$$

а для бимоментов, соответствующих этим силам и заменяющих собою действие на стержень планок, получим

$$\bar{B} = -\bar{B}_1 = -Z_1 \Omega = \bar{B}_2 = Z_2 \Omega = 322100 \text{ кгсм}^2. \quad (2.31)$$

Сравнивая результаты (2.31) и (2.18), мы замечаем, что посмотрев на кажущееся большое различие в коэффициентах систем (2.17) и (2.30), бимоменты, заменяющие собою действие на стержень планок, во втором случае примерно на два процента превышают результат, полученный в первом случае. Это станет понятным, если мы, рассматривая, например, систему (2.17), предположим, что планки, усиливающие стержень, абсолютно жестки. При таком предположении мы должны, очевидно, считать, что коэффициенты δ_{11} и δ_{22} , учитывающие податливость планок, равны нулю. Тогда система уравнений (2.17) в качестве коэффициентов будет содержать только δ_{ik} (2.13), имеющие в качестве множителя Ω^2 и коэффициенты δ_{iq} , содержащие множителем Ω , как видно из (2.15).

Если в качестве неизвестных в этой системе принять теперь не Z_1 и Z_2 , а $B_1 = Z_1 \Omega$ и $B_2 = Z_2 \Omega$, то вся система уравнений (2.17) может быть сокращена на Ω и коэффициенты уравнений (2.17), а следовательно, и результат решения ее, не будут зависеть от площади Ω , которая образуется в стержне благодаря наличию планок. Отсюда заключаем, что если считать планки абсолютно жесткими, то совершенно безразлично, какая замкнутая область в стержне образуется в месте присоединения планки — большая или малая.

То, что в выше разобранным примере мы получили небольшое расхождение в результатах (2.31) и (2.18), объясняется тем, что мы учи-

тывали упругость планок, а длина планок хотя и незначительно, но отличается в обоих случаях при прочих равных условиях; во-вторых, даже если бы планки и были одинаковой длины, все же их удельный вес в составе коэффициентов (там, где δ_{ii} суммируется с δ_{ii}) будет различным при разных Ω , как это легко увидеть из сопоставления (2.12) и (2.14) с соответствующими им выражениями (2.28) и (2.29). В разобранным нами конкретном примере даже большая разница в площадях Ω практически незначительно сказалась на результатах, но проведенный анализ поможет читателю судить и в других случаях о целесообразном расположении планок.

Изложенная в данном параграфе теория учета планок, приведенный численный пример и графики, представленные на рис. 121, показывают, что наличие планок в значительной степени влияет на напряженное и деформированное состояние тонкостенного стержня.

§ 3. Стержни, усиленные часто расположенными планками и раскосами

Рассмотрим задачу о пространственном расчете конструкции типа тонкостенного стержня-оболочки открытого профиля, усиленной в какой-либо продольной плоскости поперечными связями (планками, раскосами и т. п.). Предположим, что эти поперечные связи, в отличие от задачи, рассмотренной в § 2, часто расположены вдоль стержня. Схемы таких конструкций с швеллером в качестве основного тонкостенного стержня-оболочки представлены на рис. 122.

Будем рассматривать такую конструкцию как комбинированную пространственную систему, состоящую из тонкостенного стержня-оболочки и упругой приведенной ортотропной пластинки, эквивалентной

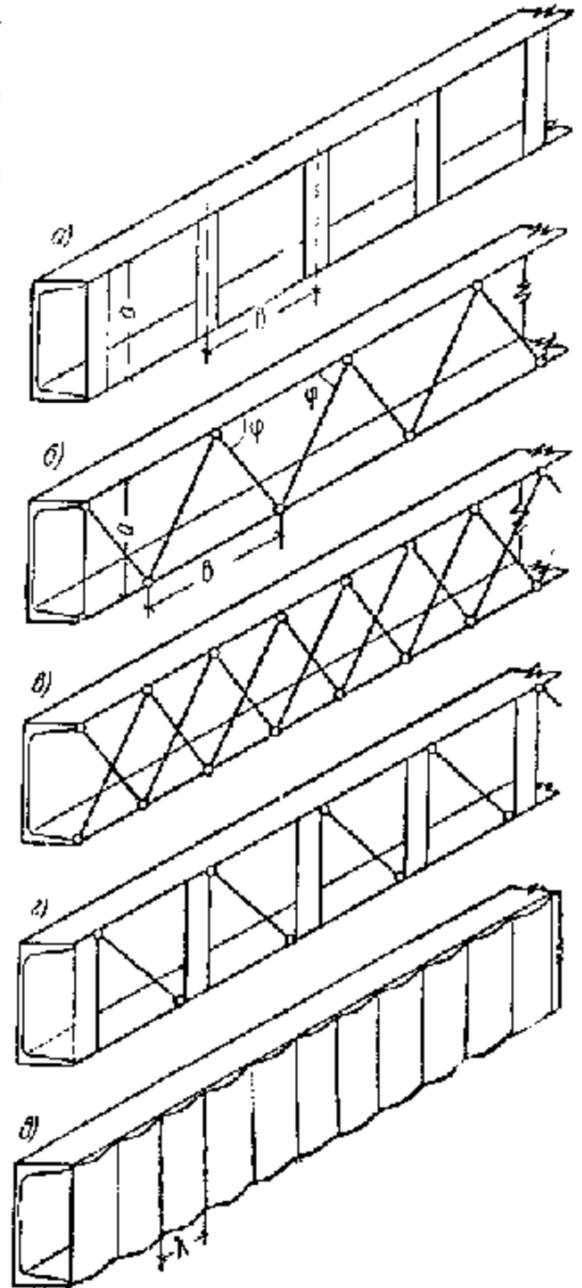


Рис. 122.

по своим механическим свойствам поперечным связям*) (рис. 123). Проводя мысленно разрез по линии присоединения приведенной пластинки к стержню-оболочке, мы должны действие этой пластинки на стержень заменить сдвигающими силами (рис. 124, а). Обозначим сдвигающие силы, приходящиеся на единицу длины, через $T(z)$.

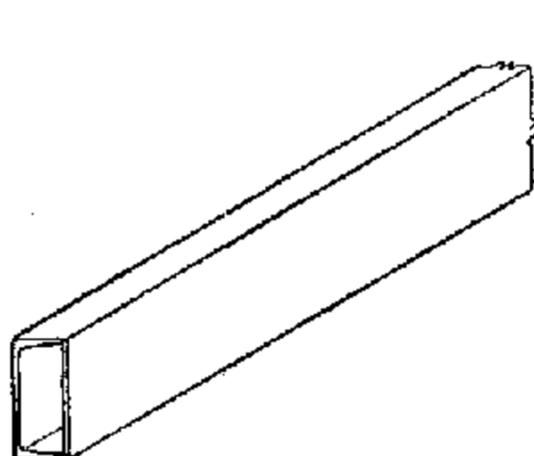


Рис. 123.

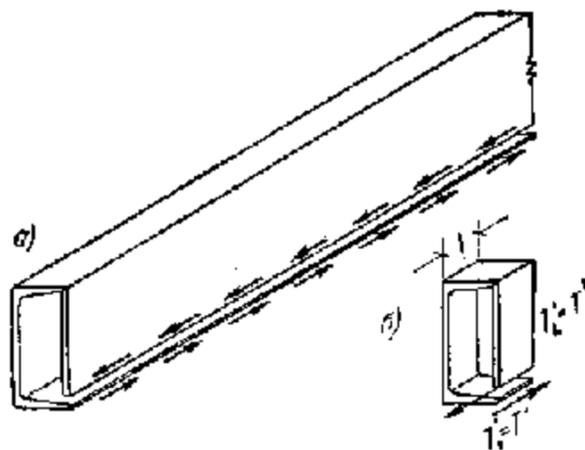


Рис. 124.

Обратимся к дифференциальным уравнениям равновесия стержня в главных координатах (7.2) гл. I. Перепишем эти уравнения для случая действия на стержень только поперечной погонной нагрузки и сдвигающих сил, приложенных по продольным краям стержня:

$$\left. \begin{aligned} EF\zeta'''' &= T_K - T_D \\ EJ_y\zeta'''' &= q_x + T_L x_L - T_K x_K \\ EJ_x\zeta'''' &= q_y + T_L y_L - T_K y_K \\ EJ_\omega\theta'''' - GJ_d\theta'' &= m + T_L\omega_L - T_K\omega_K \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Выделим из стержня с разрезом (рис. 124, а) в сечении $z = \text{const}$ элементарную поперечную полоску единичной ширины (рис. 124, б). На линии разреза мы, очевидно, имеем:

$$T(z) = T_K(z) = T_L(z). \quad (3.2)$$

Пусть, как это показано в § 2, Ω — удвоенная площадь замкнутого контура, образованного в поперечном сечении профильной линией стержня и условной пластинки**). Используя (3.2), запишем дифферен-

*) Под ортотропной пластинкой мы условимся понимать пластинку, обладающую разными свойствами по отношению к растяжению, сдвигу, изгибу. В данном случае ортотропность выражается в том, что пластинка работает только на сдвиг и не воспринимает растягивающих напряжений.

***) Считаю уместным подчеркнуть, что пластинка, о которой идет речь, называется нами условной и по своим механическим свойствам она эквивалентна поперечным связям, которые работают только на сдвиг.

Что касается условий ортогональности, то эти условия выражают ортогональность осей l, x, y, ω , по закону которых меняются нормальные напря-

жальные уравнения равновесия (3.1) применительно к данному случаю в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} EF\zeta'''' &= 0, \\ EJ_y\zeta'''' &= q_x, \\ EJ_x\zeta'''' &= q_y, \\ EJ_\omega\theta'''' - GJ_d\theta'' &= m + T'\Omega. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Здесь, как и ранее, T' обозначает производную от сдвигающей силы T по переменной z .

Сопоставляя систему дифференциальных уравнений (3.3) с ранее полученной системой (7.3) гл. I, мы видим, что наличие условной упругой пластинки, действие которой на стержень мы заменили сдвигающими силами T , совершенно не отражается на первых трех уравнениях системы, которые относятся к растяжению (сжатию) и изгибу в двух плоскостях; четвертое же уравнение системы, относящееся к кручению стержня, отличается от ранее полученного наличием добавочного члена $T'\Omega$.

Этим членом, как нетрудно видеть, для оболочки закрытого профиля учитывается дополнительный крутящий момент m_T от сдвигающих усилий $T = T(z)$, равномерно распределенных в поперечном сечении $z = \text{const}$ на линии профиля. Действительно, для крутящего момента H_T какого-либо сечения $z = \text{const}$ от сдвигающих усилий T получаем значение

$$H_T = \oint T h ds, \quad (3.4)$$

где $h = h(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного на направление, касательное к линии профиля; интеграл в формуле вычисляется для всего замкнутого профиля. Так как $T = T(z)$ зависит только от z и $h ds = d\omega$, то из формулы (3.4) для H_T получаем значение

$$H_T = T\Omega, \quad (3.5)$$

где Ω — удвоенная площадь, заключенная внутри замкнутого профиля. Интенсивность m_T крутящего момента получится как производная от H_T :

$$m_T = H_T' = T'\Omega.$$

Нам нужно теперь сдвигающую силу T равномерного потока выразить через деформацию кручения тонкостенного стержня закрытого профиля. Для решения этой задачи будем исходить из уравнения упругости

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G\delta}. \quad (3.6)$$

Потому поперечные связи как связи, работающие на сдвиг, очевидно, не будут влиять на геометрические характеристики сечения стержня, все условия ортогональности остаются в силе и мы вправе пользоваться уравнениями равновесия в главных координатах (7.2) гл. I.

Здесь, как и ранее, $u = u(z, s)$ и $v = v(z, s)$ — перемещения точки срединной цилиндрической поверхности, направленные соответственно вдоль образующей и по касательной к профильной линии; G — модуль сдвига; δ — толщина оболочки, которая может быть и переменной, в сечении $z = \text{const}$. Уравнение (3.6) для стержня-оболочки с жестким профилем принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{T}{G\delta} - k\psi.$$

Из этого уравнения находим:

$$u = \int_0^s \frac{T}{G\delta} ds - \psi\omega(s) + U_0(z),$$

где $U_0(z)$ — произвольная функция интегрирования, представляющая собой продольное перемещение начальной точки, от которой ведется отсчет координаты s и секторальной площади $\omega(s)$. Так как продольное перемещение $u = u(z, s)$ должно во всех точках замкнутого профиля удовлетворять условию непрерывности, то мы будем иметь уравнение

$$\oint \frac{T}{G\delta} ds - \psi\Omega = 0,$$

где интеграл берется по всему замкнутому контуру. Считая в этом уравнении $T = T(z)$ не зависящим от s , получим

$$\partial_T T = \Omega \psi'. \quad (3.7)$$

Здесь коэффициент ∂_T представляет собою взаимное продольное перемещение концов разрезанной элементарной поперечной полоски оболочки при действии в этом разрезе сдвигающей силы, равной единице. Для этого коэффициента в случае оболочки закрытого профиля получаем формулу

$$\partial_T = \frac{1}{G} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (3.8)$$

В случае рассматриваемой здесь комбинированной системы, имеющей в поперечном сечении также закрытый профиль и состоящей из оболочки и приведенной ортотропной пластинки, коэффициент ∂_T может быть вычислен по формуле

$$\partial_T = \frac{1}{G} \int \frac{ds}{\delta} + \delta_{\text{ин}}.$$

Здесь интеграл первого слагаемого представляет собой определенный интеграл, распространенный на часть профиля, относящуюся собственно к тонкостенному стержню; $\delta_{\text{ин}}$ — продольное взаимное перемещение от силы $T = 1$, происходящее только от упругой податливости приведенной ортотропной пластинки.

Считая, что тонкостенный стержень не работает на сдвиг [как мы это приняли в исходных геометрических гипотезах (§ 2, гл. I)], т. е.

полагая в последней формуле для интеграла, распространяющегося только на профиль стержня, модуль сдвига $G = \infty$, получим

$$\partial_T = \delta_{\text{ин}}.$$

Таким образом, взаимное продольное смещение концов разрезанной поперечной полоски происходит вследствие работы на сдвиг одной лишь упругой ортотропной пластинки.

Из формулы (3.7) получим следующее выражение для сдвигающей силы $T(z)$:

$$T(z) = \frac{\Omega}{\partial_T} \psi'(z). \quad (3.9)$$

В этой формуле как Ω , так и ∂_T не зависят от координаты z ; поэтому производная от сдвигающей силы T по переменной z , входящая в состав четвертого уравнения системы (3.3), может быть представлена в виде:

$$T' = \frac{\Omega}{\partial_T} \psi''(z)$$

и, следовательно,

$$\Omega T' = \frac{\Omega^2}{\partial_T} \psi''(z). \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$\frac{\Omega^2}{\partial_T G} = \bar{J}_a. \quad (3.11)$$

Тогда формула (3.10) примет вид

$$\Omega T' = \bar{G} \bar{J}_a \psi''(z).$$

Воспользовавшись последним выражением, перепишем дифференциальное уравнение кручения системы (2.3) в следующей форме:

$$EJ_a \psi^{IV} - G(J_a + \bar{J}_a) \psi'' = m. \quad (3.12)$$

Мы видим, что уравнение (3.12) идентично уравнению (2.1) гл. II, и поэтому всё, что относится к решению уравнения (2.1) гл. II для стержней открытого профиля, можно использовать при решении аналогичных задач, относящихся к тонкостенному стержню, усиленному поперечными связями, перечисленными в начале этого параграфа. Для этого необходимо в тех формулах, где фигурирует момент инерции тонкостенного стержня при чистом кручении J_a , заменять его суммой $J_a + \bar{J}_a$, где \bar{J}_a — вычисляемый по формуле (3.11), но аналогично с J_a можно назвать *моментом инерции при кручении тонкостенного стержня с поперечными связями*. В частности, для характеристического числа k , вычислявшегося по формуле (2.2) гл. II, теперь нужно применить формулу

$$k = 1 \sqrt{\frac{G(J_a + \bar{J}_a)}{EJ_a}}.$$

Вместо формулы (5.7) гл. I для крутящего момента H_k , возникающего при чистом кручении, нужно пользоваться формулой

$$H_k = G(J_d + \bar{J}_d)\theta'.$$

Приведем формулы коэффициентов δ_T и соответствующих им моментов инерции \bar{J}_d для наиболее часто встречающихся видов поперечных связей.

а) Для случая, представленного на рис. 122, *а*, когда связи представлены упругой ортотропной пластинкой, работающей только на сдвиг, для коэффициента δ_T будем иметь формулу

$$\delta_T = \frac{a}{G\delta},$$

где a , δ и G — соответственно ширина, толщина и модуль сдвига пластинки. Момент инерции \bar{J}_d вычисляется по формуле (3.11).

б) Для случая, когда поперечные связи представлены поперечными планками прямоугольного сечения, равномерно распределенными по пролету (рис. 122, *а*) и работающими не только на сдвиг, но и на изгиб из плоскости поперечного сечения стержня, мы получим для δ_T следующее выражение:

$$\delta_T = \frac{ab}{G} \left(\frac{a^2 G}{12EJ_{пл}} + \frac{1,2}{F_{пл}} \right), \quad (3.13)$$

где a — длина планки, b — шаг (расстояние между планками), E и G — модули упругости планки, $F_{пл}$ и $J_{пл}$ — площадь поперечного сечения и момент инерции одной планки.

Формула (3.13) получается из формулы (2.3) введением множителя b , поскольку мы как бы приводим дискретно-поставленные поперечные связи к сплошной условной упругой пластинке, для которой перемещения δ_T от сдвигающей силы $T=1$ будут, очевидно, в b раз больше, чем для сплошной упругой пластинки, поперечное сечение которой равно продольному сечению планки.

Момент инерции \bar{J}_d в этом случае определяется по формуле

$$\bar{J}_d = \frac{\Omega^2}{\delta_T G} = \frac{\Omega^2}{ab} \cdot \frac{1}{\frac{a^2 G}{12EJ} + \frac{1,2}{F}}. \quad (3.14)$$

в) В случае, когда поперечные связи осуществлены в виде раскосов, наклоненных под углом φ к продольному краю (рис. 122, *б*), выражение для δ_T будет иметь вид:

$$\delta_T = \frac{a^2}{EF \sin^2 \varphi \cos \varphi}, \quad (3.15)$$

где a — высота прогона, F — площадь поперечного сечения раскоса, E — модуль продольной упругости раскоса.

Эта формула получается следующим образом (рис. 125). Если стержень-раскос AB удлинился так, что точка A осталась на месте, а

точка B сместилась в положение B' на величину δ , то возникающее при такой деформации растягивающее усилие в стержне равно

$$N = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{a} EF \delta.$$

Проекция этого усилия на направление перемещения δ равна

$$N \cos \varphi = \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{a} EF \delta.$$

Для сдвигающего усилия, приходящегося на единицу длины стержня, получим:

$$S = \frac{N \cos \varphi}{a \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{EF \cos \varphi \sin^2 \varphi}{a^2} \delta,$$

откуда и получается формула (3.15);

\bar{J}_d вычисляется по формуле

$$\bar{J}_d = \frac{E}{G} \frac{\Omega^2}{a^2} F \sin^2 \varphi \cos \varphi. \quad (3.16)$$

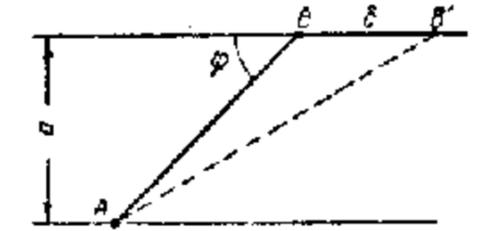


Рис. 125.

г) Для случая перекрестной решетки (рис. 122, *в*), если раскосы работают только на растяжение, остаются предыдущие формулы (3.15) и (3.16).

Если же раскосы работают и на растяжение, и на сжатие, то формулы принимают вид:

$$\delta_T = \frac{a^2}{2EF \sin^2 \varphi \cos \varphi}, \quad \bar{J}_d = \frac{2\Omega^2 EF}{a^2 G} \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

д) В случае поперечных связей, представляющих комбинацию из предыдущих связей (см., например, рис. 122, *г*), получим формулы для δ_T суммированием соответствующих, ранее полученных значений.

На том же примере фахверкового прогона, который неоднократно приводился, проиллюстрируем применение изложенного метода расчета. На рис. 126 приведены графики изменения по длине пролета бимоментов $B(z)$ и крутящих моментов $G(J_d + \bar{J}_d)\theta'(z)$ для фахверкового прогона при нагрузке и граничных условиях таких же, как в ранее приведенном (§ 2) примере, для случая, когда стержень усилен 10 планками, равномерно распределенными по его длине.

Размеры планок такие же, как в § 2: длина $a = 11,28$ см, толщина $\delta = 0,6$ см, ширина $d = 10$ см, удвоенная площадь внутри замкнутого контура, образуемого в месте присоединения планки, $\Omega = 113,48$ см², шаг планок $b = 32,22$ см.

В этом случае получаем:

$$J_d = 124,4 \text{ см}^4, \quad J_d + \bar{J}_d = 130,6 \text{ см}^4, \quad k = 31,20.$$

Здесь, как и в § 5 гл. II, принято $G = 0,4 E$.

Если тот же стержень усилен 10 раскосами по схеме, представленной на рис. 122, *б*, то, полагая площадь поперечного сечения

раскоса $F = 1 \text{ см}^2$, шаг $b = 30 \text{ см}$ и $\varphi = 20^\circ 36'$, получим:

$$\bar{J}_d = 29,32 \text{ см}^2, \quad k = 16,27.$$

Графики изменения по длине пролета бимомента $B(z)$ и крутящего момента $G(J_d + \bar{J}_d)\theta'(z)$ будут иметь такой же вид, как и на

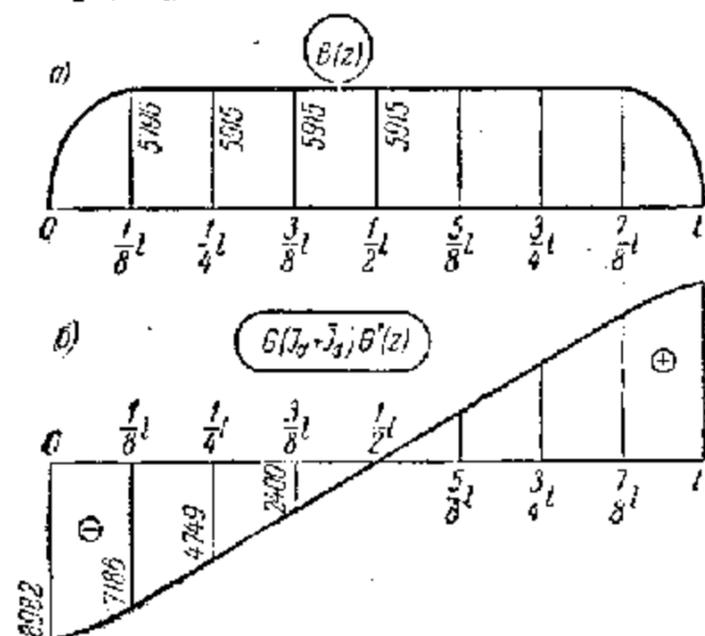


Рис. 126.

рис. 126, а максимальные ординаты будут соответственно равны:

$$B\left(\frac{l}{2}\right) = -21\,770 \text{ кгсм}^2,$$

для крутящего момента на концах стержня

$$G(J_d + \bar{J}_d)\theta'(l) = -G(J_d + \bar{J}_d)\theta'(0) = 8418 \text{ кгсм}.$$

Чтобы судить об изменении величины относительной деформации в зависимости от вида поперечных связей, мы приведем величины $G\theta'(z)$ при $z = l$ для трех случаев:

1) для стержня, не усиленного поперечными связями,

$$G\theta'(l) = 1098 \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^2};$$

2) для стержня, усиленного 10 равномерно-распределенными по длине стержня планками,

$$G\theta'(l) = 68,78 \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^2};$$

3) для стержня, усиленного 10 раскосами,

$$G\theta'(l) = 237,2 \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^2}.$$

§ 4. Стержни, усиленные поперечными диафрагмами

1. Выведем формулы, позволяющие учесть влияние диафрагмы на работу тонкостенного стержня, причем, как и ранее, при выводе формул будем иметь в виду только кручение стержня, сопровождаемое деформацией сечения.

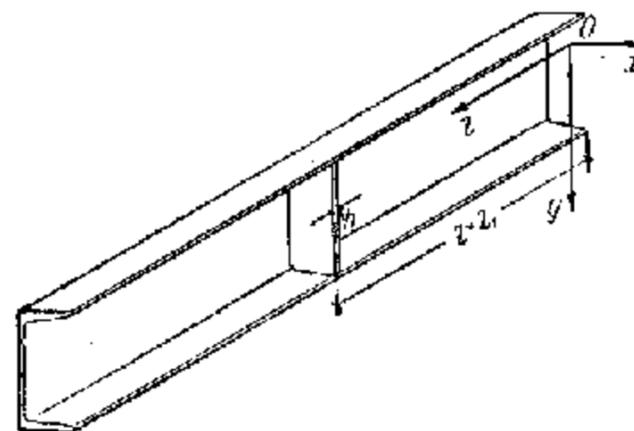


Рис. 127.

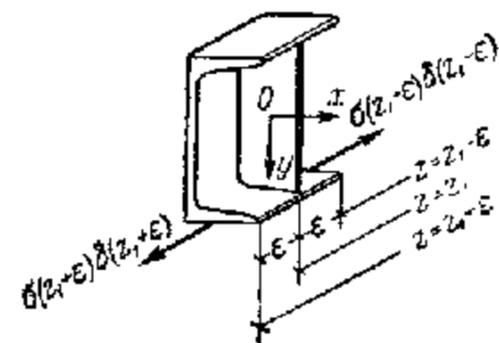


Рис. 128.

Предположим, что к стержню в сечении, расположенном на расстоянии z_1 от начального сечения, присоединена упругая поперечная диафрагма толщиной h (рис. 127).

Разрешая данную контактную задачу вариационным методом в смысле принципа возможных перемещений, выделим из тонкостенного стержня двумя поперечными сечениями $z = z_1 - \epsilon$ и $z = z_1 + \epsilon$ элементарную полоску, включающую диафрагму, отнесенную нами к поперечному сечению $z = z_1$ (рис. 128), и составим для этой полоски уравнение работ. За возможные перемещения возьмем продольные перемещения $u(z, s)$, причем, так как нас интересует только та часть перемещений, которая связана с деформацией сечения, то для определения этих перемещений будем пользоваться формулой (2.5):

$$u(z, s) = -\theta'(z) \omega(s). \tag{4.1}$$

В диафрагме возможными перемещениями будут прогибы $w(x, y)$ из плоскости пластинки-диафрагмы, направленные также вдоль оси Oz и возникающие при чистом кручении пластинки-диафрагмы.

Из условия неразрывности деформаций очевидно, что в местах присоединения диафрагмы к стержню должны выполняться условия

$$u(z_1, s) = w(x, y). \tag{4.2}$$

Приравняв работу внешних и внутренних сил на соответствующих возможных перемещениях нулю, получим:

$$-\int (\sigma_1 \delta) u(z_1, s) ds - \int (\sigma_2 \delta) u(z_1, s) ds + \iint 2D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx dy = 0. \tag{4.3}$$

Последнее слагаемое, выраженное двойным интегралом, который распространяется на всю поверхность пластинки-диафрагмы, представляет работу внутренних сил — крутящих моментов на соответствующих деформациях кручения. Это слагаемое получается следующим образом.

Из теории пластинок известно, что интенсивность крутящих моментов определяется по формуле

$$H_x = H_y = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки, h — толщина пластинки, μ — коэффициент Пуассона. Каждый из крутящих моментов H_x и H_y совершает работу на кривизне кручения $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Поскольку крутящие моменты и деформация кручения имеют разные знаки, а работа внутренних сил берется с отрицательным знаком, то, интегрируя работу крутящих моментов по всей площади пластинки, мы и получаем последнее слагаемое уравнения (4.3). Два первых слагаемых, представленных интегралами, распространенными на всё поперечное сечение тонкостенного стержня, относятся к работе внешних по отношению к нашей полоске сил на возможных продольных перемещениях $u(z_1, s)$. Такими силами для выделенного элемента стержня будут продольные нормальные силы поперечного сечения $(\sigma \delta)$, где δ — толщина тонкостенного стержня, а σ — продольное нормальное напряжение, которое мы обозначили для сечения $z = z_1 - \varepsilon$ через $(\sigma_1 \delta)$ и для сечения $z = z_1 + \varepsilon$ через $(\sigma_2 \delta)$. Представим эти интегралы в другом виде. Полагая $\delta ds = dF$ и пользуясь формулой (4.1), получим:

$$\int (\sigma \delta) u(z_1, s) ds = -\theta'(z_1) \int \sigma \omega(s) dF.$$

Так как $\int \sigma \omega dF = B$ представляет по определению бимомент, то будем иметь:

$$\int (\sigma \delta) u ds = -\theta'(z_1) B.$$

На этом основании два первых слагаемых можно заменить так:

$$\theta'(z_1 - \varepsilon) B_1 - \theta'(z_1 + \varepsilon) B_2, \quad (4.5)$$

где

$$B_1 = \int \sigma_1 \omega dF,$$

$$B_2 = \int \sigma_2 \omega dF,$$

и интегралы распространяются на всю площадь поперечного сечения стержня.

Относительно бимоментов B_1 и B_2 можно сказать следующее: при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при неограниченном сближении этих двух сечений и при отсутствии диафрагмы, в пределе будем иметь $B_2 = B_1 = 0$; при наличии же диафрагмы B_2 будет отличаться от B_1 на некоторую величину B — величину бимоента, отражающего влияние диафрагмы на стержень.

Таким образом, два первых слагаемых в выражении (4.3), записанные в форме (4.5), при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и при наличии в сечении $z = z_1$ диафрагмы можно представить в виде:

$$[\theta'(z_1 - \varepsilon) B_1 - \theta'(z_1 + \varepsilon) B_2]_{\varepsilon \rightarrow 0} = -\theta'(z_1) B, \quad (4.6)$$

где под B понимаем величину бимоента, заменяющего собою действие диафрагмы на стержень.

Учитывая (4.6), можем теперь (при $\varepsilon \rightarrow 0$) переписать формулу (4.3) следующим образом:

$$-\theta'(z_1) B + \iint 2D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = 0. \quad (4.7)$$

Остановимся на вычислении двойного интеграла, входящего в формулу (4.7). Из теории пластинок известно, что в случае чистого кручения пластинки перемещение w определяется формулой

$$w = Cxy, \quad (4.8)$$

где C — постоянная, определяемая соответствующими граничными условиями.

С другой стороны, в п. 6 § 7 гл. II мы доказали, что бимомент от любой продольной уравновешенной нагрузки, распределенной по сечению непрерывно или состоящей из сосредоточенных сил, не зависит от центра изгиба и начала отсчета секториальной площади. Поскольку действие диафрагмы на стержень и представляет собой такую уравновешенную систему сил, то при вычислении в формуле (4.1) секториальной площади $\omega(s)$ мы можем полюс секториальных площадей помещать где угодно.

Если, в частности, поместить полюс секториальных площадей в центре пластинки, а оси координат для пластинки выбрать проходящими через ее центр (рис. 128), то для вычисления $\omega(s)$ будем иметь формулу

$$\omega(s) = xy, \quad (4.9)$$

где x и y — координаты соответствующей точки профильной линии стержня*).

* Система координат для пластинки выбрана так, чтобы была справедлива формула (4.9). Координаты x и y , вообще говоря, не являются главными координатами. Формула (4.9) верна лишь в пределах профиля стержня.

Формулу (4.1) для возможного продольного перемещения перенишем теперь в следующей форме:

$$u(z, s) = -\theta'(z_1) xy. \quad (4.10)$$

Так как по линии пересечения профильной линии с плоскостью диафрагмы должны выполняться условия неразрывности деформаций (4.2), то, сопоставляя (4.10) с (4.8), мы находим, что

$$C = -\theta'(z_1),$$

и следовательно, для перемещений w пластинки-диафрагмы имеем:

$$w = -\theta'(z_1) xy. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в выражение (4.7) и замечая, что $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\theta'(z_1)$, а $\iint dx dy$ представляет площадь пластинки-диафрагмы, после сокращения на $\theta'(z_1)$ получим:

$$B = D(1 - \mu) \Omega \theta'(z_1), \quad (4.12)$$

где через Ω , как обычно, обозначена удвоенная площадь пластинки. Заменяя цилиндрическую жесткость D по формуле (4.4), представим формулу (4.12) в другом виде:

$$B = \frac{Eh^3 \Omega}{12(1 + \mu)} \theta'(z_1). \quad (4.13)$$

Это и есть формула бимоента, заменяющего действие диафрагмы на стержень; как видно из этой формулы, бимомент пропорционален относительной деформации стержня в поперечном сечении, где расположена диафрагма, с коэффициентом пропорциональности $\frac{Eh^3 \Omega}{12(1 + \mu)}$, зависящим от физических характеристик и размеров диафрагмы.

Таким образом, влияние поперечной диафрагмы, расположенной в сечении $z = z_k$, на работу тонкостенного стержня сводится к появлению в этом сечении дополнительного сосредоточенного продольного бимоента, заменяющего собой действие диафрагмы на стержень и определяемого формулой (4.13). Теперь уже нетрудно, пользуясь методом начальных параметров, написать общие формулы расчета на кручение тонкостенного стержня, усиленного поперечными диафрагмами на любую внешнюю нагрузку при произвольных граничных условиях.

Так, например, пользуясь табл. 7 и 9 § 3 гл. II, получим следующие расчетные формулы для стержня, находящегося под действием равномерно распределенного по всей длине стержня крутящего момента интенсивности $H = ql$ и дополнительного сосредоточенного силового фактора B_{z_k} , приложенного в сечении $z = z_k$ и заменяющего

собой действие упругой диафрагмы на стержень:

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) &= \theta_0 + \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{B_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) + \\ &+ \frac{H_0}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right) + \frac{B_{z_k}}{GJ_d} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z - z_k) \right] - \\ &- \frac{m}{GJ_d} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{l^2}{k^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) \right], \\ \theta'(z) &= \theta'_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - \frac{B_0}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z - \frac{H_0}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right) - \\ &- \frac{B_{z_k}}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z - z_k) - \frac{m}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z \right), \\ B(z) &= -GJ_d \theta'_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + B_0 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z - H_0 \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \\ &+ B_{z_k} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z - z_k) - m \frac{l^2}{k^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z \right), \\ H(z) &= H_0 - mz, \end{aligned} \right\} (4.14)$$

где $B_{z_k} = -\bar{B} = -\frac{Eh^3 \Omega}{12(1 + \mu)} \theta'_{z_k}$ (п. 5, § 3, гл. II).

2. Приведем в качестве примера численный расчет того же фаянсового пролета, который неоднократно рассматривался нами как в этой, так и в предыдущей главах (рис. 40, б).

Геометрические размеры прогона, модули упругости и нагрузку мы оставим прежними (§§ 1 и 5 гл. II), т. е. будем считать, что $l = 300$ см, $J_d = 6,17$ см⁴, $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см², $k = 6,782$, $m = -63,99$ кг; для упругой диафрагмы примем: толщина $h = 1$ см, коэффициент Пуассона $\mu = 0$. Диафрагмы расположим по концам верхнего швеллера, как показано на рис. 129, и следовательно, $\Omega = 113,5$ см²

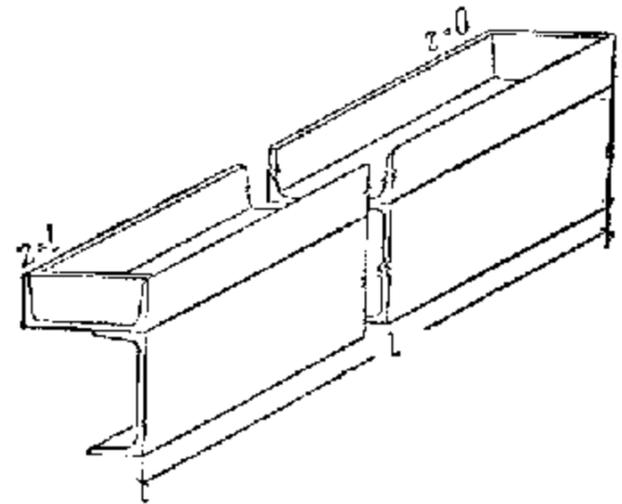


Рис. 129.

(§ 2). Концы стержня будем считать шарнирно-опертыми.

Из условия шарнирного опирания стержня по торцам имеем:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= B_0 = 0, \\ \theta(l) &= 0, \\ B(l) &= \bar{B} = \rho \theta'(l). \end{aligned}$$

Здесь последнее условие выражает бимомент в сечении $z=l$, заменяющий собой действие упругой диафрагмы в этом сечении; через p обозначено, как это следует из (4.13), выражение $\frac{Ek^2\Omega}{12}$.

Раскрывая два последних граничных условия с помощью формул (4.14) и учитывая, что в начальном сечении у нас также приложен сосредоточенный продольный бимомент, получим:

$$GJ_d \theta'_0 \left[\frac{l}{k} \operatorname{sh} k + \frac{p}{GJ_d} (\operatorname{ch} k - 1) \right] + H_0 l \left(1 - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k \right) = \\ = ml^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{k^2} (\operatorname{ch} k - 1) \right],$$

$$GJ_d \theta'_0 \left[\left(\frac{p}{GJ_d} \right)^2 \frac{k}{l} \operatorname{sh} k + 2 \frac{p}{GJ_d} \frac{k}{l} \operatorname{sh} k - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k \right] - \\ - H_0 \left[\frac{p}{GJ_d} (\operatorname{ch} k - 1) + \frac{1}{k} \operatorname{sh} k \right] = \frac{p}{GJ_d} ml \left(1 - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k \right) - \frac{ml^2}{k^2} (\operatorname{ch} k - 1),$$

откуда для начальных параметров θ'_0 и H_0 получаем следующие значения:

$$GJ_d \theta'_0 = \\ = \frac{\frac{l}{2k} \operatorname{sh} k - \frac{1}{k^2} (\operatorname{ch} k - 1) + p_1 \left[\frac{1}{2} (\operatorname{ch} k + 1) + \frac{2}{k^2} (\operatorname{ch} k - 1) - \frac{2}{k} \operatorname{sh} k \right]}{\frac{l^2}{k} \operatorname{sh} k + p_1^2 [k \operatorname{sh} k + 2(1 - \operatorname{ch} k)] + 2pl \left(\operatorname{ch} k - \frac{\operatorname{sh} k}{k} \right)} ml^2, \quad (4.15)$$

$$H_0 = \frac{\frac{l^2}{2k} \operatorname{sh} k + p_1^2 \left(\frac{k}{2} \operatorname{sh} k + 1 - \operatorname{ch} k \right) + p_1 l \left(\operatorname{ch} k - \frac{\operatorname{sh} k}{k} \right)}{\frac{l^2}{k} \operatorname{sh} k + p_1^2 [k \operatorname{sh} k + 2(1 - \operatorname{ch} k)] + 2p_1 l \left(\operatorname{ch} k - \frac{\operatorname{sh} k}{k} \right)} ml,$$

где

$$p_1 = \frac{p}{GJ_d}.$$

Для нашего примера

$$p_1 = 3,832 \text{ см}, \quad GJ_d \theta'_0 = -6235 \text{ кг/см}, \quad H_0 = -9596 \text{ кг/см}.$$

На рис. 130 представлены графики изменения по длине стержня величин $GJ_d \theta'(z)$ и $B(z)$ при значениях начальных параметров θ'_0 и H_0 (4.15); указанные функции вычислены для значений $z=0, \frac{1}{8}l, \frac{1}{4}l, \frac{3}{8}l$ и $\frac{1}{2}l$ и по симметрии распространены на вторую половину стержня.

Из сравнения с аналогичными графиками (рис. 121), вычисленными для того же стержня, находящегося под действием той же поперечной нагрузки, но усиленного по концам не диафрагмами, а планками, видим,

насколько планки сильнее влияют на напряженное состояние стержня по сравнению с диафрагмами, хотя по количеству затраченного металла диафрагмы превосходят планки примерно в 1,7 раза.

§ 5. Кручение стержня в упругой среде

1. Во многих случаях вопросы расчета элементов конструкций приводят к задаче о прочности и устойчивости тонкостенных стержней в упругой среде. Ниже мы изложим общий метод расчета тонкостенных стержней в упругой среде, испытывающих наряду с деформациями изгиба также и деформации кручения.

Пусть стержень, имеющий в поперечном сечении произвольное очертание и обладающий недеформируемым контуром, находится в сплошной упругой среде.

В отношении этой среды мы будем предполагать, что она упруго закрепляет каждое поперечное сечение от перемещений в его плоскости. Такую среду мы можем представить себе в виде непрерывно распределенных по длине стержня упругих поперечных связей, закрепляющих какую-нибудь продольную элементарную полоску ds в каждой точке z от поступательных перемещений в плоскости Oxy и углового перемещения относительно оси, параллельной образующей.

Пусть H и H' — бесконечно близкие точки, в которых поперечные сечения стержня упруго закреплены от перемещений в плоскости Oxy . Такое закрепление показано на рис. 131, где через h_x и h_y обозначены координаты точки H в главных осях.

При деформации стержня в упругих поперечных связях возникнут реактивные усилия, параллельные осям Ox и Oy , и реактивные закручивающие моменты, заменяющие собой действие упругой среды. Мы будем считать, что как эти усилия, так и моменты пропорциональны соответствующим (поступательным и вращательному) перемещениям линейного элемента HH' поперечного сечения бруса в плоскости сечения.

Обозначая перемещения точки H по главным осям сечения Ox и Oy соответственно через ξ_H и η_H и угол поворота линейного элемента HH'

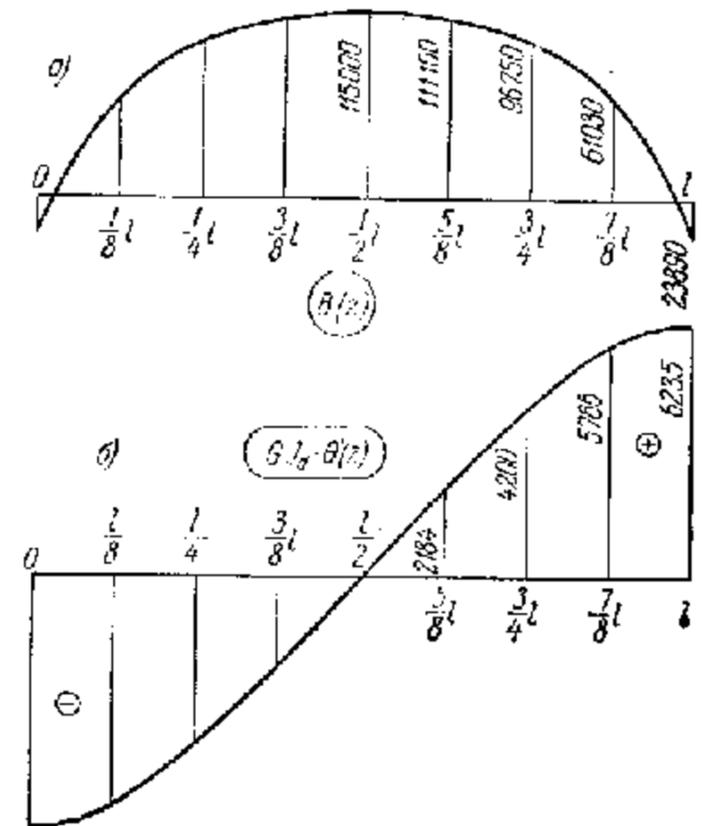


Рис. 130.

через θ_H , мы можем реактивные усилия и реактивный момент упругой среды, приходящиеся на единицу длины стержня, представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= -K_\xi \xi_H, \\ \bar{q}_y &= -K_\eta \eta_H, \\ \bar{m} &= -K_\theta \theta_H + (h_x - a_x) \bar{q}_y - (h_y - a_y) \bar{q}_x, \end{aligned} \right\} (5.1)$$

где K_ξ , K_η и K_θ представляют собой коэффициенты упругости среды. Первые два из этих коэффициентов имеют размерность $кг/см^2$ и численно равны поперечным силам, которые

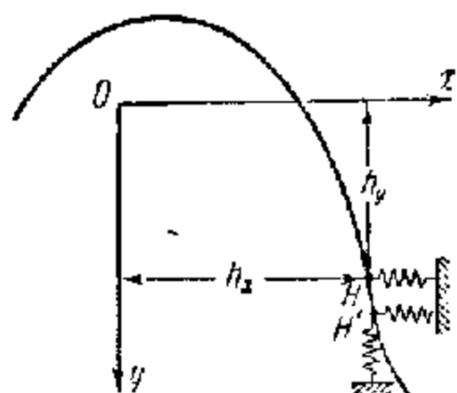


Рис. 131.

нужно приложить к упругим стержням на длине в 1 см, чтобы вызвать перемещение точки H по оси Ox или Oy , равное 1 см. Третий коэффициент имеет размерность $кг/см$ и определяется как момент, приходящийся на единицу длины стержня и соответствующий единичному углу поворота линейного элемента HH' . Все эти коэффициенты зависят только от упругих характеристик среды и в каждом частном случае легко определяются обычными методами строительной механики. Знак минус, стоящий в правых частях формул (5.1), получается вследствие того, что реактивные усилия и моменты упругой среды при положительных линейных и угловом перемещениях элемента HH' имеют отрицательные значения.

Исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, мы можем перемещения ξ_H , η_H и θ_H , относящиеся к линейному элементу HH' , выразить через перемещения ξ , η центра изгиба и угол поворота θ всего сечения по формулам (3.1) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} \xi_H &= \xi - (h_y - a_y) \theta, \\ \eta_H &= \eta + (h_x - a_x) \theta, \\ \theta_H &= \theta. \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Подставляя равенства (5.2) в формулы (5.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= -K_\xi [\xi - (h_y - a_y) \theta], \\ \bar{q}_y &= -K_\eta [\eta + (h_x - a_x) \theta], \\ \bar{m} &= -K_\theta \theta + K_\xi (h_y - a_y) \xi - K_\eta (h_x - a_x) \eta - \\ &\quad - [K_\xi (h_y - a_y)^2 + K_\eta (h_x - a_x)^2] \theta. \end{aligned} \right\} (5.3)$$

Формулами (5.3) реактивные воздействия упругой среды выражены теперь уже в функции основных искомым перемещений стержня ξ , η и θ .

Если точку H , в которой к рассматриваемому стержню примыкают упругие связи, отнести к центру тяжести сечения, как это имеет место,

например, в конструкциях металлических мостов, то $h_x = h_y = 0$, и формулы (5.3) принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= -K_\xi (\xi - a_y \theta), \\ \bar{q}_y &= -K_\eta (\eta - a_x \theta), \\ \bar{m} &= -K_\theta \theta - K_\xi a_y \xi + K_\eta a_x \eta - (K_\xi a_y^2 + K_\eta a_x^2) \theta. \end{aligned} \right\}$$

Полученные здесь реактивные усилия упругой среды по отношению к стержню представляют собой внешнюю дополнительную нагрузку. Присоединяя эту нагрузку к заданной, мы выразим дифференциальные уравнения равновесия (7.3) гл. I в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - (\bar{q}_x + q_x) &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - (\bar{q}_y + q_y) &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - (\bar{m} + m) &= 0. \end{aligned} \right\} (5.4)$$

Внося сюда реактивные усилия по формулам (5.3) и перенося члены от нагрузки вправо, найдем:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + K_\xi [\xi - (h_y - a_y) \theta] &= q_x, \\ EJ_x \eta^{IV} + K_\eta [\eta + (h_x - a_x) \theta] &= q_y, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + [K_\xi (h_y - a_y)^2 + K_\eta (h_x - a_x)^2 + K_\theta] \theta - \\ &\quad - K_\xi (h_y - a_y) \xi - K_\eta (h_x - a_x) \eta = m. \end{aligned} \right\} (5.5)$$

Уравнения (5.5) при заданной внешней нагрузке, определяемой функциями $q_x(z)$, $q_y(z)$ и $m(z)$, относятся к изгибу и кручению тонкостенного стержня в упругой среде с тремя коэффициентами постели. Эти уравнения при произвольном расположении в поперечном сечении точки H , являющейся точкой контакта стержня с упругой средой, образуют систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций: ξ , η и θ .

При $h_x = a_x$ и $h_y = a_y$, т. е. в случае, когда точка контакта H в плоскости Oxy совпадает с центром изгиба A , система совместных дифференциальных уравнений (5.5) распадается на три независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + K_\xi \xi &= q_x, \\ EJ_x \eta^{IV} + K_\eta \eta &= q_y, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + K_\theta \theta &= m. \end{aligned} \right\} (5.6)$$

Первые два уравнения представляют собой известные уравнения изгиба балки на упругом основании с коэффициентами постели K_ξ при изгибе в плоскости Oxz и K_η при изгибе в плоскости Oyz .

Третье уравнение относится к кручению балки в упругой среде с коэффициентом постели K_θ при кручении. Этим уравнением вместе с граничными условиями определяется функция $\theta(z)$, представляющая собой угол закручивания стержня. При постоянных коэффициентах EJ_ω , GJ_d и K_θ третье из уравнений (5.6) в общем случае легко

интегрируется в элементарных трансцендентных функциях, представляющих собой произведения тригонометрических и гиперболических функций от разных аргументов.

Разделив третье уравнение (5.6) на EJ_w и имея в виду воспользоваться методом начальных параметров, ограничиваясь поэтому только его однородной частью, мы можем представить это уравнение в виде:

$$\eta^{IV} - 2r^2\eta'' - s^4\eta = 0, \quad (5.7)$$

где r^2 и s^4 — характеристики, зависящие от физических и геометрических свойств стержня, определяемые формулами:

$$r^2 = \frac{GJ_d}{2EJ_w}, \quad s^4 = \frac{K_\theta}{EJ_w}. \quad (5.8)$$

2. Уравнение (5.7) представляет собой тот более общий вид дифференциального уравнения четвертого порядка, о котором мы говорили в § 3 гл. II. При $r^2 \neq 0, s^4 = 0$ мы получим уравнение стесненного кручения, детально исследованное нами выше; при $r^2 = 0, s^4 \neq 0$ мы получим уравнение, аналогичное первым двум уравнениям системы (5.6); при $r^2 = s^4 = 0$ приходим к уравнению, аналогичному уравнению изгиба простой балки.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (5.7), будет иметь вид:

$$k^4 - 2r^2k^2 + s^4 = 0.$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$k = \pm r \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{s^4}{r^4}}}. \quad (5.9)$$

и зависят, следовательно, от соотношения между s и r .

Рассмотрим некоторые случаи этих соотношений, заметив предварительно, что из физических соображений следует, что величины s и r не могут быть отрицательными.

а) $s > r$; все четыре значения k комплексны и могут быть представлены в виде

$$k = \pm \alpha \pm \beta i,$$

где α и β — действительные положительные числа, определяемые по формулам:

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}. \quad (5.10)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (5.7) может быть записано в виде

$$\eta(z) = C_1\Phi_1(z) + C_2\Phi_2(z) + C_3\Phi_3(z) + C_4\Phi_4(z). \quad (5.11)$$

Частные решения $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z), \Phi_4(z)$ представляют собой произведения тригонометрических и гиперболических функций и выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \cdot \sin \beta z, \\ \Phi_2(z) &= \operatorname{ch} \alpha z \cdot \cos \beta z, \\ \Phi_3(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \cdot \cos \beta z, \\ \Phi_4(z) &= \operatorname{sh} \alpha z \cdot \sin \beta z \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

[α и β определяются формулами (5.10)].

б) $s = r$; все значения корней действительные и попарно равные: $k_1 = k_2 = r, k_3 = k_4 = -r$.

Общее решение определяется формулой (5.11), но частные решения $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)$ и $\Phi_4(z)$ будут теперь определять уже другими формулами, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \operatorname{sh} rz, & \Phi_2(z) &= \operatorname{ch} rz, \\ \Phi_3(z) &= z \operatorname{ch} rz, & \Phi_4(z) &= z \operatorname{sh} rz. \end{aligned} \right\}$$

в) $s < r$; все значения корней действительны и не равны; они определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} k_1 = -k_2 = \mu_1 &= \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \\ k_3 = -k_4 = \mu_2 &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}. \end{aligned} \right\}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (5.7) определяется по-прежнему формулой (5.11), а частные решения определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \operatorname{sh} \mu_1 z, & \Phi_2(z) &= \operatorname{ch} \mu_1 z, \\ \Phi_3(z) &= \operatorname{sh} \mu_2 z, & \Phi_4(z) &= \operatorname{ch} \mu_2 z. \end{aligned} \right\}$$

г) Наконец, случай $s = 0, r \neq 0$, как мы уже указывали, есть случай стесненного кручения, с которым мы до сих пор и имели дело в этой книге. В этом случае мы исходим непосредственно из уравнения $\eta^{IV} - k^2\eta'' = 0$ и для частных решений получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= z, & \Phi_2(z) &= 1, \\ \Phi_3(z) &= \operatorname{sh} kz, & \Phi_4(z) &= \operatorname{ch} kz. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)^*$$

*) Формулы (5.13) отличаются от формул (2.4) гл. II тем, что ранее мы пользовались безразмерными координатами; кроме того, здесь мы поменяли местами C_1 и C_2 . Это сделано для удобства сравнения с другими случаями и, конечно, существа дела не меняет.

Таблица 22

Случай	Функция, ее производные и интеграл	$\Phi_1(z)$ (нечетная)	$\Phi_2(z)$ (четная)	$\Phi_3(z)$ (нечетная)	$\Phi_4(z)$ (четная)
1	$\Phi_j(z)$	$\text{ch } \alpha z \cdot \sin \beta z$	$\text{ch } \alpha z \cdot \cos \beta z$	$\sin \alpha z \cdot \cos \beta z$	$\sin \alpha z \cdot \sin \beta z$
	$\Phi_j'(z)$	$\alpha \Phi_2 + \beta \Phi_3$	$\alpha \Phi_3 - \beta \Phi_4$	$\alpha \Phi_2 - \beta \Phi_3$	$\alpha \Phi_1 + \beta \Phi_4$
	$\Phi_j''(z)$	$(\alpha^2 - \beta^2) \Phi_1 + 2\alpha\beta \Phi_2$	$(\alpha^2 - \beta^2) \Phi_3 - 2\alpha\beta \Phi_4$	$(\alpha^2 - \beta^2) \Phi_2 - 2\alpha\beta \Phi_1$	$(\alpha^2 - \beta^2) \Phi_4 + 2\alpha\beta \Phi_3$
	$\Phi_j'''(z)$	$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \Phi_1 + 3(\beta\alpha^2 - \beta^3) \Phi_2$	$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \Phi_3 - 3(\beta\alpha^2 - \beta^3) \Phi_4$	$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \Phi_2 - 3(\beta\alpha^2 - \beta^3) \Phi_1$	$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \Phi_4 + 3(\beta\alpha^2 - \beta^3) \Phi_3$
	$\int \Phi_j(z) dz$	$\frac{\alpha \Phi_2 - \beta \Phi_3}{\alpha^2 - \beta^2}$	$\frac{\alpha \Phi_3 + \beta \Phi_4}{\alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{\alpha \Phi_2 - \beta \Phi_3}{\alpha^2 - \beta^2}$	$\frac{\alpha \Phi_1 - \beta \Phi_4}{\alpha^2 + \beta^2}$
2	$\Phi_j(z)$	$\text{sh } rz$	$\text{ch } rz$	$z \text{ ch } rz$	$z \text{ sh } rz$
	$\Phi_j'(z)$	$r \Phi_2$	$r \Phi_1$	$\Phi_2 + r \Phi_1$	$\Phi_1 + r \Phi_2$
	$\Phi_j''(z)$	$r^2 \Phi_1$	$r^2 \Phi_2$	$2r \Phi_1 + r^2 \Phi_2$	$2r \Phi_2 - r^2 \Phi_1$
	$\Phi_j'''(z)$	$r^3 \Phi_2$	$r^3 \Phi_1$	$3r^2 \Phi_2 + r^3 \Phi_1$	$3r^2 \Phi_1 - r^3 \Phi_2$
	$\int \Phi_j(z) dz$	$\frac{1}{r} \Phi_2$	$\frac{1}{r} \Phi_1$	$\frac{1}{r} \Phi_2 - \frac{1}{r^2} \Phi_1$	$\frac{1}{r} \Phi_1 - \frac{1}{r^2} \Phi_2$

3	$\Phi_j(z)$	$\text{sh } \mu_1 z$	$\text{ch } \mu_2 z$	$\text{sh } \mu_2 z$	$\text{ch } \mu_1 z$
	$\Phi_j'(z)$	$\mu_1 \Phi_2$	$\mu_1 \Phi_1$	$\mu_2 \Phi_1$	$\mu_2 \Phi_3$
	$\Phi_j''(z)$	$\mu_1^2 \Phi_1$	$\mu_2^2 \Phi_2$	$\mu_2^2 \Phi_3$	$\mu_1^2 \Phi_2$
	$\Phi_j'''(z)$	$\mu_1^3 \Phi_2$	$\mu_2^3 \Phi_1$	$\mu_2^3 \Phi_3$	$\mu_1^3 \Phi_2$
	$\int \Phi_j(z) dz$	$\frac{1}{\mu_1} \Phi_2$	$\frac{1}{\mu_2} \Phi_1$	$\frac{1}{\mu_2} \Phi_3$	$\frac{1}{\mu_1} \Phi_2$
4	$\Phi_j(z)$	z	1	$\text{sh } kz$	$\text{ch } kz$
	$\Phi_j'(z)$	1	0	$k \Phi_3$	$k \Phi_2$
	$\Phi_j''(z)$	0	0	$k^2 \Phi_3$	$k^2 \Phi_2$
	$\Phi_j'''(z)$	0	0	$k^3 \Phi_3$	$k^3 \Phi_2$
	$\int \Phi_j(z) dz$	$\frac{z^2}{2}$	z	$\frac{1}{k} \Phi_3$	$\frac{1}{k} \Phi_2$

Все перечисленные выше случаи при различных формулах частных решений имеют одинаковые основные расчетные величины:

$$\theta, \theta', B = -EJ_{\omega} \theta'', H = -EJ_{\omega} \theta''' + GJ_{\omega} \theta' \quad (5.14)$$

и, следовательно, при решении задач может быть использована матрица начальных параметров, которую мы в этих целях и представили с коэффициентами влияния, записанными в символической форме табл. 6 § 3 гл. II.

Таким образом, все выводы в применении к расчету стержней, сделанные в § 3 гл. II и др., целиком распространяются и на задачи, описанные в настоящем параграфе *).

Что касается способа получения матрицы начальных параметров или, другими словами, способа вычисления коэффициентов влияния, то он достаточно подробно изложен в § 3 гл. II для случая стесненного кручения и может быть аналогичным же образом повторен и для других случаев. Необходимые для этого производные первого, второго и третьего порядка от частных интегралов $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)$ и $\Phi_4(z)$, выраженные через эти же функции, для разобранных здесь четырех случаев приведены в табл. 22. В этой же таблице приведены также и выражения $\int \Phi_i(z) dz$ через функции $\Phi_j(z)$ для указанных случаев.

Матрица начальных параметров, записанная в символической форме, для всех рассмотренных здесь случаев будет иметь один и тот же вид; эта матрица представлена таблицей 23. Коэффициенты же влияния для

Таблица 23

	θ_0	θ'_0	$\frac{1}{EJ_{\omega}} B_0$	$\frac{1}{EJ_{\omega}} H_0$
$\theta(z)$	$K_{\theta\theta}$	$K_{\theta\theta'}$	$K_{\theta B}$	$K_{\theta H}$
$\theta'(z)$	$K_{\theta'\theta}$	$K_{\theta'\theta'}$	$K_{\theta' B}$	$K_{\theta' H}$
$\frac{1}{EJ_{\omega}} B(z)$	$K_{B\theta}$	$K_{B\theta'}$	K_{BB}	K_{BH}
$\frac{1}{EJ_{\omega}} H(z)$	$K_{H\theta}$	$K_{H\theta'}$	K_{HB}	K_{HN}

разных случаев будут различными; они выписаны для случаев $s > r, s = r$ и $s < r$ в табл. 24. Случай $r \neq 0, s = 0$ в эту таблицу не включен,

* В § 3 некоторые свойства матрицы начальных параметров были доказаны для конкретности применительно к случаю уравнения (3.1) гл. II. Они без труда могут быть повторены и для уравнения более общего вида (5.7).

Таблица 24

Случай Коеф- фициент влияния	$s > r$		$s = r$		$s < r$	
	$K_{\theta\theta} = K_{\theta\theta'}$	$K_{\theta'\theta} = K_{\theta'\theta'}$	$K_{B\theta} = K_{B\theta'}$	$K_{\theta B}$	$K_{H\theta} = K_{H\theta'}$	$K_{\theta H} = K_{\theta'H}$
$K_{\theta\theta} = K_{\theta\theta'}$	$\Phi_2 - \frac{r^2}{2\alpha\beta} \Phi_1$	$\frac{\delta^2}{2\alpha\beta} (\beta \Phi_3 - \alpha \Phi_1)$	$\Phi_2 - \frac{r}{2} \Phi_4$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_4 - \mu_2^2 \Phi_2)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_4 - \mu_2^2 \Phi_2)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_4 - \mu_2^2 \Phi_2)$
$K_{\theta'\theta} = K_{\theta'\theta'}$	$\frac{\delta^4}{2\alpha\beta} \Phi_4$	$\frac{\delta^2}{2\alpha\beta} (\beta \Phi_3 - \alpha \Phi_1)$	$\frac{r^2}{2} \Phi_4$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_3 - \mu_2 \Phi_1)$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_3 - \mu_2 \Phi_1)$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_3 - \mu_2 \Phi_1)$
$K_{B\theta} = K_{B\theta'}$	$\frac{\delta^2}{2\alpha\beta} [\beta (3\alpha^2 - \beta^2) \Phi_3 + \alpha (3\beta^2 - \alpha^2) \Phi_1]$	$\frac{\delta^4}{2\alpha\beta} \Phi_4$	$\frac{r^2}{2} (3\Phi_1 - r\Phi_3)$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$	$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$
$K_{\theta B}$	$\frac{1}{2\alpha\beta} (\beta \Phi_1 + \alpha \Phi_3)$	$\frac{1}{2\alpha\beta} (\beta \Phi_1 + \alpha \Phi_3)$	$\frac{1}{2r} (\Phi_1 + r\Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$
$K_{H\theta} = K_{H\theta'}$	$\frac{1}{2\alpha\beta} [\alpha (3\beta^2 - \alpha^2) \Phi_1 - \beta (3\alpha^2 - \beta^2) \Phi_3]$	$\frac{1}{2\alpha\beta} \Phi_4$	$\Phi_3 + \frac{r}{2} \Phi_4$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1^2 \Phi_3 - \mu_2^2 \Phi_1)$
$K_{\theta H} = K_{\theta'H}$	$-\frac{1}{2\alpha\beta} (\alpha \Phi_1 + \beta \Phi_3)$	$-\frac{1}{2\alpha\beta} \Phi_4$	$-\frac{1}{2r} (\Phi_1 + r\Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$
$K_{\theta H}$	$-\frac{1}{2\alpha\beta} (\alpha \Phi_1 - \beta \Phi_3)$	$-\frac{1}{2\alpha\beta} (\alpha \Phi_1 - \beta \Phi_3)$	$\frac{1}{2r^2} (\Phi_1 - r\Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$	$\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \Phi_1 - \mu_2 \Phi_3)$

потому что он подробно рассмотрен в § 3 гл. II, а матрицы табл. 23 и табл. 6 § 3 отличаются друг от друга только множителями при статических величинах B и H ; в табл. 6 взят множитель $\frac{1}{EJ_a}$, в табл. 23 взят множитель $\frac{1}{EJ_0}$.

§ 6. Совместная работа пластинки и подкрепляющих ее тонкостенных стержней

1. Задача о совместной работе пластинки и тонкостенных стержней имеет большое практическое значение; с ней, например, приходится иметь дело судостроителям при расчете обшивки судна, водонепроницаемых переборок, строителям — при расчете перекрытий и т. д. В настоящее время нет достаточно простых и надежных методов расчета таких конструкций. Приближенные методы, как правило, плохо отражают действительную картину напряженного и деформированного состояния пластинки, подкрепленной стержнями. Точные же методы требуют весьма трудоемких вычислений. Предлагаемый здесь вариационный метод имеет целью частично восполнить указанный пробел.

2. При решении рассматриваемой здесь задачи мы будем исходить из изложенного в работах [46, 51] вариационного метода расчета прямоугольных пластинок (и призматических оболочек), имеющих несмещаемые ребра. Этот метод также основан на идее приведения бигармонического уравнения изгиба пластинок к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В основе метода лежат следующие допущения: пластинка в каждой точке под действием внешней нормальной нагрузки может получать одни только нормальные смещения; удлинения пластинки по ее ширине равны нулю; граничные условия на каждом из продольных краев $x=0$ и $x=a$ остаются постоянными по всей длине продольного края, а на каждом из поперечных краев $z=0$ и $z=l$ остаются постоянными по всей длине поперечного края; внешняя нагрузка, изменяясь по ширине пластинки (в направлении Ox) по произвольному закону, может изменяться и по длине пластинки (в направлении Oz), сохраняя при этом подобие во всех сечениях $x=\text{const}$ и $z=\text{const}$; другими словами, нагрузка может быть представлена в виде произведения двух функций:

$$p(x, z) = P_0(x) K(z). \quad (6.1)$$

Прогиб пластинки представим в форме произведения двух функций:

$$w(x, z) = W(z) \chi(x), \quad (6.2)$$

из которых функция $\chi(x)$ задается нами в соответствии с геометрическими условиями на продольных краях и характером нагрузки, а

функция $W(z)$, рассматриваемая как обобщенный прогиб пластинки, является искомой.

Достаточно точное решение можно получить, приняв за функцию $\chi(x)$ прогиб элементарной поперечной волоски шириной $dz=1$ (при соответствующих геометрических условиях опирания) от вспомогательной нагрузки, имеющей тот же закон изменения, что и заданная внешняя нагрузка.

После выбора функции $\chi(x)$, приравнявая нулю, на основании принципа Лагранжа, сумму работ всех внешних и внутренних сил поперечной балки-полоски на единственно возможном для нее перемещении $\chi(x)$, придем, согласно вариационному методу автора, к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для определения функции $W(z)$:

$$AW^{IV} - 2BW'' + CW - G = 0. \quad (6.3)$$

Коэффициенты A, B, C для пластинки, закрепленной на продольных краях $x=0, x=a$ от прогибов, вычисляются по формулам:

$$A = D \int_0^a \chi^2 dx,$$

$$B = D \int_0^a (\chi')^2 dx,$$

$$C = D \int_0^a (\chi'')^2 dx,$$

где $D = \frac{E^3 b^3}{12}$ — цилиндрическая жесткость.

Свободный член уравнения (6.3) $G(z)$ определяется как работа всех заданных нагрузок (включая сосредоточенные), приходящихся на элементарную балку-полоску, на возможном перемещении $\chi(x)$:

$$G(z) = \int_0^a p(x, z) \chi(x) dx$$

(понимая интеграл в смысле Стильбесса) или в развернутом виде, при наличии в нагрузке сосредоточенных факторов,

$$G(z) = \int_0^a p \chi dx + \sum p_k \chi(k) + \sum M_k \chi'(k), \quad (6.4)$$

где p_k и M_k — соответственно сосредоточенная сила и момент, распределенные по линии $x=k$.

По определению функции $W(z)$ из уравнения (6.3) и граничных условий на поперечных краях все внутренние усилия и моменты легко определяются через эту функцию по соответствующим формулам.

Расчет пластинки может быть также произведен применением метода начальных параметров. В этом случае однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.3), будет иметь вид

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = 0, \quad (6.5)$$

где

$$r^2 = \frac{B}{A}, \quad s^4 = \frac{C}{A}. \quad (6.6)$$

В качестве основных расчетных величин принимаются: обобщенный прогиб $W(z)$, обобщенный угол поворота $\varphi = \frac{dW(z)}{dz} = W'(z)$ и соответствующие этим двум геометрическим величинам обобщенные статические величины*):

$$\left. \begin{aligned} \text{обобщенный момент} \quad M &= -AW''(z), \\ \text{обобщенная поперечная сила} \quad Q &= -AW'''(z) + 2BW''(z). \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

На основании всего вышесказанного мы можем для рассматриваемого случая расчета пластинки представить матрицу начальных параметров в следующем виде:

Таблица 25

	w_0	φ_0	$\frac{1}{A} M_0$	$\frac{1}{A} Q_0$
$W(z)$	$K_{WW}(z)$	$K_{W\varphi}(z)$	$K_{WM}(z)$	$K_{WQ}(z)$
$\varphi(z)$	$K_{\varphi W}(z)$	$K_{\varphi\varphi}(z)$	$K_{\varphi M}(z)$	$K_{\varphi Q}(z)$
$\frac{1}{A} M(z)$	$K_{MW}(z)$	$K_{M\varphi}(z)$	$K_{MM}(z)$	$K_{MQ}(z)$
$\frac{1}{A} Q(z)$	$K_{QW}(z)$	$K_{Q\varphi}(z)$	$K_{QM}(z)$	$K_{QQ}(z)$

Коэффициенты влияния K_{ij} в развернутом виде даны в табл. 24, нужно только соответственно заменить индексы W на η , φ на η' , M на B , Q на H . Это следует из сопоставления выражений (6.5), (6.7) с аналогичными им выражениями (5.7) и (5.14).

3. После этих предварительных замечаний обратимся непосредственно к интересующей нас задаче о совместной работе пластинки с усиливающими ее стержнями. Пусть тонкостенный стержень, который для упрощения рассуждений будем предполагать имеющим две оси

*) Мы полагаем в (6.7) коэффициент Пуассона равным нулю.

симметрии, расположен параллельно продольным краям пластинки. Оси координат стержня параллельны осям координат пластинки (рис. 132). Контакт пластинки со стержнем осуществляется по линии $k-k$ пересечения срединной поверхности пластинки с плоскостью

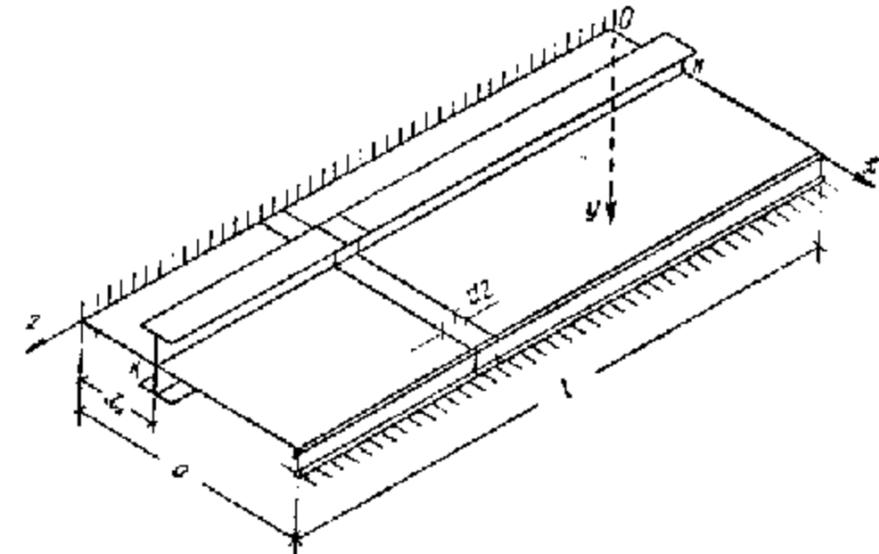


Рис. 132.

стенки стержня; в поперечном сечении точка контакта отмечается некоторой координатой $x = x_k$.

Из условия совместности деформаций по линии контакта стержня с пластинкой следует, что в выделенной сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ полоске пластинки со стержнем в точке контакта:

1) прогиб пластинки равен прогибу стержня

$$W\chi(k) = \eta(k), \quad (6.8)$$

2) угол поворота пластинки равен углу закручивания балки

$$W\chi'(k) = \theta(k). \quad (6.9)$$

В тонкостенном стержне прогиб η и угол кручения θ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$EJ_z \eta^{IV} = q_y,$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m.$$

Следовательно, на основании (6.8), (6.9) и (6.2) в точке контакта будут выполняться зависимости:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \chi_k W^{IV} &= q_{yk}, \\ EJ_\omega \chi_k' W^{IV} - GJ_d \chi_k' W'' &= m_k, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

где $\chi_k = \chi(k)$, $\chi_k' = \chi'(k)$, $q_{yk} = q_y(k, z)$ и $m_k = m(k, z)$.

Заменяя действие стержня на пластинку сосредоточенной силой $p_k = -q_{y_k}$ и моментом $M_k = -m_k$ (рис. 133) (если стержней в пластинке несколько, то суммируя их действия), получим для свободного члена (6.4) (при условии, что сосредоточенные факторы в этой формуле вызваны влиянием стержня) следующее выражение:

$$G(z) = \int_0^a p_k dx - \sum EJ_x \chi_k^2 W^{IV} - \sum [EJ_\omega (\chi_k')^2 W^{IV} - GJ_d (\chi_k')^2 W''] \quad (6.11)$$

Вставляя теперь свободный член $G(z)$, выраженный формулой (6.11), в общее уравнение (6.3) и объединяя подобные члены, получим:

$$\bar{A} W^{IV} - 2\bar{B} W'' + C W - \bar{G} = 0, \quad (6.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= A + \sum EJ_x \chi_k^2 + \sum EJ_\omega (\chi_k')^2, \\ \bar{B} &= B - \frac{1}{2} \sum GJ_d (\chi_k')^2, \\ \bar{G} &= \int_0^a p_k dx. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Уравнение (6.12) имеет такой же вид, как и уравнение (6.3) для пластинки, не усиленной стержнями. В выражения для коэффициентов \bar{A} и \bar{B} согласно формулам

(6.13) входят физические и геометрические характеристики стержней, усиливающих пластинку.

При решении уравнения (6.12) методом начальных параметров мы приводим однородную часть уравнения к виду (6.5).

Коэффициенты r^2 и s^2 будут вычисляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{B - \frac{1}{2} \sum GJ_d (\chi_k')^2}{A + \sum EJ_x \chi_k^2 + \sum EJ_\omega (\chi_k')^2}, \\ s^2 &= \frac{C}{\bar{A}} = \frac{C}{A + \sum EJ_x \chi_k^2 + \sum EJ_\omega (\chi_k')^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Весь же остальной алгоритм остается таким же, как при решении в обычной пластинке. Матрица начальных параметров представляется табл. 25, основные расчетные величины вычисляются по формулам (6.7) с заменой в них коэффициентов A и B соответственно на \bar{A} и \bar{B} , вычисляемые по формулам (6.13); корни характеристического уравнения будут определяться не величинами r^2 и s^2 , вычисляемыми по формулам (6.6), а величинами \bar{r}^2 и \bar{s}^2 , вычисляемыми по формулам (6.14).

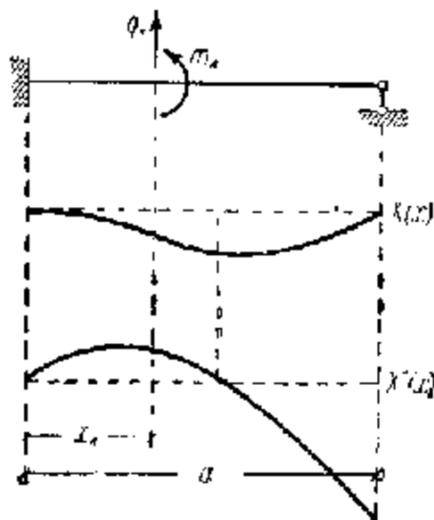


Рис. 133.

ГЛАВА IV

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ-ОБОЛОЧКИ ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА

§ 1. Общий вариационный метод приведения сложных двумерных задач теории оболочек к одномерным

1. Идея этого метода состоит в том, что искомые функции, зависящие от двух переменных и удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений в частных производных, представляются в виде конечных сумм произведений двух функций, из которых одна представляет заданную (заранее выбранную) функцию от одного переменного, а другая — искомую функцию от другого переменного; применяя принцип возможных перемещений и вводя в рассмотрение систему искомых функций, число которых определяется числом степеней свободы выделенной элементарной полоски, рассматриваемой условно как стержневая система, мы приходим к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, что в значительной мере упрощает решение задачи.

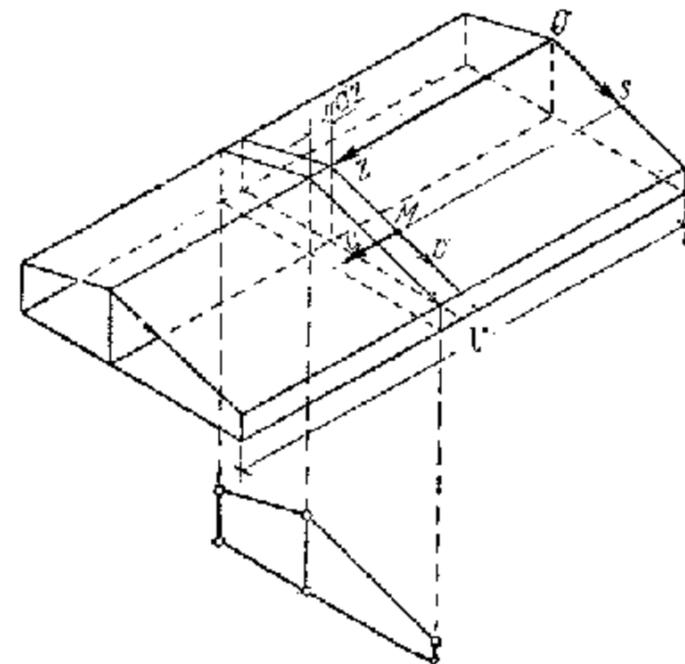


Рис. 134.

2. Рассмотрим тонкостенный стержень, имеющий в поперечном сечении конечное число замкнутых контуров и состоящий из узких прямоугольных пластинок (рис. 134). Предположим, что последние соединены между собой на узловых линиях жестко и, следовательно, вдоль этих линий подвижность пластинок друг относительно друга невозможна.

Положение точки M на срединной призматической поверхности тонкостенного стержня, как указывалось ранее, определяется двумя координатами: координатой z — расстоянием от некоторой начальной плоскости $z=0$, и координатой s — расстоянием по контуру поперечного сечения стержня от некоторой начальной образующей $s=0$ (положительные направления координатных осей даны на рис. 134).

Пусть перемещения точки $M(z, s)$ суть $u(z, s)$ — продольное перемещение в направлении образующей и $v(z, s)$ — контурное, тангенциальное перемещение по направляющей тонкостенного стержня. Положительные направления перемещений $u(z, s)$ и $v(z, s)$, в соответствии с ранее принятым правилом знаков, совпадают с положительными направлениями координат z, s .

Представим перемещения $u(z, s)$ и $v(z, s)$ в виде конечных разложений:

$$u(z, s) = \sum_1^m U_i(z) \varphi_i(s) \quad (i=1, 2, 3, \dots, m), \quad (1.1)$$

$$v(z, s) = \sum_1^n V_k(z) \psi_k(s) \quad (k=1, 2, 3, \dots, n), \quad (1.2)$$

где функции $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ от одного только переменного s выбираются предварительно и, следовательно, будут величинами известными; функции $U_i(z)$ и $V_k(z)$, т. е. функции другого (и тоже только одного) переменного z будут искомыми неизвестными величинами; значения величин m и n будут пояснены ниже.

Выделим из тонкостенного стержня двумя сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ элементарную поперечную полоску шириной dz . Условно будем рассматривать эту полоску как плоскую стержневую систему — раму, состоящую из нескольких замкнутых контуров.

Рассмотрим деформированное состояние этой полоски, определяемое только продольными перемещениями $u(z, s)$ [при $v(z, s) = 0$].

В этом случае плоская контурная линия элементарной рамы, оставаясь на призматической поверхности тонкостенного стержня, переходит в пространственную линию, определяемую относительно первоначального сечения $z = \text{const}$ [при выбранных предварительно функциях $\varphi_i(s)$] выражением (1.1).

Сделаем предположение, что в описываемом случае деформированного состояния прямолинейные элементы контурной линии стержня, выходя из плоскости $z = \text{const}$, будут оставаться прямыми. Такое предположение эквивалентно гипотезе плоских сечений, применяемой отдельно для каждой из составляющих данный тонкостенный стержень узких прямоугольных пластинок. Тогда положение после деформации элементарной полоски относительно начальной плоскости $z = \text{const}$ вполне определится продольными перемещениями ее m узловых точек. Следовательно, элементарную полоску условно можно рассматривать как стержневую систему, обладающую m степенями свободы в отно-

шении продольных перемещений. Примем в формуле (1.1) вместо функции $U_i(z)$, $U_2(z)$, ..., $U_m(z)$ за продольные перемещения m узлов элементарной полоски. Соответствующие этим перемещениям, согласно (1.1), функции $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_m(s)$ удовлетворяют всем необходимым условиям непрерывности продольных перемещений $u(z, s)$ по контуру поперечного сечения тонкостенного стержня. Функции $\varphi_i(s)$ при таком выборе искоемых величин имеют очень простое геометрически наглядное выражение: каждая из них отлична от нуля только на прямолинейных участках контура, сходящихся в узле i ; в пределах каждого из этих участков $\varphi_i(s)$ изменяется по линейному закону, принимая значение, равное единице, в i -й узловой точке и значение, равное нулю, в другой крайней узловой точке данного участка. На всех остальных участках контурной линии функция $\varphi_i(s)$ будет равна нулю (рис. 135). Такой способ построения функций $\varphi_i(s)$ не является единственным. За искомые функции $U_i(z)$ можно принять любые независимые между собой величины общим числом m . Тогда

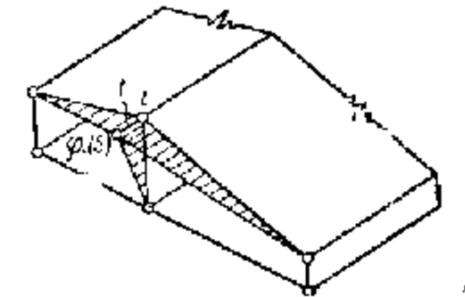


Рис. 135.

каждой совокупности m независимых величин $U_i(z)$ будет отвечать совокупность m линейно независимых (т. е. не могущих быть выражеными линейно одна через другую) функций $\varphi_i(s)$, причем каждая из них будет непрерывной на всем контуре, а на отдельных участках контура будет представляться линейной эпюрой.

В разложении (1.1) заранее выделим продольные перемещения, относящиеся к элементарному расчету тонкостенного стержня как балки многосвязного поперечного сечения на основе гипотезы Бернулли, принимаемой для всего сечения $z = \text{const}$ в целом. За три из m возможных продольных перемещений $U_i(z)$ следует принять величины $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$, определяющие перемещения рассматриваемой шарнирной модели на призматической поверхности как жесткой плоской системы; это будут функции изменения по длине стержня продольных перемещений узловых точек при растяжении (сжатии) и изгибе в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Закон плоских сечений, применяемый ко всему сечению в целом, требует уже специальной комбинации для построения функций $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$, каждая из которых представится как линейная функция декартовых координат $x = x(s)$, $y = y(s)$ точки контура поперечного сечения тонкостенного стержня.

Остальные члены разложения (1.1) определяют для функции $u(z, s)$ такое состояние продольных перемещений, при котором поперечные сечения тонкостенного стержня претерпевают деформацию, т. е. не остаются плоскими. Таким образом, деформация тонкостенного стержня, имеющего в поперечном сечении многосвязный контур, определяется $m - 3$ независимыми функциями продольных перемещений $U_4(z)$, $U_5(z)$, ..., $U_m(z)$.

Выбранные (тем или иным способом) в разложениях (1.1) непрерывные, линейно независимые функции $\varphi_i(s)$ общим числом m ($i=1, 2, 3, \dots, m$) представляют по своему смыслу *обобщенные координаты деформации элементарной поперечной полоски тонкостенного стержня из плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$.*

Соответствующие этим обобщенным координатам функции $U_i(z)$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$), на которых каждая зависит только от координаты z , представляют собой искомые *обобщенные продольные перемещения тонкостенного стержня.*

При построении другой системы функций $\psi_k(s)$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), входящих в разложения (1.2), рассматривается деформированное состояние элементарной полоски в ее плоскости, т. е. в плоскости $z = \text{const}$.

Отождествляя, как и ранее, эту полоску со стержневой системой и вводя предположение о нерастяжимости ее элементов (составляющих ее стержней), приходим к выводу, что контурное перемещение $v(z, s)$ можно выразить через перемещения $V_k(z)$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) шарнирной стержневой системы в плоскости этой системы. Под коэффициентами $V_k(z)$ в разложениях (1.2) мы будем понимать независимые величины, определяющие форму перемещений шарнирной стержневой системы в ее плоскости. Число n искомых функций $V_k(z)$ равно числу степеней свободы стержневой системы в ее плоскости и определяется формулой

$$n = 2m - c,$$

где m — число узлов; c — число стержней многосвязной системы.

Теперь мы изложим наиболее простой способ построения системы функций $\psi_k(s)$. Выбирая n независимых величин $V_k(z)$ для перемещений элементарной стержневой системы в плоскости сечения $z = \text{const}$ и давая последовательно каждой из этих величин в разложении (1.2) единичные значения, а остальные полагая равными нулю, мы можем путем рассмотрения полученных таким образом элементарных перемещений системы определить все нужные нам функции $\psi_k(s)$. Каждая из функций будет представлять собой контурное перемещение некоторой точки в соответствующем элементарном состоянии $V_k^* = 1$ и $V_k^* = 0$ при $k \neq k$ (рис. 136). В пределах каждого прямолинейного участка контура тонкостенного стержня функция $\psi_k(s)$ сохраняет постоянное значение (в силу нерастяжимости элементов контурной линии), т. е. не зависит от координаты s и представляет таким образом осевое перемещение соответствующего стержня шарнирной модели.

Таким образом, мы можем построить n линейно независимых между собой опор функций $\psi_k(s)$ при любом выборе величин $V_k(z)$.

В частности, мы можем так выбрать эти величины, что три из них: $V_1(z)$, $V_2(z)$ и $V_3(z)$ — будут определять перемещения модели в целом как плоской стержневой системы без изменения формы системы. Остальные величины $V_4(z)$, $V_5(z)$, ..., $V_n(z)$ в этом случае будут относиться к таким перемещениям системы, при которых меняется

взаимное расположение отдельных ее звеньев, т. е. когда имеет место деформация контура поперечного сечения.

Следовательно, деформация контура тонкостенного стержня определяется $n-3$ независимыми величинами, где n — число степеней свободы элементарной полоски, рассматриваемой как плоская шарнирно-стержневая система. Функции $\psi_k(s)$, соответствующие n степеням свободы шарнирной стержневой системы в ее плоскости, удовлетворяют условию линейной независимости и условию непрерывности перемещений точек контура элементарной поперечной полоски (включая также и узловые точки контура), поскольку шарнирная модель в каждом из n возможных элементарных состояний $V_k^* = 1$ остается всюду непрерывной. Выбранные тем или иным способом непрерывные, линейно независимые между собой функции $\psi_k(s)$ общим числом n ($k=1, 2, 3, \dots, n$) представляют собой *заданные обобщенные координаты деформации элементарной поперечной полоски тонкостенного стержня в плоскости этой полоски (в плоскости сечения $z = \text{const}$).* Соответствующие этим функциям искомые величины $V_k(z)$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), каждая из которых зависит только от координаты z , представляют собой *искомые обобщенные поперечные перемещения тонкостенного стержня.*

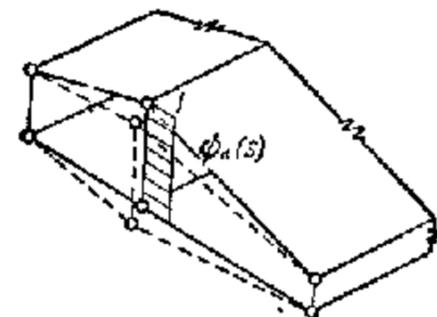


Рис. 136.

Следовательно, положение всех узловых точек поперечной элементарной полоски тонкостенного стержня после деформации в пространстве при выбранных обобщенных координатах

$$\varphi_i(s) \quad (i=1, 2, 3, \dots, m) \quad \text{и} \quad \psi_k(s) \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

определяется $m+n$ искомыми обобщенными перемещениями: продольными $U_i(z)$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$) и поперечными $V_k(z)$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$).

3. После выбора обобщенных координат $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ в разложениях (1.1) и (1.2) задача сводится к определению обобщенных перемещений $U_i(z)$ и $V_k(z)$ ($i=1, 2, 3, \dots, m; k=1, 2, 3, \dots, n$).

Пусть $\sigma = \sigma(z, s)$ и $\tau = \tau(z, s)$ обозначают соответственно нормальные и касательные напряжения, возникающие в сечении тонкостенного стержня. Будем считать эти напряжения функциями только координат z, s , предполагая, что по толщине стержня напряжения σ и τ распределяются равномерно (касательные напряжения τ приводятся только к сдвигающим силам).

На основании закона Гука имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z, s) &= E \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \tau(z, s) &= G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Подставляя сюда разложения (1.1) и (1.2), получим:

$$\sigma(z, s) = E \sum U_i'(z) \varphi_i(s) \quad (i=1, 2, 3, \dots, m), \quad (1.4)$$

$$\tau(z, s) = G \left[\sum U_i'(z) \varphi_i'(s) + \sum V_k'(z) \psi_k(s) \right] \quad (1.5)$$

$$(i=1, 2, 3, \dots, m; k=1, 2, 3, \dots, n).$$

Элементарная поперечная полоска, выделенная из тонкостенного стержня, будет находиться под действием внешних нормальных и сдвигающих сил, действующих в сечениях $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$,

и заданных поверхностных сил (рис. 137). Пусть $p^* = p^*(z, s)$ и $q^* = q^*(z, s)$ обозначают внешние по отношению к данной полоске силы, действующие соответственно по направлению образующей оболочки и по профильной линии (положительные силы направлены в сторону возрастания координат z и s).

Относя эти силы к единице площади срединной поверхности тонкостенного стержня, получим для них следующие выражения:

$$p^* = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta + p, \quad (1.6)$$

$$q^* = \frac{\partial \tau}{\partial z} \delta - q, \quad (1.7)$$

где $\delta = \delta(s)$ — толщина оболочки, которая предполагается заданной функцией (в общем случае прерывной) только одной координаты s , а $p = p(z, s)$ и $q = q(z, s)$ представляют собою заданные внешние поверхностные силы.

Интегральные условия равновесия элементарной полоски при выбранных формах перемещений $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$, определяемых $m+n$ степенями свободы, на основании начала возможных перемещений могут быть представлены в форме $m+n$ уравнений:

Интегральные условия равновесия элементарной полоски при выбранных формах перемещений $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$, определяемых $m+n$ степенями свободы, на основании начала возможных перемещений могут быть представлены в форме $m+n$ уравнений:

$$\int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j dF - \int_F \tau \varphi_j' dF + \int_L p \varphi_j ds = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, m), \quad (1.8)$$

$$\int_F \frac{\partial \tau}{\partial z} \psi_k dF - \sum V_k \int_L \frac{M_k M_k}{EJ} ds + \int_L q \psi_k ds = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots, n), \quad (1.9)$$

где $dF = \delta ds$ — дифференциал площади поперечного сечения оболочки.

В этих уравнениях, как и в дальнейшем изложении, интегралы определенные и берутся либо по всей площади поперечного сечения

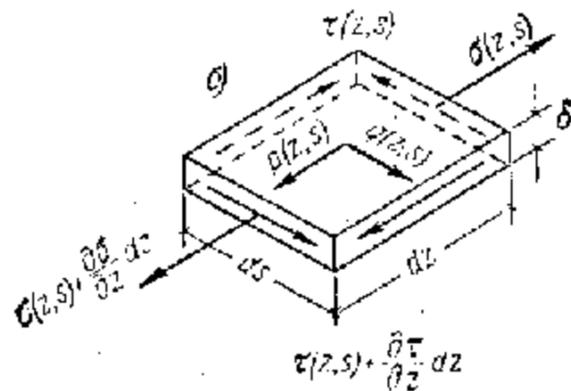
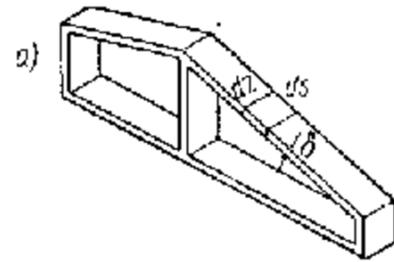


Рис. 137.

(например, $\int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j dF$), либо по всему контуру поперечного сечения (например, $\int_L p \varphi_j ds$).

Уравнениями (1.8) представлены m условий равновесия элементарной полоски $dz = 1$ в направлении, перпендикулярном к плоскости $z = \text{const}$.

Каждое из уравнений (1.8) выражает собой равенство нулю суммы работ всех внешних и внутренних сил элементарной полоски при деформировании полоски из ее плоскости.

За возможные (виртуальные) перемещения в уравнении номера j этой группы приняты продольные перемещения $U_j(z, s) = 1 \varphi_j(s)$ точек элементарной полоски, определяемые одним только членом номер j разложения (1.1) при $U_i^*(z) = 1$.

Крайние члены уравнений (1.8) относятся к работе внешних сил p^* (1.6), действующих на полоску шириною $dz = 1$ и направленных перпендикулярно к поперечному сечению стержня. Средним членом выражена работа внутренних сдвигающих сил. Для элемента полоски ds эта работа определяется как произведение (с обратным знаком) сдвигающей силы $\tau \delta ds$ на деформацию сдвига. Последняя в рассматриваемом случае вариации деформированного состояния равна

$$\frac{\partial U_j}{\partial s} = \varphi_j'(s).$$

Уравнениями (1.9) представлены n условий равновесия этой полоски в плоскости $z = \text{const}$. Каждое из уравнений (1.9) получено приравнованием нулю суммы работ всех внешних и внутренних сил элементарной полоски на соответствующих перемещениях при деформировании полоски в ее плоскости. За возможные перемещения в уравнении номера k приняты поперечные тангенциальные перемещения $V_k(z, s) = 1 \psi_k(s)$ полоски, определяемые одним только членом номер k разложения (1.2) при обобщенном поперечном перемещении $V_k^*(z) = 1$. Крайние члены уравнений (1.9) относятся к работе внешних контурных сил q^* (1.7) полоски, действующих в ее плоскости. Средним членом выражена работа внутренних сил на деформациях изгиба полоски, соответствующих k -му элементарному состоянию перемещений шарнирной кинематической цепи в плоскости этой цепи. Для элемента полоски ds эта работа в случае изгиба определяется как произведение (с обратным знаком) изгибающего момента

$$M(z, s) = \sum V_k(z) M_k(s) \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

на взаимный угол поворота $\frac{M_k(s)}{EJ} ds$ двух смежных сечений, ограничивающих этот элемент. Буквами $M_k = M_k(s)$ и $M_n = M_n(s)$ обозначены изгибающие моменты поперечной полоски-рамы, соответствующие

элементарным состояниям деформации этой рамы $V_k^*(z) = 1$ и $V_k^*(z) = 1$ в предположении, что узлы рамы свободны от внешних угловых связей, т. е. что изгибающие моменты $M_k(s)$ и $M_k(s)$ в любых из n возможных состояний ($h, k = 1, 2, 3, \dots, n$) во всех узлах удовлетворяют условиям равновесия. Моменты $M_k(s)$ и $M_k(s)$ находятся обычными методами строительной механики путем обратного перехода от деформированного состояния стержневой рамной системы к внутренним силам.

Величина $J = J(s)$ представляет собою момент инерции поперечного сечения выделенной элементарной полоски при ширине $dz = 1$. При отсутствии поперечных связей момент инерции $J = \frac{I^2}{12}$; при наличии же дополнительных, достаточно часто расположенных поперечных связей — рам, подкрепляющих тонкостенный стержень, момент инерции J должен вычисляться с учетом среднего момента инерции этих рам, т. е. момента инерции, приходящегося на единицу длины тонкостенного стержня.

Подставляя в (1.8) и (1.9) вместо $\sigma(z, s)$ и $\tau(z, s)$ их выражения (1.4) и (1.5), получим систему $m + n$ линейных дифференциальных уравнений относительно искомого обобщенных m продольных $U_i(z)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) и n поперечных $V_k(z)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) перемещений.

Эта система может быть представлена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sum_i a_{ji} U_i'' - \sum_i b_{ji} U_i' - \sum_k c_{jk} V_k + \frac{1}{G} p_j &= 0, \\ \sum_i c_{hi} U_i' + \sum_k r_{hk} V_k'' - \gamma \sum_k s_{hk} V_k + \frac{1}{G} q_h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$(i, j = 1, 2, 3, \dots, m; \quad h, k = 1, 2, 3, \dots, n),$

где $\gamma = \frac{E}{G}$.

Коэффициенты уравнений (1.10) вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_{ji} &= \int_F \varphi_j(s) \varphi_i(s) dF, \\ b_{ji} &= \int_F \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) dF, \\ c_{jk} &= \int_F \varphi_j'(s) \psi_k(s) dF, \\ c_{hi} &= \int_F \psi_h(s) \varphi_i'(s) dF, \\ r_{hk} &= \int_F \psi_h(s) \psi_k(s) dF, \\ s_{hk} &= \frac{1}{E} \int_L \frac{M_h(s) M_k(s)}{EJ} ds, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где интегралы распространяются на все элементы поперечного сечения тонкостенного стержня. Эти коэффициенты обладают свойством взаимности: $a_{ji} = a_{ij}$, $b_{ji} = b_{ij}$, $r_{hk} = r_{kh}$, $s_{hk} = s_{kh}$ и при $h = k$ $c_{jh} = -c_{hj}$. Это свойство находится в согласии с известной теоремой Бетти о взаимности работ упругой системы.

Формулы (1.11) носят общий характер и позволяют вычислить коэффициенты уравнений (1.10) для тонкостенного стержня произвольного очертания в поперечном сечении при произвольном способе аппроксимации искомого перемещений $u(z, s)$, $v(z, s)$ по переменной s .

При выборе функций $\varphi_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) и $\psi_k(s)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) вышесказанным методом интегралы в выражениях (1.11) для каждого прямолинейного участка контура получают очень простое выражение, поскольку функции $\varphi_i(s)$ на этом участке зависят от координаты s линейно, а производные $\varphi_i'(s)$, так же как и функции $\psi_k(s)$, имеют на прямолинейном участке контура постоянное значение.

Интегралы первых пяти формул (1.11) при $dF = \delta ds$ имеют одинаковую форму с шестой формулой с той только разницей, что вместо входящей в последнюю формулу величины $\frac{1}{J}$ под знаками интегралов находится толщина δ пластинок, составляющих тонкостенный стержень.

Все коэффициенты уравнений (1.10) могут быть вычислены известными методами теории рам при помощи эшор функций $\varphi_i(s)$, $\varphi_i'(s)$, $\psi_k(s)$, $\varphi_j(s)$, $\varphi_j'(s)$, $\psi_h(s)$, $M_h(s)$, $M_k(s)$, построенных для всего многоугольного контура.

Величины $p_j(z)$ и $q_h(z)$, относящиеся к свободным членам уравнений (1.10), представляют собой известные функции от z и при заданных поверхностных силах $p(z, s)$ и $q(z, s)$ вычисляются по формулам:

$$p_j = \int_L p \varphi_j ds, \quad q_h = \int_L q \psi_h ds. \quad (1.12)$$

В соответствии с физическим смыслом, вытекающим из способа их определения, величины $p_j(z)$ и $q_h(z)$ могут быть названы *обобщенными внешними силами*.

Дифференциальные уравнения (1.10) выведены при произвольном выборе функций $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$, определяющих коэффициенты этих уравнений.

Так как функции $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ линейно независимы и каждая из них может быть задана с точностью до произвольного множителя, то за искомые функции $U_i(z)$ и $V_k(z)$ всегда могут быть выбраны такие независимые между собою обобщенные продольные и поперечные перемещения, при которых соответствующие им обобщенные координаты $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ на всем поперечном сечении обладают свойством

ортогональности, понимая под этим, что для каждой совокупности функций $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ выполняются условия:

$$\left. \begin{aligned} a_{ji} &= \int_F \varphi_j \varphi_i dF = 0 \quad \text{при } j \neq i, \\ r_{hk} &= \int_F \psi_h \psi_k dF = 0 \quad \text{при } h \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Система дифференциальных уравнений (1.10) при выполнении условий (1.13) будет иметь более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \gamma a_{jj} U_j'' - \sum_i b_{ji} U_i' - \sum_k c_{jk} V_k' + \frac{1}{G} P_j &= 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, m), \\ \sum_i c_{hi} U_i' + r_{hh} V_h'' - \gamma \sum_k s_{hk} V_k + \frac{1}{G} Q_h &= 0 \quad (h=1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Функции $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$, отвечающие условиям ортогональности (1.13), могут быть названы *главными обобщенными координатами*. Выбор ортогональных функций $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ может быть выполнен графо-аналитическими методами строительной механики.

4. Симметричная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.14) или (1.10) может быть приведена к эквивалентному ей одному дифференциальному уравнению.

В данном случае это будет уравнение порядка $2(m+n)$. Отсюда следует, что искомые функции $U_i(z)$ и $V_k(z)$, удовлетворяющие системе (1.14), будут определены с точностью до $2(m+n)$ произвольных постоянных. Число этих постоянных равно удвоенному числу степеней свободы в пространстве элементарной поперечной полоски стержня шириной $dz=1$. Это находится в полном соответствии с числом независимых граничных условий, которые могут быть заданы на крайних поперечных сечениях: $z=0$ и $z=l$ (l — пролет стержня в направлении образующей). Распоряжаясь этими произвольными постоянными, можем получать решения для данного стержня при различных граничных условиях, заданных относительно продольных и поперечных перемещений; эти решения будут вполне определенные и единственные, удовлетворяющие всем необходимым геометрическим условиям. После определения $U_i(z)$ и $V_k(z)$ путем решения уравнений (1.10) можно найти напряжения $\sigma(z)$ и $\tau(z)$ в какой-либо точке сечения $z=\text{const}$ по формулам (1.4) и (1.5) также с точностью до $2(m+n)$ произвольных постоянных.

Введем в рассмотрение *обобщенные продольные и поперечные силы* в сечении $z=\text{const}$ стержня. Исходя из идеи о виртуальной работе нормальных и сдвигающих сил $\sigma \delta$ и $\tau \delta$ в этом сечении на каждом из $m+n$ возможных перемещений, определим эти силы так, как мы это делали, основываясь на законе секториальных площадей в § 8 гл. I,

а именно:

$$\left. \begin{aligned} P_j(z) &= \int_F \sigma \varphi_j dF \quad (j=1, 2, 3, \dots, m); \\ Q_h(z) &= \int_F \tau \psi_h dF \quad (h=1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Рассматривая величины $P_j(z)$ и $Q_h(z)$ как внутренние силы стержня, выразим их через основные функции $U_i(z)$ и $V_k(z)$. На основании (1.4), (1.5), (1.11) и (1.15) получаем:

$$\left. \begin{aligned} P_j(z) &= E \sum_i a_{ji} U_i', \quad Q_h(z) = G \left(\sum_i c_{hi} U_i' + \sum_k r_{hk} V_k' \right) \\ (j, i &= 1, 2, 3, \dots, m; k, h = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Если же функции $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ взяты ортогональными, то выражения (1.16) будут иметь более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} P_j(z) &= E a_{jj} U_j', \quad Q_h(z) = G \left(\sum_i c_{hi} U_i' + r_{hh} V_h' \right) \\ (j &= 1, 2, 3, \dots, m; h = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Формулу (1.4) мы теперь можем представить в виде

$$\sigma = \sum_j \frac{P_j}{a_{jj}} \varphi_j \quad (j=1, 2, 3, \dots, m),$$

или в раскрытом виде:

$$\sigma = \frac{P_1(z)}{a_{11}} \varphi_1(s) + \frac{P_2(z)}{a_{22}} \varphi_2(s) + \frac{P_3(z)}{a_{33}} \varphi_3(s) + \dots + \frac{P_m(z)}{a_{mm}} \varphi_m(s). \quad (1.18)$$

Формула (1.18), справедливая при ортогональности функций $\varphi_i(s)$, является обобщением ранее полученной на основании закона секториальных площадей формулы (8.5) гл. I

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

для стержней с открытым недеформируемым контуром; действительно, если положить

$$\varphi_1(s) = 1, \quad \varphi_2(s) = x(s), \quad \varphi_3(s) = y(s) \quad \text{и} \quad \varphi_4(s) = \omega(s), \quad (1.19)$$

то будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \int_F \sigma 1 dF = N, & a_{11} &= \int_F 1^2 dF = F, \\ P_2 &= \int_F \sigma x dF = -M_y, & a_{22} &= \int_F x^2 dF = J_y, \\ P_3 &= \int_F \sigma y dF = M_x, & a_{33} &= \int_F y^2 dF = J_x, \\ P_4 &= \int_F \sigma \omega dF = B, & a_{44} &= \int_F \omega^2 dF = J_\omega. \end{aligned} \right\}$$

На основании этой аналогии будем называть геометрические характеристики $a_{jj} = \int_F \varphi_j^2 dF$ ($j = 4, 5, \dots, m$) *бимоментами инерции*, а обобщенные продольные силы P_4, P_5, \dots, P_m , связанные с деформацией сечения, — *продольными бимоментами*. Подобным же образом можно вывести физический смысл и другой группы обобщенных сил Q_k .

Полагая

$$\begin{aligned} \psi_2(s) &= y'(s), & \psi_1(s) &= x'(s), \\ \psi_3(s) &= x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \end{aligned}$$

и используя функции (1.19), получим на основании выражений (1.17):

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_x, \\ Q_2 &= Q_y, \\ Q_3 &= H^* \end{aligned}$$

В отличие от этих сил (поперечных сил и крутящего момента), будем называть обобщенные силы Q_4, Q_5, \dots, Q_n , соответствующие обобщенным перемещениям V_4, V_5, \dots, V_n , *поперечными бимоментами*.

Теперь, имея общий интеграл дифференциальных уравнений стержня (1.14), мы можем определять напряженное и деформированное состояние стержня при самых разнообразных граничных условиях на поперечных краях, заданных в усилиях, в перемещениях или частью в усилиях, а частью в перемещениях.

§ 2. Стержень-оболочка с изменяемым прямоугольным профилем

1. Применим изложенную в предыдущем параграфе теорию к расчету на прочность тонкостенного стержня, состоящего из четырех пластинок, образующих в поперечном сечении прямоугольник; поперечное сечение такого стержня имеет две оси симметрии: горизонтальную Ox и вертикальную Oy (рис. 138).

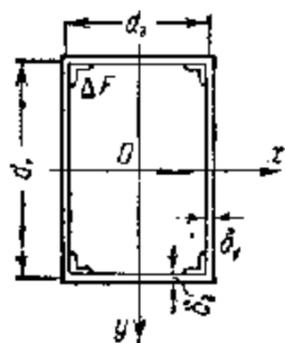


Рис. 138.

Элементарная полоска шириною $dz = 1$, выделенная из стержня двумя поперечными сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, обладает четырьмя степенями свободы из плоскости и четырьмя степенями свободы в плоскости полоски. Поэтому перемещения какой-либо точки любой пластинки в ее плоскости мы можем представить в виде конеч-

* В данном случае формулы (8.9) гл. I для касательных напряжений не имеют места, поскольку в теории тонкостенных стержней открытого профиля касательные напряжения в силу гипотезы об отсутствии деформации сдвига определялись из условий статики, в то время как в теории тонкостенных стержней закрытого профиля мы определяем касательные напряжения из закона Гука.

ных рядов:

$$\begin{aligned} u(z, s) &= U_1(z) \varphi_1(s) + U_2(z) \varphi_2(s) + U_3(z) \varphi_3(s) + U_4(z) \varphi_4(s), \\ v(z, s) &= V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s) + V_3(z) \psi_3(s) + V_4(z) \psi_4(s). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим, как обычно, через $x(s)$ и $y(s)$ координаты какой-либо точки прямоугольного контура относительно осей симметрии, а через $h(s)$ — перпендикуляр из центра на любую сторону прямоугольника;

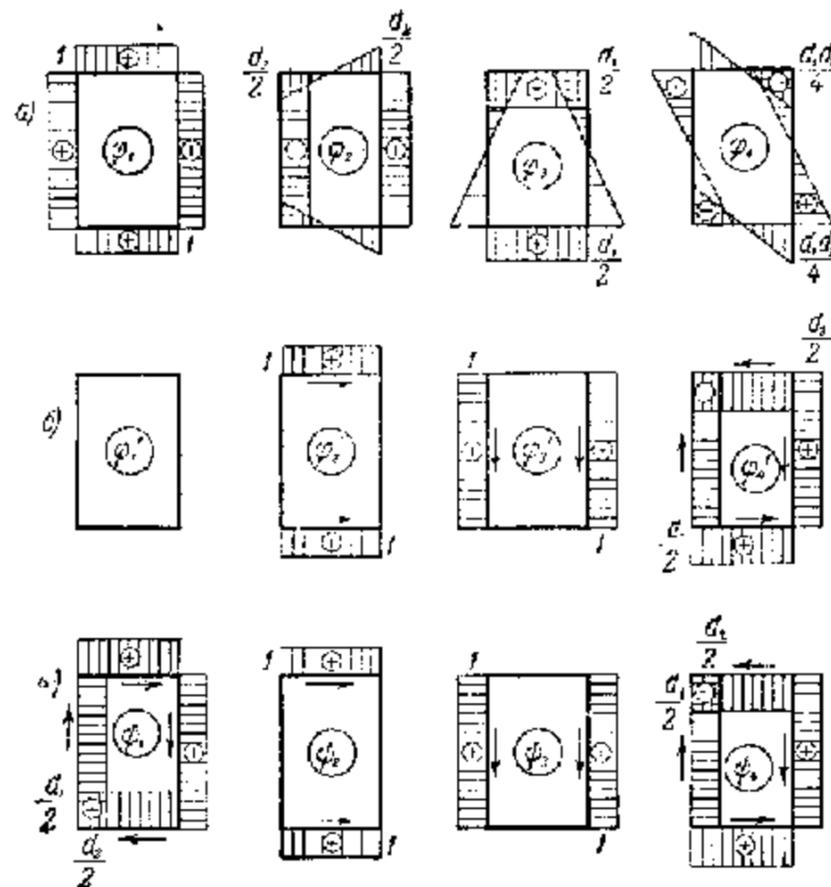


Рис. 139.

пусть $x'(s)$ и $y'(s)$ — производные по переменной s от этих декартовых координат.

Функции $\varphi_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\psi_k(s)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= 1, & \varphi_2(s) &= x(s), & \varphi_3(s) &= y(s), & \varphi_4(s) &= x(s)y(s); \\ \psi_1(s) &= h(s), & \psi_2(s) &= x'(s), & \psi_3(s) &= y'(s), & & \\ \psi_4(s) &= x'(s)y(s) - x(s)y'(s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эпюры функций $\varphi_i(s)$, производных $\varphi'_i(s)$ и эпюры функций $\psi_k(s)$ показаны на рис. 139, а, б, в. Обобщенные перемещения,

соответствующие этим обобщенным координатам, будут иметь определенный физический смысл, а именно:

а) обобщенные продольные перемещения: $U_1(z)$ — поступательное перемещение всего сечения $z = \text{const}$; $U_2(z)$ и $U_3(z)$ — углы поворота сечения $z = \text{const}$ соответственно относительно осей Oy и Ox ; $U_4(z)$ — обобщенная деформация сечения $z = \text{const}$;

б) обобщенные поперечные перемещения: $V_1(z)$ — угол поворота сечения $z = \text{const}$ как жесткого целого относительно оси Oz ; $V_2(z)$ и $V_3(z)$ — поступательные перемещения (прогибы) сечения $z = \text{const}$ по направлениям осей Ox и Oy ; $V_4(z)$ — обобщенная контурная деформация прямоугольного сечения стержня.

Пусть d_1 , δ_1 и $F_1 = d_1\delta_1$ — ширина, толщина и площадь поперечного сечения вертикальной пластинки; d_2 , δ_2 и $F_2 = d_2\delta_2$ — ширина, толщина и площадь поперечного сечения горизонтальной пластинки; l — длина стержня (рис. 138).

Предположим для общности, что стержень усилен стрингерами, расположенными на ребрах и работающими совместно с пластинками. Пусть ΔF — площадь сечения стрингера. Обобщенной деформации $V_4(z)$ для стержня, пластинки которого на ребрах жестко соединены между собою, соответствуют поперечные изгибающие моменты. Эпюры этих моментов $M(s)$ для элементарной поперечной полоски показаны на рис. 140, а*).

* Вид этой эпюры определяется из следующих соображений. Проекция на нормаль к этой пластинке всех внешних сил, приложенных к бесконечно малому элементу пластинки, в случае отсутствия внешней поверхностной нагрузки выражается через интенсивность изгибающих и крутящих моментов, как известно из теории пластинок, следующим образом:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial s} = 0.$$

Предполагая, что продольные нормальные и касательные напряжения по толщине пластинки распределены равномерно, получим:

$$M_x = H = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial s^2} = 0.$$

Таким образом, изгибающий момент, относящийся к продольной площадке, линейно изменяется по координате s . Очевидно, что из условия непрерывности поперечных изгибающих моментов $M_y = M(x, s)$ вдоль x и обращения $M(x, s)$ в нуль в середине каждой пластинки нашего прямоугольного профиля и следует эпюра $M(s)$, представленная на рис. 140, а.

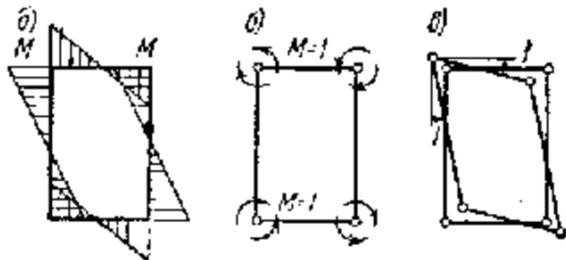


Рис. 140.

Для определения значения момента в узле рассматриваемой полоски воспользуемся методом сил. Для этого рассмотрим два состояния нашей элементарной рамы, отвечающие единичному обобщенному перемещению $V_4(z) = 1$. Одно состояние мы получим, если вставим шарниры в узлах рамы и приложим в этих узлах единичные изгибающие моменты (рис. 140, б). Эпюра этих моментов, очевидно, будет подобна эпюре $M(s)$, но только ординаты эпюры в узлах рамы будут равны единице. Другое элементарное состояние соответствует обобщенному поперечному перемещению ψ_4 (рис. 140, в). Из условия равенства нулю взаимных поворотов соседних стержней в узле рамы получим:

$$\delta_{11} M_1 + \delta_{1\psi} = 0.$$

В данном случае для первого состояния взаимный поворот соседних стержней, приходящийся на один узел рамы, вычисляется по обычной формуле Мора:

$$\delta_{11} = \frac{1}{4} \oint \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{2}{E} \left(\frac{d_1}{\delta_1^3} + \frac{d_2}{\delta_2^3} \right).$$

Для взаимного перемещения соседних стержней узла рамы при состоянии ψ_4 получим (как видно из рис. 140, в) следующую формулу:

$$\delta_{1\psi} = -2.$$

Таким образом, ордината эпюры (рис. 140, а) в узле рамы, отвечающая единичному обобщенному перемещению $V_4(z) = 1$, определится по формуле

$$M = \frac{12}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}},$$

а искомым изгибающим моментом в том же узле, соответствующий перемещению $V_4(z)$, равен

$$M(z) = \frac{12}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}} V_4(z),$$

где через $J_1 = \frac{\delta_1^3}{12}$, $J_2 = \frac{\delta_2^3}{12}$ обозначены соответственно погонные моменты инерции вертикальной и горизонтальной пластинок, относящиеся к продольному сечению стержня.

Раскрывая для данного случая общие дифференциальные уравнения (1.10) и вычисляя коэффициенты этих уравнений по формулам (1.11) при помощи эпюр, показанных на рис. 139, получим следующие

основные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad EFU_1'' + p_1 &= 0, \\ 2) \quad EJ_y U_2'' - 2GF_2 (U_2 + V_2') + p_2 &= 0, \\ 3) \quad 2GF_2 (U_2 + V_2') + q_2 &= 0, \\ 4) \quad EJ_x U_3'' - 2GF_1 (U_3 + V_3') + p_3 &= 0, \\ 5) \quad 2GF_1 (U_3 + V_3') + q_3 &= 0, \\ 6) \quad aU_4'' - b_1 U_4 - b_2 V_1 - b_1 V_4' + p_4 &= 0, \\ 7) \quad b_2 U_4' + b_1 V_1' + b_2 V_4'' + q_1 &= 0, \\ 8) \quad b_1 U_4' + b_2 V_1'' + b_1 V_4'' - cV_4 + q_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Здесь приняты следующие обозначения для геометрических характеристик и обобщенных жесткостей:

$$\left. \begin{aligned} F &= 2F_1 + 2F_2 + 4\Delta F, \\ J_x &= d_1^2 \left(\frac{F_1}{6} + \frac{F_2}{2} + \Delta F \right), \\ J_y &= d_2^2 \left(\frac{F_2}{6} + \frac{F_1}{2} + \Delta F \right); \\ a &= \frac{1}{24} Ed_1 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F), \\ b_1 &= \frac{1}{2} G (d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1), \\ b_2 &= \frac{1}{2} G (-d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1), \\ c &= \frac{96}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Свободные члены вычисляются по общим формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_j &= \int p \varphi_j ds \quad (j=1, 2, 3, 4), \\ q_h &= \int q \psi_h ds \quad (h=1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Первым уравнением системы (2.4) независимо от остальных семи определяются продольные деформации стержня в случае осевого растяжения или сжатия.

Если предположить, что обобщенные продольные нагрузки $p_2 = p_3 = 0$, то второе и третье уравнения приводятся к одному уравнению:

$$EJ_y V_2^{IV} - q_2 + \frac{EJ_x}{2GF_1} q_2'' = 0, \quad (2.7)$$

а четвертое и пятое уравнения приводятся к уравнению

$$EJ_x V_3^{IV} - q_3 + \frac{EJ_x}{2GF_1} q_3'' = 0. \quad (2.8)$$

Уравнениями (2.7) и (2.8) определяется деформированное состояние стержня (с сохранением формы контура) при изгибе его как тонкостенной балки соответственно в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Последними членами в этих уравнениях учитывается влияние деформации сдвига соответственно в плоскостях горизонтальных и вертикальных пластинок на прогиб стержня. Если этими деформациями пренебречь (т. е. предположить, что поперечные сечения стержня при изгибе остаются не только плоскими, но и нормальными к изогнутой оси стержня), то уравнения (2.7) и (2.8) совпадут с известными уравнениями элементарной теории изгиба балок.

На этом основании мы в дальнейшем не будем останавливаться на анализе первых пяти уравнений, а займемся исследованием трех последних уравнений, которые независимо от остальных образуют симметричную систему трех дифференциальных уравнений, определяющих вместе с граничными условиями на поперечных краях деформированное состояние стержня, связанное для продольных перемещений с деформацией сечения, а для поперечных перемещений с кручением и деформацией контура.

2. Внешние силы в трех последних уравнениях системы (2.4) представлены свободными членами p_4 , q_1 и q_4 , вычисляемыми по общим формулам (2.6). В соответствии с изображенными на рис. 139, а и в эпюрами обобщенных координат $\varphi_2(s)$, $\psi_1(s)$ и $\psi_4(s)$, мы можем эти силы назвать: p_4 — внешний погонный продольный бимомент, q_4 — внешний погонный поперечный бимомент, q_1 — внешний погонный крутящий момент.

Аналогично, исходя из понятия о виртуальной работе и имея в виду, что в случае кручения элементарная поперечная полоска стержня обладает одной степенью свободы при перемещениях этой полоски из ее плоскости и двумя степенями свободы при перемещениях в своей плоскости, получим формулы для внутренних обобщенных сил:

$$\left. \begin{aligned} B &= - \int \tau \varphi_2 dF, \\ H &= \int \tau \psi_1 dF, \\ Q &= \int \tau \psi_4 dF. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Здесь обобщенную продольную силу B мы называем продольным бимоментом; обобщенная поперечная сила H — есть не что иное, как крутящий момент, а новую обобщенную силу Q , соответствующую деформации контура, будем называть поперечным бимоментом; эта сила, подобно продольному бимоменту B и в отличие от крутящего момента H , также статически эквивалентна нулю.

В целях придания наглядности излагаемой теории и упрощения обозначений условимся в дальнейшем обозначать: искомую обобщенную деформацию $U_4(z)$ через $U(z)$, искомый угол кручения $V_1(z)$ через $\vartheta(z)$ и искомую обобщенную деформацию контура $V_2(z)$ через $x(z)$. Соответствующие этим обобщенным перемещениям обобщенные координаты будем обозначать вместо $\varphi_4(s)$, $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ соответственно через $\varphi(s)$, $\psi_0(s)$ и $\psi_x(s)$.

На основании (1.4) и (1.5) формулы для нормальных и касательных напряжений будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(z, s) &= EU'(z)\varphi(s), \\ \tau(z, s) &= G[U(z)\varphi'(s) + \vartheta'(z)\psi_0(s) + x'(z)\psi_x(s)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) после подстановки в них выражений (2.10) и вычисления определенных интегралов с использованием зависимостей (2.5) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} B &= -aU', \\ H &= b_2U + b_1\vartheta' + b_2x', \\ Q &= b_1U + b_2\vartheta' + b_1x'. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Наконец, рассматриваемая здесь система трех дифференциальных уравнений в случае ее однородности (при $p_4 = q_1 = q_2 = 0$) запишется в новых обозначениях следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} aU'' - b_1U - b_2\vartheta' - b_1x' &= 0, \\ b_2U' + b_1\vartheta'' + b_2x'' &= 0, \\ b_1U' + b_2\vartheta' + b_1x'' - cx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

3. Займемся теперь интегрированием системы однородных дифференциальных уравнений (2.12). Введем в рассмотрение новую функцию $f(z)$ и выразим через эту функцию и ее производные искомые перемещения $U(z)$, $\vartheta(z)$ и $x(z)$, так, чтобы первое и третье уравнения системы (2.12) удовлетворялись тождественно при любом выборе функции $f(z)$. Этому условию будут удовлетворять зависимости:

$$\left. \begin{aligned} U &= f, \\ \vartheta &= -\frac{ab_1}{cb_2}f^{IV} + \frac{a}{b_2}f'' - \frac{b_1}{b_2}f, \\ x &= \frac{a}{c}f^{IV}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где f' , f'' , f^{IV} — производные соответствующих порядков по переменной z . По подстановке (2.13) во второе уравнение системы (2.12) получим разрешающее уравнение в виде

$$\frac{a}{c}(b_1^2 - b_2^2)f^{VI} - ab_1f^{IV} + (b_1^2 - b_2^2)f'' = 0,$$

или в другой записи:

$$f^{VI} - 2r^2f^{IV} + s^2f'' = 0, \quad (2.14)$$

где r^2 и s^2 — величины, определяемые или по формулам:

$$r^2 = \frac{b_1c}{2(b_1^2 - b_2^2)}, \quad s^2 = \frac{c}{a}, \quad (2.15)$$

или, если использовать зависимости (2.5), по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{24}{J_1 + J_2} \frac{E}{G} \left(\frac{1}{d_1^2 F_1} + \frac{1}{d_2^2 F_2} \right), \\ s^2 &= \frac{2304}{J_1 + J_2} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Величины r^2 и s^2 в уравнении (2.14) можно рассматривать как обобщенные упругие характеристики. Обобщенные внутренние силы также выражаются через функцию $f(z)$ и ее производные; для получения соответствующих формул нужно подставить выражения (2.13) в формулы (2.11):

$$\left. \begin{aligned} B &= -af'', \\ H &= -\frac{a}{cb_2}(b_1^2 - b_2^2)f^{IV} + \frac{ab_1}{b_2}f'' - \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2}f', \\ Q &= af'''. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Таким образом, проблема кручения тонкостенного стержня замкнутого прямоугольного контура приведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению (2.14) шестого порядка с постоянными коэффициентами. Если мы определим из этого уравнения и граничных условий функцию $f(z)$, то при помощи формул (2.13) и (2.17) мы сможем найти функцию как для основных обобщенных перемещений, так и для основных обобщенных внутренних сил. Попутно обратим внимание, что из первой и третьей формул (2.17) следует, что

$$Q = -B', \quad (2.18)$$

т. е. что обобщенная поперечная сила Q (поперечный бимомент) равна производной от обобщенной продольной силы B (продольного бимомента). Аналогичная зависимость была получена нами в § 8 гл. I для тонкостенных стержней открытого недеформируемого контура; там же отмечалось, что этому положению в сопротивлении материалов соответствует теорема Журавского. Нужно отметить, что равенство (2.18) справедливо только в случае $p_1 = 0$.

Общий интеграл уравнения (2.14) может быть представлен в виде

$$f(z) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4 + C_5z + C_6, \quad (2.19)$$

где C_1, C_2, \dots, C_6 — произвольные постоянные, подлежащие опреде-

ленно из граничных условий, а Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 — гиперболо-тригонометрические функции, являющиеся частными линейно независимыми решениями уравнений (2.14) и определяемые формулами *):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} \alpha z \sin \beta z, \\ \Phi_2 &= \operatorname{ch} \alpha z \cos \beta z, \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} \alpha z \cos \beta z, \\ \Phi_4 &= \operatorname{sh} \alpha z \sin \beta z, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где α и β — соответственно действительная часть и коэффициент при мнимой части четырех сопряженных комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (2.14). Значения α и β вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

где s^2 и r^2 — обобщенные упругие характеристики (2.15). Производные различных порядков от функций $\Phi_j(z)$ (2.20) выражаются через эти же функции по формулам табл. 26.

Таблица 26

Функции Φ_j	Нечетные производные от Φ_j	Четные производные от Φ_j
$\Phi_1 = \operatorname{ch} \alpha z \sin \beta z$	$A\Phi_4 + B\Phi_2$	$A\Phi_1 + B\Phi_3$
$\Phi_2 = \operatorname{ch} \alpha z \cos \beta z$	$A\Phi_3 - B\Phi_1$	$A\Phi_2 - B\Phi_4$
$\Phi_3 = \operatorname{sh} \alpha z \cos \beta z$	$A\Phi_2 - B\Phi_4$	$A\Phi_3 - B\Phi_1$
$\Phi_4 = \operatorname{sh} \alpha z \sin \beta z$	$A\Phi_1 + B\Phi_3$	$A\Phi_4 + B\Phi_2$

Здесь A и B для различных производных выражаются через α и β следующим образом (табл. 27):

Таблица 27

Порядок производной	A	B
I	α	β
II	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$
III	$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)$	$3(3\alpha^2 - \beta^2)$
IV	$\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4$	$4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$

*). Для определенности рассматриваем случай комплексных корней.

Подставляя общий интеграл функции $f(z)$ (2.19) в правые части равенств (2.13) и (2.17) и пользуясь таблицами 26 и 27 производных функций $\Phi_j(z)$, мы получим общие интегралы искомого обобщенного перемещения и основных обобщенных внутренних сил в функции шести произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 . Для удобства обозрения они записаны в форме табл. 28.

Мы можем интегралы основных обобщенных перемещений и усилий представить в другой, более удобной для практических применений форме, а именно: как функции не произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 , а функции начальных параметров, которые играют ту же роль произвольных постоянных интегрирования, но имеют определенный механический смысл. За начальные параметры в данном случае принимаются значения на начальном краю $z=0$ основных обобщенных перемещений U_0, θ_0, κ_0 и основных обобщенных сил B_0, H_0 и Q_0 . Поступая, как изложено в § 3 гл. II, мы от общих интегралов табл. 28, выраженных как функции произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_6 , перейдем к таблице общих интегралов тех же основных величин, выраженных как функции начальных параметров $U_0, \theta_0, \kappa_0, B_0, H_0$ и Q_0 , — к так называемой матрице начальных параметров, представленной для данного случая в виде табл. 29.

В табл. 29 для сокращения записи приняты два новых обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{b_1^2 - b_2^2}, \quad \gamma_2 = \frac{b_2}{b_1^2 - b_2^2}, \quad (2.22)$$

где b_1 и b_2 определяются формулами (2.5).

4. При помощи интегралов, представленных в табл. 29, решение краевой задачи для оболочки (или тонкостенного стержня) ограниченной длины приводится к определению только трех постоянных интегрирования, поскольку из шести начальных параметров $\kappa_0, U_0, \theta_0, H_0, B_0$ и Q_0 в каждой частной задаче три будут представлять собою известные величины, определяемые из условий закрепления начального сечения $z=0$. Учет влияния, как сосредоточенных, так и распределенных по какому угодно закону вдоль координаты z статических и кинематических факторов производится по правилам, изложенным в § 3 гл. II применительно к матрице начальных параметров для тонкостенных стержней открытого профиля. Так как принятая нами в данной задаче расчетная модель для оболочки характеризуется тем, что элементарная поперечная полоска при кручении обладает тремя степенями свободы (одной при деформации из плоскости и двумя — в плоскости полоски), то число независимых граничных условий для одного края оболочки будет равно трем. Всего, таким образом, на двух краях оболочки может быть задано шесть независимых условий, что находится в полном соответствии с порядком основного разрешающего дифференциального уравнения (2.14), а следовательно, и с числом произвольных постоянных интегрирования этого уравнения (C_1, C_2, \dots, C_6 или $\kappa_0, U_0, \theta_0, H_0, B_0$ и Q_0).

	C_1	C_2
$U(z)$	$z\Phi_2 + \beta\Phi_1$	$z\Phi_3 - \beta\Phi_4$
$\theta(z)$	$-\frac{2r^2 b_2}{s^4 b_1} (r^2\Phi_1 + 2\alpha\beta\Phi_2)$	$-\frac{2r^2 b_2}{s^4 b_1} (r^2\Phi_2 - 2\alpha\beta\Phi_3)$
$x(z)$	$\frac{1}{s^4} [(\alpha^2 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Phi_1 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2]$	$\frac{1}{s^4} [(\alpha^2 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Phi_2 - 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_3]$
$B(z)$	$-a(r^2\Phi_1 + 2\alpha\beta\Phi_2)$	$-a(r^2\Phi_2 - 2\alpha\beta\Phi_3)$
$H(z)$		
$Q(z)$	$a[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2]$	$a[z(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_3 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_4]$

	r_0	r_0	θ_0	H_0
$x(z)$	$\Phi_2 + \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4$	$-\frac{1}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)$	0	$-\frac{\gamma_2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)$
$U(z)$	$\frac{s^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2)$	$\Phi_2 - \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4$	0	$\gamma_2 \left(-1 + \Phi_2 - \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4 \right)$
$\theta(z)$	$-\gamma_2 \frac{as^4}{2\alpha\beta}\Phi_1$	$\gamma_2 \frac{as^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2)$	1	$\gamma_2^2 \frac{as^2}{2\alpha\beta} (2\Phi_1 - \beta\Phi_2) + \gamma_1 z$
$H(z)$	0	0	0	
$B(z)$	$-\frac{as^4}{2\alpha\beta}\Phi_1$	$\frac{as^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2)$	0	$\gamma_2 \frac{as^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2)$
$Q(z)$	$\frac{as^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)$	$-\frac{as^4}{2\alpha\beta}\Phi_1$	0	$-\gamma_2 \frac{as^4}{2\alpha\beta}\Phi_1$

Таблица 28

C_2	C_1	C_3	C_4
$z\Phi_2 - \beta\Phi_3$	$\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2$	1	—
$-\frac{2r^2 b_2}{s^4 b_1} (r^2\Phi_2 - 2\alpha\beta\Phi_1)$	$-\frac{2r^2 b_2}{s^4 b_1} (r^2\Phi_3 - 2\alpha\beta\Phi_2)$	$-\frac{b_1}{b_2} z$	$-\frac{b_1}{b_2}$
$\frac{1}{s^4} [(\alpha^2 - 6\alpha^2\beta^2 - \beta^4)\Phi_2 - 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_1]$	$\frac{1}{s^4} [(\alpha^2 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Phi_1 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2]$	—	—
$-a(r^2\Phi_2 - 2\alpha\beta\Phi_1)$	$-a(r^2\Phi_3 + 2\alpha\beta\Phi_2)$	—	—
—	—	$-\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2}$	—
$\alpha[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_2 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_1]$	$\alpha[z(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2]$	—	—

Таблица 29

B_0	Q_0
$\frac{1}{a2\alpha\beta}\Phi_4$	$\frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2}{as^2 2\alpha\beta}$
$\frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_1 + \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)\Phi_2}{as^2 2\alpha\beta}$	$\frac{1}{a2\alpha\beta}\Phi_1$
$\gamma_2 \left(-1 + \Phi_2 - \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4 \right)$	$-\frac{\gamma_2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)$
0	0
$\Phi_2 - \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4$	$-\frac{1}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)$
$\frac{s^2}{2\alpha\beta}(\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_2)$	$\Phi_2 + \frac{r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4$

Граничные условия по какому-либо одному поперечному краю в зависимости от характера задачи могут быть заданы или только в перемещениях, или только в усилиях, или (в задачах смешанного типа) частью в перемещениях, частью в усилиях. Так, например, в случае полной заделки оболочки по какому-либо поперечному краю мы будем иметь граничные условия чисто геометрического характера, а именно: на этом крае должны выполняться условия $U = \theta = \chi = 0$. Если это край

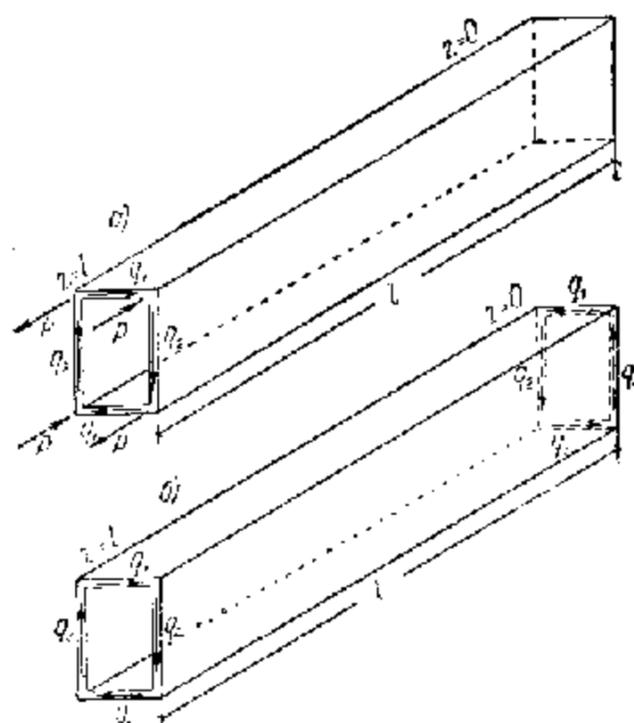


Рис. 141.

начальный ($z = 0$), то будем иметь $U_0 = \theta_0 = \chi_0 = 0$ и три начальных параметра, таким образом, уже будут определены независимо от того, какие условия будут на другом поперечном крае.

По другому краю ($z = l$) условия могут быть тоже только геометрические или только статические; например, если край свободен от продольных и поперечных закреплений и никаких усилий по этому краю не приложено, то условия при $z = l$ будут иметь вид:

$$B(l) = H(l) = Q(l) = 0.$$

В случае же, если по краю $z = l$ приложена обратно-

симметричная система четырех равных по абсолютной величине продольных сил P и антисимметричная система четырех попарно равных по абсолютной величине поперечных сил q_1 и q_2 (рис. 141, а), то, приводя эти силы к обобщенным силам (одной продольной и двум поперечным), мы будем иметь следующие граничные условия: при $z = l$

$$B(l) = d_1 d_2 P, \quad H(l) = d_1 q_1 + d_2 q_2, \quad Q(l) = -d_1 q_1 + d_2 q_2.$$

Если по сечению $z = l$ приложены одни только продольные силы P , а поперечные нагрузки в этом сечении равны нулю ($q_1 = q_2 = 0$), то граничные условия будут иметь вид:

$$\text{при } z = l \quad B(l) = d_1 d_2 P, \quad H(l) = Q(l) = 0.$$

Если, наоборот, продольные силы в сечении $z = l$ отсутствуют, а поперечные силы в этом сечении задаются формулами:

$$q_1 = d_2 S, \quad q_2 = d_1 S,$$

где S — интенсивность равномерного потока заданных сдвигающих усилий (отнесенная к единице длины контурной линии), то граничные

условия при $z = l$ будут иметь вид:

$$B(l) = 0, \quad H(l) = 2d_1 d_2 S, \quad Q(l) = 0.$$

В этом случае внешняя нагрузка, заданная на контуре сечения $z = -l$, приводится только к крутящему моменту H , определяемому как произведение удвоенной площади прямоугольника со сторонами d_1 и d_2 на сдвигающую силу S , отнесенную к единице длины контурной линии.

Во всех перечисленных выше случаях три граничных условия по краю $z = l$ дают три уравнения для определения трех остальных начальных параметров и дают таким образом вполне определенное решение задачи о кручении тонкостенной оболочки (или стержня) с замкнутым контуром поперечного сечения, у которой один конец ($z = 0$) жестко заделан, а другой ($z = l$) находится в одном из перечисленных выше граничных условий.

Мы будем иметь задачу о чистом кручении замкнутого тонкостенного прямоугольного профиля, если предположим, что оба поперечных края стержня ($z = 0$ и $z = l$) свободны от продольных и поперечных закреплений и на этих краях приложены одни только сдвигающие силы S , которые образуют замкнутый поток постоянной интенсивности по контуру сечения (рис. 141, б).

Граничные условия в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad B_0 = Q_0 = 0, \quad H_0 = 2d_1 d_2 S; \\ \text{при } z = l \quad B(l) = Q(l) = 0, \quad H(l) = 2d_1 d_2 S. \end{aligned}$$

Определив по этим условиям начальные параметры, получим для основных расчетных кинематических и статических величин следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} U &= -\gamma_2 H_0 z, \\ \theta &= \gamma_1 H_0 z + \theta_0, \\ H &= H_0, \\ \chi &= B = Q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Вторую формулу (2.23) можно представить в несколько ином виде; продифференцировав обе части один раз по z , получим:

$$\theta' = \gamma_1 H_0 \quad (2.24)$$

или

$$H_0 = \frac{1}{\gamma_1} \theta'.$$

Раскрывая γ_1 по формуле (2.22) и пользуясь зависимостями (2.5), получим:

$$H_0 = \frac{2G\Omega^2 \lambda_1 \lambda_2}{d_1 \lambda_2 + d_2 \lambda_1} \theta', \quad (2.25)$$

где $\Omega = d_1 d_2$ — площадь прямоугольника со сторонами d_1 и d_2 .

Эта формула совпадает с ранее полученной формулой (3.5) гл. III $H_T = T\Omega$, выведенной нами для случая замкнутого профиля. Сдвигающая

сила $T(z)$ определялась по формуле (3.9) гл. III $T(z) = \frac{\Omega}{\delta_T} \theta'(z)$, где $\delta_T = \oint \frac{ds}{G\delta}$. Для замкнутого прямоугольного профиля стержня, состоящего из пластинок шириной и толщиной соответственно d_1, δ_1 и d_2, δ_2 , учитывая, что модуль сдвига для всех пластинок одинаков, получим следующее значение δ_T :

$$\delta_T = \frac{2}{G\delta} \left(\frac{d_1}{\delta_1} + \frac{d_2}{\delta_2} \right)$$

и, следовательно, $T = \frac{G\Omega\delta_1\delta_2}{2(d_1\delta_2 + d_2\delta_1)} \theta'(z)$, откуда окончательно получим:

$$H_T = \frac{G\delta_1\delta_2\Omega^2}{2(d_1\delta_2 + d_2\delta_1)} \theta'(z),$$

что полностью совпадает с формулой (2.25), так как в данном случае $\Omega = d_1d_2$, в то время как в § 3 гл. III $\Omega = 2d_1d_2$.

Если в формуле (2.25) положить $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то получим известную формулу Бредта, относящуюся к задаче о чистом кручении замкнутого тонкостенного прямоугольного профиля при одинаковых толщинах стенок:

$$H_0 = \frac{2G\Omega^2\delta}{d_1 + d_2} \theta', \quad (2.26)$$

где величина

$$J_d = \frac{2\Omega^2\delta}{d_1 + d_2} \quad (2.27)$$

представляет собой момент инерции при чистом, сен-венановском кручении.

Что касается оставшейся неопределенной величины θ_0 , то, поскольку она относится к угловому смещению стержня как жесткого целого, она не влияет в этом случае на напряженное состояние стержня и по этой причине может быть принята равной нулю. На других видах граничных условий мы не будем более задерживаться, отсылая интересующихся к нашей работе [51].

§ 3. Расчет оболочки с прямоугольным изменяемым профилем без учета деформаций сдвига

Интегралы основных усилий и перемещений, представленные в матрице табл. 29, получены при довольно общих предположениях, учитывающих не только деформацию изгиба поперечного сечения стержня, но также и деформацию сдвига. Имея эти интегралы, мы могли бы при помощи предельных переходов получить решения для задач, являющихся частными случаями изложенной здесь более общей и точной теории. Так, переходы в интегралах табл. 29 к пределу при $GF_1 \rightarrow \infty$ и $GF_2 \rightarrow \infty$, что соответствует гипотезе об отсутствии деформации сдвига, мы получили бы основные расчетные формулы применительно к этой частной задаче.

Будем в данном случае для простоты исходить не из табл. 29, а из системы дифференциальных уравнений (2.12). Поскольку мы считаем, что деформация сдвига отсутствует, то, очевидно, в системе (2.12) необходимо сделать предельный переход при $GF_1 \rightarrow 0$ и $GF_2 \rightarrow \infty$. Из формул (2.5) видно, что при этом $b_1 \rightarrow \infty$ и $b_2 \rightarrow \infty$. Кроме того, поскольку кручение стержня связано с деформацией сдвига, то, очевидно, при отсутствии деформации сдвига угол кручения $\theta(z) \equiv 0$, а следовательно, и обобщенное перемещение $\psi_1(s) = \psi_2(s)$, отвечающее повороту поперечного сечения, также равно нулю.

В системе (2.12) второе уравнение пропадет, так как оно выражает работу всех сил, приложенных к элементарной поперечной полоске, на обобщенном перемещении $\psi_1(s)$, а остальные уравнения этой системы примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} aU'' - b_1U - b_1x' &= 0, \\ b_2U' + b_1x' - cx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Так как a — постоянная величина, а $b_1 \rightarrow \infty$, то мы из первого уравнения получим:

$$U = -x'. \quad (3.2)$$

Дифференцируя первое уравнение (3.1) по z и складывая со вторым, получим:

$$aU''' - cx = 0.$$

Воспользовавшись выражением (3.2), перепишем последнее уравнение в следующей форме:

$$x^{IV} + \frac{c}{a}x = 0.$$

При $GF_1 \rightarrow \infty$ и $GF_2 \rightarrow \infty$ из формул (2.15), (2.16) и (2.21) следует, что $r^2 = 0$ и $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{s^2}{2}$; полагая $k^2 = \frac{s^2}{2}$, получим:

$$x^{IV} + 4k^2x = 0. \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3.3) полностью совпадает с уравнением (2.14), если положить $x = f''$ и записать уравнение (2.14) применительно к нашему случаю, то есть положить $r^2 = 0$.

Для основных усилий и перемещений получим согласно выражениям (3.2), (2.13) и (2.17) следующие формулы:

$$U = -x', \quad B = ax'', \quad Q = -ax'''. \quad (3.4)$$

Гиперболо-тригонометрические функции (2.20) в случае уравнения (3.3) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} kz \sin kz, \\ \Phi_2 &= \operatorname{ch} kz \cos kz, \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} kz \cos kz, \\ \Phi_4 &= \operatorname{sh} kz \sin kz. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Матрица основных интегралов, выраженных через начальные параметры x_0 , U_0 , B_0 и Q_0 , имеет следующий вид:

Таблица 30

	x_0	U_0	B_0	Q_0
$x(z)$	Φ_2	$-\frac{1}{2k}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{1}{as^2}\Phi_4$	$-\frac{1}{as^2}(\Phi_1 - \Phi_3)$
$U(z)$	$k(\Phi_1 - \Phi_3)$	Φ_2	$-\frac{k}{as^2}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{1}{as^2}\Phi_4$
$B(z)$	$-as^2\Phi_1$	$ak(\Phi_1 - \Phi_3)$	Φ_2	$-\frac{1}{2k}(\Phi_1 + \Phi_3)$
$Q(z)$	$as^2k(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-as^2\Phi_4$	$k(\Phi_1 - \Phi_3)$	Φ_2

Матрица табл. 30 совершенно идентична с матрицей начальных параметров для балки на упругом основании с той разницей, что в последнем случае в качестве основных расчетных величин берутся прогиб, угол наклона касательной к изогнутой оси, изгибающий момент и поперечная сила. К тем же результатам мы можем прийти и другим путем, исходя из общих восьмичленных дифференциальных уравнений, ибо этот метод расчета есть по существу частный случай использования изложенного нами общего вариационного метода применительно к складчатым системам при учете только деформации контура поперечного сечения системы и пренебрежении деформациями сдвига одной пластинки по отношению к другим [51]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим тот же коробчатый профиль (рис. 141) при действии на него поперечной нагрузки, расположенной в плоскости одной из вертикальных граней (рис. 142, а), при этом для простоты не будем учитывать стрингеры.

Разлагая нагрузку на симметричную и обратносимметричную (рис. 142, б и в) и применяя к расчету данного профиля теорию складчатых систем, т. е. исходя из общих восьмичленных дифференциальных уравнений, получим одно дифференциальное уравнение для симметричного нагружения и систему двух совместных дифференциальных уравнений для обратносимметричного нагружения:

а) для симметричной нагрузки

$$\left(\frac{F_1}{6} + \frac{F_2}{2}\right) \frac{d^2z}{dz^2} + \frac{q(z)}{2d_1} = 0; \quad (3.6)$$

б) для обратносимметричной нагрузки

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6}(F_1 + F_2) \frac{d^2z}{dz^2} + \frac{8}{d_1 d_2} G + \frac{q(z)}{2d_1} &= 0, \\ -\frac{8}{d_1 d_2} \sigma + \frac{1}{6} \left(\frac{d_1}{J_1} + \frac{d_2}{J_2}\right) \frac{d^2 G}{dz^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

где σ — продольное нормальное напряжение и G — поперечный изгибающий момент для одной угловой точки поперечного сечения (в остальных угловых точках эти напряжения и моменты имеют или те же значения, или отличаются от них только знаками).

Уравнением (3.6) определяются продольные нормальные напряжения σ в случае изгиба стержня в вертикальной плоскости. Это — задача, относящаяся к обычной элементарной теории изгиба балок.

Уравнения (3.7) относятся к кручению стержня обратносимметричными силами $\frac{1}{2}q(z)$, изменяющимся по длине стержня по произвольному закону. Путем несложного исключения $\sigma(z)$ или $G(z)$ система дифференциальных уравнений (3.7) может быть приведена к одному из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 G}{dz^2} + 4k^2 G + A &= 0, \\ \frac{d^2 \sigma}{dz^2} + 4k^2 \sigma + B &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где $4k^2 = s^4$, A и B — члены, зависящие от внешней нагрузки и определяемые формулами:

$$A = \frac{144J_1 J_2}{d_1 d_2 (F_1 + F_2) (d_1 J_2 + d_2 J_1)} \cdot \frac{q(z)}{d_1},$$

$$B = \frac{3}{F_1 + F_2} \cdot \frac{q''(z)}{d_1}.$$

Любое из уравнений (3.8), как видим, приводится к уравнению балки на упругом основании. Однородные части этих уравнений совпадают с уравнением

$$x^{IV} + 4k^2 x = 0,$$

которое является разрешающим для частного случая, к которому относится матрица табл. 30. Отсюда заключаем, что, исходя из восьмичленных уравнений, мы в конечном счете приходим к той же матрице табл. 30.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим ту же коробчатую оболочку длиной l , находящуюся под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки q , приложенной к плоскости одной из вертикальных граней (рис. 142, а). Второе из уравнений (3.8) в этом случае будет однородным:

$$\frac{d^2 \sigma}{dz^2} + 4k^2 \sigma = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\sigma = C_1 \operatorname{sh} kz \cos kz + C_2 \operatorname{ch} kz \cos kz + C_3 \operatorname{ch} kz \sin kz + C_4 \operatorname{sh} kz \sin kz, \quad (3.9)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Подставляя выражение (3.9) в первое из уравнений (3.7) и определяя затем функцию G , получим:

$$G = -\frac{k^2}{24} d_1 d_2 (F_1 + F_2) (C_1 \operatorname{ch} kz \sin kz + C_2 \operatorname{sh} kz \sin kz - C_3 \operatorname{sh} kz \cos kz - C_4 \operatorname{ch} kz \cos kz) - \frac{q d_2}{16}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 находим из граничных условий.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления стержня на концах при наличии жестких в своей плоскости опорных диафрагм и при $q = \text{const}$. Выбирая начало координаты z в середине пролета и имея в виду, что как в отношении граничных условий, так и в отношении внешней нагрузки плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии, получим:

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Напряжения $\sigma(z)$ и моменты $G(z)$ в рассматриваемом случае выражаются четными относительно z функциями:

$$\sigma = C_2 \operatorname{ch} kz \cos kz + C_4 \operatorname{sh} kz \sin kz,$$

$$G = -\frac{k^2 d_1 d_2 (F_1 + F_2)}{24} (C_2 \operatorname{sh} kz \sin kz - C_4 \operatorname{ch} kz \cos kz) - \frac{q d_2}{16}. \quad (3.10)$$

Полагая при $z = \frac{l}{2}$: $\sigma = 0$ и $G = 0$ (согласно условиям продольной подвижности стержня и недеформируемости контура опорного сечения), найдем:

$$\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} C_2 + \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} C_4 = 0,$$

$$\operatorname{sh} \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} C_2 - \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} C_4 = \frac{3q}{2d_1 k^3 (F_1 + F_2)}.$$

Из этих уравнений получаем значения произвольных постоянных C_2 и C_4 :

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{3q}{2d_1 k^3 (F_1 + F_2)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2}}{\sin^2 \frac{kl}{2} - \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{2}}, \\ C_4 &= -\frac{3q}{2d_1 k^3 (F_1 + F_2)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2}}{\sin^2 \frac{kl}{2} - \operatorname{ch}^2 \frac{kl}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Формулами (3.10) и (3.11) определяются напряжения σ и моменты G в любом сечении.

На рис. 143, а, б показаны эпюры наибольших напряжений σ в случае симметричной и обратносимметричной нагрузки для стержня, имеющего в поперечном сечении размеры: $d_1 = 120$ см, $d_2 = 70$ см; $\delta_1 = 1,0$ см, $\delta_2 = 1,6$ см. Пролет стержня $l = 10$ м. Нагрузка $q = 100$ кг/м.

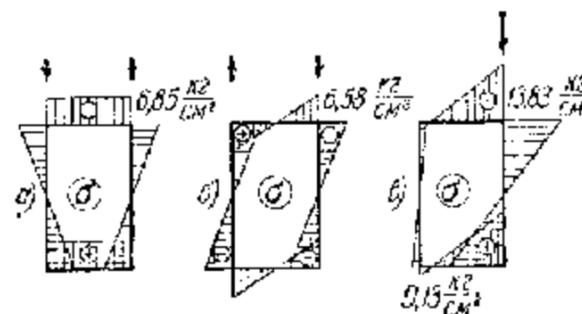


Рис. 143.

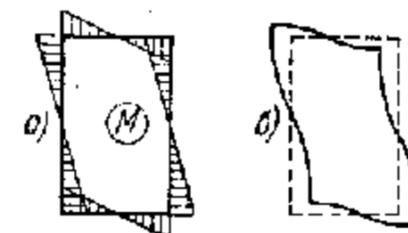


Рис. 144.

По длине стержня напряжения от симметричной нагрузки, как следует из уравнения (3.6), меняются по закону квадратной параболы, напряжения же от обратносимметричной нагрузки меняются по закону, выраженному произведениями гиперболических и тригонометрических функций, как это видно из формулы (3.10). На концах балки напряжения σ как в случае изгиба, так и в случае кручения обращаются в нуль.

На рис. 143, в дана суммарная эпюра напряжений от односторонней нагрузки $q = 100$ кг/м. Напряжения в обратносимметричном, а следовательно, и в суммарном состоянии не следуют уже закону линейного распределения. Отклонение от этого

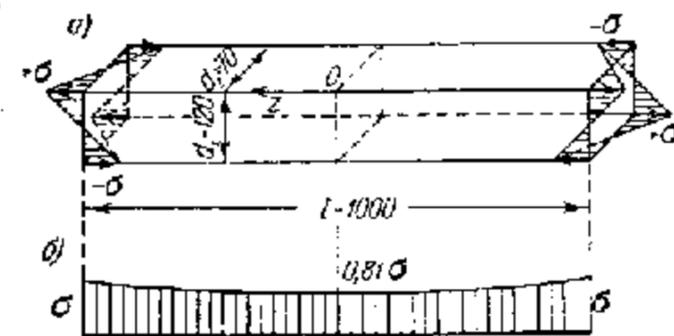


Рис. 145.

закона, как видно из сравнения эпюр, представленных на рис. 143, а и в, достигает весьма больших значений. Это отклонение в данном случае происходит за счет деформаций контура сечения.

На рис. 144, а приведена эпюра наибольших поперечных изгибающих моментов в сечении $z = 0$. На рис. 144, б показаны соответствующие этим моментам деформации изгиба поперечного контура.

Пример 2. Пусть прямоугольный коробчатый стержень на концах загружен продольными силами, распределенными по сечению согласно эпюре σ , показанной на рис. 145, а. Эти силы для данного сечения стержня образуют уравновешенную систему сил, т. е. такую систему, у которой равнодействующая и момент относительно любой оси равны нулю.

Согласно принципу Сен-Венана такая нагрузка не вызывает напряжений*) в сечениях, достаточно удаленных от места ее приложения. В отношении же рассматриваемого здесь тонкостенного стержня этот принцип не оправдывается. В этом легко убедиться, рассчитав стержень на приложенную по концам уравновешенную продольную нагрузку. Выбирая начало координат в среднем поперечном сечении и определяя (из условия равновесия бесконечно малого элемента стержня) касательные напряжения τ , найдем:

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= C_2 \operatorname{ch} kz \cos kz + C_4 \operatorname{sh} kz \sin kz, \\ \tau(z) &= A [C_2 (\operatorname{sh} kz \cos kz - \operatorname{ch} kz \sin kz) + \\ &\quad + C_4 (\operatorname{ch} kz \sin kz + \operatorname{sh} kz \cos kz)],\end{aligned}$$

где A — коэффициент пропорциональности.

Произвольные постоянные определяются из граничных условий:

$$\text{при } z = \frac{l}{2} \quad \sigma = 1, \quad \tau = 0.$$

На рис. 145, б приведен график напряжений, вычисленный для длины $l = 10 \lambda$. Напряжения σ в среднем (наиболее удаленном от концов стержня) сечении достигают весьма больших значений. Эти напряжения в каждой точке составляют 81% от напряжений на концах. С увеличением длины стержня l напряжения σ в средней части убывают. Для стержней, имеющих весьма большую длину, напряжения σ от уравновешенной продольной нагрузки практически обращаются в среднем сечении в нуль. В этом случае напряжения носят местный характер и, следовательно, находятся в согласии с принципом Сен-Венана.

В общем же случае принцип Сен-Венана к тонкостенным стержням, равно как и к оболочкам, неприменим (что уже отмечалось ранее).

§ 4. Расчет стержня-оболочки жесткого прямоугольного профиля с учетом деформаций сдвига

Рассмотрим задачу о кручении тонкостенного стержня (или оболочки) с жестким замкнутым прямоугольным контуром. Общий метод расчета такого стержня на стесненное кручение (с учетом деформаций сдвига) получается как частный случай предложенного нами общего вариационного метода. Считая контур стержня недеформируемым, мы должны, очевидно, положить

$$J_1 = J_2 \rightarrow \infty.$$

Это равносильно тому, что $c \rightarrow \infty$ [см. формулы (2.5)].

Так как $\alpha = 0$, то из трех кинематических факторов (2.13) остаются два: U и θ , которые теперь будут определяться формулами:

$$U = f', \quad \theta = -\frac{1}{b_2} (bf - af''). \quad (4.1)$$

*) Точнее, — вызывает весьма малые напряжения.

При $c \rightarrow \infty$, как видно из формул (2.16), $r^2 \rightarrow \infty$ и $s^2 \rightarrow \infty$, но отношение $\frac{s^2}{2r^2}$ остается величиной конечной; поэтому разделив разрешающее уравнение (2.14) на $(-2r^2)$ и переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$, получим разрешающее уравнение для данного частного случая. Это уравнение будет иметь вид

$$f^{IV} - \frac{s^2}{2r^2} f'' = 0,$$

или в другой записи

$$f^{IV} - \frac{k^2}{l^2} f'' = 0, \quad (4.2)$$

где через k^2 обозначена безразмерная упругая характеристика, определяемая формулой

$$k^2 = \frac{s^2}{2r^2} l^2 = \frac{48G}{E} \frac{\xi_1 \xi_2 l^2}{(d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1) (F_1 + F_2 + 6\Delta F)}.$$

Уравнение (4.2) совершенно идентично с уравнением (3.1) гл. II для случая кручения стержня с открытым недеформируемым контуром; они отличаются только упругими характеристиками k^2 , которые имеют различные значения. Общий интеграл уравнения (4.2) будет иметь такой же вид, как и интеграл для угла закручивания θ (2.4) гл. II в случае однородного уравнения (3.1) гл. II, т. е.

$$\text{при } \bar{\theta}(z) = 0: f = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + C_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z. \quad (4.3)$$

Так как разрешающее уравнение в данном частном случае четвертого порядка, то для получения матрицы начальных параметров нам нужно помимо интегралов двух кинематических факторов U и θ получить еще интегралы для двух статических факторов; из трех основных статических величин B , H и Q , которые фигурируют в общем случае, в качестве этих двух основных факторов возьмем B и H [при $\alpha = 0$, как следует из общих формул (2.9), $Q = 0$]. Эти статические факторы в нашем случае (при $c \rightarrow \infty$) будут вычисляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} B &= -af'', \\ H &= -\frac{1}{b_2} [(b_1^2 - b_2^2) f' - ab_1 f'''] \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Подставляя в формулы (4.1) и (4.4) значение общего интеграла f по (4.3), получим выражения четырех основных расчетных величин U , θ , B и H в функции четырех произвольных постоянных интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , а заменив затем произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 начальными параметрами U_0 , θ_0 , B_0 и H_0 подобно тому, как это мы делали в § 3 гл. II в случае тонкостенных стержней открытого профиля, мы получим для рассматриваемого частного случая — кручения тонкостенного стержня с жестким прямоугольным контуром — матрицу начальных параметров (табл. 31).

Нужно отметить, что коэффициент b_2 может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от размеров контура; поэтому коэффициенты влияния матрицы табл. 31, содержащие множитель b_2 , могут быть положительными или отрицательными.

Таблица 31

	b_0	U_0	B_0	H_0
$\theta(z)$	1	$\frac{b_2 t}{b_1 k} \operatorname{sh} \frac{k}{t} z$	$\frac{b_2 t^2}{b_1 a^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{t} z \right)$	$\frac{t^2}{a^2 k^2} \left(\frac{k}{t} z - \frac{t^2}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k}{t} z \right)$
$U(z)$	0	$\operatorname{ch} \frac{k}{t} z$	$-\frac{t}{a k} \operatorname{sh} \frac{k}{t} z$	$-\frac{b_2 t^2}{b_1 a^2} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{t} z \right)$
$B(z)$	0	$-\frac{a k}{t} \operatorname{sh} \frac{k}{t} z$	$\operatorname{ch} \frac{k}{t} z$	$-\frac{b_2 t}{b_1 k} \operatorname{sh} \frac{k}{t} z$
$H(z)$	0	0	0	1

Рассмотрим подробнее случай $b_2 = 0$. Как видно из (2.5), при $b_2 = 0$ $d_1^2 F_2 = d_2^2 F_1$, что при одинаковой толщине пластинок стержня соответствует квадратному профилю. Система основных дифференциальных уравнений (2.12) при $x = 0$ и $b_2 = 0$ принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} aU'' - b_1 U &= 0, \\ b_1 \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Последнее уравнение системы (2.12) в нашей частной задаче отсутствует, так как оно выражает работу всех внешних и внутренних сил элементарной поперечной полоски на возможном перемещении $\psi_x(s)$, отвечающем деформации профиля стержня, которая при $s \rightarrow \infty$ будет равна нулю.

Оба уравнения (4.5) записаны нами, так же как и система (2.12), при отсутствии внешней распределенной нагрузки. Продольная и поперечная нагрузки представлены рядом сосредоточенных силовых факторов, которые приложены в различных сечениях стержня.

Уравнения (4.5) можно решать независимо друг от друга, так как в первое уравнение входит только продольное перемещение U , отвечающее деформации поперечного сечения стержня, а во второе — только угол поворота поперечного сечения стержня $\theta(z)$. Поскольку система дифференциальных уравнений при $b_2 = 0$ распалась на независимые друг от друга уравнения, то отсюда следует важный вывод: в случае стержня с жестким профилем при $b_2 = 0$ состояние деформации $U(z)$ и состояние кручения $\theta(z)$ не влияют друг на друга. Продольная бимоментная нагрузка не вызывает кручения стержня, точно так же,

как и крутящие моменты, приложенные к стержню, не вызывают деформации $\psi(s)$ его поперечных сечений.

Из второго уравнения (4.5) следует, что при отсутствии распределенных по длине стержня крутящих моментов стержень находится в условиях чистого сеп-венановского кручения, так как угол кручения $\theta(z)$ меняется по линейному закону вдоль координаты z . Отсюда, однако, не следует, что поперечные сечения такого стержня не могут испытывать деформации. Состояние деформации $\psi(s)$, описываемое первым уравнением системы (4.5), может быть вызвано продольными бимоментными нагрузками, и это состояние не будет зависеть от угла кручения $\theta(z)$.

Матрица табл. 31 совершенно аналогична матрице табл. 3 гл. II, что является следствием отмеченной выше идентичности разрешающих уравнений (4.2) и (3.1) гл. II.

Из этой аналогии следует, что изложенные в предыдущих параграфах методы расчета на кручение тонкостенных стержней открытого профиля могут быть применены и к рассматриваемой здесь задаче по кручению тонкостенных стержней замкнутого недеформируемого профиля.

§ 5. Пространственные конструкции с жестким профилем, имеющим одну ось симметрии

1. Большой практический интерес представляют задачи о расчете пространственных тонкостенных конструкций с жестким недеформируемым контуром открытого или замкнутого профиля, обладающие в поперечном сечении одной осью симметрии. К таким задачам может быть отнесен, например, расчет корпуса судна, расчет многоконтурного симметричного кессона крыла самолета и т. д. Здесь с успехом может быть применен общий вариационный метод, изложенный в § 4.

При решении этой задачи мы ограничимся рассмотрением совместного действия изгиба из плоскости симметрии и стесненного кручения, оставляя в стороне более элементарный вопрос о продольном растяжении и изгибе в плоскости симметрии. Предположим, что перемещения $u(z, s)$ и $v(z, s)$ представляются в виде четырехчленных рядов, как в формуле (2.1), а функции $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ определяются формулами (2.2) и (2.3). Тогда при рассмотрении вопроса только о совместном действии изгиба из плоскости симметрии и стесненного кручения мы будем иметь для перемещений двучленные разложения:

$$\left. \begin{aligned} u(z, s) &= U_1(z) \varphi_1(s) + U_2(z) \varphi_2(s), \\ v(z, s) &= V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где функции $\varphi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ обозначают:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(s) &= x(s), & \varphi_2(s) &= x(s)y(s), \\ \psi_1(s) &= x'(s) = \cos \alpha(s), & \psi_2(s) &= h(s). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

причем $\alpha(s)$ — угол между касательной в данной точке и осью Ox ; $h(s)$ — перпендикуляр, опущенный из центра кручения на касательную.

В формулах (5.1) искомые обобщенные перемещения имеют следующий физический смысл:

$U_1(z)$ — угол поворота сечения $z = \text{const}$ относительно оси Oy ;

$U_2(z)$ — обобщенная деформация сечения $z = \text{const}$;

$V_1(z)$ — поступательное перемещение сечения $z = \text{const}$ по направлению оси Ox ;

$V_2(z) = \theta(z)$ — угол поворота сечения $z = \text{const}$ как жесткого целого относительно оси Oz .

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1.10), вычисляемые по формулам (1.11), при заданных значениях функций φ_i и ψ_i (5.2) будут представлены в следующем виде:

$$a_{11} = \int_F \varphi_1^2(s) dF = \int_F x^2 dF,$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_F \varphi_1 \varphi_2 dF = \int_F x^2 y dF,$$

$$a_{22} = \int_F \varphi_2^2 dF = \int_F x^2 y^2 dF;$$

$$b_{11} = \int_F (\varphi_1')^2 dF = \int_F (x')^2 dF,$$

$$b_{12} = b_{21} = \int_F \varphi_1' \varphi_2' dF = \int_F x' (x'y + xy') dF,$$

$$b_{22} = \int_F (\varphi_2')^2 dF = \int_F (x'y + xy')^2 dF;$$

$$c_{11} = b_{11} = \int_F \varphi_1' \varphi_1 dF = \int_F (x')^2 dF,$$

$$c_{12} = \int_F \varphi_1' \varphi_2 dF = \int_F x' h dF,$$

$$c_{21} = b_{12} = \int_F \varphi_2' \varphi_1 dF = \int_F (x'y + xy') x' dF,$$

$$c_{22} = \int_F \varphi_2' \varphi_2 dF = \int_F (x'y + xy') h dF;$$

$$\bar{c}_{11} = b_{11} = \int_F \psi_1 \varphi_1' dF = \int_F (x')^2 dF,$$

$$\bar{c}_{12} = b_{12} = \int_F \psi_1 \varphi_2' dF = \int_F x' (x'y + xy') dF,$$

$$\bar{c}_{21} = c_{12} = \int_F \psi_2 \varphi_1' dF = \int_F h x' dF,$$

$$c_{22} = c_{22} = \int_F \psi_2 \varphi_2' dF = \int_F h (x'y + xy') dF;$$

$$r_{11} = b_{11} = \int_F \psi_1^2 dF = \int_F (x')^2 dF,$$

$$r_{12} = r_{21} = c_{12} = \int_F \psi_1 \psi_2 dF = \int_F x' h dF,$$

$$r_{22} = \int_F \psi_2^2 dF = \int_F h^2 dF.$$

Из двадцати коэффициентов, как видим, существенно различных оказывается только девять: a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_{11} , b_{12} , b_{22} , c_{12} , c_{22} , r_{22} , а остальные повторяют их.

Один из этих коэффициентов можно обратить в нуль, исходя из следующих соображений.

Угол $\theta(z)$ есть угол поворота всего сечения относительно оси Oz , проходящей через произвольно выбранную точку оси симметрии Oy сечения стержня. Примем сначала за центр кручения сечения стержня центр тяжести сечения и обозначим длину перпендикуляра, опущенного из центра тяжести на профильную линию, через $h(s)$. Если принять теперь за центр кручения сечения произвольную точку α_y оси Oy , то длина перпендикуляра $h_1(s)$, опущенного из этой точки на профильную линию, выразится через $h(s)$ следующим образом:

$$h_1(s) = h(s) + \alpha_y x'.$$

Ортогонализируя функции $h_1(s)$ и $x'(s)$, обращаем в нуль коэффициент c_{12} :

$$c_{12} = \int_F x' (h + \alpha_y x') dF = 0.$$

Отсюда находим координату искомого центра кручения:

$$\alpha_y = - \frac{\int_F x' h dF}{\int_F (x')^2 dF}.$$

После сделанных замечаний можно систему дифференциальных уравнений представить в виде табл. 32.

Символом D , как и ранее, мы обозначим операцию дифференцирования функции, стоящей в заголовке таблицы, по переменной z . При вычислении коэффициентов c_{22} и r_{22} под интегралами вместо h нужно теперь брать $(h + \alpha_y x')$.

Таблица 32

$U_1(z)$	$U_2(z)$	$V_1(z)$	$V_2(z) = \theta(z)$	Нагрузка	Правая часть
$Ea_{11}D^2 - Gb_{11}$	$Ea_{12}D^2 - Gb_{12}$	$-Gb_{11}D$	—	p_1	0
$Ea_{12}D^2 - Gb_{12}$	$Ea_{22}D^2 - Gb_{22}$	$-Gb_{12}D$	$-Gc_{22}D$	p_2	0
$Gb_{11}D$	$Gb_{12}D$	$Gb_{11}D^2$	—	q_1	0
—	$Gc_{22}D$	—	$Gc_{22}D^2$	q_2	0

Из двух последних уравнений системы (табл. 32) находим (обозначая производные по z штрихами):

$$\left. \begin{aligned} U_2' &= -\frac{r_{22}}{c_{22}} \theta'' - \frac{1}{Gc_{22}} q_2, \\ U_1' &= -V_1'' + \frac{b_{12}r_{22}}{b_{11}c_{22}} \theta'' + \frac{b_{12}}{Gb_{11}c_{22}} q_2 - \frac{1}{Gb_{11}} q_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (табл. 32) один раз по z , складывая его с третьим уравнением и подставляя в результат вместо U_1' и U_2' их выражения по формулам (5.3), получим:

$$-Ea_{11}V_1^{IV} + E \frac{a_{12}b_{12} - a_{22}b_{11}}{b_{11}} \cdot \frac{r_{22}}{c_{22}} \theta^{IV} + \bar{q}_1 = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\bar{q}_1 = \frac{E}{G} \left(\frac{a_{11}b_{12}}{b_{11}c_{22}} - \frac{a_{22}}{c_{22}} \right) q_2' - \frac{E}{G} \frac{a_{11}}{b_{11}} q_1'' + p_1' + q_1.$$

Второе уравнение системы (табл. 32) после дифференцирования один раз по z и использования зависимостей (5.3) дает

$$-Ea_{12}V_1^{IV} + E \frac{a_{12}b_{12} - a_{22}b_{11}}{b_{11}} \cdot \frac{r_{22}}{c_{22}} \theta^{IV} + \frac{G(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)r_{22} - b_{11}c_{22}^2}{b_{11}c_{22}} \theta'' + \bar{q}_2 = 0, \quad (5.5)$$

где

$$\bar{q}_2 = \frac{E}{G} \left(\frac{a_{12}b_{12}}{b_{11}c_{22}} - \frac{a_{22}}{c_{22}} \right) q_2'' - \frac{E}{G} \frac{a_{12}}{b_{11}} q_1'' + \left(\frac{b_{22}}{c_{22}} - \frac{b_{12}^2}{b_{11}c_{22}} \right) q_2 + \frac{b_{12}}{b_{11}} q_1 + p_2'.$$

Умножив уравнение (5.4) на a_{12} , а уравнение (5.5) на $(-a_{11})$ и сложив их, получим:

$$E(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \frac{r_{22}}{c_{22}} \theta^{IV} - G[(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \frac{a_{11}r_{22}}{b_{11}c_{22}} - a_{11}c_{22}] \theta'' + \frac{1}{2} a_{12} \bar{q}_1 - a_{11} \bar{q}_2 = 0. \quad (5.6)$$

Таким образом, систему четырех уравнений табл. 32 мы можем заменить другой системой четырех уравнений (5.3), (5.5) и (5.6), из которых уравнение (5.6) по виду идентично изученному нами уравнению стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля, и все задачи, ранее решенные нами, могут быть целиком применены здесь. После определения угла кручения θ и подстановки его в уравнение (5.4) мы для определения прогиба V_1 приходим к известному уравнению прогиба балки. Наконец, подставляя в (5.3) найденные значения V_1 и θ , получаем простые дифференциальные уравнения первого порядка, из которых легко определяются две остальные искомые функции U_1 и U_2 .

§ 6. Экспериментальная проверка

1. Теоретические исследования, произведенные на основе изложенного нами метода, показывают, что продольные нормальные напряжения в тонкостенных стержнях и оболочках с замкнутым изменяемым контуром поперечного сечения, происходящие от уравновешенной продольной нагрузки (бимоментной), не носят характера местных напряжений и затухают весьма медленно по мере удаления от места приложения этой нагрузки. Степень затухания зависит как от величины отношения толщины стержня δ к длине грани d замкнутого контура поперечного сечения, так и от степени жесткости контура поперечного сечения стержня или оболочки. С увеличением отношения $\frac{\delta}{d}$ степень затухания напряжений возрастает, однако не настолько быстро, чтобы можно было эти напряжения считать местными; точно так же при изгибе элементов поперечной замкнутой рамы степень затухания продольных нормальных напряжений σ от продольной бимоментной нагрузки возрастает с увеличением средних погонных жесткостей (EJ_1 и EJ_2 в случае прямоугольного контура) и только в предельном случае, т. е. в случае оболочки с жестким замкнутым контуром, дополнительные напряжения, связанные с отклонением от гипотезы плоских сечений, можно по своему характеру относить к местным напряжениям. Указанное обстоятельство имеет большое значение при решении многих практических задач.

Проблема эта, связанная с принципом Сен-Венана, сравнительно легко может быть исследована при помощи варьирования в уравнениях (2.12) отношений $\frac{\delta}{d}$, а также величин J_1 и J_2 , представляющих собой для ребристой оболочки средние (приходящиеся на единицу длины) приведенные моменты инерции продольных сечений оболочки. Ранее (§ 8 гл. II) было показано, что в случае тонкостенных стержней (равно как и оболочек) открытого профиля напряжения от бимомента, даже при отсутствии деформации контура сечения, распространяются на значительной части длины стержня и не носят характера местных напряжений. С целью проверки предложенной теории и метода расчета

стержней и оболочек с замкнутым контуром поперечного сечения в отделе строительной механики Института механики АН СССР в 1952 г. были произведены экспериментальные исследования*).

Две замкнутые призматические оболочки квадратного поперечного сечения одинаковых размеров и длиной $l = 1$ м были испытаны на бимоментную нагрузку, приложенную на одном из концов (рис. 146, а).

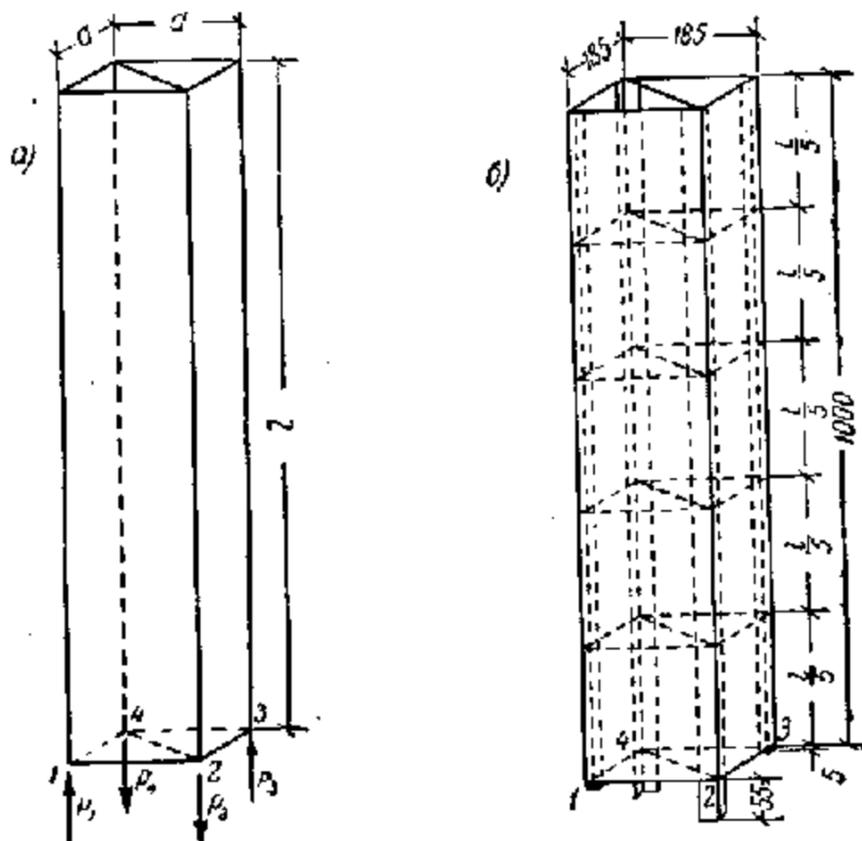


Рис. 146.

Оболочки были изготовлены из листовой стали толщиной $\delta = 1$ мм и усилены по ребрам продольными стрингерами, изготовленными из равнобоких уголков № 2,5 ($25 \times 25 \times 4$), соединенными с оболочкой заклепками ($\sigma = 2$ мм, шаг 20 мм, шов двухрядный). Для придания жесткости каждый торец был усилен диагональю. Одна из оболочек, для того чтобы иметь право полагать ее контур достаточно жестким (практически недеформируемым в плоскости поперечного сечения), была усилена диагоналями, приваренными (крест-накрест) к стрингерам внутри оболочки в четырех сечениях: $z = \frac{l}{5}, \frac{2l}{5}, \frac{3l}{5}$ и $\frac{4l}{5}$. Стрингеры на одном конце оболочки сплюснаты заподлицо с торцом, на другом — для того, чтобы можно было осуществить бимоментную нагрузку,

* Испытания проводились мл. научным сотрудником Института механики АН СССР, кандидатом технических наук Н. Д. Левитской.

два стрингера (1 и 3, рис. 146, б) выпущены за торец на 5 мм, а два других (2 и 4) выпущены на 55 мм.

Модуль упругости материала оболочки $E = 1,95 \cdot 10^6$ кг/см² был определен лабораторией испытания материалов в ЦНИПС; испытания материала производились на образцах, вырезанных из того же листа металла, из которого была изготовлена оболочка.

Загружение испытуемого образца производилось с одного торца с помощью двух спаренных гидравлических домкратов. Оболочка ставилась в вертикальное положение

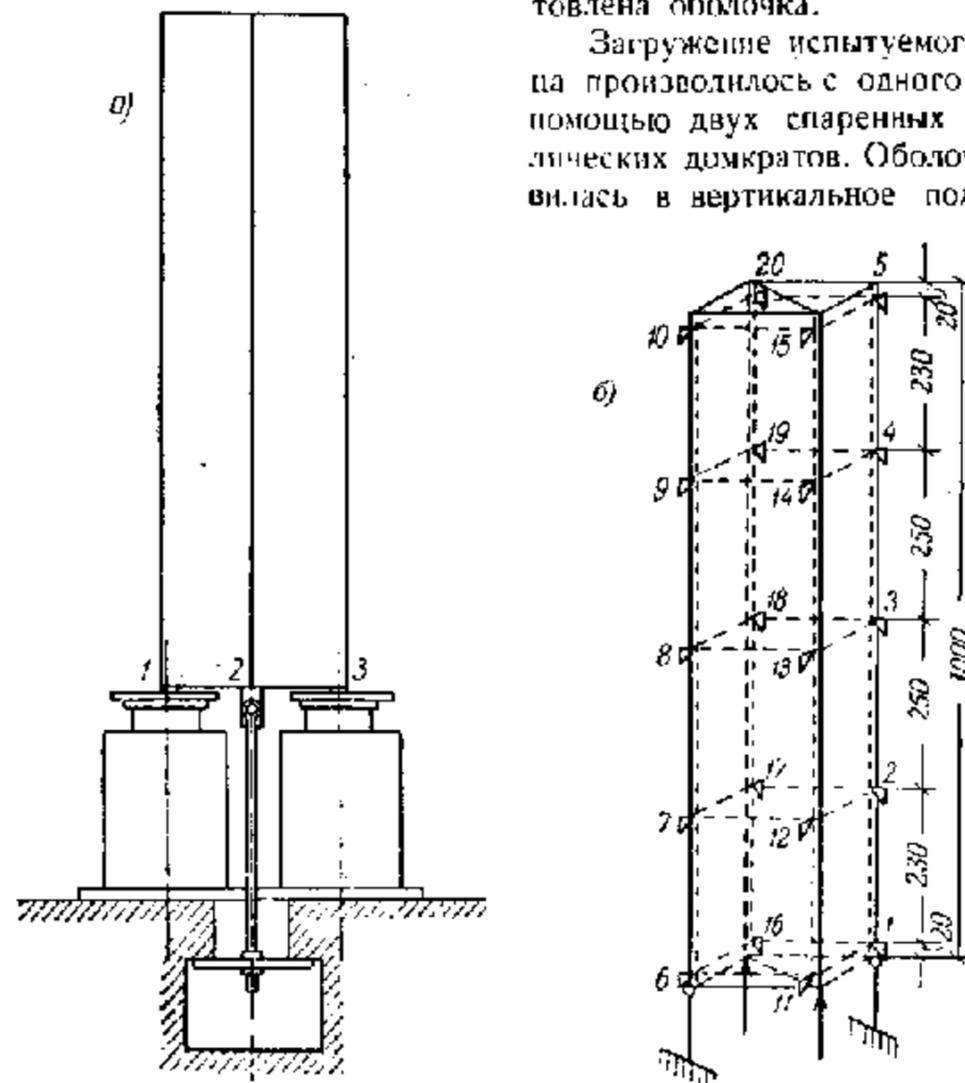


Рис. 147.

над щелью в силовом полу таким образом, чтобы торцевые диагонали были расположены в одной вертикальной плоскости со щелью. Последняя перекрывалась массивной плитой, на которую устанавливались гидравлические домкраты так, чтобы они находились один против другого по разные стороны щели. Плунжеры домкратов, в свою очередь, также перекрывались общей плитой. На нее ставился в вертикальном положении испытуемый образец таким образом, чтобы концы стрингеров 1—3 (рис. 147, а), выступающие за его нижний торец, приходились над центрами плунжеров домкратов. К двум другим

концам стрингеров (2 и 4), выступающим за торец на 55 мм, крепились анкерные тяги, которые прочно закреплялись в силовой цепи пола.

Продольные деформации замерялись механическими тензотранзисторами с базой 2 см, расположенными на контурах пяти сечений ($z = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}$ и l) по 4 прибора на каждом сечении (по числу граней);

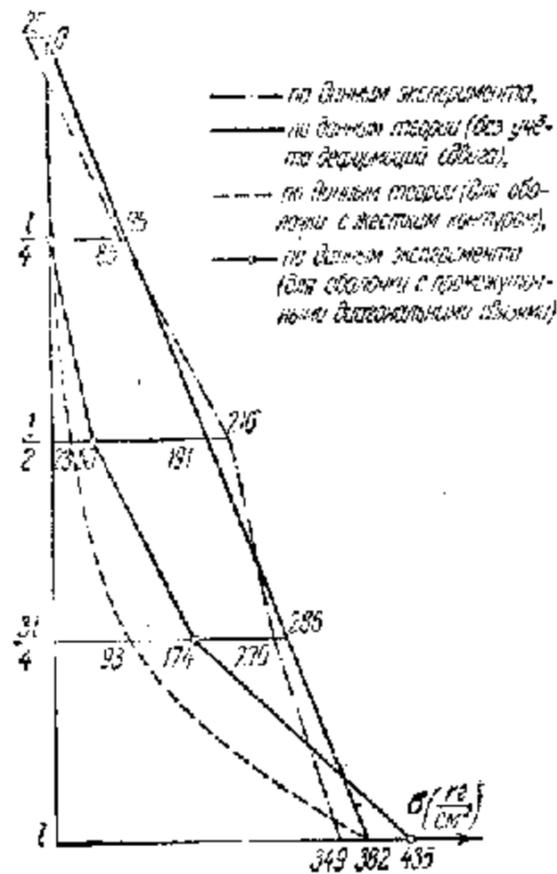


Рис. 148.

всего, таким образом, на образце было 20 тензотранзисторов (рис. 147, б). Для сечений $z = 0$ и $z = l$ тензотранзисторы ставились на расстоянии 2 см от торцов. Оболочки испытывались на бимоментную нагрузку по схеме, показанной на рис. 146, а, при $P = 1000$ кг. Загрузка велась этапами по 100 кг и плавно доводилась до 1000 кг, затем спускалась до нуля. Всего было проведено шесть циклов загрузки и разгрузки. Результаты испытаний (среднее из шести замеров) представлены в виде графиков распределения продольных нормальных напряжений в $кг/см^2$ по длине оболочки (рис. 148) и по ее поперечному сечению (рис. 149).

На этих же графиках приведены кривые распределения напряжений по длине оболочки, полученные теоретически. Расчет оболочки с деформируемым контуром (при пренебрежении деформациями

сдвига) производился при помощи матрицы табл. 30.

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad & \alpha_0 = B_0 = 0, \\ \text{при } z = l \quad & \alpha(l) = 0, \quad B(l) = Pd^2. \end{aligned}$$

Обобщенные жесткости и характеристическое число имели значения:

$$a = \frac{1}{12} Ed^4 (F + 3\Delta F) = 149\,400 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{см}^4,$$

$$c = 48 \frac{EJ}{d} = 421,6 \text{ кг},$$

$$s^4 = \frac{c}{a} = 0,2822 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-4},$$

$$k = \sqrt{\frac{s^2}{2}} = 0,00515 \text{ см}^{-1}.$$

Начальные параметры, определенные из граничных условий на конце $z = l$, имеют значения:

$$U_0 = 3,801 \cdot 10^{-6} P,$$

$$Q_0 = -3,406 P.$$

На графике (рис. 148) нанесены продольные нормальные напряжения $\sigma = -\frac{E}{a} \varphi B$, пропорциональные бимоменту $B(z)$ [см. (2.10)] и

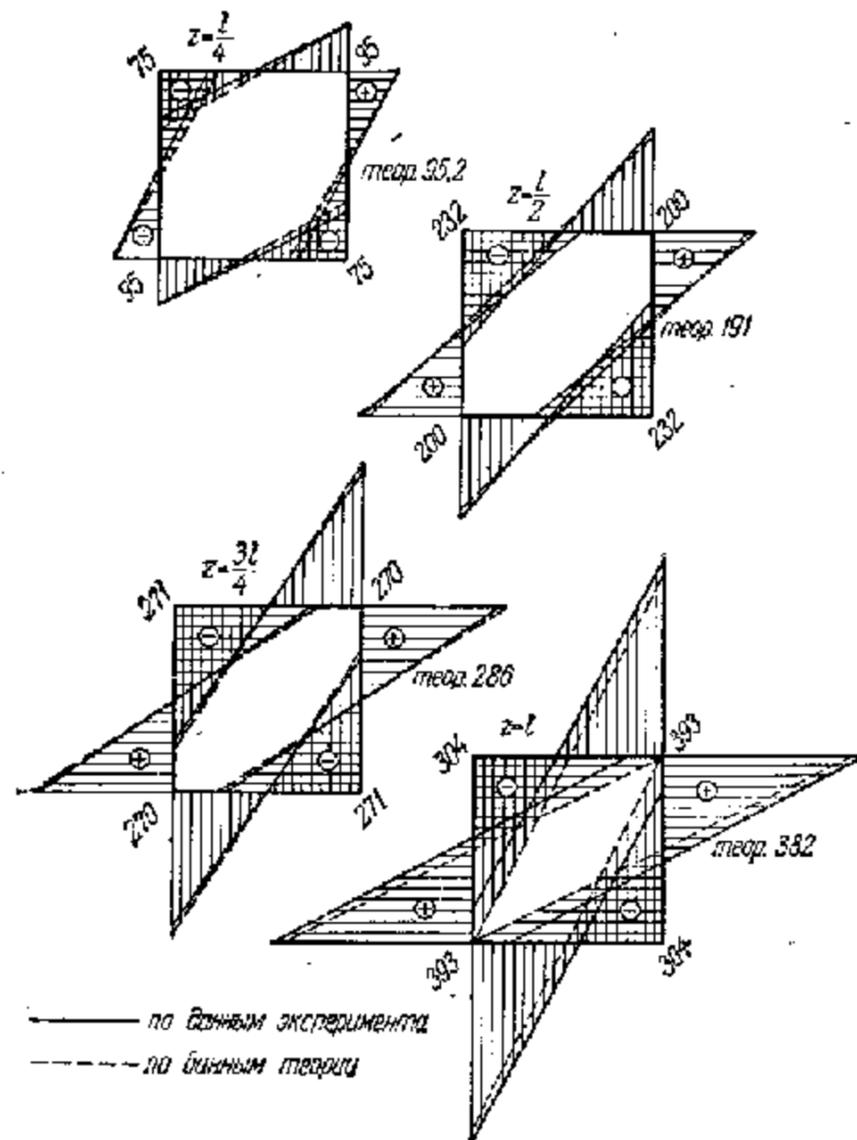


Рис. 149.

2.11)], вычисленные для тех же сечений, в которых были расположены приборы.

Расчет оболочки с жестким, недеформируемым, контуром поперечного сечения произведен при помощи матрицы табл. 31, в которой для случая квадратного контура необходимо положить $b_2 = 0$.

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\text{при } z=0 \quad B_0 = H_0 = 0,$$

$$\text{при } z=l \quad h(l) = 0 \quad (\text{что равносильно } h_0 = 0), \quad B(l) = Pd^2.$$

Жесткости и характеристическое число имеют значения:

$$a = \frac{1}{12} Ed^4 (F + 3\Delta F) = 149\,400 \cdot 10^8 \text{ кг}\cdot\text{см}^4,$$

$$b_1 = Gd^2 F = 474\,900 \cdot 10^8 \text{ кг}\cdot\text{см}^2,$$

$$k = \sqrt{\frac{b_1}{a}} = 5,637 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}.$$

Начальный параметр U_0 , определенный из граничного условия на конце $z=l$, равен:

$$U_0 = 2,896 \cdot 10^{-10} P.$$

Анализ графиков и сравнение теоретических данных с экспериментальными позволяют сделать следующие заключения:

1) в конструкциях типа тонких призматических оболочек закрытого профиля, не имеющих по длине дополнительных поперечных связей, решающим фактором, влияющим на напряженное состояние, является деформация контура; деформации сдвига играют второстепенную роль, и ими можно при расчете пренебречь;

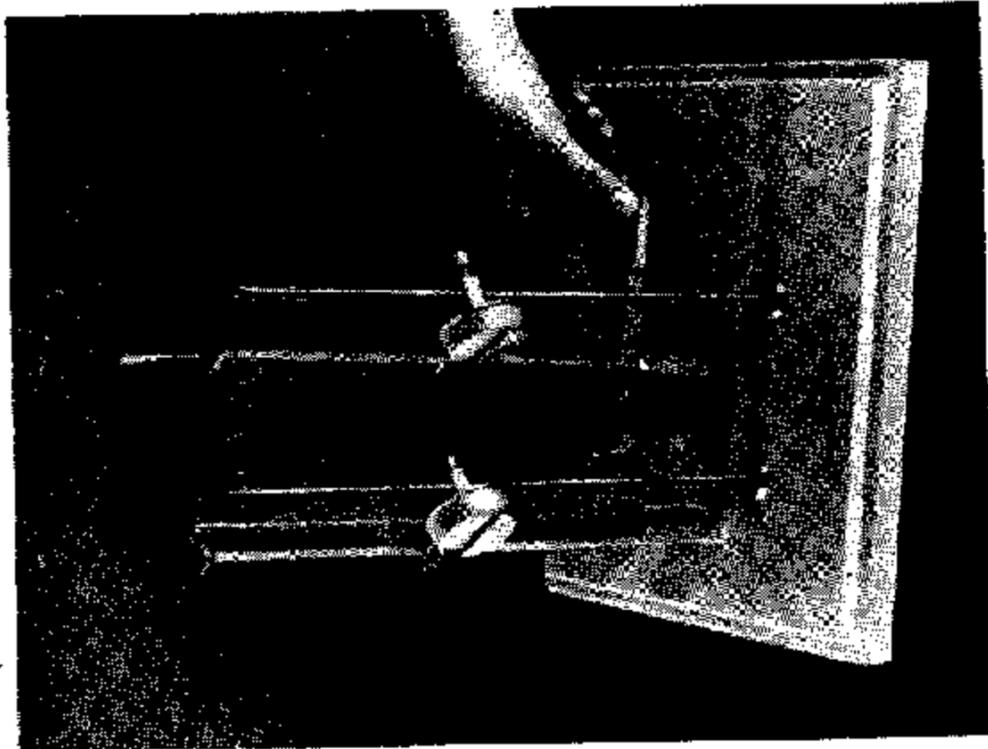
2) наличие поперечных связей, препятствующих деформации контура, способствует более быстрому затуханию продольных напряжений по длине;

3) со всей очевидностью подтверждается высказанное нами положение, что принцип Сен-Венана имеет ограниченную область применения не только для тонкостенных стержней открытого недеформируемого профиля, но также и для тонкостенных стержней и оболочек замкнутого профиля, если они не усилены дополнительными ребрами жесткости.

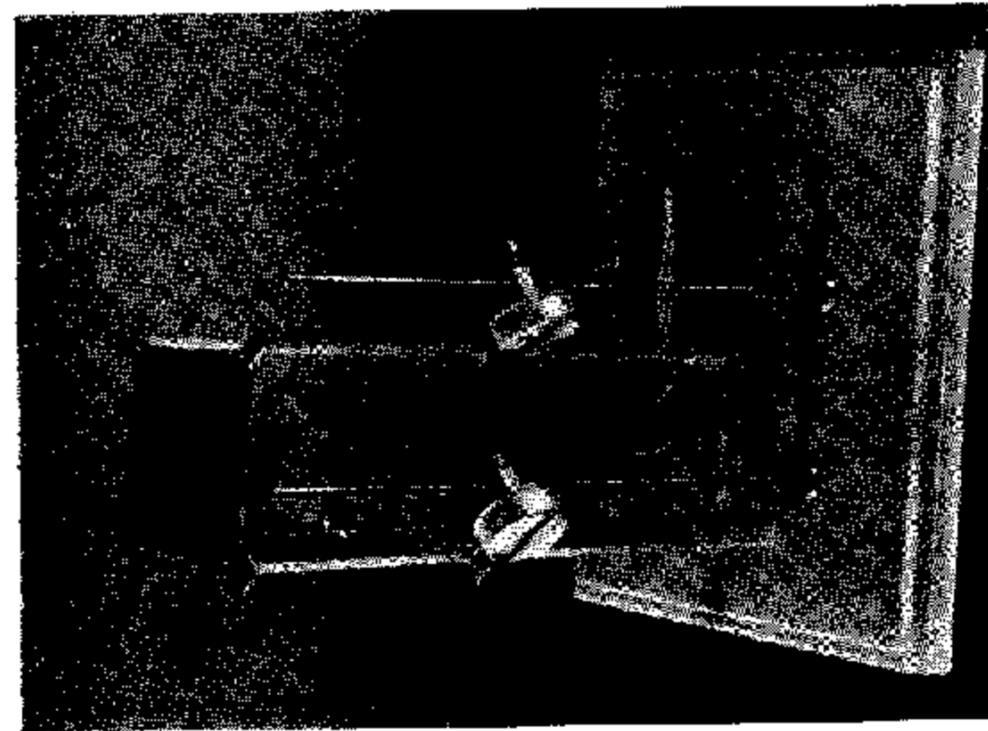
2. В цилиндрической или призматической оболочке закрытого профиля, в отличие от тонкостенного стержня открытого профиля, деформация сечения при отсутствии дополнительных поперечных связей, как правило, сопровождается деформацией профиля оболочки в поперечном сечении. Величина этой деформации в значительной степени зависит от толщины оболочки.

На рис. 150 показана модель оболочки, представляющая собой замкнутую (квадратную в плане) призму с отношением длины к ширине $\frac{l}{a} = 4$. Ребра оболочки усилены уголками.

Модель установлена в вертикальном положении. У нижнего торца два диагонально противоположных ребра (3 и 4) закреплены на стенке, два других ребра (1 и 2) соединены между собою поперечной планкой, в середине которой (по оси оболочки) шарнирно прикреплен

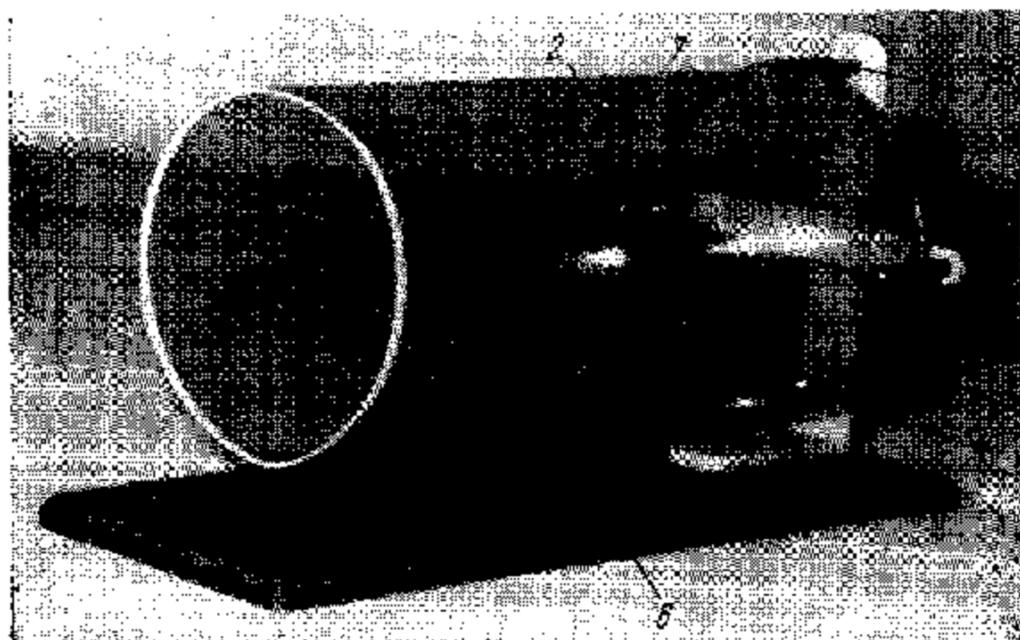


б)

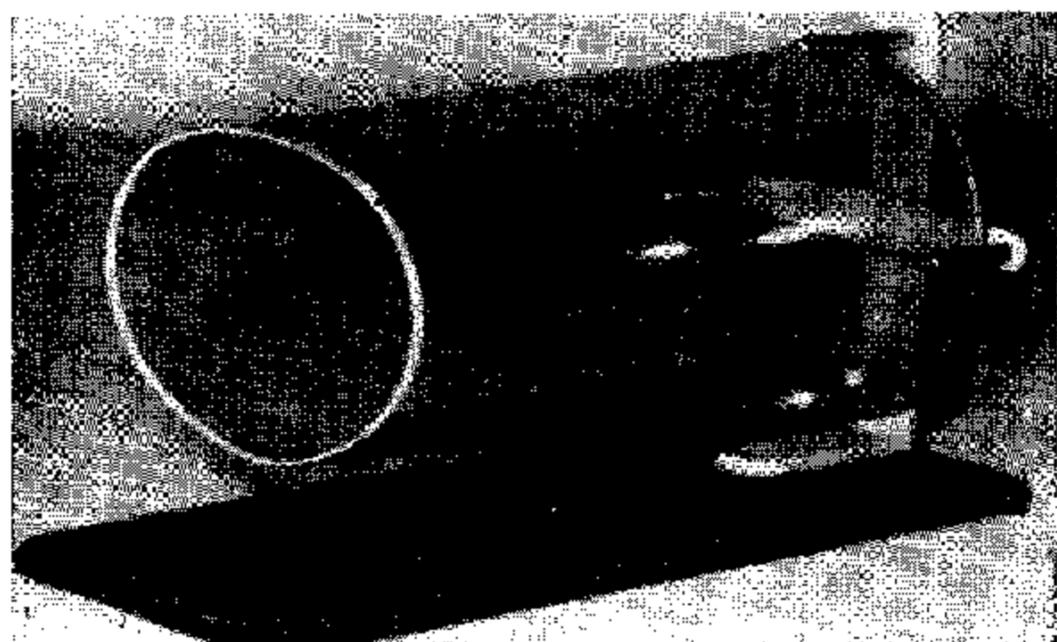


а)

Рис. 150.



а)



б)

Рис. 151.

загрузочный рычаг. На верхнем торце модель снабжена съемной диагональной жесткой планкой (на рисунке ее нет) (рис. 150, а).

При нажиме на рычаг ребра модели, соединенные внизу планкой, растягиваются; ребра же, прикрепленные к станине, сжимаются, т. е. на нижний торец передается самоуравновешенная система продольных сил (бимомент). При снятой верхней диагонали эта нагрузка вызывает деформацию контура модели: поперечные сечения модели из квадратных превращаются в ромбические, что хорошо видно (рис. 150, б).

Продольная деформация — депланация (растяжение одних и сжатие других диагональных ребер) распространяется далеко от нижнего торца по высоте модели и фиксируется индикаторами б, которые могут быть установлены в любом сечении по длине оболочки.

На модели с установленной на место верхней диагональной планкой, т. е. с более жестким контуром, все описанные явления (деформация контура и депланация поперечных сечений модели) от действия бимоментной нагрузки быстро убывают по высоте оболочки.

3. На рис. 151 показана модель, представляющая собой замкнутую цилиндрическую оболочку с отношением длины к диаметру $\frac{l}{d} = 4$ (рис. 151, а). Один конец оболочки свободен, на другом конце оболочка имеет диафрагму. В четырех точках этого торца, расположенных по вертикальному и горизонтальному диаметрам, к оболочке жестко прикреплено четыре пальца (1, 2, 3, 4). Два из них, находящихся в вертикальной плоскости, закреплены в стойке 5, жестко соединенной со станиной б; два других, находящихся в горизонтальной плоскости, соединены с поперечной планкой 7, имеющей в центре ось, совпадающую с геометрической осью оболочки. Ось планки, пропущенная свободно сквозь вышеупомянутую стойку, имеет на конце нарезку. Вращая надетый на нее штурвал, мы сообщаем поступательное перемещение поперечной планке и тем самым передаем растягивающие усилия двум точкам торца оболочки, лежащим на горизонтальном диаметре. Две же другие точки, находящиеся на вертикальном диаметре, будут сжаты. Таким образом, на торец оболочки передается самоуравновешенная система продольных сил (бимомент).

При загрузке модели бимоментной нагрузкой, приложенной на торце, ее поперечные сечения депланируют и, кроме того, претерпевают деформацию изгиба (рис. 151, б). Эта изгибная деформация по мере удаления от места приложения продольной бимоментной нагрузки не убывает, как это имеет место в краевом эффекте Геккелера, а, наоборот, возрастает, достигая в приведенной модели максимальных значений на другом свободном конце оболочки.

Описанное здесь явление, связанное с депланацией поперечных сечений и изгибной деформацией, имеет принципиальное значение в предложенной нами общей полубезмоментной теории цилиндрических и призматических оболочек средней длины.

ГЛАВА V

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ, НАГРУЖЕННЫХ ПО КОНЦАМ
ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ И МОМЕНТАМИ

§ 1. Дифференциальные уравнения устойчивости стержня

1. Выше мы установили, что поперечные сечения тонкостенных стержней, как правило, после деформации не остаются плоскими. Эти стержни работают как пространственные тонкостенные системы, испытывающие продольные деформации не только вследствие изгиба, но также и вследствие закручивания. Дополнительные секториальные напряжения во многих случаях достигают весьма больших значений, что является результатом того, что стержни с открытым недеформируемым контуром обладают относительно малой жесткостью на кручение. Из этого следует, что кручение, сопровождаемое появлением в поперечных сечениях секториальных напряжений, может играть также большую роль и в устойчивости тонкостенных стержней.

В данной главе излагается общая линейная теория пространственной устойчивости и критических состояний стержней как тонкостенных (открытого и закрытого профиля), так и сплошного сечения, нагруженных по концам продольными силами и моментами. Эта теория отличается от классической теории продольного изгиба Эйлера тем, что, будучи построена на законах, учитывающих деформацию сечения, она позволяет исследовать явление потери устойчивости и критических состояний стержня в более общей постановке с учетом пространственных изгибно-крутильных форм равновесия. Теория Эйлера, построенная на законе плоских сечений и учитывающая для стержня только чисто изгибные формы равновесия, представляет собой весьма частный случай излагаемой здесь общей теории.

Согласно линейной теории для упругой системы в критическом состоянии, в зависимости от характера действия нагрузки, различают два рода задач устойчивости.

К задачам устойчивости первого рода относятся такие задачи теории бифуркаций, в которых для упругой системы в критических состояниях становятся возможными другие формы равновесия (бифуркации), качественно отличные от основной докритической формы равновесия. Классическим примером такого рода задач является теория продольного

изгиба Эйлера. В этой теории основная докритическая форма равновесия стержня в случае центрального сжатия будет прямолинейной. Эта форма по достижении сжимающей нагрузки своего критического значения может перейти в пагубную форму равновесия, характеризующуюся прогибами стержня в плоскости наименьшей жесткости. Вторым примером задачи устойчивости первого рода может служить предложенная автором теория пространственной устойчивости стержня при центральном сжатии. Эта теория, представляющая собой обобщение задачи Эйлера, характеризуется тем, что в критическом состоянии для центрально сжатого стержня, кроме основной прямолинейной формы равновесия, наряду с изгибной эйлеровской формой становится возможной пространственная изгибно-крутильная форма равновесия, и эта форма во многих случаях может давать меньшее значение критической силы, чем теория Эйлера.

К задачам устойчивости второго рода относятся задачи, в которых с увеличением внешней нагрузки возрастает также и деформация системы. Эта деформация, характеризующая собой форму упругого равновесия потери устойчивости, получает только количественные, а не качественные изменения. Такого рода задачами являются сжато-изогнутый стержень в теории продольного изгиба, некоторые из задач излагаемой здесь общей теории изгибно-кручения стержней при внецентренном приложении продольной сжимающей или растягивающей силы. В этих задачах основная докритическая форма равновесия будет иметь место также и в момент потери устойчивости при достижении внешней нагрузкой своего критического значения.

Потеря устойчивости упругой системы в задачах как первого, так и второго рода согласно линейной теории характеризуется тем, что деформация системы в закритическом состоянии при сколь угодно малом увеличении нагрузки может принимать бесконечно большие значения. Эта деформация, рассматриваемая как вариация возможных для данной системы форм равновесия в критических состояниях (при дополнительном статическом условии об отсутствии вариации внешней нагрузки) в задачах устойчивости как первого, так и второго рода, описывается линейными дифференциальными однородными уравнениями и соответствующими данной задаче однородными граничными условиями.

Этот математический критерий лежит в основе излагаемой в данной главе общей теории устойчивости, охватывающей также и критические состояния стержня, относящиеся к задачам устойчивости второго рода.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости невесомого стержня рассматриваемого типа, нагруженного по концам продольной сжимающей силой P . Имея в виду получить общее решение, мы будем считать, что продольная сила приложена в произвольной точке (e_x, e_y) поперечного сечения (рис. 152).

Мы будем считать, что либо стержень на концах имеет жесткие на своей плоскости диафрагмы и продольная сила передается на стержень через эти диафрагмы, либо продольные силы проходят через

нулевые секторные точки. В этих случаях внешняя бимоментная нагрузка отсутствует и опорные сечения стержня, плоские до деформации, будут оставаться плоскими и после деформации. Действие продольной силы выражается в передаче на стержень осевой силы и изгибающих моментов. Стержень до потери устойчивости в задачах первого рода будет находиться в условиях осевого сжатия (растяжения) и чистого изгиба. В поперечных сечениях стержня возникнут только нормальные напряжения, определяемые законом плоских сечений.

Если P — сжимающая сила, а M_x и M_y — изгибающие моменты, получающиеся в случае внецентренного сжатия как произведения силы P на соответствующие плечи (эксцентриситеты e_x и e_y), то для напряжений n получаем:

$$n = -\frac{P}{F} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (1.1)$$

Эти напряжения при постоянных P , M_x , M_y зависят только от положения точки на контуре сечения (от дуги s). По длине стержня нормальные напряжения n

остаются постоянными. Касательные напряжения τ в рассматриваемом случае продольной нагрузки отсутствуют.

Формулой (1.1) по существу представлено точное решение пространственной задачи теории упругости для стержня цилиндрической или призматической формы при условии, если внешняя нагрузка задана только нормальными напряжениями n , приложенными на торцах стержня и распределенными по закону плоскости. Боковую поверхность стержня следует считать свободной от нагрузки. Для такой задачи из шести компонентов тензора напряжений отличным от нуля будет только продольное нормальное напряжение n , линейно зависящее от координат x , y в плоскости поперечного сечения.

При этих условиях все уравнения пространственной задачи линейной теории упругости, а именно, дифференциальные уравнения неразрывности деформаций, записанные в компонентах тензора напряжений (уравнения Бельтрами — Митчелля), и уравнения, выражающие заданные в точках поверхности статические условия, удовлетворяются тождественно. Деформированное состояние стержня при малых перемещениях, согласно классической линейной теории упругости, характеризуется осевым укорочением (при сжатии) и прогибами ξ_0 и η_0 в главных плоскостях. Эти прогибы связаны с моментами M_x , M_y соотношениями:

$$\xi_0 = -\frac{M_y}{EJ_y}, \quad \eta_0 = -\frac{M_x}{EJ_x}.$$

Если при определении изгибающих моментов в рассматриваемом докритическом состоянии учесть также и моменты продольной силы,

получающиеся путем умножения этой силы на прогибы, то зависимость между прогибами и нагрузкой в этом случае будет уже более сложной — нелинейной. Однако, если эта нагрузка не превосходит своего критического значения, то в случае задачи устойчивости первого рода деформация стержня при внецентренном сжатии, согласно линейной теории, будет чисто изгибной, происходящей в плоскости действия изгибающего момента.

Величину P , входящую в формулу (1.1), мы можем рассматривать как параметр внешней нагрузки. С изменением этого параметра меняются (при заданном положении силы P в поперечном сечении) изгибающие моменты M_x , M_y и напряженное состояние стержня. Если сжимающая сила P не превосходит известного предела, то в стержне в случае устойчивости первого рода возникают одни только нормальные напряжения n , определяемые формулой (1.1). Этими напряжениями и соответствующими им деформациями удлинения определяется основная изгибная форма равновесия, характеризующаяся продольными осевыми удлинениями и прогибами в главных плоскостях. Деформация кручения в докритическом состоянии при описанном способе передачи нагрузки P отсутствует. При некотором значении силы P основная форма равновесия становится неустойчивой. Такое состояние стержня называется *критическим*. Оно характеризуется тем, что для стержня кроме основной формы равновесия возможна также и другая форма. Переход стержня из одного состояния равновесия в другое в общем случае сопровождается появлением в нем добавочных напряжений и деформаций. Пусть $\sigma(z, s)$, $\tau(z, s)$ и $H(z)$ — соответственно напряжения и моменты, дополнительно возникающие в стержне с изменением основной формы равновесия, а $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ — соответственно прогибы оси центров изгиба и угол закручивания, определяющие дополнительные смещения поперечного сечения стержня в плоскости сечения $z = \text{const}$. Добавочные напряжения σ , τ и моменты H в искомом деформированном состоянии стержня должны находиться в равновесии с заданными нормальными напряжениями n .

Считая, что перемещения ξ , η и θ весьма малы, мы можем условия равновесия стержня в искомом деформированном состоянии представить в виде уравнений (7.8) гл. I. Свободные члены этих уравнений зависят от внешней поперечной нагрузки. В нашем случае роль этой нагрузки играют непрерывно распределенные по срединной поверхности силы, получающиеся в результате проектирования на неподвижные оси Ox и Oy заданных внутренних усилий, отнесенных к деформированному состоянию стержня. С переходом стержня из одного состояния равновесия в другое элементарная полоска ds получит добавочные прогибы $\xi_s(z)$ и $\eta_s(z)$ в горизонтальной и вертикальной плоскости. Для этих прогибов мы получили ранее выражения (3.4) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi + (y - a_y) \theta, \\ \eta_s &= \eta + (x - a_x) \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Нормальные усилия $n\delta ds$, действующие в поперечных сечениях выделенной продольной полоски, вследствие дополнительных деформаций изгиба спроектируются на направления осей Ox и Oy . Обозначая интенсивности этих проекций через p_x и p_y и имея в виду, что в

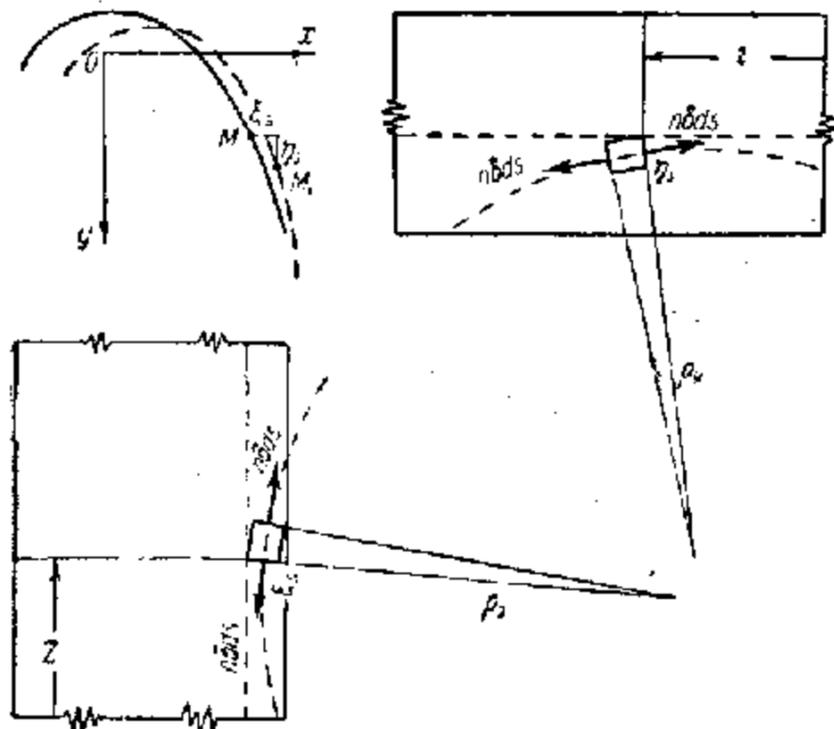


Рис. 153.

рассматриваемом случае нормальные напряжения n по длине стержня не меняются, из рис. 153 получим:

$$\left. \begin{aligned} p_x dz ds &= n\delta ds \frac{dz}{\rho_x}, \\ p_y dz ds &= n\delta ds \frac{dz}{\rho_y}, \end{aligned} \right\} (1.3)$$

где ρ_x и ρ_y — радиусы кривизны проекций $\xi_s(z)$ и $\eta_s(z)$ на координатные плоскости Oxz и Oyz пространственной кривой, в которую переходит после потери устойчивости образующая срединной цилиндрической поверхности. Заменяя в формулах (1.3) кривизны $\frac{1}{\rho_x}$ и $\frac{1}{\rho_y}$ их приближенными выражениями по формулам:

$$\frac{1}{\rho_x} = \xi_s'', \quad \frac{1}{\rho_y} = \eta_s''$$

и произведя сокращения на $dz ds$, получим:

$$p_x = n\delta \xi_s'', \quad p_y = n\delta \eta_s''.$$

Подставляя сюда ξ_s и η_s из формулы (1.2), найдем:

$$\begin{aligned} p_x &= n\delta \xi_s'' - n\delta (y - a_y) \theta'', \\ p_y &= n\delta \eta_s'' + n\delta (x - a_x) \theta''. \end{aligned}$$

Эти формулы выведены в предположении, что вариации перемещений ξ_s , η_s и θ являются малыми величинами; произведения и квадраты этих величин по сравнению с первыми степенями приняты равными нулю.

Зная интенсивности приведенных поверхностных нагрузок, мы можем по ним определить погонные нагрузки q_x , q_y и погонный крутящий момент m :

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \xi_s'' \int_L n\delta ds - \theta'' \int_L n\delta (y - a_y) ds, \\ q_y &= \eta_s'' \int_L n\delta ds + \theta'' \int_L n\delta (x - a_x) ds, \\ m &= -\xi_s'' \int_L n\delta (y - a_y) ds + \eta_s'' \int_L n\delta (x - a_x) ds + \\ &\quad + \theta'' \int_L n\delta [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] ds. \end{aligned} \right\} (1.4)$$

Внося в правые части равенств (1.4) значение n из формулы (1.1) и имея в виду, что $\delta ds = dF$ и что в главных осях $\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0$, получим, выполняя интегрирование:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -P\xi_s'' - (a_y P + M_x) \theta'', \\ q_y &= -P\eta_s'' + (a_x P - M_y) \theta'', \\ m &= -(a_y P + M_x) \xi_s'' + (a_x P - M_y) \eta_s'' + \\ &\quad + (-r^2 P + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta''. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

В этих формулах a_x и a_y — координаты центра изгиба; r , β_x и β_y — геометрические характеристики, имеющие линейную размерность и вычисляемые в самом общем случае по формулам:

$$r^2 = \frac{J_x + J_y}{F} + a_x^2 + a_y^2, \quad \beta_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x, \quad \beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y, \quad (1.6)$$

где J_x и J_y — моменты инерции, F — площадь сечения, U_x и U_y — новые геометрические характеристики:

$$U_x = \int_F y \rho^2 dF, \quad U_y = \int_F x \rho^2 dF, \quad (1.7)$$

причем ρ — расстояние от центра тяжести сечения до точки контура с текущей координатой s :

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad (1.8)$$

Формулы (1.7) на основании равенства (1.8) могут быть представлены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \int_F y^2 dF + \int_F x^2 y dF, \\ U_y &= \int_F x^2 dF + \int_F y^2 x dF. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Члены, стоящие в правых частях равенств (1.9), представляют собой моменты инерции (осевые и центробежные) третьего порядка.

Эти моменты можно вычислить как аналитически, так и графически, исходя из теории веревочного многоугольника и рассматривая отдельные множители подынтегральных выражений условно как элементарные фиктивные силы. Следует помнить, что функции $x = x(s)$ и $y = y(s)$, стоящие под знаком интеграла, представляют собой координаты точки контура s в главных осях.

Таким образом, если нам задано поперечное сечение тонкостенного стержня, то мы можем по формулам (1.5) составить выражения для компонентов приведенных погонных нагрузок q_x , q_y и m . Внося эти компоненты в уравнения (7.3) гл. 1, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' + (M_x + a_y P) \theta'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' + (M_y - a_x P) \theta'' &= 0, \\ (M_x + a_y P) \xi'' + (M_y - a_x P) \eta'' + \\ + EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10) образуют систему линейных дифференциальных уравнений. В этих уравнениях искомыми функциями являются перемещения $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$ и угол закручивания $\theta = \theta(z)$, возникающие при потере устойчивости стержня.

Коэффициенты дифференциальных уравнений (1.10) зависят не только от геометрических и упругих характеристик стержня, но также и от величин P , M_x и M_y , характеризующих при внецентричном сжатии внешнюю нагрузку (величину и точку приложения ее в поперечном сечении). Поскольку P , M_x и M_y при расчете стержня на устойчивость задаются с точностью до одного параметра (например, с точностью до значения силы P), то коэффициенты уравнений (1.10) будут определены также с точностью до этого параметра.

3. Дифференциальные уравнения (1.10) — линейные, однородные, с постоянными коэффициентами. Интегрирование их в самом общем случае может быть выполнено без особого труда. Полагая, согласно общей теории,

$$\xi = Ae^{kz}, \quad \eta = Be^{kz}, \quad \theta = Ce^{kz},$$

где A , B и C — произвольные пока постоянные величины, и, подставляя эти значения в дифференциальные уравнения (1.10), по сокраще-

нив на общий множитель e^{kz} , получим:

$$\left. \begin{aligned} (EJ_y k^4 + P k^2) A + (M_x + a_y P) k^2 C &= 0, \\ (EJ_x k^4 + P k^2) B + (M_y - a_x P) k^2 C &= 0, \\ (M_x + a_y P) k^2 A + (M_y - a_x P) k^2 B + \\ + [EJ_\omega k^4 + (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) k^2] C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Так как искомое решение для A , B , C должно быть отличным от нуля, то определитель системы однородных уравнений (1.11) должен быть равен нулю. Это условие дает для k характеристическое уравнение, которое может быть представлено в виде

$$\Delta = k^4 \begin{vmatrix} EJ_y k^2 + P & 0 & M_x + a_y P \\ 0 & EJ_x k^2 + P & M_y - a_x P \\ M_x + a_y P & M_y - a_x P & EJ_\omega k^2 + (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12), кроме шести кратных нулевых корней, дает для остальных шести корней значения, отличные от нуля и зависящие от параметра внешней нагрузки. Общее решение системы дифференциальных уравнений (1.10) будет состоять таким образом из 12 частных решений. Каждое из этих решений определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Легко показать, что число частных решений системы (1.10) находится в полном соответствии со статическими и кинематическими условиями, которые могут быть заданы на концах изгибаемого в двух плоскостях и закручиваемого стержня. Интегрируя каждое из уравнений (1.10) два раза по z и выражая в соответствии со статическим смыслом указанных квадратур произвольные постоянные через поперечные силы, моменты и бимомент опорного начального сечения $z = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'' + P \xi + (M_x + a_y P) \theta &= \tilde{M}_y - \tilde{Q}_x z, \\ EJ_x \eta'' + P \eta + (M_y - a_x P) \theta &= -\tilde{M}_x - \tilde{Q}_y z, \\ (M_x + a_y P) \xi + (M_y - a_x P) \eta + \\ + EJ_\omega \theta'' + (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \theta &= -\tilde{B} - \tilde{H} z. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Статические величины, стоящие в правых частях уравнений и играющие роль начальных параметров, являются компонентами внешней нагрузки, приложенной в сечении $z = 0$: \tilde{Q}_x , \tilde{Q}_y — поперечные силы, \tilde{H} — крутящий момент, \tilde{M}_x , \tilde{M}_y — изгибающие моменты, \tilde{B} — бимомент. Уравнениями (1.13) выражены все необходимые условия упругого равновесия предварительно сжато-изогнутого консольного стержня, находящегося под действием нагрузки, приложенной на свободном конце. Искомые функции в уравнениях (1.13) являются прогибы $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$ и угол кручения $\theta = \theta(z)$, возникающие в

предварительно напряженном сжато-изогнутом стержне от внешней дополнительной нагрузки, приложенной на свободном конце. Если заданная нагрузка с компонентами P , M_x , M_y не превосходит критического значения, то неоднородные уравнения (1.13) при дополнительных граничных условиях, относящихся к прогибам ξ , η и углу кручения θ , будут иметь вполне определенное, единственное решение. Эти уравнения (1.13) в своей совокупности образуют относительно искомых функций ξ , η , θ полную систему линейных неоднородных уравнений второго порядка с симметричной дифференциальной матрицей и с постоянными коэффициентами, зависящими от ряда статических, физических и геометрических характеристик, относящихся к предварительно напряженному сжато-изогнутому упругому стержню произвольной формы. Полные интегральные системы (1.13) могут быть представлены как суммы интегралов однородных уравнений и каких-либо частных решений системы неоднородных уравнений (1.13). Так как правые части уравнений (1.13) представляют собою линейные функции от z , то частные интегралы могут быть записаны также в виде линейных функций от z . Обозначая эти частные интегралы через $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\theta}$, мы получим для них следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} P\tilde{\xi} + (M_x + a_y P)\tilde{\theta} &= \tilde{M}_y - \tilde{Q}_x z, \\ P\tilde{\eta} + (M_y - a_x P)\tilde{\theta} &= -\tilde{M}_x - \tilde{Q}_y z, \\ (M_x + a_y P)\tilde{\xi} + (M_y - a_x P)\tilde{\eta} + \overline{GJ}_d \tilde{\theta} &= -\tilde{B} - Hz, \end{aligned} \right\} (1.11)$$

где через \overline{GJ}_d обозначена некоторая приведенная жесткость чистого кручения, определяемая формулой

$$\overline{GJ}_d = -GJ_d + r^2 P - 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x.$$

Из этих уравнений находим:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\xi} &= \frac{1}{\Delta} \{ [P\overline{GJ}_d - (M_y - a_x P)^2] (\tilde{M}_y - \tilde{Q}_x z) - \\ &\quad - (M_y - a_x P)(M_x + a_y P)(\tilde{M}_x + \tilde{Q}_y z) + \\ &\quad + P(M_x + a_y P)(\tilde{B} + Hz) \}, \\ \tilde{\eta} &= \frac{1}{\Delta} \{ (M_y - a_x P)(M_x + a_y P)(\tilde{M}_y - \tilde{Q}_x z) - \\ &\quad - [P\overline{GJ}_d - (M_x + a_y P)^2] (\tilde{M}_x + \tilde{Q}_y z) + \\ &\quad + P(M_y - a_x P)(\tilde{B} + Hz) \}, \\ \tilde{\theta} &= \frac{P}{\Delta} \{ -(M_x + a_y P)(\tilde{M}_y - \tilde{Q}_x z) + \\ &\quad - (M_y - a_x P)(\tilde{M}_x + \tilde{Q}_y z) - P(\tilde{B} + Hz) \}, \end{aligned} \right\} (1.15)$$

где Δ — определитель системы (1.14):

$$\Delta = P[P\overline{GJ}_d - (M_x + a_y P)^2 - (M_y - a_x P)^2].$$

Общие интегралы неоднородных уравнений (1.13) представим в тригонометрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{M_x + a_y P}{EJ_y} \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{\lambda_y^2 - \lambda_i^2} (A_i \sin \lambda_i z + B_i \cos \lambda_i z) + \tilde{\xi}, \\ \eta &= -\frac{M_y - a_x P}{EJ_x} \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{\lambda_x^2 - \lambda_i^2} (A_i \sin \lambda_i z + B_i \cos \lambda_i z) + \tilde{\eta}, \\ \theta &= \sum (A_i \sin \lambda_i z + B_i \cos \lambda_i z) + \tilde{\theta}, \end{aligned} \right\} (1.16)$$

где A_i , B_i ($i=1, 2, 3$) — произвольные постоянные интегрирования; λ_x , λ_y — величины, имеющие размерность $см^{-1}$ и определяемые по формулам:

$$\lambda_x^2 = \frac{P}{EJ_x}, \quad \lambda_y^2 = \frac{P}{EJ_y};$$

λ_i^2 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} P - EJ_y \lambda^2 & 0 & M_x + a_y P \\ 0 & P - EJ_x \lambda^2 & M_y - a_x P \\ M_x + a_y P & M_y - a_x P & -\overline{GJ}_d - EJ_d \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.17)$$

Так как определитель (1.17) имеет симметричную структуру, то все три корня λ_1^2 , λ_2^2 , λ_3^2 будут действительными. В случае отрицательного корня, λ_i будет иметь мнимое значение. Соответствующие этому корню тригонометрические функции переходят в гиперболические. Формулами (1.16) и (1.15) представлено общее решение рассматриваемой здесь проблемы о равновесии предварительно напряженного стержня с учетом деформаций изгибно-кручения, возникающих от нагрузки, приложенной в начальном сечении $z=0$ и состоящей в общем случае из шести компонентов. Для определения произвольных постоянных следует задать граничные условия. Число таких условий в нашей задаче должно быть равно 12. В зависимости от вида закрепления концов стержня эти условия, заданные относительно искомых функций и их производных, могут быть либо чисто статические, либо чисто геометрические, либо смешанного типа. Раскрывая при помощи общих интегралов (1.16) заданные для какой-либо конкретной задачи граничные условия, мы всегда будем иметь полную систему линейных однородных уравнений, позволяющую найти все постоянные интегрирования. Эти уравнения при действии на стержень нагрузок, вызывающих изгиб, в докритических состояниях будут иметь вполне определенное единственное решение. Мы можем таким образом, пользуясь общими формулами (1.16), определить изгибно-крутильную деформацию предварительно сжато или растянуто-изогнутого стержня, находящегося под действием любой нагрузки и, в частности, под действием изгибающих моментов, приложенных на конце стержня. При достижении

внецентренно приложенной сжимающей или растягивающей силы своего критического значения, изложенное здесь решение для переменных ξ , η , θ в задачах устойчивости первого рода будет неопределенным, а в задачах устойчивости второго рода будет принимать бесконечно большие значения. В том и другом случае значение критической нагрузки находится из трансцендентного характеристического уравнения, получаемого путем приравнивания нулю определителя соответствующей системы однородных уравнений, относящихся к данной краевой задаче. Для критической нагрузки мы получим бесчисленное множество значений, и все эти значения будут действительные. Каждому значению критической нагрузки будет соответствовать (с точностью до постоянного множителя) своя в общем случае изгибно-крутильная форма равновесия. Мы будем иметь бесчисленное множество форм равновесия, и все эти формы для данной задачи образуют полную систему собственных фундаментальных функций. Критические значения нагрузки выражаются как величины, связанные с фундаментальными числами этих функций. Практическое значение имеет форма потери устойчивости и соответствующее этой форме фундаментальное число, дающее для критической нагрузки наименьшее значение.

4. Уравнения устойчивости (1.10) выведены для тонкостенных стержней открытого профиля. Эти же уравнения будут справедливы и для стержней, рассчитываемых с учетом продольных изгибающих моментов. Необходимо лишь помнить, что в этом случае при вычислении геометрических характеристик (включая и величины U_x и U_y) контурные интегралы будут заменяться двойными, распространенными на площадь всего поперечного сечения, как это видно из формул (14.3) и (14.4) гл. II. Координаты центра изгиба следует определять по формулам (14.5) гл. II, а момент инерции J_d — по теории чистого кручения.

Уравнения (1.10) будут также справедливы и для стержней закрытого профиля с жестким, неизменяемым контуром. Действительно, дифференциальные уравнения изгиба (2.7) и (2.8) гл. IV для стержней закрытого профиля полностью совпадают с соответствующими уравнениями теории стержней открытого профиля, поскольку при расчете стержней на изгиб в классической теории продольного изгиба деформации сдвига принимаются равными нулю. Что же касается дифференциального уравнения (4.2) гл. IV, связанного с деформацией поперечного сечения стержня, то оно по своей структуре также напоминает уравнение кручения теории тонкостенных стержней (3.1) гл. II. Разница заключается лишь в значении безразмерной упругой характеристики k , определяемой по формуле (2.2) гл. II:

$$k^2 = I^2 \frac{GJ_d}{EJ_\omega}.$$

В теории стержней открытого профиля, где мы пользуемся законом секториальной деформации, входящие в эту характеристику бимомент

инерции J_ω и момент инерции при кручении J_d вычисляются по формулам:

$$J_d = \frac{1}{3} \sum d^3; \quad J_\omega = \int_F \omega^2 dF.$$

В теории стержней-оболочек закрытого профиля вместо секториальной деформации сечения принимается аксиальная деформация сечения по закону $\omega = xy$. Геометрическая характеристика J_ω вычисляется по формуле

$$J_\omega = \int_F x^2 y^2 dF,$$

а характеристика J_d определяется из теории чистого кручения по формуле Бредта. Для тонкостенного коробчатого прямоугольного профиля, рассмотренного нами в гл. IV, при толщине стенки профиля δ и сторонах прямоугольника d_1 и d_2 , будем иметь для геометрических характеристик следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} F &= 2\delta(d_1 + d_2), & J_x &= \frac{1}{6} \delta d_1^3 (d_1 + 3d_2), & J_y &= \frac{1}{6} \delta d_2^3 (d_2 + 3d_1), \\ J_d &= \frac{4}{F} \delta^2 d_1^2 d_2^2, & J_\omega &= \frac{1}{48} F d_1^2 d_2^2, & r^2 &= \frac{J_x + J_y}{F}, \\ & & \alpha_x &= \alpha_y = \beta_x = \beta_y = 0, \end{aligned} \right\} (1.18)$$

где момент инерции при кручении J_d определяется по формуле (2.27) гл. IV.

§ 2. Интегрирование уравнений устойчивости для случаев, когда концы стержня имеют шарнирные опоры или жесткие заделки

Особенно просто решается задача об устойчивости стержня, у которого концевые сечения закреплены от переменных (поступательных ξ , η и вращательного θ) в плоскости поперечного сечения и свободны от нормальных напряжений (рис. 154, а). Для такого стержня граничные условия представляются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0; \\ \text{при } z=l & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

где l — длина стержня. При граничных условиях (2.1) фундаментальные решения уравнений (1.10) будут иметь следующий вид:

$$\xi = A \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \eta = B \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \theta = C \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (2.2)$$

где A , B и C — некоторые постоянные коэффициенты, n — любое целое положительное число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Подставляя значения (2.2) в уравнения (1.10) и вводя обозначение $\lambda = \frac{\pi m}{l}$, получим для неизвестных A , B и C , по сокращении на общий множитель $\lambda^2 \sin \lambda z$, следующую систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (EJ_y \lambda^2 - P) A - (M_x + a_y P) C &= 0, \\ (EJ_x \lambda^2 - P) B - (M_y - a_x P) C &= 0, \\ -(M_x + a_y P) A - (M_y - a_x P) B + \\ + [EJ_\omega \lambda^2 - (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d)] C &= 0. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Так как коэффициенты A , B и C должны быть отличны от нуля (иначе мы получим для ξ , η и θ тривиальные нулевые решения),

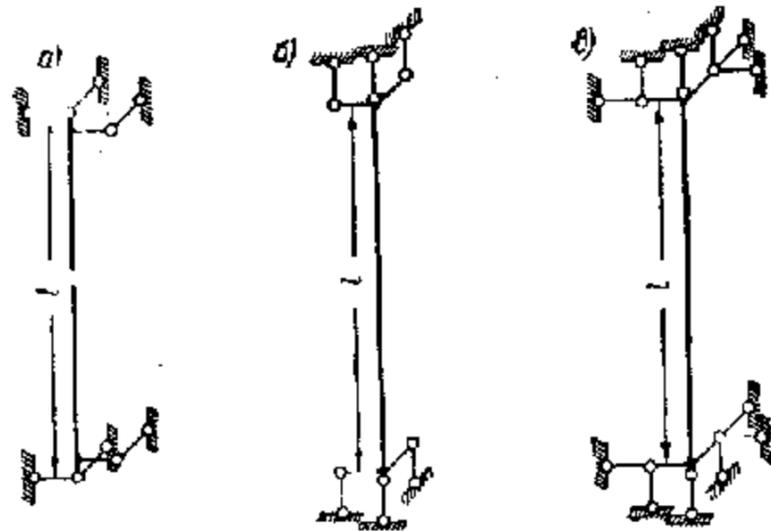


Рис. 154.

то определитель системы (2.3) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda^2 - P & 0 & -(M_x + a_y P) \\ 0 & EJ_x \lambda^2 - P & -(M_y - a_x P) \\ -(M_x + a_y P) & -(M_y - a_x P) & EJ_\omega \lambda^2 - (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является общим и позволяет определить критические значения параметра нагрузки для произвольного открытого профиля.

Аналогичное решение мы получаем для стержня, у которого концевые сечения закреплены от поворотов относительно осей x и y и свободны от крутящих моментов и сдвигающих сил (рис. 154, б).

Граничные условия в этом случае имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0; \\ \text{при } z=l \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0. \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Функции для ξ , η и θ , удовлетворяющие граничным условиям (2.5) и дифференциальным уравнениям (1.10), будут иметь вид:

$$\xi = A \cos \frac{\pi \pi z}{l}, \quad \eta = B \cos \frac{\pi \pi z}{l}, \quad \theta = C \cos \frac{\pi \pi z}{l}.$$

Детерминантное уравнение, определяющее при рассматриваемых граничных условиях критическую нагрузку, будет совпадать с уравнением (2.4). Из этого следует, что критические нагрузки будут иметь те же значения, что и в случае граничных условий (2.1).

Рассмотрим теперь стержень с жестко заделанными концами (рис. 154, в). Граничные условия в этом случае будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0; \\ \text{при } z=l \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

При граничных условиях (2.6) функции ξ , η и θ можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A(1 - \cos 2\lambda z), \\ \eta &= B(1 - \cos 2\lambda z), \\ \theta &= C(1 - \cos 2\lambda z). \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Как и ранее, здесь A , B и C — некоторые постоянные коэффициенты, а n — любое целое положительное число.

Подставляя (2.7) в дифференциальные уравнения (1.10) и сокращая на $4\lambda^2 \cos 2\lambda z$, получим для постоянных A , B и C однородную систему алгебраических уравнений. Приравнявая, как и ранее, определитель этой системы нулю, получим для критической силы уравнение

$$\begin{vmatrix} EJ_y (2\lambda)^2 - P & 0 & -(M_x + a_y P) \\ 0 & EJ_x (2\lambda)^2 - P & -(M_y - a_x P) \\ -(M_x + a_y P) & -(M_y - a_x P) & EJ_\omega (2\lambda)^2 - (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3. Центральное сжатие. Исследование корней характеристического уравнения. Обобщение теории Эйлера

Если продольные сжимающие силы проходят через центр тяжести поперечного сечения стержня, то стержень находится в условиях центрального сжатия. Полагая в этом случае в уравнениях (1.10) моменты M_x и M_y равными нулю, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' + a_y P \eta'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' - a_x P \xi'' &= 0, \\ a_y P \xi'' - a_x P \eta'' - EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GJ_d) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Дифференциальными уравнениями (3.1) и условиями закрепления стержня на концах определяются все формы потери устойчивости профиля при центральном сжатии невесомого стержня. Из уравнений (3.1)

следует, что если координаты центра изгиба a_x и a_y не равны нулю, т. е. если центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения, то для стержня эйлеровская изгибная форма потери устойчивости при центральном сжатии становится невозможной.

При граничных условиях (2.1) или (2.5) критические силы определяются уравнением (2.4). Полагая в этом уравнении $M_x = M_y = 0$, получим детерминантное уравнение для случая центрального сжатия.

Это уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} P_y - P & 0 & -a_y P \\ 0 & P_x - P & a_x P \\ -a_y P & a_x P & r^2 (P_\omega - P) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2)$$

где

$$P_x = EJ_x \lambda^2, \quad P_y = EJ_y \lambda^2 \quad (3.3)$$

— эйлеровские критические силы,

$$P_\omega = \frac{EJ_\omega \lambda^2 + GJ_d}{r^2} \quad (3.4)$$

— критическая сила для чистой крутильной формы потери устойчивости.

Раскрывая определитель (3.2), получим

$$(P_x - P)(P_y - P)(P_\omega - P)r^2 - a_y^2 P^2 (P_x - P) - a_x^2 P^2 (P_y - P) = 0$$

или (располагая по степеням P)

$$(a_x^2 + a_y^2 - r^2)P^3 + [(P_x + P_y + P_\omega)r^2 - a_y^2 P_x - a_x^2 P_y]P^2 - -r^2(P_x P_y + P_x P_\omega + P_y P_\omega)P + P_x P_y P_\omega r^2 = 0. \quad (3.5)$$

Исследуем поведение корней в этом общем случае. Пусть корни этого кубического уравнения будут P_1, P_2, P_3 . Поскольку мы фиксируем здесь λ_x (т. е. рассматриваем не только определенные граничные условия и длину l , но также и определенную форму потери устойчивости), то P_x, P_y и P_ω — вполне определенные величины. Выясним, как располагаются корни P_1, P_2 и P_3 по отношению к эйлеровским критическим силам P_x и P_y .

Пусть для определенности $P_x < P_y$. Этого мы можем всегда достигнуть выбором осей x и y . Обозначим выражение, стоящее в левой части уравнения (3.5), через $f(P)$.

При малом значении P знак функции будет совпадать со знаком свободного члена и, следовательно,

$$f(P) > 0.$$

При $P = P_x$ $f(P_x) = -a_x^2 P_x^2 (P_y - P_x) < 0$. Отсюда видно, что в интервале $0 < P \leq P_x$ функция $f(P)$ меняет знак, и, следовательно, в этом интервале будет лежать один корень уравнения; пусть это будет P_1 ; следовательно, $P_1 < P_x$.

При $P = P_y$ $f(P_y) = a_y^2 P_y^2 (P_y - P_x) > 0$. Значит в интервале $P_x < P \leq P_y$ функция $f(P)$ тоже меняет знак и в этом интервале ле-

жит второй корень уравнения; пусть это будет P_2 ; следовательно, $P_x < P_2 < P_y$.

При достаточно большом P знак функции $f(P)$ будет совпадать со знаком коэффициента при старшем члене (а он отрицательный):

$$f(P_\infty) < 0.$$

Следовательно, в интервале $P_y < P < \infty$ будет заключен третий корень уравнения P_3 , так как функция $f(P)$ и здесь меняет знак.

В отношении корня P_ω легко убедиться, что если

$$P_\omega > P_y, \text{ то } f(P_\omega) > 0$$

и функция $f(P)$ в интервале $P_y < P < P_\omega$ не меняет знака; следовательно, $P_2 > P_\omega$; если же

$$P_\omega < P_x, \text{ то } f(P_\omega) < 0$$

и функция $f(P)$ в интервале $P_\omega < P < P_x$ тоже не меняет знака; следовательно, $P_1 < P_\omega < P_x$.

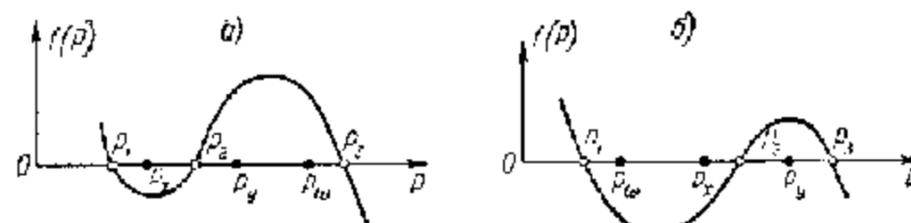


Рис. 155.

В зависимости от соотношения между силами P_x, P_y и P_ω , определяемыми по формулам (3.3) и (3.4), мы будем получать различные неравенства для этих корней. Эти неравенства выразятся, в частности, следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } P_x < P_y < P_\omega \\ P_1 \leq P_x \leq P_2 \leq P_y \leq P_\omega \leq P_3 \text{ (рис. 155, а),} \\ \text{при } P_\omega < P_x < P_y \\ P_1 \leq P_\omega \leq P_x \leq P_2 \leq P_y \leq P_3 \text{ (рис. 155, б).} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

Резюмируя все сказанное здесь, отмечаем, что корни характеристического уравнения будут все действительны: корень P_1 — наименьший; P_2 — находится между силами P_x и P_y , а P_3 — наибольший. Наименьшая критическая сила P_1 , являющаяся расчетной, в общем случае будет меньше критической силы P_x , определяемой по обычной теории продольного изгиба. Это значит, что для несимметричного профиля с центром изгиба, не совпадающим с центром тяжести ($a_x \neq 0$ и $a_y \neq 0$), эйлеровская изгибная форма потери устойчивости невозможна. Естественной формой потери устойчивости для такого стержня является изгибно-крутильная, при которой критическая сила P_1

будет иметь меньшее значение, чем сила, получаемая по обычной теории продольного изгиба.

К этому результату мы можем прийти и другим путем, анализируя явление потери устойчивости с точки зрения чисто физической. В самом деле, рассчитывая стержень на устойчивость по теории продольного изгиба, мы тем самым учитываем одни только изгибные формы потери устойчивости. Поперечные сечения стержня согласно этой теории могут

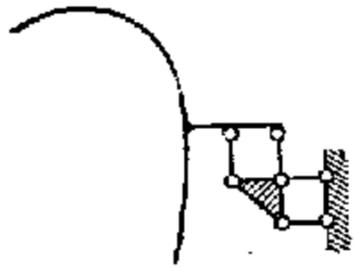


Рис. 156.

получать только поступательные смещения; углы закручивания равны нулю. Такое предположение равносильно введению по всей длине стержня угловых связей, препятствующих повороту сечения стержня вокруг оси (рис. 156). С введением этих связей критические силы повышаются.

Если поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии, то в этом случае центр изгиба совпадает с центром тяжести. Для координат центра изгиба получаем значения: $a_x = a_y = 0$.

Система дифференциальных уравнений (3.1) распадается на три независимых дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} EJ_y z'''' + P_z z'' &= 0, \\ EJ_x \eta'''' + P_x \eta'' &= 0, \\ EJ_\omega \theta'''' + (r^2 P - GJ_d) \theta'' &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение (3.2) принимает вид

$$(P_x - P)(P_y - P)(P_\omega - P)r^2 = 0.$$

Отсюда для трех критических сил P_1 , P_2 и P_3 (при фиксированном λ) получаем выражения:

$$P_1 = P_x, \quad P_2 = P_y, \quad P_3 = P_\omega. \quad (3.7)$$

Первые две критические силы совпадают с эйлеровскими силами, третья — соответствует крутильной форме потери устойчивости с центром кручения, совпадающим с центром тяжести сечения.

Неравенства (3.6) в этом частном случае (при $a_x = a_y = 0$) переходят в равенства (3.7). Из этого анализа следует, что изгибные формы потери устойчивости в главных плоскостях, предусматриваемые обычной теорией Эйлера, для стержня, свободного от угловых связей, возможны только в случае, если центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Кроме критических сил, определяемых по теории продольного изгиба, возможны также силы P_ω , соответствующие потере устойчивости стержня в форме закручивания относительно продольной оси. Эти силы могут оказаться ниже эйлеровских сил.

В случае сечения, имеющего одну ось симметрии, выражение (3.2) упрощается. Пусть для определенности осью симметрии будет ось x ;

тогда $a_y = 0$ в силу симметрии, и уравнение (3.2) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} P_y - P &= 0, \\ \begin{vmatrix} P_x - P & a_x P \\ a_x P & r^2 (P_\omega - P) \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем эйлеровскую силу

$$P = P_y.$$

Второе уравнение определяет две другие критические силы. В раскрытом виде это уравнение можно записать так:

$$r^2 (P_x - P)(P_\omega - P) - a_x^2 P^2 = 0$$

или, располагая по степеням P ,

$$(r^2 - a_x^2) P^2 - r^2 (P_x + P_\omega) P + r^2 P_x P_\omega = 0. \quad (3.8)$$

Для определения двух других критических сил будет служить формула:

$$P = \frac{r^2 (P_x + P_\omega) \pm \sqrt{r^4 (P_x + P_\omega)^2 - 4r^2 P_x P_\omega (r^2 - a_x^2)}}{2(r^2 - a_x^2)}. \quad (3.9)$$

При $a_x = 0$ формула (3.9) дает

$$P_1 = P_x; \quad P_2 = P_\omega.$$

§ 4. Анализ форм потери устойчивости. Центры вращения

Из формул (2.2) следует, что при граничных условиях (2.1) величина $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ определяет форму потери устойчивости по длине стержня.

Величина n , входящая в аргумент тригонометрических функций, как мы видели выше, может принимать любые целочисленные положительные значения $n = 1, 2, 3, \dots$

Каждому значению n будет соответствовать определенная с точностью до постоянного множителя синусоидальная форма потери устойчивости стержня. Так, например, при $n = 1$ перемещения ξ , η и θ по длине стержня, имеющего на концах неподвижные шарнирные опоры, меняются по закону синусоиды с одной полуволной; при $n = 2$ эти перемещения меняются по закону синусоиды с двумя полуволнами и т. д. (рис. 157).

Задаваясь величиной λ_n , или (что то же самое) числом полуволн n , мы тем самым устанавливаем определенную форму потери устойчивости. При заданном числе полуволн синусоиды характеристическое уравнение (3.2), как мы видели выше, дает три критические силы,

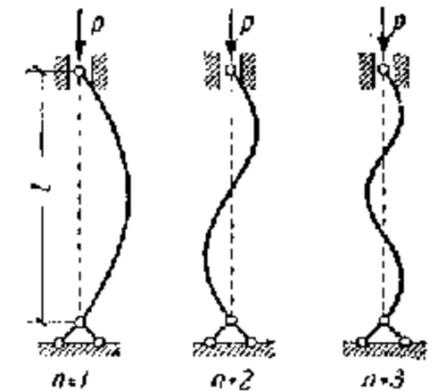


Рис. 157.

соответствующие трем степеням свободы пространственно работающего стержня в плоскости поперечного сечения. Наименьшие значения этих трех критических сил получаются при $n=1$, т. е. в случае, когда стержень теряет устойчивость по синусоиде с одной полуволной. Параметр λ_n , входящий в уравнение (3.2), при $n=1$ принимает значение

$$\lambda = \frac{\pi}{l}.$$

Каждой из трех критических сил, определяемых уравнением (3.2) при заданном λ_n , в плоскости поперечного сечения будет соответствовать своя форма потери устойчивости. Эта форма характеризуется тем, что поперечное сечение вращается относительно некоторой точки своей плоскости, которая при малых значениях ξ , η и θ может быть принята за мгновенный центр вращения. Координаты этого центра могут быть получены из условия его неподвижности при использовании уравнений (1.2):

$$\left. \begin{aligned} \xi_c &= \xi - (c_y - a_y) \theta = 0, \\ \eta_c &= \eta + (c_x - a_x) \theta = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где c_x и c_y — координаты центра вращения; ξ , η и θ — при граничных условиях, отражающих шарнирное закрепление концов, имеют вид:

$$\xi = A \sin \lambda z, \quad \eta = B \sin \lambda z, \quad \theta = C \sin \lambda z. \quad (4.2)$$

Отношение постоянных коэффициентов A , B и C для случая центрального сжатия можно найти из однородных уравнений (2.3) при $M_x = M_y = 0$:

$$\frac{A}{C} = \frac{a_y P}{P_y - P}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{a_x P}{P_x - P}. \quad (4.3)$$

Из формул (4.1) — (4.3) получаем для координат центров вращения следующие выражения:

$$c_x = \frac{a_x}{1 - \frac{P}{P_x}}, \quad c_y = \frac{a_y}{1 - \frac{P}{P_y}}. \quad (4.4)$$

Каждой критической силе, очевидно, будет соответствовать свой центр вращения, определяющий ось вращения, параллельную оси стержня. Для трех критических сил P_1 , P_2 и P_3 , получающихся из уравнения (3.2) при заданном числе n полуволн синусоиды, мы получаем таким образом три центра вращения.

Исключая из выражений (4.4) силу P , получим геометрическое место точек центров вращений, которое будет зависеть только от геометрических размеров сечения; это уравнение имеет вид:

$$c_x a_y P_y - c_y a_x P_x = c_x c_y (P_y - P_x),$$

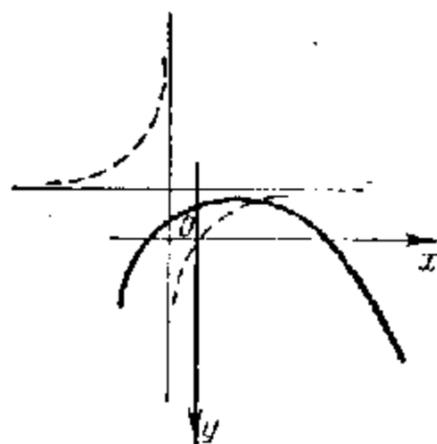


Рис. 158.

или

$$c_x a_y J_y - c_y a_x J_x = c_x c_y (J_y - J_x). \quad (4.5)$$

где J_x и J_y — моменты инерции относительно главных осей.

Уравнение (4.5) представляет равнобокую гиперболу, имеющую асимптоты, параллельные главным осям, и проходящую через начало координат (рис. 158).

§ 5. Расчет центрально сжатого стержня с несимметричным поперечным сечением

Рассмотрим неравнобокий уголок (рис. 159). Будем полагать, что концевые сечения уголка закреплены от перемещений в своей плоскости (поступательных ξ , η и вращательного θ) и свободны от нормальных напряжений σ .

Уравнение для случая центрального сжатия представлено формулой (3.5). Отнесем наше сечение к главным осям Ox и Oy и вычислим геометрические характеристики сечения, входящие в уравнение (3.5).

Для нашего случая координаты центра изгиба в главных осях будут равны:

$$a_x = 5,2 \text{ см}, \quad a_y = -6,3 \text{ см}. \quad (5.1)$$

Остальные геометрические характеристики имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= 2898 \text{ см}^4, & J_y &= 434 \text{ см}^4, \\ J_d &= 13 \text{ см}^4, & F &= 39 \text{ см}^2, \\ r^2 &= a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F} = 152 \text{ см}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

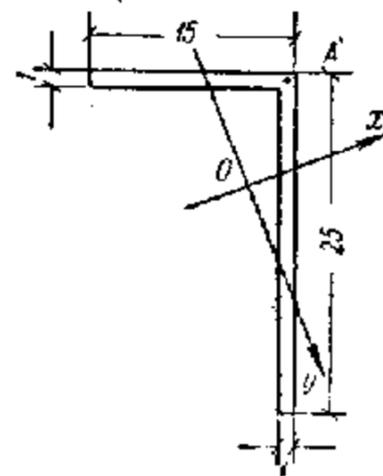


Рис. 159.

Что касается секториального момента инерции J_ω , то он равен нулю, так как при положении центра изгиба в вершине уголка секториальные площади, определяющие напряжения при кручении, равны нулю.

Пусть модули упругости равны

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad G = 0,4E = 0,84 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2. \quad (5.3)$$

Кубическое уравнение (3.5) в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{J_x + J_y}{F} P^3 + \left\{ GJ_d + E \left[(J_x + J_y) r^2 - (J_x a_y^2 + J_y a_x^2) \right] \lambda^2 \right\} P^2 - \\ & - E \lambda^2 \left[EJ_x J_y r^2 \lambda^2 + GJ_d (J_x + J_y) \right] P + E^2 J_x J_y GJ_d \lambda^4 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Коэффициентами уравнения (5.4) являются величины, зависящие от геометрических характеристик сечения, модулей упругости и, через

параметр λ , от длины стержня и числа полуволи синусоиды. Подставляя в уравнение (5.4) данные из (5.1), (5.2) и (5.3), оставляя пока неопределенной величину λ и разделив все уравнение на $-\frac{J_x + J_y}{F}$, получим:

$$P^3 - (1,28 \cdot 10^8 + 0,932 \cdot 10^{10} \lambda^2) P^2 + (8,92 \cdot 10^{13} + 0,991 \cdot 10^{15} \lambda^2) \lambda^2 P - 7,10 \cdot 10^{22} \lambda^4 = 0. \quad (5.5)$$

По этому уравнению критическая сила P определяется как функция от $\lambda = \frac{n\pi}{l}$. Определим критические силы для пяти значений длины стержня:

$$l = 100, 200, 300, 400, 500 \text{ см.}$$

Вычисляя для этих длин $\lambda^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ при $n=1$ и подставляя затем полученные значения в уравнение (5.5), получим соответственно пять кубических уравнений для определения критической силы P . Заметим попутно, что величину силы P получим в килограммах. Чтобы не иметь дела с большими числами, будем вычислять P в тоннах, уменьшив соответственно коэффициенты в 10^3 , 10^6 и 10^9 раз.

Уравнения для данных пяти случаев будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ для } l=100 \text{ см} \\ P^3 - 93,3 \cdot 10^2 P^2 + 1050 \cdot 10^4 P - 692 \cdot 10^6 = 0; \\ 2) \text{ для } l=200 \text{ см} \\ P^3 - 24,3 \cdot 10^2 P^2 + 82,5 \cdot 10^4 P - 43,2 \cdot 10^6 = 0; \\ 3) \text{ для } l=300 \text{ см} \\ P^3 - 11,5 \cdot 10^2 P^2 + 21,8 \cdot 10^4 P - 8,59 \cdot 10^6 = 0; \\ 4) \text{ для } l=400 \text{ см} \\ P^3 - 7,03 \cdot 10^2 P^2 + 9,26 \cdot 10^4 P - 2,71 \cdot 10^6 = 0; \\ 5) \text{ для } l=500 \text{ см} \\ P^3 - 4,96 \cdot 10^2 P^2 + 5,06 \cdot 10^4 P - 1,11 \cdot 10^6 = 0. \end{aligned} \right\} (5.6)$$

Каждому из уравнений (5.6) соответствуют три положительных действительных корня P_1, P_2, P_3 . Решая эти уравнения, получим следующие значения критических сил в тоннах:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ для } l=100 \text{ см} \quad P_1=70; \quad P_2=1226; \quad P_3=8034; \\ 2) \text{ для } l=200 \text{ см} \quad P_1=65; \quad P_2=330; \quad P_3=2035; \\ 3) \text{ для } l=300 \text{ см} \quad P_1=54; \quad P_2=172; \quad P_3=924; \\ 4) \text{ для } l=400 \text{ см} \quad P_1=42; \quad P_2=120; \quad P_3=541; \\ 5) \text{ для } l=500 \text{ см} \quad P_1=34; \quad P_2=95; \quad P_3=367. \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Найденные критические силы соответствуют синусоидальной форме потери устойчивости с одной полуволей, характеризуемой числом

$n=1$. Вообще мы имеем бесчисленное множество значений n и, следовательно, получим бесконечное число критических сил; однако нас интересуют для каждого случая только наименьшие из критических сил; нетрудно убедиться, что значению $n=1$ соответствуют наименьшие критические силы. Действительно, из рассмотрения решений (5.7) мы видим, что с увеличением l критические силы P_1, P_2, P_3 убывают, а при уменьшении l критические силы возрастают; но в формуле $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ увеличение l при постоянном n можно рассматривать как уменьшение n при постоянном l и, наоборот, увеличение n при постоянном l можно рассматривать как уменьшение l при постоянном n , и, следовательно, наименьшая критическая сила будет соответствовать наименьшему значению n , т. е. $n=1$.

Эйлеровские критические силы вычисляются по формулам (3.3):

$$P_x = EJ_x \lambda^2, \quad P_y = EJ_y \lambda^2.$$

В наших пяти случаях эти эйлеровские критические силы будут иметь следующие величины в тоннах:

- 1) для $l=100 \text{ см}$ $P_x=6007, P_y=900$;
- 2) для $l=200 \text{ см}$ $P_x=1513, P_y=225$;
- 3) для $l=300 \text{ см}$ $P_x=669, P_y=100$;
- 4) для $l=400 \text{ см}$ $P_x=376, P_y=56$;
- 5) для $l=500 \text{ см}$ $P_x=240, P_y=36$.

Подсчитаем для сравнения критическую силу по Вагнеру. Эта сила вычисляется по формуле (3.4):

$$P_{\text{вагн}} = \frac{1}{r^2} (EJ_{\omega} \lambda^2 + GJ_d).$$

В нашем случае секториальный момент инерции $J_{\omega} = 0$ и по формуле Вагнера получаем следующую критическую силу:

$$P_{\text{вагн}} = \frac{GJ_d}{r^2} = 72 \text{ т.}$$

Из этой формулы мы видим, что сила P не зависит от длины стержня. Такой неверный результат получается из неправильного предположения, сделанного Вагнером в отношении центра кручения при потере устойчивости.

На рис. 160 приведены графики наименьших критических сил, вычисленных в зависимости от длины стержня по изложенным здесь различным методам. Из этих графиков видно, что эйлеровские критические силы, определяемые из условия потери устойчивости в форме

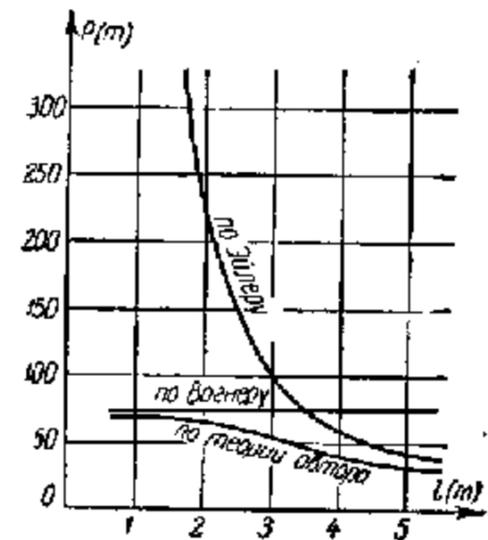


Рис. 160.

изгиба в плоскости наименьшего изгибного сопротивления, получаются выше наименьших критических сил, определяемых по теории изгибно-крутильных форм потери устойчивости. С увеличением длины стержня разница между силами, определяемыми из уравнения Эйлера и кубического уравнения (5.4), уменьшается. Это означает, что с увеличением длины стержня центр вращения, определяемый формулами (4.4), удаляется, и изгибно-крутильная форма потери устойчивости приближается к изгибной форме.

§ 6. Устойчивость плоской формы изгиба при внецентренном сжатии

Рассмотрим случай внецентренного действия силы P (см. рис. 152). Если e_x и e_y — координаты точки приложения этой силы, то

$$M_x = -Pe_y, \quad M_y = Pe_x. \quad (6.1)$$

Дифференциальные уравнения (1.10) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' + (a_y - e_y) P \eta'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' + (a_x - e_x) P \xi'' &= 0, \\ (a_y - e_y) P \xi'' - (a_x - e_x) P \eta'' + EJ_\omega \theta^{IV} + \\ + [P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) - GJ_d] \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Этими уравнениями и граничными условиями определяются дополнительные деформации изгиба и кручения, возникающие при внецентренном сжатии вследствие потери плоской формы изгиба.

Если сила P будет приложена в центре изгиба, то $e_x = a_x$ и $e_y = a_y$. В этом случае система совместных дифференциальных уравнений (6.2) распадается на три независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} + [P(r^2 + 2\beta_x a_x + 2\beta_y a_y) - GJ_d] \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Первые два уравнения (6.3) по своему виду совпадают с уравнениями Эйлера для случая центрального сжатия. Эти уравнения дают решение задачи устойчивости первого рода в случае, если определяемые ими деформации изгиба не лежат в плоскости начального изгиба, обусловленного внецентренными (по отношению к центру тяжести) действием продольной силы. Если же определяемые этими уравнениями деформации изгиба лежат в плоскости начального изгиба, то решения этих уравнений отвечают потере устойчивости второго рода. Третье уравнение определяет новую форму равновесия, при которой поперечные сечения стержня поворачиваются относительно центра изгиба, что соответствует устойчивости первого рода.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для открытого профиля произвольного очертания изгибная форма потери устойчивости, характеризующаяся поступательными смещениями поперечных сечений, возможна только при условии, если продольная сжимающая сила будет приложена в центре изгиба. Если же эта сила не проходит через центр изгиба, то форма потери устойчивости характеризуется не только прогибами ξ и η , но также и углом закручивания θ .

В § 9 гл. I было отмечено, что в теории тонкостенных стержней фундаментальное значение имеет линия центров изгиба стержня. Эту линию, а не линию центров тяжести, необходимо принимать за ось стержня. Мы видим, что и в теории устойчивости тонкостенных стержней за этой осью сохраняется особое значение. Действительно, лишь при условии, что продольная сжимающая нагрузка приложена по линии центров изгиба стержня, возможна эйлеровская изгибная форма потери устойчивости. В случае же центрального сжатия несимметричного профиля изгиб в чистом виде, как мы видели выше, невозможен. Формулы Эйлера в этом случае неприменимы*).

Если концы стержня закреплены от перемещения и свободны от нормальных напряжений, то, как мы видели выше из формул (2.2), форма потери устойчивости по длине стержня представляет собою синусоиду с целым числом полуволн. Значение продольной силы в случае внецентренного ее приложения находится из уравнения (2.4). Подставляя в это уравнение значения моментов M_x и M_y , определяемые по формулам (6.1), получим

$$\begin{vmatrix} P_y - P & 0 & -P(a_y - e_y) \\ 0 & P_x - P & P(a_x - e_x) \\ -P(a_y - e_y) & P(a_x - e_x) & P_\omega r^2 - P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Раскрывая определитель (6.4), найдем

$$(P_x - P)(P_y - P)[P_\omega r^2 - P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) - (a_y - e_y)^2 (P_x - P) P^2 - (a_x - e_x)^2 (P_y - P) P^2] = 0. \quad (6.5)$$

Здесь приняты обозначения (3.3) и (3.4).

Уравнение (6.5) при заданных эксцентриситетах e_x и e_y и заданной синусоидальной форме потери устойчивости дает три критические силы P_1 , P_2 и P_3 . Каждой из этих сил будет соответствовать своя форма потери устойчивости, характеризующаяся тем, что поперечные сечения стержня поворачиваются относительно линии центров вращения, причем угол кручения по длине стержня меняется по закону синуса. Координаты центра вращения в случае внецентренного действия

* Исключение представляет случай, когда профиль имеет ось симметрии, относительно которой момент инерции будет наименьшим.

продольной силы при малых перемещениях ξ , η и θ могут быть вычислены по формулам:

$$e_x = \frac{a_x - \frac{P}{P_x} e_x}{1 - \frac{P}{P_x}}, \quad e_y = \frac{a_y - \frac{P}{P_y} e_y}{1 - \frac{P}{P_y}}. \quad (6.6)$$

Трем критическим силам P_1 , P_2 и P_3 , получающимся при заданной точке приложения E и заданном числе полувольт синусоиды n из уравнения (6.5), соответствуют три центра вращения C_1 , C_2 и C_3 , определяемые по формулам (6.6). Если точка E приложения продольной силы перемещается в поперечном сечении стержня по кривой

$$F(e_x, e_y) = 0,$$

то центры вращения C_1 , C_2 и C_3 , соответствующие трем значениям критической силы P_1 , P_2 и P_3 , будут перемещаться по трем кривым:

$$\varphi_1(e_x, e_y) = 0, \quad \varphi_2(e_x, e_y) = 0, \quad \varphi_3(e_x, e_y) = 0.$$

Так как из трех сил P_1 , P_2 и P_3 одна будет иметь наименьшее значение, то при потере устойчивости центр вращения будет находиться на кривой $\varphi(e_x, e_y) = 0$, соответствующей наименьшей силе.

§ 7. Изостабь критических сил при внецентренном действии их

Уравнением (6.5), при заданных упругих и геометрических характеристиках стержня и заданном синусоидальном законе изменения перемещений ξ , η и θ по длине стержня, устанавливается зависимость между величиной критической силы P и координатами точки приложения этой силы e_x и e_y . Полагая в уравнении (6.5) $P = P_0 = \text{const}$ и разделив его на $P_0^2 (P_x - P_0) (P_y - P_0) (P_\omega - P_0)$, получим

$$\frac{(a_x - e_x)^2}{(P_x - P_0)(P_\omega - P_0)} + \frac{(a_y - e_y)^2}{(P_y - P_0)(P_\omega - P_0)} + \frac{2\beta_x e_x}{P_0(P_\omega - P_0)} + \frac{2\beta_y e_y}{P_0(P_\omega - P_0)} - \frac{r^2}{P_0^2} = 0. \quad (7.1)$$

Уравнением (7.1) определяется в плоскости поперечного сечения кривая, обладающая тем свойством, что критические силы $P = P_0$, приложенные в точках этой кривой, имеют постоянные значения. Поэтому мы можем кривую, выраженную этим уравнением, при $P_0 = \text{const}$ назвать *изостабь* критических сил в случае внецентренного сжатия. Рассматривая в уравнении (7.1) $P = P_0$ как параметр и давая различные значения этому параметру, мы получим семейство различных кривых. Все эти кривые, как видно из уравнения (7.1), будут представлять собою эллипсы или гиперболы в зависимости от значения параметра P_0 .

Если P_0 — наименьшая из трех критических сил, то

$$(P_x - P_0)(P_\omega - P_0) > 0, \\ (P_y - P_0)(P_\omega - P_0) > 0,$$

и кривая, выраженная уравнением (7.1), будет эллипсом.

Если P_0 дает вторую или третью по величине критическую силу, то изостабь будут либо эллипсами, либо гиперболами, в зависимости от того, какова величина P_ω по сравнению с P_x и P_y . Оси эллипсов и гипербол, получающихся из уравнения (7.1) при разных значениях параметра P_0 , будут параллельны главным осям сечения, поскольку в этом уравнении отсутствует член с произведением эксцентриситетов e_x и e_y . Обозначая полуоси изостабь через a и b , из уравнения (7.1) после необходимых выкладок получаем:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{r^2 (P_x - P_0)(P_\omega - P_0)}{P_0^2} + \frac{\beta_x^2 (P_x - P_0)^2}{P_0^2} + \\ &+ \frac{\beta_y^2 (P_x - P_0)(P_y - P_0)}{P_0^2} - \frac{2a_x \beta_x (P_x - P_0)}{P_0} - \frac{2a_y \beta_y (P_x - P_0)}{P_0}, \\ b^2 &= \frac{r^2 (P_y - P_0)(P_\omega - P_0)}{P_0^2} + \frac{\beta_y^2 (P_y - P_0)^2}{P_0^2} + \\ &+ \frac{\beta_x^2 (P_x - P_0)(P_y - P_0)}{P_0^2} - \frac{2a_x \beta_x (P_y - P_0)}{P_0} - \frac{2a_y \beta_y (P_y - P_0)}{P_0}. \end{aligned} \right\} (7.2)$$

Координаты центра изостабь будут иметь вид:

$$i_x = \frac{a_x P_0 - \beta_x (P_x - P_0)}{P_0}, \quad i_y = \frac{a_y P_0 - \beta_y (P_y - P_0)}{P_0}.$$

Для стержня с одинаковыми моментами инерции эйлеровские критические силы будут равны между собой:

$$P_x = P_y = \frac{EJ\pi^2 n^2}{l^2}.$$

В этом случае эллиптические изостабь вырождаются в окружности. Радиус окружности вычисляется по формуле

$$R^2 = \frac{r^2 (P_x - P_0)(P_\omega - P_0)}{P_0^2} + \frac{(\beta_x^2 + \beta_y^2) (P_x - P_0)^2}{P_0^2} - \frac{(2a_x \beta_x + 2a_y \beta_y) (P_x - P_0)}{P_0}.$$

В этой формуле P_0 должно быть таково, чтобы R^2 было положительным числом. В противном случае мы получим мнимую окружность.

Если стержень имеет в поперечном сечении две оси симметрии, то $a_x = a_y = 0$; $\beta_x = \beta_y = 0$. Уравнение (7.1) в этом случае принимает более простой вид:

$$\frac{e_x^2}{(P_x - P_0)(P_m - P_0)} + \frac{e_y^2}{(P_y - P_0)(P_m - P_0)} - \frac{r^2}{\rho_0^2} = 0.$$

Центр кривых, выраженных этим уравнением (при разных значениях критической силы P_0), совпадает с центром тяжести сечения.

§ 8. Устойчивость плоской формы изгиба стержней при внецентренном растяжении. Круг устойчивости

Исследуемые нами изгибно-крутильные формы потери устойчивости возможны не только в случае, когда на стержень действует сжимающая сила, но также и в случае внецентренного растяжения. Явление потери устойчивости при внецентренном растяжении математически выражается в том, что кривая, представленная уравнением (7.1), может сохранить смысл (не стать мнимой) и при $P_0 < 0$. Из этого следует, что можно указать такие точки, прилагая к которым растягивающие усилия, мы получим явление потери устойчивости. Физически это явление объясняется тем, что при внецентренном приложении продольной растягивающей силы в поперечных сечениях стержня, до того как он потеряет устойчивость, могут возникать не только растягивающие, но также и сжимающие напряжения. Этими сжимающими напряжениями и обуславливаются неустойчивые формы равновесия стержня при внецентренном растяжении.

Совершенно ясно, что потеря устойчивости стержня при внецентренном растяжении возможна не при всяком положении этой силы в плоскости поперечного сечения. Если растягивающая сила находится внутри ядра сечения, то все сечение испытывает одни только растягивающие напряжения. В этом случае стержень не может потерять устойчивость ни при каком значении силы. Ядро сечения является таким образом *областью устойчивости* стержня при растяжении.

Естественно возникает вопрос, ограничивается ли эта область одним только ядром сечения или она выходит за пределы этого ядра. Возможна ли потеря устойчивости стержня в случае, когда продольная растягивающая сила приложена вблизи, но вне ядра сечения, т. е. когда на противоположной стороне сечения появились сжимающие напряжения. Какую зону в поперечном сечении должны занимать эти сжимающие напряжения, чтобы стержень потерял устойчивость плоской формы изгиба при конечном значении растягивающей силы (допуская, конечно, для стержня бесконечный предел упругости). Ответ на эти вопросы мы получим из уравнения (7.1), которое определяет собой кривую постоянных критических сил в перемещениях e_x и e_y (при заданном параметре P_0).

Область устойчивого равновесия стержня при внецентренном растяжении определяется тем, что критическая сила, приложенная на границе области, принимает бесконечно большое значение.

Уравнение (7.1) можно записать в таком виде:

$$\frac{(a_x - e_x)^2}{\left(\frac{P_x}{P_0} - 1\right)\left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)} + \frac{(a_y - e_y)^2}{\left(\frac{P_y}{P_0} - 1\right)\left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)} + \frac{2\beta_x e_x}{\left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)} + \frac{2\beta_y e_y}{\left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)} - r^2 = 0.$$

Полагая в этом уравнении $P_0 = \infty$, получим уравнение $F(e_x, e_y) = 0$, выражающее аналитически кривую, которая ограничивает область устойчивости при растяжении. Это уравнение имеет вид:

$$(a_x - e_x)^2 + (a_y - e_y)^2 - 2\beta_x e_x - 2\beta_y e_y - r^2 = 0$$

или, принимая во внимание принятые ранее обозначения (1.6)

$$\beta_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x, \quad \beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y, \quad r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F},$$

получим

$$e_x^2 + e_y^2 - \frac{U_y}{J_y} e_x - \frac{U_x}{J_x} e_y - \frac{J_x + J_y}{F} = 0. \quad (8.1)$$

Кривая, определяемая уравнением (8.1), представляет собой окружность. Радиус этой окружности и координаты центра определяются по формулам:

$$R^2 = \frac{U_x^2}{4J_x^2} + \frac{U_y^2}{4J_y^2} + \frac{J_x + J_y}{F}, \quad (8.2)$$

$$k_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x + \beta_x, \quad k_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y + \beta_y, \quad (8.3)$$

где U_x и U_y — геометрические характеристики, представляющие собой моменты инерции высших степеней, вычисляемые по формулам (1.7).

Таким образом мы приходим к следующему выводу: *при внецентренном действии продольной силы явление потери устойчивости может возникнуть как в случае сжатия, так и в случае растяжения; в случае сжатия стержень может потерять устойчивость при любом положении силы в поперечном сечении; в случае же растяжения явление потери устойчивости может иметь место при условии, если продольная сила приложена вне области устойчивости; эта область представляет собой круг независимо от формы поперечного сечения стержня.*

В дальнейшем область устойчивости, ограниченную окружностью (8.1), мы условимся называть *кругом устойчивости*. Радиус круга устойчивости и положение его центра в самом общем случае определяются по формулам (8.2) и (8.3). Если поперечное сечение стержня имеет

одну ось симметрии, то центр круга устойчивости находится на оси симметрии. Для сечения с двумя осями симметрии геометрические характеристики U_x и U_y , как видно из формул (1.7), обращаются в нуль*. Уравнение (8.1) будет иметь вид

$$e_x^2 + e_y^2 - \frac{J_x + J_y}{F} = 0.$$

Радиус круга устойчивости в этом случае равен полярному радиусу инерции.

§ 9. Устойчивость прямоугольной полосы

В качестве первого примера рассмотрим узкую прямоугольную пластинку, имеющую на концах шарнирные закрепления и нагруженную в срединной плоскости продольной сжимающей (или растягивающей) силой. Пусть a и δ — соответственно ширина и толщина пластинки в поперечном сечении. Главные оси совпадают с осями симметрии сечения (рис. 161), следовательно,

$$a_x = a_y = \hat{\beta}_x = \hat{\beta}_y = 0.$$

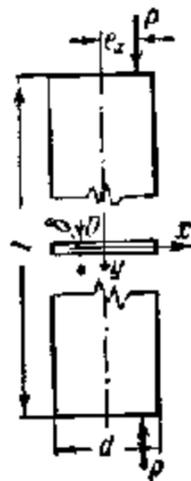


Рис. 161.

Поскольку сечение в рассматриваемом случае состоит из одного узкого прямоугольника, то для секториального момента инерции мы получаем нулевое значение:

$$J_w = 0.$$

Равенство нулю характеристики J_w показывает, что в поперечных сечениях тонкой полоски при кручении возникают только касательные напряжения, образующие замкнутый силовой поток и относящиеся к случаю чистого кручения; касательные же напряжения, распределенные по сечению равномерно, возникают только при изгибе пластинки в ее плоскости.

Дифференциальные уравнения устойчивости для полосы при внецентренном действии продольной силы в срединной плоскости получаются из общих уравнений (6.2), если в них положить $a_x = a_y = e_y = J_w = \hat{\beta}_x = \hat{\beta}_y = 0$:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' + e_x P \theta'' &= 0, \\ e_x P \eta'' + (Pr^2 - GJ_d) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Первое уравнение определяет критическое состояние полосы от изгиба в плоскости Oxz . Это уравнение является приближенным, по-

* Это следует из того, что подынтегральные выражения в формулах (1.7) для симметричных сечений представляют собой нечетные функции [как произведения четной функции $r^2 = x^2 + y^2$ на нечетную $x = x(y)$ или $y = y(x)$]. Интегралы же от нечетных функций в симметричной области, как площади кососимметричных эпюр, равны нулю.

скольку полоса при приложении продольной силы с эксцентриситетом e_x получает деформации изгиба до потери устойчивости. Дополнительные прогибы ξ лежат в плоскости изгиба основной формы равновесия. Второе и третье уравнения (9.1) вместе с граничными условиями определяют изгибно-крутильные формы потери устойчивости. Критические силы, соответствующие этим формам, определяются из уравнения (6.4), которое в рассматриваемом случае сечения и нагрузки принимает более простой вид:

$$\begin{vmatrix} P_x - P & -Pe_x \\ -Pe_x & (P_w - P)r^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (9.2)$$

где

$$P_x = EJ_x k^2, \quad P_w = \frac{1}{r^2} GJ_d.$$

Решая уравнение (9.2) относительно P , найдем

$$P = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{e_x^2}{r^2}\right)} (P_x + P_w) \left[1 - \sqrt{1 - 4 \left(1 - \frac{e_x^2}{r^2}\right) \frac{P_x P_w}{(P_x + P_w)^2}} \right]. \quad (9.3)$$

Формулой (9.3) критическая сила P выражена в функции координаты e_x , определяющей точку приложения этой силы на оси Ox .

Задаваясь в этой формуле эксцентриситетом e_x , мы получим для критической силы два значения, соответствующие при заданном синусоидальном законе изменения перемещений η и θ двум изгибно-крутильным формам потери устойчивости.

На рис. 162 приведены графики критических сил, вычисленные по формуле (9.3) в зависимости от эксцентриситета. Эти графики построены для прямоугольной стальной полосы, имеющей следующие размеры: $a = 10$ см, $\delta = 1$ см, $l = 200$ см. Модули упругости были приняты равными:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ G = 0,84 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

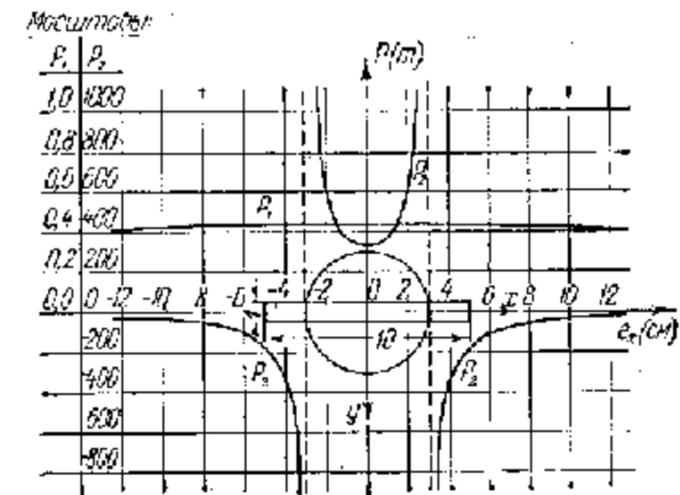


Рис. 162.

Концы полосы имеют шарнирное закрепление как в отношении прогибов, так и в отношении угла кручения. Критические силы, нанесенные на этих графиках, даны в тоннах; эксцентриситеты e_x — в сантиметрах. Наименьшая критическая сила P_1 будет сжимающей (положительной). Эта сила на рис. 162 представлена непрерывным симметричным графиком P_1 . График, помеченный буквой P_2 , относится

ко второй критической силе. Эта сила вне круга устойчивости имеет отрицательное значение (растяжение); на рис. 162 масштабы для P_1 и P_2 — разные.

С уменьшением эксцентриситета e_x , т. е. с приближением точки приложения силы к кругу устойчивости, критическая растягивающая сила P_2 увеличивается. На границе круга устойчивости эта сила, принимая бесконечно большое значение, претерпевает разрыв и меняет знак на обратный. Следует отметить, что критические растягивающие силы во много раз превосходят сжимающие силы.

Описанное здесь явление потери устойчивости при эксцентричном сжатии или растяжении может быть продемонстрировано на обыкновенной деревянной рейсине, имеющей на концах поперечные перекладины (рис. 163).

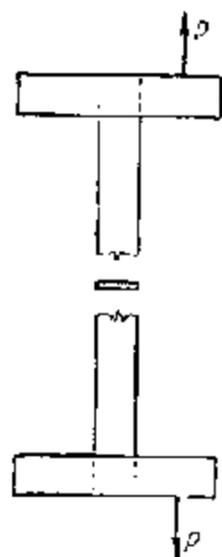


Рис. 163.

§ 10. Устойчивость таврового стержня

Рассмотрим тавровый стержень, имеющий в поперечном сечении одну ось симметрии (рис. 164). Центр изгиба находится в пересечении осей стенки и полки тавра. Направляя ось Ox по оси стенки, получим

$$e_y = 0.$$

Координатой a_x является расстояние между центром тяжести сечения и точкой пересечения стенки и полки. При направлении оси Ox , показанном на рис. 164, эта координата имеет отрицательное значение.

Секторный момент инерции в данном случае также равен нулю:

$$J_w = 0.$$

Уравнения устойчивости плоской формы изгиба при действии силы на ось Ox (т. е. при $e_y = 0$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} EJ_y \eta^{IV} + P \eta'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' - (a_x - e_x) P \eta'' &= 0, \\ -(a_x - e_x) P \eta'' - [P(r^2 + 2\beta_x e_x) - GJ_d] \eta'' &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение для определения критических сил при шарнирном закреплении обоих концов стержня будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} P_x - P & P(a_x - e_x) \\ P(a_x - e_x) & P_w r^2 - P(r^2 + 2\beta_x e_x) \end{vmatrix} = 0. \quad (10.1)$$

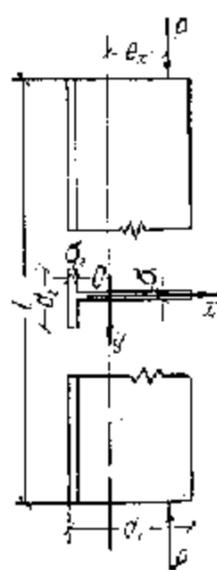


Рис. 164.

На рис. 165 даны графики критических растягивающих и сжимающих сил, построенные для таврового стержня при следующих

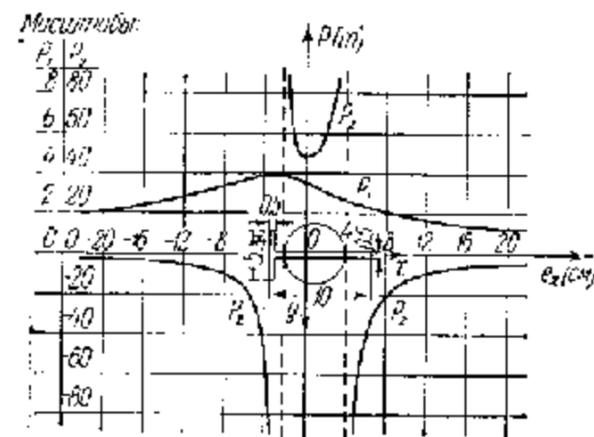


Рис. 165.

размерах: $d_1 = 10$ см, $d_2 = 5$ см, $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$ см, $l = 167$ см. Модули упругости были приняты равными:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad G = 0,84 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

§ 11. Устойчивость сжатого пояса (коробчатого профиля) железнодорожного моста

Рассмотрим теперь коробчатый стержень сжатого пояса моста. Размеры поперечного сечения стержня показаны на рис. 166. При этих размерах для геометрических характеристик стержня получены значения:

$$\begin{aligned} J_x &= 1,943 \cdot 10^6 \text{ см}^4, \\ J_y &= 1,173 \cdot 10^6 \text{ см}^4, \\ J_d &= 0,03557 \cdot 10^6 \text{ см}^4, \\ J_w &= 1747 \cdot 10^6 \text{ см}^6. \end{aligned}$$

Внося эти данные в уравнение (10.1) и принимая для строительной стали $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см², $G = 0,84 \cdot 10^6$ кг/см², получим уравнение относительно трех величин: критической силы P , длины l и эксцентриситета e_x (сила предполагается приложенной на оси симметрии). Давая в этом уравнении длине стержня l различные значения, получим ряд графиков, определяющих критические силы P в функции эксцентриситета. Графики расчетных сжимающих сил P_1 для

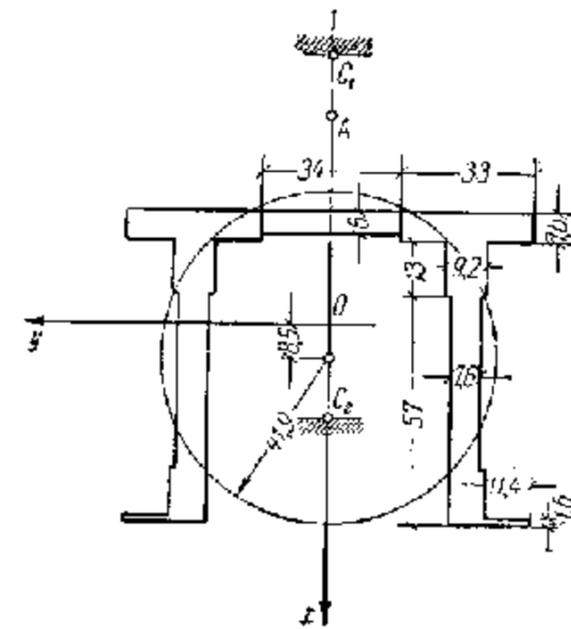


Рис. 166.

длины стержня 8, 12, 16, 20 м нанесены на рис. 167. На этом рисунке ниже оси абсцисс (оси эксцентриситетов) нанесен график растягивающей силы P_2 , вычисленный для стержня длиной $l=8$ м. Критические силы на графиках даны в долях линейной жесткости EF .

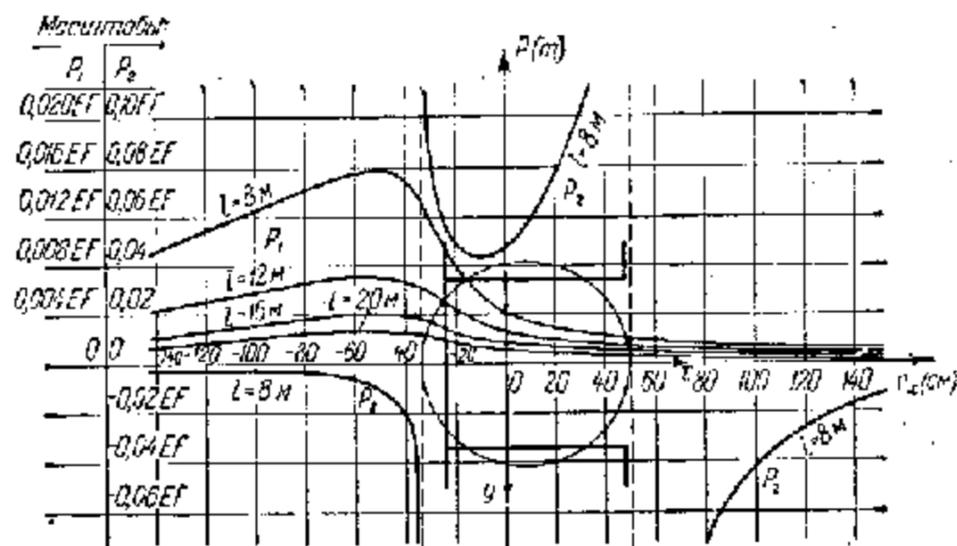


Рис. 167.

Для круга устойчивости рассматриваемого коробчатого профиля получим:

$$R = \sqrt{\frac{J_x + J_y}{F} + \frac{U_y^2}{4J_y^2}} = 41,93 \text{ см}, \quad k_x = \frac{U_y}{2J_y} = 8,475 \text{ см}.$$

Следует отметить, что в центре изгиба критическая сила P_1 , как и в предыдущем случае, достигает наибольшего значения, равного эйлеронской силе. При центральном же действии, т. е. в случае, когда сила приложена в центре тяжести сечения, критическое значение сжимающей силы значительно меньше эйлеровской силы.

Таким образом упругая устойчивость из плоскости симметрии стержня значительно повышается, если эту силу приложить в центре изгиба. С переносом силы в центр изгиба изгибно-крутильная форма потери устойчивости переходит в изгибную, так как в этом случае центр вращения s_x уходит в бесконечность. Поперечные сечения перемещаются поступательно в направлении, перпендикулярном к оси симметрии.

Эйлеровская изгибная форма потери устойчивости в плоскости Oyz представляет собой таким образом частный случай изгибно-крутильной формы, когда сила приложена не в центре тяжести сечения, а в центре изгиба.

§ 12. Устойчивость плоской формы изгиба при чистом изгибе

Полагая в уравнениях (1.10)

$$P=0, \quad M_x = M \sin \alpha, \quad M_y = -M \cos \alpha,$$

где M — изгибающий момент, действующий в плоскости, составляющей с осью Ox угол α (рис. 168), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + M \sin \alpha \cdot \theta'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - M \cos \alpha \cdot \theta'' &= 0, \\ M \sin \alpha \cdot \xi'' - M \cos \alpha \cdot \eta'' + EJ_{\omega} \theta^{IV} - \\ - [2(\beta_x \cos \alpha + \beta_y \sin \alpha) M + GJ_d] \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} (12.1)$$

Дифференциальные уравнения (12.1) относятся к случаю потери устойчивости при чистом изгибе. Параметром внешней нагрузки является величина изгибающего момента M . Критические значения этого момента определяются системой дифференциальных уравнений (12.1) и условиями закрепления концов стержня. Если концы стержня закреплены от смещений ξ , η и углов закручивания θ и дополнительные нормальные напряжения σ , соответствующие искомому деформированному состоянию, на этих концах равны нулю, то критическое значение момента определяется из детерминантного уравнения (2.4), в котором нужно положить $P=0$, $M_x = M \sin \alpha$, $M_y = -M \cos \alpha$:

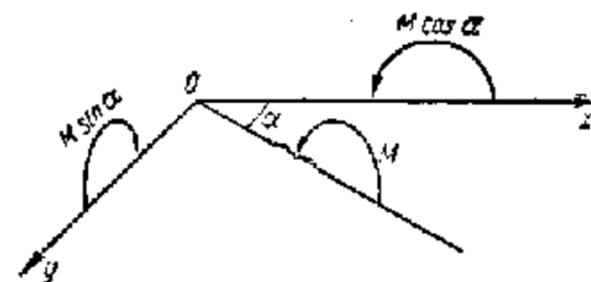


Рис. 168.

$$\begin{vmatrix} P_y & 0 & -M \sin \alpha \\ 0 & P_x & M \cos \alpha \\ -M \sin \alpha & M \cos \alpha & r^2 P_{\omega} + 2M(\beta_x \cos \alpha + \beta_y \sin \alpha) \end{vmatrix} = 0, (12.2)$$

где, как и ранее (§ 3),

$$P_x = EJ_x \lambda^2, \quad P_y = EJ_y \lambda^2, \quad P_{\omega} = \frac{1}{r^2} (EJ_{\omega} \lambda^2 + GJ_d) \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{\pi}{l}.$$

Уравнение (12.2) выведено для профиля произвольной формы. Если профиль имеет одну ось симметрии (например, ось Oy), и момент M действует в плоскости симметрии, то при $\beta_x = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ из уравнения (12.2) выделяется следующее уравнение, относящееся к случаю потери плоской формы изгиба:

$$\begin{vmatrix} P_y & -M \\ -M & r^2 P_{\omega} + 2\beta_y M \end{vmatrix} = 0.$$

Решая его, получим выражение для момента:

$$M = P_y \left(\beta_y - \sqrt{\beta_y^2 + r^2 \frac{P_y}{P_y}} \right). \quad (12.3)$$

Формула (12.3) дает для момента M при заданной величине $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) два разных значения, отличающихся между собой как по величине, так и по знаку. Наименьшие значения момента, как правило, получаются при $\lambda = \frac{\pi}{l}$, т. е. в случае синусоиды с одной полуволной.

Если момент M действует в плоскости Oxz , перпендикулярной к оси симметрии профиля, то уравнение (12.2) при $\beta_x = 0$ и $\alpha = 0$ дает

$$M = \pm \sqrt{r^2 P_x P_y}. \quad (12.4)$$

Формулы (12.3) и (12.4) применимы для любого открытого симметричного профиля, обладающего жестким контуром. В частности, для двутавровой балки с одинаковыми полками, как следует из п. 1 § 1 гл. II,

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = \frac{J_1 d_2^2}{2}, \quad (12.5)$$

где J_1 — момент инерции одной полки относительно вертикальной оси y , d_2 — высота стенки.

Подставляя выражение (12.5) в (12.3) и полагая $\lambda = \frac{\pi}{l}$ и $\beta_y = 0$, получим

$$M = \frac{\pi}{l} \sqrt{E J_y G J_\omega} \sqrt{1 - \frac{E J_1 d_2^2 \pi^2}{2 G J_\omega l^2}}. \quad (12.6)$$

Формула (12.6) совпадает с известной формулой Тимошенко, данной им впервые в его диссертации [178].

Формулы (12.3) и (12.4) применимы также и для профилей, представляющих собою пучок пластинок, пересекающихся в одном ребре и имеющих ось симметрии Oy (рис. 169). Полагая в этом случае $J_\omega = 0$, получим из формулы (12.3)

$$M = \frac{\pi^2}{l^2} E J_y \left[\beta_y - \sqrt{\beta_y^2 + \frac{G J_\omega}{E J_y \pi^2}} \right]. \quad (12.7)$$

Здесь, как и ранее, через $G J_\omega$ обозначена крутильная жесткость профиля для случая чистого кручения. В частном случае для прямоугоньной полосы формула (12.7) совпадает с известной формулой Прандтля [178].

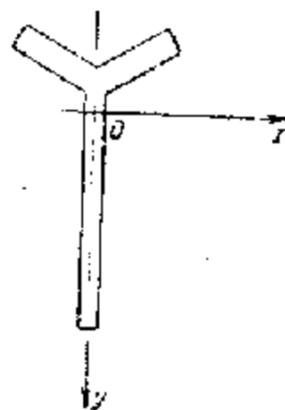


Рис. 169.

§ 13. Определение критических сил в зависимости от условий закрепления концов стержня [68]

1. Общее уравнение критических сил, представленное формулой (2.4), относится к стержню, имеющему на концах шарнирные закрепления в отношении всех трех перемещений. Этот случай закрепления концов стержня представлен граничными условиями (2.1).

В зависимости от способа закрепления опорных сечений стержня, граничные условия для искомых функций ξ , η , θ уравнений (1.10) могут иметь различные выражения, в общем случае отличные от условий (2.1). Так, например, в случае стержня, имеющего на концах полную заделку, граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0; \\ \text{при } z=l & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0. \end{aligned}$$

Если один конец стержня, например $z=0$, имеет полную шарнирную опору, а другой ($z=l$) полную жесткую заделку, то граничные условия представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0; \\ \text{при } z=l & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0. \end{aligned}$$

Возможны также и другие виды граничных условий. Так, например, если опорное сечение $z=0$ имеет шарнирное закрепление в отношении прогибов ξ , η и, будучи закреплено от угла кручения, остается (при наличии жесткой диафрагмы) плоским, другое же сечение $z=l$ закреплено шарнирно в отношении одного только прогиба ξ и заделано жестко в отношении двух других перемещений η , θ , то граничные условия в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi'' = \eta'' = 0, & \quad \theta' = 0; \\ \text{при } z=l & \quad \xi = \eta = \theta = 0, & \quad \xi' = 0, & \quad \eta' = \theta' = 0. \end{aligned}$$

Во всех описанных здесь и им подобных случаях закрепления концов стержня критическая нагрузка при действии на стержень продольной силы P и моментов M_x , M_y , приложенных на концах, определяется решением системы однородных дифференциальных уравнений (1.10), заданных с точностью до какого-либо одного параметра нагрузки, при соответствующих (для данной краевой задачи) однородных граничных условиях. Точное решение описанной здесь проблемы, за исключением рассмотренного выше случая полного шарнирного закрепления концов стержня, приводит к громоздким математическим вычислениям, связанным с решением довольно сложных трансцендентных уравнений.

Поэтому при решении проблемы пространственной устойчивости тонкостенного стержня для разных случаев граничных условий мы будем исходить из приближенного метода, основанного на применении принципа возможных перемещений к дискретно-континуальной системе.

Пусть

$$\xi(z) = A\chi(z), \quad \eta(z) = B\varphi(z), \quad \theta(z) = C\psi(z), \quad (13.1)$$

где $\chi(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — некоторые заданные функции, удовлетворяющие всем необходимым граничным условиям. Число этих условий для каждой из трех функций будет равно четырем (по два условия на каждом конце стержня). За функции χ , φ , ψ мы будем выбирать так называемые фундаментальные функции поперечных колебаний балки, т. е. функции, удовлетворяющие однородным дифференциальным уравнениям*):

$$\left. \begin{aligned} \chi^{IV} - \lambda^4 \chi &= 0, \\ \varphi^{IV} - \mu^4 \varphi &= 0, \\ \psi^{IV} - \nu^4 \psi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

и однородным граничным условиям, имеющим одинаковый вид с условиями рассматриваемой краевой задачи по устойчивости стержня. Для параметра λ , входящего в первое уравнение (13.2), из граничных условий получается трансцендентное характеристическое уравнение. Это уравнение даст бесконечное множество значений для величины λ , являющейся фундаментальным числом. Бесконечному ряду чисел λ соответствует бесконечный ряд фундаментальных функций χ , которые обладают свойствами ортогональности и в своей совокупности образуют полную систему. Фундаментальные функции χ для разных случаев граничных условий и соответствующие для них фундаментальные числа приведены в табл. 33. Из полной системы фундаментальных функций χ

* Дифференциальное уравнение свободных колебаний балки имеет следующий вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

В данном случае функция прогибов $w(z, t)$ зависит от продольной координаты балки z и времени t ; EJ — жесткость балки; ρS — масса балки, приходящаяся на единицу длины. Для решения уравнения колебаний мы пользуемся методом Фурье, т. е. представляем функцию прогибов $w(z, t)$ в следующем виде:

$$w(z, t) = Z(z) T(t).$$

Подставляя выражение для w в уравнение колебаний, получим

$$EJZ^{IV}T + \rho SZT'' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Z^{IV}}{Z} = -\frac{\rho S}{EJ} \frac{T''}{T} = \lambda^4,$$

где λ — некоторая постоянная величина, поскольку левая часть последнего равенства зависит только от z , а правая только от t . Для функций $Z(z)$ и $T(t)$ мы получим следующие уравнения:

$$Z^{IV} - \lambda^4 Z = 0, \quad T'' + \lambda^4 \frac{\rho S}{EJ} T = 0.$$

Первым уравнением определяется форма поперечных колебаний балки. Подробнее об этих функциях смотри в работе автора [51].

Таблица 33

№ по порядку	Граничные условия		Фундаментальные функции	Характеристические уравнения	Корни характеристических уравнений (фундаментальные числа)	
	Схема	$z=0$ $z=l$			λ_1	$\lambda_n (n > 1)$
1		$\chi = 0$ $\chi' = 0$	$\sin \frac{\lambda_n z}{l}$	$\sin \lambda_n = 0$	π	$n\pi$
2		$\chi = 0$ $\chi' = 0$	$\sin \frac{\lambda_n z}{l} - \text{sh} \frac{\lambda_n z}{l} - \alpha \left(\cos \frac{\lambda_n z}{l} - \text{ch} \frac{\lambda_n z}{l} \right)$	$\text{ch} \lambda_n \cos \lambda_n = 1$	4,730	$\frac{2n+1}{2} \pi$
3		$\chi = 0$ $\chi' = 0$	$\sin \frac{\lambda_n z}{l} + \alpha \text{sh} \frac{\lambda_n z}{l} - \alpha \left(\cos \frac{\lambda_n z}{l} - \text{ch} \frac{\lambda_n z}{l} \right)$	$\text{tg} \lambda_n = \text{th} \lambda_n$	3,9266	$\frac{4n+1}{2} \pi$
4		$\chi = 0$ $\chi' = 0$	$\sin \frac{\lambda_n z}{l} - \text{sh} \frac{\lambda_n z}{l} - \alpha \left(\cos \frac{\lambda_n z}{l} - \text{ch} \frac{\lambda_n z}{l} \right)$	$\text{ch} \lambda_n \cos \lambda_n = -1$	1,8751	$\frac{2n-1}{2} \pi$

мы выбираем одну функцию, отвечающую первой гармонике; фундаментальное число λ для этой функции является наименьшим фундаментальным числом и соответствует основной частоте колебаний.

Те же самые рассуждения можно повторить и для второго и третьего уравнений (13.2). Таким образом, параметрами λ , μ , ν в уравнениях (13.2) будут служить величины, характеризующие основные частоты в общем случае трех различных балок, т. е. балок, имеющих на концах пролета l разные условия закрепления. Так как мы здесь рассматриваем граничные условия, различным образом комбинирующиеся из жесткой заделки и шарнирного опирания, то из фундаментальных функций поперечных колебаний балки нам понадобятся функции, относящиеся к трем различным случаям граничных условий, а именно:

- 1) шарнирные закрепления обоих концов;
- 2) жесткая заделка обоих концов;
- 3) шарнирное закрепление на одном конце и жесткая заделка на другом*).

Обратимся к основным уравнениям устойчивости (1.10). Этими уравнениями выражено условие равновесия, а именно: сумма всех сил и моментов, действующих на элементарную поперечную полоску единичной ширины, равна нулю. Умножая, например, первое уравнение (1.10) с учетом (13.1) на функцию $\chi(z) dz$, мы получаем работу всех сил, действующих на нашу поперечную полоску шириной dz в направлении оси Oz , на соответствующем возможном для них перемещении $\chi(z)$. Поскольку мы не можем удовлетворить условию равенства нулю этой работы в каждом поперечном сечении стержня [функции $\chi(z)$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не являются интегралами уравнений (1.10)], то мы требуем удовлетворения этому условию лишь в интегральной форме, пользуясь фактически при этом вариационным методом Бубнова — Галеркина с точным удовлетворением геометрическим и статическим условиям на концах стержня.

Таким образом, подставляя (13.1) в уравнения (1.10), умножая в соответствии с физическим смыслом первое из этих уравнений на χdz , второе на φdz , третье на ψdz , интегрируя затем каждое из трех полученных таким образом выражений по всей длине стержня l и приравнивая на основании принципа возможных перемещений результат в каждом из трех случаев нулю, после ряда преобразований и использования уравнений (13.2), двух соотношений

$$\int_0^l \chi \chi'' dz = - \int_0^l (\chi')^2 dz,$$

$$\int_0^l \chi \varphi'' dz = - \int_0^l \chi' \varphi' dz$$

* Все наши рассуждения сохраняются и для стержня со свободным концом.

и четырех аналогичных соотношений для φ и ψ (см. § 13.1), получим для A , B , C систему трех линейных однородных уравнений, которые могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} EJ_y \frac{\pi^2}{l^2} - P) A - k_{12} (a_y P - M_x) C &= 0, \\ (k_{22} EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} - P) B + k_{23} (a_x P - M_y) C &= 0, \\ -k_{21} (a_y P - M_x) A - k_{33} (a_x P - M_y) B + \\ + \{ k_{32} EJ_z \frac{\pi^2}{l^2} - [r^2 P - 2(\beta_x M_y - \beta_y M_x) - GJ_d] \} C &= 0. \end{aligned} \right\} (13.3)$$

Здесь k_{11} , k_{12} , ..., k_{33} — некоторые безразмерные величины, зависящие только от граничных условий и определяемые в общем случае по формулам:

$$k_{11} = \frac{l^2}{\pi^2} \lambda^4 \frac{\int_0^l \chi^2 dz}{\int_0^l (\chi')^2 dz}, \quad k_{22} = \frac{l^2}{\pi^2} \mu^4 \frac{\int_0^l \varphi^2 dz}{\int_0^l (\varphi')^2 dz}, \quad k_{33} = \frac{l^2}{\pi^2} \nu^4 \frac{\int_0^l \psi^2 dz}{\int_0^l (\psi')^2 dz},$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{\int_0^l \chi' \varphi' dz}{\sqrt{\int_0^l (\chi')^2 dz \int_0^l (\varphi')^2 dz}}, \quad k_{23} = k_{32} = \frac{\int_0^l \varphi' \psi' dz}{\sqrt{\int_0^l (\varphi')^2 dz \int_0^l (\psi')^2 dz}}.$$

В табл. 34 даны значения этих коэффициентов для разнообразных случаев граничных условий (верхние горизонтальные строки таблицы). Приравняв нулю определитель уравнений (13.3) и вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} P_x^* &= k_{22} EJ_x \frac{\pi^2}{l^2}, \\ P_y^* &= k_{11} EJ_y \frac{\pi^2}{l^2}, \\ P_{\omega}^* &= \frac{1}{r^2} (k_{33} EJ_z \frac{\pi^2}{l^2} - GJ_d), \end{aligned} \right\} (13.4)$$

* Эти равенства получаются интегрированием по частям, с учетом того, что функции χ , φ , ψ удовлетворяют геометрическим условиям на концах стержня. Так, например,

$$\int_0^l \chi \chi'' dz = \chi \chi' \Big|_0^l - \int_0^l \chi (\chi')^2 dz = - \int_0^l (\chi')^2 dz.$$

Коэффициенты приведенных моментов инерции и стержня в зависимости

Граничные условия	при $x = +\frac{l}{2}$	$\xi = 0; \xi'' = 0$			
		$\eta = 0; \eta' = 0$			
Граничные условия	при $x = -\frac{l}{2}$	$\xi = 0; \xi'' = 0$			
		$\eta = 0; \eta' = 0$			
Коэффициенты	k_{11}	1	1	1	2,092
	k_{22}	1	4,1223	2,092	2,092
	k_{33}	1	1	1	1
	$k_{32} = k_{13}$	1	1	1	0,9041
	$k_{31} = k_{23}$	1	0,8834	0,9041	0,9041

Граничные условия	при $x = +\frac{l}{2}$	$\xi = 0; \xi'' = 0$			
		$\eta = 0; \eta' = 0$			
Граничные условия	при $x = -\frac{l}{2}$	$\xi = 0; \xi'' = 0$			
		$\eta = 0; \eta' = 0$			
Коэффициенты	k_{11}	2,092	2,092	4,1223	1
	k_{22}	2,092	4,1223	4,1223	1
	k_{33}	2,092	2,092	2,092	4,1223
	$k_{21} = k_{12}$	1	1	0,8746	0,8834
	$k_{32} = k_{23}$	1	0,8746	0,8746	0,8834

Таблица 34

эксцентриситетов по пространственной устойчивости от граничных условий

| $\xi = 0; \xi'' = 0$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\eta = 0; \eta' = 0$ |
| $\theta = 0; \theta'' = 0$ |
2,092	4,1223	1	1	1
4,1223	4,1223	1	4,1223	2,092
1	1	2,092	2,092	2,092
0,9041	0,8834	0,9041	0,9041	0,9041
0,8834	0,8834	0,9041	0,8746	1

продолжение

| $\xi = 0; \xi'' = 0$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\eta = 0; \eta' = 0$ |
| $\theta = 0; \theta'' = 0$ |
1	1	2,092	2,092	4,1223
4,1223	2,092	2,092	4,1223	4,1223
4,1223	4,1223	4,1223	4,1223	4,1223
0,8834	0,8834	0,8746	0,8746	1
1	0,8746	0,8746	1	1

получим

$$(P_x^* - P)(P_y^* - P)[r^2(P_\omega^* - P) + 2(\beta_y M_x - \beta_x M_y)] - k_{13}^2(P_x^* - P)(a_y P + M_x)^2 - k_{23}^2(P_y^* - P)(a_x P + M_y)^2 = 0. \quad (13.5)$$

Формулам (13.4) определяются критические силы: эйлеровские P_x^* , P_y^* и крутильная P_ω^* . Величины k_{11} , k_{22} , k_{33} , входящие в эти формулы, при значениях, данных в табл. 34, позволяют определить силы P_x^* , P_y^* , P_ω^* при самых разнообразных способах закрепления концов стержня. Для случая полного шарнирного закрепления концов стержня коэффициенты k_{11} , k_{22} , k_{33} принимают значения, равные единице, и формулы (13.4) переходят в формулы (3.3) и (3.4).

Уравнение (13.5) при формулах (13.4) и при коэффициентах k_{11} , k_{22}, \dots, k_{33} , приведенных в табл. 34, представляет собою общее уравнение критических сил и моментов и позволяет рассчитать на устойчивость тонкостенный стержень при самых разнообразных условиях задачи, заданных упругими характеристиками материала стержня E , G , геометрическими характеристиками J_x , J_y , J_ω , J_d , a_x , a_y , β_x , β_y , r^2 , зависящими от формы и размеров поперечного сечения стержня, длиной стержня l , статическими величинами P , M_x , M_y , определяющими с точностью до одного параметра внешнюю нагрузку, вызывающую в стержне до потери устойчивости одни только нормальные напряжения и, наконец, величинами k_{11} , k_{22}, \dots, k_{33} , зависящими только от граничных условий. Пользуясь значениями коэффициентов k_{11} , k_{22}, \dots, k_{33} , приведенными в табл. 34, варьируя перечисленные выше геометрические и статические параметры, мы можем с помощью одного только уравнения (13.5) охватить весьма большое количество разнообразных практически важных задач по устойчивости тонкостенного стержня, как оболочки с жестким контуром, нагруженного по концам или одной только силой P , или одним только изгибающим моментом M , и т. д.

При $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_{13} = k_{23} = 1$ уравнение (13.5) переходит в уравнение (2.4), относящееся к случаю шарнирного закрепления обоих концов стержня. Отсюда следует, что расчет стержня при других граничных условиях в случае, например, внецентренного приложения продольной силы P может быть выполнен на основе формул, приведенных в предыдущих параграфах и относящихся к основному случаю указанных условий (2.1). Нужно только во всех этих формулах критические силы P_x , P_y , P_ω заменить силами P_x^* , P_y^* , P_ω^* , определяемыми при данных граничных условиях формулами (13.4), и относительные эксцентриситеты $e_x = a_x$, $e_y = a_y$ заменить приведенными эксцентриситетами $k_{23}(e_x - a_x)$ и $k_{13}(e_y - a_y)$.

Следует отметить, что вместо функций колебаний могут быть выбраны балочные функции (прогибы) от равномерно распределенной статической нагрузки, отвечающие граничным условиям для каждого

из трех рассматриваемых в нашей задаче перемещений. Другими словами, каждая из трех функций может быть задана (с точностью до своего произвольного множителя) в виде полинома четвертой степени. Коэффициенты полинома должны быть выбраны в соответствии с граничными условиями для каждой из функций χ , φ , ψ в отдельности.

2. Изложенный здесь вариационный метод легко обобщается также и на тонкостенные колонны, усиленные поперечными бимоментными связями. Если эти связи представляют собой поперечные планки с осями, расположенными в сечениях $L = L_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), то в последнем из уравнений (13.3) под величиной GJ_d следует понимать приведенную жесткость кручения, определяемую по формуле

$$\overline{GJ_d} = GJ_d + \sum_{i=1}^n b_i \int_0^l \chi_i'^2 dx,$$

где b_i — приведенная жесткость бимоментной связи, относящейся к i -й планке и вычисляемая изложенными ранее методами: χ_i' — значение производной от функции $\chi_i(z)$ в точке $z = z_i$.

§ 14. Экспериментальная проверка теории на строительных и авиационных металлических стержнях

В лаборатории строительной механики Центрального научно-исследовательского института промышленных сооружений под руководством автора были проведены экспериментальные исследования по проверке общей теории пространственной устойчивости тонкостенных колонн при центральном и внецентренном сжатии.

1. Центральное сжатие*). Для испытания были запроектированы и изготовлены в мастерских ЦНИКС сварные металлические образцы из 5-миллиметровой листовой стали Ст. 3 двух типов сечения: коробчатого и таврового, по три образца каждого профиля (рис. 170).

Чтобы избежать деформации контура сечения и потери местной устойчивости, по длине образца с интервалами в 250 мм были поставлены из 3-миллиметровой стали ребра таких размеров, чтобы они по возможности не препятствовали продольным деформациям от кручения.

Принятые для образцов размеры подобраны с таким расчетом, чтобы потеря устойчивости по изгибно-крутильной форме происходила в упругой стадии.

Механические характеристики металла были определены на соответствующих образцах, вырезанных из той же листовой стали: предел прочности $\sigma_{\text{нч}} = 4050 \text{ кг/см}^2$, предел текучести $\sigma_T = 2870 \text{ кг/см}^2$, удлинение $\epsilon = 23\%$, модуль продольной упругости $E = 2,14 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, модуль сдвига G был принят равным $0,4E$.

*) Результаты экспериментальных исследований по пространственной устойчивости тонкостенных металлических стержней при центральном сжатии получены кандидатом технических наук Н. Г. Добудогло.

Граничные условия, принятые при испытаниях, соответствовали шарнирному опиранию концов стержня. Соблюдение этих требований в условиях опыта не представляло каких-либо затруднений, так как опорные подушки пресса, на которых устанавливались опытные образцы, имели шаровые или цилиндрические шарпиры. Большие затруднения встретило практическое осуществление другого требования, вытекающего из теоретических предпосылок, положенных в основу расчета профилей, а именно: требования об отсутствии нормальных напряжений в опорных сечениях. Другими словами, оставляя в силе условие о недеформируемости контура образца в плоскости его сечения, необходимо

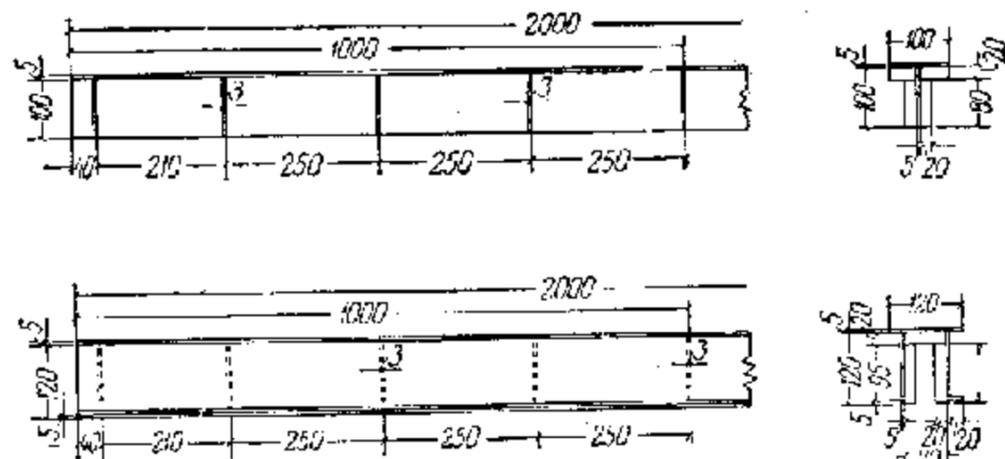


Рис. 170.

было обеспечить для отдельных элементов опорного сечения возможность свободной деформации, обусловленной закручиванием стержня.

Что касается таврового профиля, состоящего всего из двух элементов — стенки и полки, то для него требование свободной деформации опорного сечения выполняется автоматически при непосредственном опирании стержня на подушки пресса, так как для профилей, состоящих из прямолинейных элементов, пересекающихся в одной точке, секторный момент инерции J_{ϕ} , вызывающий искривление сечения, равен нулю.

Для коробчатого же профиля в целях соблюдения указанного требования были спроектированы и изготовлены специальные опорные приспособления, состоящие из съемных скоб со стальными шариками, отдельных для каждого элемента профиля (рис. 171). Верхний и нижний концы образца опирались на три стальных шарика, причем каждый шарик находился в центре тяжести своего элемента; следовательно, равнодействующая давлений на шарика проходила через центр тяжести опорного сечения образца. При таком устройстве каждому отдельному элементу опорного сечения обеспечивалась возможность свободно деформироваться из своей плоскости, поворачиваясь около шарика, как около центра вращения, причем, поскольку шарик был расположен симметрично относительно плоскости симметрии

стержня, то начальная бимоментная нагрузка отсутствовала и стержень до потери устойчивости не закручивался.

Испытание образцов производилось на 500-тонном прессе системы «MAN». Вычисленный теоретически центр тяжести сечения образца совмещался с центром опорных подушек пресса; образец опирался, как выше указано, или непосредственно на подушки (тавр), или на стальные шарики (коробчатый профиль).

При испытаниях производились измерения в трех сечениях (на высоте $1/4$, $1/2$ и $3/4$ l): 1) горизонтальных прогибов (прогибомерами Максимова) — в двух направлениях, 2) фибровых деформаций (тензометрами Гутенберга), 3) поворота сечения в его плоскости. Для измерения прогиба и поворота сечения ставились три прогибомера: один из них фиксировал прогиб в направлении оси симметрии, второй и третий фиксировали прогибы в перпендикулярном к этой оси направлении, показывая поворот сечения. По показаниям прогибомеров определялось положение сечения в пространстве.

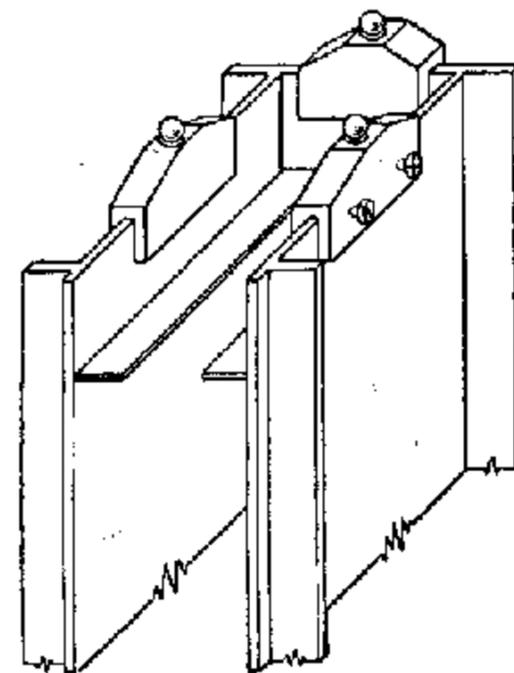


Рис. 171.

Поведение образцов под нагрузкой зависело от степени прямолинейности образца и от формы сечения. Коробчатые образцы, обладающие более мощным сечением, теряли устойчивость спокойно, без каких-либо признаков внезапности, медленно изгибаясь и закручиваясь при наступлении критического состояния. Образцы таврового сечения выходили из устойчивого равновесия как бы внезапно, иногда с заметным резким ударом.

Иногда первоначальный прогиб к моменту потери образцом устойчивости менял свой знак на обратный. Это явление обуславливалось кручением стержня, наблюдавшимся во всех образцах, причем только в двух случаях деформация закручивания появилась с самого начала сжатия образца, для всех же остальных образцов она становилась заметной только к моменту наступления критического состояния.

Результаты экспериментов дают возможность утверждать, что все испытанные образцы потеряли устойчивость по изгибно-крутильной форме.

Основным показателем для сравнения теоретических результатов с экспериментальными является величина критической нагрузки: то или иное соотношение между опытной и теоретической величинами этой нагрузки

позволяет судить о точности теоретического метода определения критической силы, соответствующей изгибно-крутильной форме потери устойчивости.

Кроме этой основной проверки, опытным путем проверялся еще один теоретический вывод, имеющий непосредственное отношение к явлению закручивания стержня, а именно: к свойствам центра вращения и оси вращения.

Выше указывалось, что при закручивании стержня отдельные сечения его поворачиваются вокруг центра вращения, определяемого формулами (4.4) и что координаты центра вращения не зависят от положения сечения по высоте стержня по оси z , т. е., что стержень в целом вращается вокруг некоторой оси, параллельной оси стержня. Оба эти обстоятельства проверялись опытным путем.

Теоретическая критическая нагрузка определялась по уравнению (3.9). Упругие и геометрические характеристики, входящие в это уравнение, а также значения коэффициентов уравнения для коробчатого и таврового сечений приведены в табл. 35.

По данным этой таблицы получены следующие значения критических нагрузок для коробчатого и таврового профилей:

1) для коробчатого профиля $P_1 = 26\,140$ кг, $P_2 = 639\,800$ кг;

2) для таврового профиля $P_1 = 14\,850$ кг, $P_2 = 68\,250$ кг.

Меньшие значения этих сил будут представлять собой расчетные критические силы.

Критические напряжения для коробчатого и таврового профилей, отвечающие этим силам, равны соответственно 1335 и 1530 кг/см².

Опытные критические напряжения, отвечающие опытным критическим нагрузкам, приведенным в табл. 36, колеблются в пределах 1330—1440 кг/см².

Из этого следует, что и по излагаемой теории и в экспериментах явление потери устойчивости по изгибно-крутильной форме происходит в упругих пределах.

Иная картина получится, если мы будем рассматривать пашп стержни с точки зрения обычной теории и будем считать, что они теряют устойчивость по изгибной форме, без закручивания.

Уже из табл. 35 видно, что, например, коробчатый образец, гибкость *) которого равна 52, должен потерять устойчивость за пределом упругости.

Действительно, наименьшая эйлеровская критическая сила для него, подсчитанная в предположении постоянного модуля E , оказывается равной 152,88 т, а соответствующее критическое напряжение равно 7810 кг/см². Так как эти величины являются фиктивными, переводим их в реальные,

*) Под гибкостью в сопротивлении материалов понимается отклонение длины стержня к радиусу инерции. При изгибе в плоскости Oxz радиус инерции определяется по формуле $r_x^2 = \frac{J_y}{F}$.

Таблица 35

Профиль	Характеристики								
	E кг/см ²	G кг/см ²	θ	I см ⁴	$\lambda = \frac{l}{r}$ см ⁻¹	F см ²	J_{ϕ} см ⁴	J_{ϕ}^2 см ⁸	I_{ϕ} см ⁴
Коробчатый	$2,14 \cdot 10^5$	$0,856 \cdot 10^6$	198,4	0,01583	19,6	365,5	285,2	1,83	1,12
Тавровый	$2,14 \cdot 10^5$	$0,856 \cdot 10^6$	199,2	0,01516	9,7	101,2	38,13		

Профиль	Характеристики							
	Гибкость $\frac{l}{r_x}$	r_x см	Центр тяжести x_0 см	θ_x см	$r^2 = \frac{J_x - J_y}{F} + \theta_x^2$ см ²	$\frac{J_x + J_y}{I}$ см ⁻²	$r^2(P_1 + P_2)$ кг/см ²	$r^2 P_1 P_2$ кг ² /см ²
Коробчатый	52,0	3931	4,83	9,375	121,18	33,29	$22,168 \cdot 10^6$	$0,5568 \cdot 10^{12}$
Тавровый	100,0	0	2,80	2,80	20,86	14,36	$1,1934 \cdot 10^6$	$0,01457 \cdot 10^{12}$

умножая на отношение переменного модуля T^* к постоянному модулю E ; это отношение согласно нормам проектирования металлических конструкций может быть принято для Ст. 3 и гибкости 52 равным 0,36.

Тогда критическая сила и напряжение для случая потери устойчивости по изгибной форме оказываются равными соответственно:

$$P_{кр} \approx 55 \text{ т}, \quad \sigma_{кр} \approx 2800 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. стержень потеряет устойчивость при пределе текучести.

Для таврового сечения потеря устойчивости по Эйлеру происходит в упругих пределах, но при большей критической силе, равной 18,75 т.

Таблица 36

Профиль	Критические нагрузки P , т						Отношение средней опытной критической нагрузки к нагрузке по теории автора
	теоретические		опытные				
	по Эйлеру	по теории автора	образец № 1	образец № 2	образец № 3	среднее из трех	
Коробчатый	55,0	26,14	24,7	26,0	26,0	25,57	0,98
Тавровый	18,75	14,85	—	—	14,0	14,0	0,94

В таблице 36 приведены теоретические и опытные данные. Из этой таблицы видно, во-первых, что эйлеровские критические силы значительно разнятся как от опытных, так и от теоретических, найденных по нашему методу. Особенно велико расхождение для коробчатого сечения: критическая сила по Эйлеру в два с лишним раза больше действительной. Однако для реального стержня, работающего в составе целой конструкции и обладающего дополнительными жесткостями в виде продольных или поперечных связей, подкрепляющих открытую часть профиля, разница между критическими силами, найденными по обычной теории продольного изгиба и по изложенной здесь нашей теории, должна значительно снизиться, так как наличие таких связей увеличивает крутильную жесткость стержня.

Из таблицы видно, во-вторых, что опытные критические нагрузки очень близки к теоретическим, подсчитанным по нашему методу; отношение средней величины первых ко вторым для коробчатого профиля равно 0,98, для таврового равно 0,94. Такое совпадение можно

*1 Здесь T — так называемый приведенный модуль упругости, зависящий от модуля упругости E , переменного модуля за пределами упругости $E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ и геометрических размеров сечения.

признать очень хорошим, а опыты — в полной мере подтверждающими теорию.

Теоретическая величина координат центра вращения отдельных сечений стержня c_x и c_y определялась по формулам (4.5). Для определения этих координат опытным путем были использованы показания прогибомеров, которые фиксировали положение стенки коробчатого профиля и полки тавра в пространстве на всех этапах нагрузки, в том числе и при критической нагрузке.

Результаты подсчета опытных и теоретических значений c_x ($c_y = 0$) и сравнение их приведены в табл. 37.

Таблица 37

Сечение	Расстояние центра вращения c_x от центра тяжести в мм						
	коробчатый профиль					тавровый профиль	
	опытные данные					теоретические данные	опытные данные
	образец № 1	образец № 2	образец № 3	среднее из трех	теоретические данные		
Верхнее	131	120	94	115	113	75	134
Среднее	122	90	115	109	113	120	134
Нижнее	111	104	85	100	113	83	134

Из табл. 37 видно, что для коробчатого сечения экспериментальные значения координат центра вращения во всех трех сечениях очень близки к теоретическим.

Опытная ось вращения представляет собой прямую, проходящую в непосредственной близости от теоретической оси, что является не менее важным обстоятельством для подтверждения излагаемой теории, чем совпадение критической нагрузки.

Менее удачную картину мы получили для таврового профиля. Здесь, по-видимому, сказались причины производственного характера: влияние сварки и выправления образца на скобе, к которым такой простой профиль, состоящий всего из двух элементов, особенно чувствителен.

2. Внецентренное сжатие. На прессе Амслера подвергались испытанию сварные образцы стальных двутавровых колонн с разными полками*). Образцы загружались центрально и не центрально. Продольная сжимающая сила при внецентренном нагружении передавалась на колонну в точке стенки двутавра с эксцентриситетами в сторону узкой полки от центра тяжести сечения. На рис. 172 показан

*1 Исследования эти были проведены доктором технических наук Д. В. Бычковым.

находящийся в прессе образец, потерявший при внецентренном сжатии устойчивость по изгибно-крутильной форме. Экспериментальные исследования, проведенные на колоннах большой гибкости, хорошо подтвердили теоретические результаты.

3. Устойчивость колонн, усиленных планками. Для проверки высказанного нами положения о том, в тонкостенных колоннах и балках открытого профиля при пространственной работе существенную роль играют не диафрагмы, а планки, некоторые из образцов были усилены планками, приращенными симметрично к полкам (по 4 планки с каждой стороны ^{*)}). Влияние планок на устойчивость колонны как тонкостенной пространственной конструкции экспериментально изучалось следующим образом.

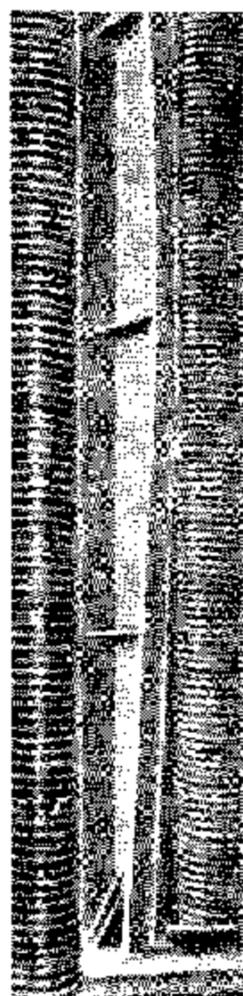


Рис. 172.

Образец колонны подвергался сначала сжатию при наличии на этом образце всех четырех планок. Продольная сжимающая сила на прессе доводилась до критического значения, при котором испытуемый образец приобретал новую изгибно-крутильную форму равновесия.

Деформации изгибного кручения в критическом состоянии фиксировались тензотрапми и прогибомерами, расположенными на стенках и полках трех сечений: среднего и двух крайних, отстоящих на расстоянии четверти длины от концов стержня. Величина эксцентриситета сжимающей силы P назначалась таким образом, чтобы образец при заданной длине и размерах поперечного сечения, а также и при заданных упругих характеристиках материала терял устойчивость в пределах упругости. Этот образец, даже при наличии планок, при разгрузке возвращался в свое начальное недеформированное состояние. Деформации изгибного кручения, наблюдавшиеся при потере устойчивости, после снятия нагрузки исчезали бесследно, что отмечалось на измерительных приборах.

Этот же образец испытывался затем вторично на сжатие, но при наличии только двух крайних планок, препятствующих деформации сечения на концах стержня. Бимоментные связи, соответствующие двум сред-

^{*)} Исследования были проведены кандидатом технических наук С. И. Стецьмахом.

нова вернулся в свое исходное недеформированное состояние. После этого в испытуемом образце были удалены тем же методом разреза и последние две крайние планки. Модель двутавровой колонны с включенными поперечными бимоментными связями (планками) снова подвергалась испытанию на сжатие. В этом случае потеря устойчивости происходила также по пространственной изгибно-крутильной форме равновесия при значении критической сжимающей силы меньшем, чем в описанных выше первых двух случаях.



а)



б)

Рис. 173.

изгиба из плоскости симметрии двутавра и стесненного кручения. Эта пространственная изгибно-крутильная форма равновесия колонны при потере устойчивости сопровождается также и деформацией сечения.

Вследствие деформации поперечные планки в местах разреза получили взаимные сдвиги в продольном направлении.

На рис. 173, б приведена увеличенная фотография одной из разрезанных планок (3) образца, потерявшего устойчивость.

Ниже приведены значения критических сил, вычисленные теоретически и полученные экспериментально описанным выше методом.

	Колонна без планок	Колонна с двумя планками	Колонна с четырьмя планками
$P_{кр}$ теорет. (в тоннах)	24,4	30,2	39,3
$P_{кр}$ эксперимент. (в тоннах)	25,8	29,8	41,0
$P_{кр}$ вычисленное по закону плоских сечений (в тоннах)	57,7	57,7	57,7

Для сравнения приведены также значения критических сил, вычисленные для колонн малой гибкости с учетом пластических деформаций по известным формулам закона плоских сечений, принятым в практических руководствах и нормах.

4. Устойчивость авиационных стержней. Помимо результатов описанных здесь экспериментальных работ, сделанных в лаборатории строительной механики ЦНИПС, нами были использованы опытные данные по устойчивости дюралюминиевых авиационных стержней, полученные в 1935 г. в Диржаблестроительном институте и в ЦАГИ [18].

Размеры авиационных стержней в поперечном сечении и результаты соответствующих теоретических и экспериментальных исследований приведены в табл. 38, в которой для сравнения приводятся и критические силы, полученные по обычной теории продольного изгиба.

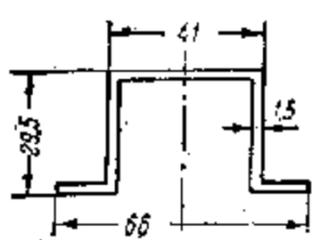
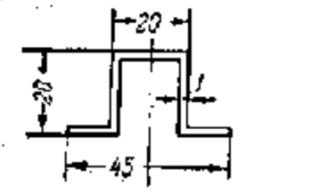
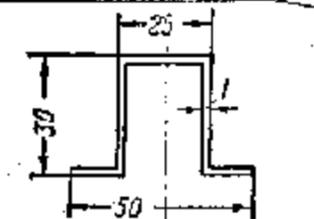
Из этой таблицы видно, что изложенная нами теория пространственной устойчивости тонкостенных стержней, позволяющая наряду с изгибом учитывать также и закручивание этих стержней, хорошо согласуется с опытными данными по авиационным стержням.

Теория же продольного изгиба в применении к несимметричным стержням или к стержням, имеющим одну ось симметрии и обладающим наименьшим моментом инерции из плоскости симметрии, приводит к неправильным результатам и дает для критической силы преувеличенные значения, расходящиеся с данными эксперимента.

В результате проведенных экспериментальных исследований следует признать доказанным, что критическая сила при продольном сжатии тонкостенных стержней открытого профиля имеет значение, равное эйлеровской критической силе, только в том случае, когда сжимающая сила приложена к центру изгиба сечения стержня. При других значениях эксцентриситетов точки приложения силы, а также при центральном сжатии (кроме случая, когда центр тяжести сечения совпадает с центром изгиба), критическая сила меньше эйлеровской,

причем стержень теряет устойчивость не только изгибаясь, но и закручиваясь. Эти выводы, вытекающие из теории устойчивости тонкостенных профилей, подтвердились не только качественно, но и количественно, так как экспериментальные и теоретические значения критических сил дали для сравнимых случаев гибкости хорошее совпадение.

Таблица 38

Геометрические размеры сечения, мм	№ образцов	Длина l , мм	Расчетные критические силы P , кг		
			по формуле Эйлера	по методу автора	по экспериментальным данным ЦАГИ
	1	1500	3007	900	920
	2	1300	4398	1174	1150
	3	1000	6786	1637	1400
	1	1000	1423	412	400
	2	750	2531	654	630
	3	500	5694	1318	1200
	1	1000	4026	461	480
	2	750	7158	744	780
	3	500	16105	1550	1420

Опытами подтверждается также одно из следствий теории — существование для каждого профиля своей оси вращения, вокруг которой происходит закручивание стержня. Эта ось параллельна оси стержня и является геометрическим местом центров вращения отдельных сечений.

Полученные результаты следует учитывать при проектировании и возведении металлических конструкций из прокатных профилей, однако необходимо помнить, что здесь не учитывалось влияние решеток и планок, которые, приближая тонкостенный открытый профиль к замкнутому, уничтожают в значительной мере опасное влияние закручивания от продольного сжатия и тем самым резко уменьшают разницу между значениями критических сил, вычисленных по Эйлеру и по нашей теории устойчивости, независимо от эксцентриситета приложения сжимающей нагрузки.

§ 15. Устойчивость стержней, нагруженных по концам бимоменгами

В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели задачу устойчивости тонкостенных стержней, находящихся под действием сжимающих сил, приложенных по концам стержня. На эти продольные силы мы накладывали одно существенное ограничение, а именно, считали, что до момента потери устойчивости стержень находится в условиях центрального поперечного изгиба с осевым растяжением, и изгибное кручение отсутствует. При такой постановке задачи изгибная форма равновесия стержня в момент потери устойчивости переходила в другую изгибно-крутильную форму равновесия, качественно отличную от первой.

Рассмотрим теперь более общий случай передачи внешней сжимающей нагрузки на стержень. Будем считать, что до потери устойчивости поперечные сечения стержня не остаются плоскими, и, следовательно, деформации изгиба стержня сопровождаются кручением.

Итак, пусть продольная сжимающая сила при произвольном ее приложении (в главных обобщенных координатах сечения) приводится к загрузке стержня по концам центрально-приложенной продольной сжимающей силой P , изгибающими моментами M_x , M_y и бимоментом B . Продольные нормальные напряжения, возникающие в стержне до потери устойчивости, в этом случае будут определяться уже по четырехчленной формуле

$$n = -\frac{P}{F} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega. \quad (15.1)$$

Здесь изгибающие моменты M_x , M_y в рассматриваемом случае нагрузки остаются постоянными по длине стержня (не зависят от координаты z); бимомент же B представляет собою переменную величину, определяемую в функции от координаты z по формуле

$$B = -P\omega_0 \frac{\operatorname{ch} \frac{kz}{l}}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \quad (15.2)$$

где ω_0 — значение главной обобщенной координаты деформации ω для точки приложения сжимающей силы P ; k — обобщенная изгибно-крутильная характеристика, определяемая по формуле (2.2) гл. II; $2l$ — длина стержня-оболочки.

Начало отсчета координаты z выбрано в середине длины стержня. Формулу (15.2) нетрудно получить, пользуясь рассуждениями п. 5 § 7 гл. II.

Формула (15.1) отличается от формулы (1.1) наличием последнего четвертого слагаемого, относящегося к нормальным напряжениям от бимоента. Определим добавочную приведенную нагрузку от этих

напряжений, получающуюся в результате бесконечно малого изменения деформации изгиба и кручения предварительно напряженного стержня, и принимая во внимание, что бимоментные напряжения зависят также и от координаты z , получим:

$$p_{xB} = \delta (n\xi'_x)',$$

$$p_{yB} = \delta (n\tau'_y),$$

где n — дополнительные нормальные напряжения, вызванные бимоментной нагрузкой.

Подставляя в эти формулы значения ξ_x и τ_y из формул (1.2), определяя затем погонные поперечные нагрузки q_{xB} , q_{yB} и погонный крутящий момент m_B по формулам:

$$q_{xB} = \int_L p_{xB} ds,$$

$$q_{yB} = \int_L p_{yB} ds,$$

$$m_B = \int_L [p_{yB}(x - a_x) - p_{xB}(y - a_y)] ds,$$

и принимая во внимание условие ортогональности функций 1 , x , y , ω на всей площади F поперечного стержня, получим:

$$q_{xB} = 0, \quad q_{yB} = 0,$$

$$m_B = \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\theta)'$$

Здесь U_ω — новая геометрическая характеристика сечения, определяемая по формуле

$$U_\omega = \int_F \omega (x^2 + y^2) dF,$$

где определенный интеграл распространяется на всю площадь поперечного сечения.

С определением дополнительного крутящего момента m_B от бимоментной нагрузки, уравнения устойчивости (1.10) принимают теперь более общий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'''' + P\xi'' + (M_x - a_y P)\xi'' &= 0, \\ EJ_x \tau'''' + P\tau'' + (M_y - a_x P)\tau'' &= 0, \\ (M_x + a_y P)\xi'' + (M_y - a_x P)\tau'' + EJ_\omega \theta'' + \\ + (r^2 P + 2\xi'_x M_y - 2\xi'_y M_x - GJ_d)\theta'' - \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\theta)' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Эти уравнения при $B \neq 0$ будут относиться к такому случаю пространственной устойчивости, при котором критическое состояние характеризуется изменением деформации стержня лишь с количественной,

а не с качественной стороны. В соответствии с нормальными напряжениями n , определяемыми по общей четырехчленной формуле (15.1), стержень до потери устойчивости, наряду с деформацией изгиба, определяется уравнениями

$$\xi_0'' = -\frac{M_y}{EJ_y}, \quad \eta_0'' = -\frac{M_x}{EJ_x},$$

испытывает также и начальную деформацию кручения, обусловленную действием бимоментов и определяемую уравнением

$$\theta_0'' = -\frac{B}{EJ_\omega}.$$

Искомые функции $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$, $\theta = \theta(z)$ в уравнениях (15.3) при отнесении этих уравнений к задаче устойчивости, т. е. при определении критического значения параметра внешней нагрузки, представляют собою вариации прогибов и угла кручения, которые в докритическом состоянии отличны от нуля.

Уравнения (1.10) относятся к другому случаю пространственной устойчивости стержня, а именно, к случаю, когда стержень до потери устойчивости испытывает только деформацию сжатия и изгиба; деформация кручения отсутствует.

Как мы уже условились в § 1, уравнения (1.10) будут относиться к пространственной устойчивости первого рода, так как в момент потери устойчивости возникает новая форма равновесия, качественно отличная от начальной формы, уравнения же (15.3) при $B \neq 0$ относятся к пространственной устойчивости второго рода, поскольку потеря устойчивости стержня не сопровождается появлением новой формы равновесия.

ГЛАВА VI

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК

§ 1. Общие дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба

В предыдущей главе мы рассмотрели вопрос об устойчивости тонкостенных стержней при центральном и внецентренном действии продольной силы. При этом в стержне до потери устойчивости возникали одни только нормальные напряжения $n(s)$, определяемые по формуле (1.1) гл. V, причем по длине стержня они оставались постоянными; касательные напряжения до потери устойчивости были равны нулю. Это обстоятельство позволило в значительной степени упростить общую задачу об устойчивости тонкостенных стержней с недеформируемым контуром и свести ее в математической части к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1.10) гл. V с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости стержней, исходя из более общих предположений в отношении внешней нагрузки.

Пусть на открытый тонкостенный стержень, имеющий n поперечным сечением произвольное очертание, действует нагрузка, вызывающая в стержне не только нормальные, но также и касательные напряжения.

Мы будем считать, что поперечная нагрузка и уравновешивающие ее опорные реакции проходят через линию центров изгиба. При этих предположениях стержень до потери устойчивости будет находиться в условиях центрального поперечного изгиба, иначе говоря, поперечные сечения стержня, не подвергаясь деформации, получают в своей плоскости одни только поступательные смещения.

Нормальные и осевые касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} n(z, s) &= \frac{N(z)}{F} - \frac{M_x(z)}{J_x} y(s) - \frac{M_y(z)}{J_y} x(s), \\ t(z, s) &= -\frac{M_x'(z) S_x(s)}{J_x} + \frac{M_y'(z) S_y(s)}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где $N(z)$, $M_x(z)$ и $M_y(z)$ — соответственно нормальная сила и

изгибающие моменты, рассматриваемые в общем случае как функции от z ; $M'_x(z)$ и $M'_y(z)$ — производные от соответствующих моментов по переменной z ; $x(s)$ и $y(s)$ — координаты точки контура, для которой вычисляются напряжения $n(z, s)$ и $t(z, s)$; эти координаты отсчитываются от главных осей сечения и являются функциями от дуги s ; $\delta(s)$ — толщина стенки профиля, являющаяся в общем случае также функцией от s ; $S_x(s)$ и $S_y(s)$ — статические моменты площади отсеченной части сечения, вычисляемые соответственно относительно осей Ox и Oy .

Стержень в критическом состоянии может перейти из одной формы равновесия в другую, отличающуюся от первой бесконечно малыми *добавочными* деформациями и напряжениями.

Пусть добавочные деформации определяются функциями $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$, из которых $\xi(z)$ и $\eta(z)$ представляют собой перемещение центра изгиба по направлению главных осей x и y , а $\theta(z)$ — угол закручивания.

С появлением перемещений $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ в поперечных сечениях стержня возникнут *добавочные* нормальные и касательные напряжения $\sigma(z, s)$ и $\tau(z, s)$ и крутящие моменты $H(z)$. Эти напряжения и моменты должны находиться в равновесии с заданными основными напряжениями $n(z, s)$ и $t(z, s)$, отнесенными к состоянию деформаций стержня после потери устойчивости (т. е. к состоянию, определяемому полными основными плюс добавочными перемещениями).

При малых деформациях условия равновесия стержня, как было показано ранее [(7.3) гл. I], могут быть представлены линейными уравнениями:

$$EJ_y \xi^{IV} = q_x, \quad EJ_x \eta^{IV} = q_y, \quad EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = m, \quad (1.2)$$

где q_x и q_y — интенсивности приведенных дополнительных погонных поперечных нагрузок, получающихся от заданных напряжений $n(z, s)$ и $t(z, s)$ при варьировании основного деформированного состояния; m — интенсивность дополнительного внешнего погонного крутящего момента, получающегося от заданного напряженного состояния и внешней нагрузки в искомом деформированном состоянии.

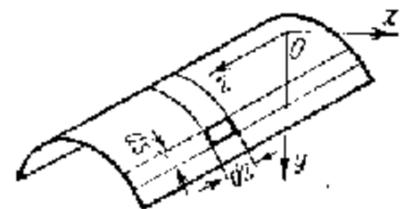


Рис. 174.

Для определения величин q_x , q_y и m , входящих в уравнения (1.2), рассмотрим деформированное состояние продольной элементарной полоски, заключенной между двумя образующими срединной поверхности: $s = \text{const}$ и $s + ds = \text{const}$. Ширина этой полоски равна дифференциалу ds дуги контура сечения (рис. 174). С переходом стержня из одного состояния упругого равновесия в другое, смежное с первым, элементарная полоска кроме деформаций удлинения получит также деформации изгиба и кручения. Пусть ξ_s и η_s — перемещения точки $M(z, s)$ по направлениям главных осей сечения Ox и Oy . Эти переме-

щения для стержня с недеформируемым контуром, как было показано ранее [(3.4) гл. I], выражаются через перемещение центра изгиба ξ , η и угол закручивания θ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \xi - (y - a_y) \theta, \\ \eta_s &= \eta + (x - a_x) \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Здесь через $x = x(s)$ и $y = y(s)$ обозначены координаты точки $M(z, s)$ в плоскости сечения $z = \text{const}$. Перемещения ξ_s и η_s при заданном значении независимой переменной s являются функциями от z и определяют собой пространственную кривую, в которую переходит после потери устойчивости образующая срединной поверхности $s = \text{const}$. Угол, образуемый касательной к этой кривой с осью z , определяется своими проекциями на главные координатные плоскости стержня. Для этих проекций с точностью до величин второго порядка малости мы имеем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \xi'_s = \xi' - (y - a_y) \theta', \\ \beta &= \eta'_s = \eta' + (x - a_x) \theta', \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где ξ' , η' и θ' — производные по z от искомых функций ξ , η и θ .

Выделим бесконечно малый элемент полоски $ABCD$ (рис. 175).

По боковым сторонам этого элемента AB и CD будут действовать усилия, которые в деформированном состоянии стержня складываются из основных усилий, относящихся к состоянию стержня до потери устойчивости, и добавочных усилий, возникающих в связи с изменением основной формы равновесия. Основные усилия выражаются через напряжения n и t , определяемые из статического расчета по формулам (1.1). Добавочные же усилия, соответствующие перемещениям ξ , η и θ , определяются напряжениями σ и τ .

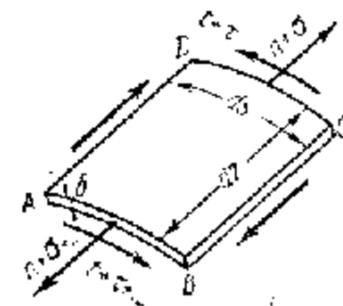


Рис. 175.

На рис. 175 показаны нормальные и сдвигающие усилия, приложенные по сторонам AB и CD выделенного элемента срединной поверхности и относящиеся к искомому деформированному состоянию стержня. Интенсивности этих усилий получают путем умножения соответствующих напряжений на толщину контура сечения $\delta(s)$ и вычисляются в кг/см. При переходе от сечения $z = \text{const}$ к сечению $z + dz = \text{const}$ нормальные и сдвигающие усилия как функции положения точки по длине продольной элементарной полоски получают приращение. Эти приращения пропорциональны дифференциалу dz .

Нормальные усилия, приложенные по сторонам AB и CD бесконечно малого элемента, вследствие деформаций изгиба этого элемента в плоскостях, параллельных главным плоскостям стержня Oxz и Oyz , будут наклонены под некоторыми углами к образующей срединной поверхности недеформированного стержня.

Эти углы будут равны α и β для точки M , расположенной в сечении $z = \text{const}$, и $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$ для точки M_1 другого (смежного) сечения $z + dz = \text{const}$ (рис. 176).

Нормальные усилия, действующие по стороне CD , дадут проекции на оси Ox и Oy . Заменяя вследствие малости деформаций $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ на α и β , мы получим выражения для проекций усилий соответственно на оси Ox и Oy :

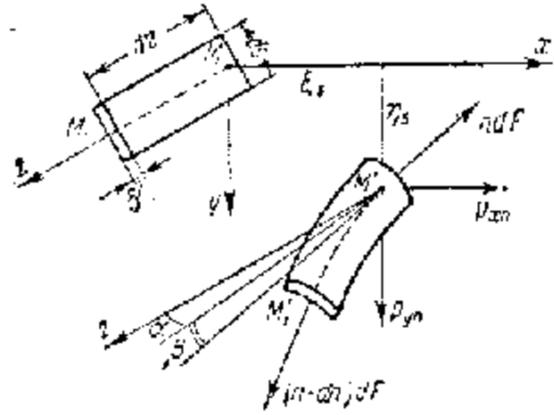


Рис. 176.

$$\left. \begin{aligned} -(n + \sigma) \delta \sin \alpha \cdot ds &\approx \\ &\approx -(n\alpha - \sigma\alpha) \delta ds, \\ -(n + \sigma) \delta \sin \beta \cdot ds &\approx \\ &\approx -(n\beta - \sigma\beta) \delta ds. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Переходя к стороне AB и заменяя вследствие малости деформаций $\sin(\alpha + d\alpha)$ через $\alpha + d\alpha$ и $\sin(\beta + d\beta)$ через $\beta + d\beta$, будем считать α , β , σ и dn величинами

одного порядка малости, а $d\alpha$, $d\beta$, $d\sigma$ — величинами более высокого порядка малости. Учитывая только главные члены разложения, получим выражения для проекций соответственно на оси Ox и Oy от нормальных усилий, действующих по стороне AB :

$$\left. \begin{aligned} [n + \sigma + d(n - \sigma)] \delta \sin(\alpha + d\alpha) ds &\approx \\ &\approx (n\alpha - \sigma\alpha + \alpha dn - nd\alpha) \delta ds, \\ [n + \sigma + d(n + \sigma)] \delta \sin(\beta + d\beta) ds &\approx \\ &\approx (n\beta + \sigma\beta + \beta dn + nd\beta) \delta ds. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

При помощи формул (1.5) и (1.6) можно теперь определить проекции на оси Ox и Oy приведенной поверхностной нагрузки от заданных нормальных напряжений n и как разность нормальных составляющих усилий для сторон AB и CD , отнесенных к деформированному состоянию стержня. Обозначая интенсивности этих проекций через p_{xn} и p_{yn} , мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} p_{xn} dz ds &= (\alpha dn + nd\alpha) \delta ds, \\ p_{yn} dz ds &= (\beta dn + nd\beta) \delta ds. \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Деля обе части равенств (1.7) на $dz ds$ и замечая, что выражения $nd\alpha + \alpha dn$ и $nd\beta + \beta dn$, имеющиеся в правых частях этих равенств, представляют собой частные дифференциалы от произведений $n\alpha$ и $n\beta$ по переменной z , получим:

$$p_{xn} = \frac{\partial}{\partial z} (n\alpha) \delta,$$

$$p_{yn} = \frac{\partial}{\partial z} (n\beta) \delta.$$

Определим теперь проекции приведенной поверхностной нагрузки на оси Ox и Oy от сдвигающих усилий, приложенных по сторонам AB и CD деформированного элемента.

Сдвигающие силы в каждой точке поперечного сечения стержня действуют по направлению касательной в этой точке к дуге контура сечения. Эта касательная с переходом стержня в деформированное состояние поворачивается на угол, равный углу закручивания продольной элементарной полоски. Вследствие деформаций кручения сдвигающие силы дадут проекцию на направление нормали к срединной поверхности недеформированного стержня. Для стороны CD эта проекция на направление внутренней нормали может быть представлена следующим образом:

$$-(t + \tau) \delta \sin \theta \cdot ds \approx -(t\theta + \tau\theta) \delta ds. \quad (1.8)$$

Переходя к стороне AB , заметим, что для этой стороны значения сдвигающих сил и угла закручивания отличаются от аналогичных величин для стороны CD частными дифференциалами, пропорциональными дифференциалу dz . Проектируя сдвигающие силы, действующие по стороне AB , на направление внутренней нормали в точке A , отбрасывая, как и в предыдущем случае, члены более высокого порядка малости и заменяя $\sin(\theta + d\theta)$ аргументом $\theta + d\theta$, получим

$$[t + dt + (\tau + d\tau)] \delta \sin(\theta + d\theta) ds \approx (t\theta + \tau\theta + \theta dt + t d\theta) \delta ds. \quad (1.9)$$

Формулами (1.8) и (1.9) определяются нормальные составляющие от сдвигающих сил, действующих по сторонам AB и CD деформированного элемента. Эти составляющие имеют разные знаки: для CD нормальная составляющая при положительных t и τ направлена в сторону внешней нормали; для AB эта составляющая действует по направлению внутренней нормали. Разность нормальных составляющих для сторон AB и CD мы можем рассматривать как дополнительную для выделенного элемента поверхностную нагрузку, получающуюся в деформированном стержне от заданных касательных напряжений t .

Обозначая интенсивность этой нагрузки через p_t и считая ее положительной, если она направлена по внутренней нормали, мы можем разность нормальных составляющих, выписанных в правых частях равенств (1.8) и (1.9), представить в следующем виде:

$$p_t dz ds = (\theta dt + t d\theta) \delta ds. \quad (1.10)$$

Деля теперь обе части полученного равенства на $dz ds$ и замечая, что выражение $\theta dt + t d\theta$, стоящее в правой части уравнения (1.10), представляет собой частный дифференциал от произведения $t\theta$ по переменной z , получим для интенсивности p_t формулу

$$p_t = \frac{\partial}{\partial z} (t\theta) \delta.$$

Поверхностную нагрузку p_t , действующую по направлению внутренней нормали, мы можем представить компонентами по осям Ox и Oy неподвижной системы координат.

Обозначая эти компоненты соответственно через p_{xt} и p_{yt} , найдем:

$$p_{xt} = -p_t \sin \psi = -\frac{\partial}{\partial z} (t\theta) \delta \sin \psi,$$

$$p_{yt} = p_t \cos \psi = \frac{\partial}{\partial z} (t\theta) \delta \cos \psi.$$

Здесь через $\psi = \psi(s)$ обозначен угол, образуемый касательной к дуге контура стержня с осью Ox . Этот угол, как и толщина $\delta = \delta(s)$, зависят только от одной переменной s .

Для компонентов обобщенной приведенной поверхностной нагрузки от напряжений n и t мы получаем теперь формулы:

$$\left. \begin{aligned} p_x = p_{xn} + p_{xt} &= \left[\frac{\partial}{\partial z} (n\alpha) - \frac{\partial}{\partial z} (t\theta) \sin \psi \right] \delta, \\ p_y = p_{yn} + p_{yt} &= \left[\frac{\partial}{\partial z} (n\beta) + \frac{\partial}{\partial z} (t\theta) \cos \psi \right] \delta. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Этими формулами определяются компоненты дополнительной нагрузки, приходящейся на единицу площади срединной поверхности и возникающей от заданных напряжений n и t вследствие вариации обобщенной деформации стержня. Эта приведенная дополнительная нагрузка должна находиться в равновесии с дополнительными нормальными и касательными напряжениями σ и τ и крутящими моментами H , появляющимися в поперечных сечениях при потере плоской формы изгиба.

По компонентам p_x и p_y мы можем определить составляющие поперечной нагрузки, приходящейся на элементарную поперечную криволинейную полосу, заключенную между двумя смежными поперечными сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$. Обозначая интенсивности этих составляющих через q_x и q_y и имея в виду, что они определяются путем интегрирования поверхностных нагрузок p_x и p_y по всему контуру поперечного сечения, мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \int_L p_x ds = \int_F \frac{\partial}{\partial z} (n\alpha - t\theta \sin \psi) dF, \\ q_y &= \int_L p_y ds = \int_F \frac{\partial}{\partial z} (n\beta + t\theta \cos \psi) dF. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где через L и F обозначены соответственно длина контура и площадь всего поперечного сечения. В подынтегральные выражения входят напряжения $n(z, s)$ и $t(z, s)$, относящиеся к состоянию стержня до потери устойчивости, и угловые перемещения $\alpha(z, s)$, $\beta(z, s)$ и $\theta(z, s)$, относящиеся к искомому деформированному состоянию после потери устойчивости.

Подставим в правые части написанных выражений (1.12) значения n и t из формул (1.1), α и β из формул (1.4) и заметим, что N , M_x , M_y , ξ , η и θ являются функциями только переменной z , а x , y , δ и ψ — являются функциями только переменной s . После дифференцирования по z , интегрирования по всей площади поперечного сечения F и использования зависимостей*)

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{S_x}{\delta} \sin \psi dF - \int_F S_x dy &= -J_{xx}, & \int_F \frac{S_y}{\delta} \cos \psi dF &= \int_F S_y dx = -J_{yy}, \\ \int_F \frac{S_x}{\delta} \cos \psi dF - \int_F S_x dx &= 0, & \int_F \frac{S_y}{\delta} \sin \psi dF &= \int_F S_y dy = 0 \end{aligned} \right\}$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= [N(\xi' + a_y \theta')] - (M_x \theta)'' , \\ q_y &= [N(\eta' - a_x \theta')] - (M_y \theta)'' . \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Определим теперь для деформированного состояния стержня дополнительный «внешний» погонный крутящий момент, входящий в третье уравнение системы (1.2).

Для этой цели рассмотрим состояние усилий и нагрузок, действующих на выделенную в поперечном направлении элементарную полосу sdz . По криволинейным краям этой полосы действуют нормальные и сдвигающие усилия. Эти усилия вследствие деформаций изгиба и кручения продольной элементарной полоски ds , как мы видели выше, дают дополнительную поперечную нагрузку. Выбирая за моментную ось — прямую, параллельную образующей цилиндра и проходящую через центр изгиба, мы получаем для крутящего момента от нагрузки, приходящейся на элемент оболочки $dsdz$, при ширине поперечной полоски $dz = 1$, следующее выражение:

$$dm_t = [p_y(x - a_x) - p_x(y - a_y)] ds.$$

Подставляя сюда компоненты интенсивности нагрузки p_x и p_y , определяемые по формулам (1.11), выражая затем α и β через искомые перемещения ξ , η и θ по формулам (1.4), найдем

$$dm_t = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\xi' n(y - a_y) + \eta' n(x - a_x) + \theta' [n(x - a_x)^2 + n(y - a_y)^2] + \theta [t_x(x - a_x) + t_y(y - a_y)] \right\} dF, \quad (1.14)$$

где t_x и t_y — компоненты осевого касательного напряжения в произвольной точке контура:

$$t_x = t \cos \psi, \quad t_y = t \sin \psi. \quad (1.15)$$

*) Эти зависимости легко получить, если применить формулу интегрирования по частям (см. справку в § 8 гл. I).

Интегрируя обе части равенства (1.14) по всей площади сечения F и имея в виду, что перемещения ξ , η и θ от координаты z не зависят, мы можем написать:

$$m_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\xi' \int_F n(y - a_y) dF - \eta' \int_F n(x - a_x) dF - \right. \\ \left. + \theta' \int_F [n(x - a_x)^2 + n(y - a_y)^2] dF - \theta \int_F [t_x(x - a_x) + t_y(y - a_y)] dF \right\}.$$

Этой формулой определяется дополнительный крутящий момент от поверхностной нагрузки, которая получается в результате проектирования на плоскость поперечного сечения стержня заданных нормальных и сдвигающих усилий, если отнести эти усилия к деформированному состоянию стержня и учесть изменение направлений этих усилий.

Дополнительный крутящий момент возникнет также и вследствие того, что сдвигающие силы с переходом стержня в другое деформированное состояние займут новые положения относительно неподвижной системы координат Oxy . Точки приложения этих сил получат перемещения; в силу этого заданный крутящий момент, выраженный через внутренние сдвигающие силы, изменится на некоторую величину. Для определения этой величины разложим сдвигающие усилия, действующие по сечениям $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, на составляющие по осям Ox и Oy неподвижной системы координат. Отнеся эти составляющие к единице длины дуги контура и выразив их через касательные напряжения, мы можем написать для них следующие выражения:

	Проекция на ось Ox	Проекция на ось Oy
Сечение $z = \text{const}$	$(t_x + \tau_x) \delta$	$(t_y + \tau_y) \delta$
Сечение $z + dz = \text{const}$	$[t_x + \tau_x + d(t_x + \tau_x)] \delta$	$[t_y + \tau_y + d(t_y + \tau_y)] \delta$

Подсчитаем приращение крутящего момента от сдвигающих усилий, приходящихся на бесконечно малый элемент $dz\delta ds$ выделенной поперечной полосы. Замечая, что с переходом от сечения $z = \text{const}$ к сечению $z + dz = \text{const}$ перемещения ξ_s и η_s какой-нибудь точки контура получают также приращения $d\xi_s$ и $d\eta_s$, мы можем дополнительный крутящий момент от сдвигающих усилий, действующих по криволинейным сторонам бесконечно малого элемента $dz\delta ds$, выразить следующим образом:

$$dm_2 = \left(\xi_s + \frac{\partial \xi_s}{\partial z} dz \right) \left[t_y + \tau_y + \frac{\partial}{\partial z} (t_y + \tau_y) dz \right] \delta ds - \xi_s (t_y + \tau_y) \delta ds - \\ - \left(\eta_s + \frac{\partial \eta_s}{\partial z} dz \right) \left[t_x + \tau_x + \frac{\partial}{\partial z} (t_x + \tau_x) dz \right] \delta ds + \eta_s (t_x + \tau_x) \delta ds. \quad (1.16)$$

В этой формуле первым и вторым членами выражен крутящий момент от сдвигающих сил, действующих параллельно оси Oy ; третий и четвертый члены дают крутящий момент от сдвигающих сил, действующих параллельно оси Ox .

Приращения усилий и перемещений выражены через частные дифференциалы от соответствующих функций по переменной z .

Производя в выражении (1.16) очевидные упрощения, отбрасывая величины второго порядка малости, получающиеся от перемножения дополнительных касательных напряжений τ_x и τ_y на перемещения ξ_s и η_s , и полагая $dz = 1$, получим

$$dm_2 = \left[\frac{\partial (t_y \xi_s)}{\partial z} - \frac{\partial (t_x \eta_s)}{\partial z} \right] \delta ds. \quad (1.17)$$

Подставив в выражение (1.17) вместо ξ_s и η_s правые части равенств (1.3) и интегрируя затем обе части равенства (1.17) по всей дуге контура поперечного сечения, получим для крутящего момента, приходящегося на выделенную поперечную полосу единичной ширины ($dz = 1$), выражение:

$$m_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\xi \int_F t_y dF \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \int_F t_x dF \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \theta \left[\int_F t_y (y - a_y) dF + \int_F t_x (x - a_x) dF \right] \right\}.$$

Крутящий момент m_2 выражен, как и момент m_1 , в функции заданных напряжений и искомого перемещения. Момент m_2 представляет собой ту искомую величину, на которую изменяется первоначальный крутящий момент вследствие разности заданных сдвигающих усилий при параллельном переносе этих усилий в другое положение, наступившее после потери устойчивости.

Нам осталось определить третий дополнительный момент, а именно, приращение крутящего момента m от заданных внешних поверхностных сил p_x^0 и p_y^0 , получающееся вследствие того, что эти силы после деформации занимают другое положение относительно центра изгиба. Приращение крутящего момента m от заданной нагрузки p_x^0 , p_y^0 , приходящейся на элемент срединной поверхности $dz\delta ds$, вследствие перемещений ξ_s и η_s этого элемента в плоскости поперечного сечения имеет вид:

$$dm_3 dz = (p_y^0 \xi_s - p_x^0 \eta_s) dz\delta ds.$$

Подставляя сюда значения ξ_s и η_s из формул (1.3), сокращая на dz и интегрируя затем по всему контуру поперечного сечения, получим для приращения интенсивности внешнего погонного момента следующую формулу:

$$m_3 = \xi \int_L p_y^0 ds - \eta \int_L p_x^0 ds - \theta \left[\int_L p_x^0 (x - a_x) ds + \int_L p_y^0 (y - a_y) ds \right].$$

Мы определили дополнительные крутящие моменты от всех сил, действующих на полоску $dz = 1$. Общий дополнительный крутящий момент, входящий в третье уравнение системы (1.2), равен сумме трех моментов:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{z}{2} \int_F n(y - a_y) dF + r_1' \int_F n(x - a_x) dF \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \theta' \int_F [n(x - a_x)^2 + n(y - a_y)^2] dF \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[z \int_F t_y dF - r_1 \int_F t_x dF \right] + \\ + \frac{z}{2} \int_L p_y^2 ds - r_1 \int_L p_x^2 ds - b \left[\int_L p_x^2 (x - a_x) ds - \int_L p_y^2 (y - a_y) ds \right]. \quad (1.18)$$

Подставим в выражение (1.18) нормальные и касательные напряжения $n(z, s)$ и $t(z, s)$, определяемые в случае центрального поперечного изгиба по формулам (1.1), и вычленим интегралы, входящие в правую часть равенства (1.18). Для интегралов с нормальными напряжениями получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \int_F n(y - a_y) dF &= \frac{N(z)}{F} \int_F (y - a_y) dF + \frac{M_x(z)}{J_x} \int_F y(y - a_y) dF - \\ &\quad - \frac{M_y(z)}{J_y} \int_F x(y - a_y) dF, \\ \int_F n(x - a_x) dF &= \frac{N(z)}{F} \int_F (x - a_x) dF + \frac{M_x(z)}{J_x} \int_F y(x - a_x) dF - \\ &\quad - \frac{M_y(z)}{J_y} \int_F x(x - a_x) dF, \\ \int_F [n(x - a_x)^2 + n(y - a_y)^2] dF &= \frac{N(z)}{F} \int_F [(x - a_x)^2 + \\ &\quad + (y - a_y)^2] dF + \frac{M_x(z)}{J_x} \int_F y[(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF - \\ &\quad - \frac{M_y(z)}{J_y} \int_F x[(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF. \end{aligned} \right\} (1.19)$$

Пользуясь сокращенными обозначениями (1.6), (1.7), (1.8) гл. V, мы можем формулам (1.19) придать более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_F n(y - a_y) dF &= -a_y N(z) + M_x(z), \\ \int_F n(x - a_x) dF &= -a_x N(z) - M_y(z), \\ \int_F n[(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF &= r^2 N(z) + 2\beta_y M_x(z) - 2\beta_x M_y(z). \end{aligned} \right\} (1.20)$$

Подобным же образом мы можем в формуле (1.18) упростить интегралы, в которые входят касательные напряжения t_x и t_y . Принимая во внимание (1.15), можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \int_F t_x dF &= \int_L t \delta \cos \phi ds, \\ \int_F t_y dF &= \int_L t \delta \sin \phi ds. \end{aligned} \right\} (1.21)$$

В полученных формулах выражения $ds \cos \phi$ и $ds \sin \phi$ представляют собой проекции дифференциала дуги контура ds на оси Ox и Oy :

$$ds \cos \phi = dx, \quad ds \sin \phi = dy. \quad (1.22)$$

Произведение осевого касательного напряжения t на толщину стенки δ представляет собой сдвигающее усилие, т. е. усилие в поперечном сечении стержня, направленное по касательной к дуге контура и приходящееся на единицу длины этой дуги. На основании формулы (1.1)

$$t \delta = -\frac{M_x(z)}{J_x} S_x(s) + \frac{M_y(z)}{J_y} S_y(s). \quad (1.23)$$

Подставляя выражения (1.22) и (1.23) в формулы (1.21) и замечая, что для всего поперечного сечения

$$\left. \begin{aligned} \int_F S_x dx &= 0, & \int_F S_y dx &= -J_y, \\ \int_F S_x dy &= -J_x, & \int_F S_y dy &= 0, \end{aligned} \right\}$$

представим интегралы с касательными напряжениями окончательно в виде:

$$\int_F t_x dF = -M_y'(z), \quad \int_F t_y dF = M_x'(z). \quad (1.24)$$

Формулами (1.24) выражены известные условия равновесия элементарной поперечной полоски. Интегралы, стоящие в левых частях этих формул, при распространении их на всю площадь поперечного сечения F дают проекции на координатные оси поперечной силы, действующей в сечении $z = \text{const}$.

Эти проекции в случае поперечного изгиба выражаются через производные по z от соответствующих поперечных изгибающих моментов. Считая, что проекции поперечной силы Q_x и Q_y для сечения $z = \text{const}$ с положительной внешней нормалью, направленной по оси z , при положительных значениях этих проекций совпадают с направлениями координатных осей Ox и Oy , а сохраняя для моментов $M_x(z)$ и $M_y(z)$ ранее принятое правило знаков, мы можем моментные условия равно-

весня поперечной элементарной полоски срединной поверхности стержня $dz=1$ относительно осей Ox и Oy записать в следующем виде:

$$Q_x = -M'_y, \quad Q_y = M'_x. \quad (1.25)$$

Формулами (1.25) поперечные силы Q_x и Q_y выражены через производные от моментов $M_y(z)$ и $M_x(z)$. С другой стороны, эти поперечные силы могут быть получены как распространённые на всю площадь поперечного сечения F интегралы сдвигающих сил, действующих в направлении осей Ox и Oy .

Мы можем также упростить и последние интегралы правой части равенства (1.18), содержащие члены с компонентами поперечной поверхностной нагрузки p_x^0 и p_y^0 .

Обозначая через q_x^0 и q_y^0 компоненты поперечной нагрузки, приходящейся уже не на элемент $dzds$ срединной поверхности стержня, а на поперечную полоску единичной ширины ($dz=1$), мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \int_L p_x^0 ds &= q_x^0, \\ \int_L p_y^0 ds &= q_y^0, \\ \int_L p_x^0 (x - a_x) ds + \int_L p_y^0 (y - a_y) ds &= q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y), \end{aligned} \right\} (1.26)$$

где e_x и e_y — координаты точки приложения заданной погонной (т. е. приходящейся на единицу длины стержня) поперечной нагрузки в плоскости поперечного сечения*).

На основании формул (1.20), (1.24) и (1.26) выражение (1.18) для интенсивности дополнительного внешнего крутящего момента примет вид:

$$m = \frac{\partial}{\partial z} [\xi' (a_y N - M_x) - \eta' (a_x N + M_y)] + \frac{\partial}{\partial z} [\theta' (r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y)] + \frac{\partial}{\partial x} (\xi M'_x + \eta M'_y) + \xi q_x^0 - \eta q_y^0 - \theta [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)].$$

Выполняя указанное дифференцирование по z и имея в виду, что на основании условий равновесия элементарной поперечной полоски dz

$$M'_x = Q'_y = -q'_y, \quad M'_y = -Q'_x = q'_x,$$

*). Так как $\int_L p_x^0 x ds = q_x^0 e_x$ и $\int_L p_y^0 y ds = q_y^0 e_y$,

где $q_x^0 = \int_L p_x^0 ds$ и $q_y^0 = \int_L p_y^0 ds$.

представим выражение для крутящего момента окончательно в следующем виде:

$$m = a_y (N\xi') - a_x (N\eta') - M_x \xi'' - M_y \eta'' + [(r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta'] - [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \theta. \quad (1.27)$$

Формулами (1.13) и (1.27) определяются дополнительные «внешние» силы q_x и q_y и момент m , возникающие от заданного напряжённого состояния стержня при изменении его деформированного состояния. Эти силы и момент должны находиться в равновесии с дополнительными внутренними силами, которые возникают также вследствие изменения деформаций.

Подставляя (1.13) и (1.27) в уравнения (1.2), представим условия равновесия стержня после потери устойчивости в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} EI_y \xi^{IV} - [N(\xi' + a_y \theta')] + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EI_x \eta^{IV} - [N(\eta' - a_x \theta')] + (M_y \theta)'' &= 0, \\ EI_z \theta^{IV} - GI_z \theta'' - [(r^2 N - 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta'] + \\ + [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \theta - a_y (N\xi') - \\ - a_x (N\eta') + M_x \xi'' + M_y \eta'' &= 0. \end{aligned} \right\} (1.28)$$

Мы получили общие дифференциальные уравнения устойчивости для произвольного открытого тонкостенного профиля, находящегося в условиях сложного сопротивления при центральном поперечном изгибе совместно с сжатием или растяжением.

В этих уравнениях искомыми функциями являются перемещения $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$ и $\theta = \theta(z)$, возникающие вследствие изменения при потере устойчивости основной изгибной формы равновесия стержня. Коэффициенты дифференциальных уравнений (1.28) определяются геометрическими размерами поперечного сечения стержня, упругими постоянными E и G и функциями $N = N(z)$, $M_x = M_x(z)$, $M_y = M_y(z)$, $q_x^0 = q_x^0(z)$ и $q_y^0 = q_y^0(z)$, зависящими от заданной внешней нагрузки и условий закрепления стержня по концам.

При расчёте упругих систем на устойчивость обычно предполагается, что внешняя нагрузка задана с точностью до общего коэффициента пропорциональности, характеризующего интенсивность этой нагрузки. Все силы, образующие внешнюю нагрузку, находятся между собой в заданном постоянном отношении. Расчёт на устойчивость упругой системы в этом случае сводится к разысканию наименьшего критического значения обобщённой нагрузки, являющейся коэффициентом пропорциональности.

Полученные нами общие дифференциальные уравнения (1.28) позволяют исследовать вопросы устойчивости в более общей постановке. Мы можем внешнюю нагрузку, действующую на упругую систему, считать находящейся в линейной зависимости от одного или нескольких параметров. Практический интерес представляет собой случай, когда

внешняя нагрузка линейно зависит от одного параметра. С такого рода нагрузкой мы встречаемся при расчете на устойчивость упругой системы, нагруженной предварительно заданной постоянной нагрузкой (например, собственным весом) и испытывающей затем действие временной нагрузки. Постоянная нагрузка имеет вполне определенное значение, временную же нагрузку мы можем считать заданной с точностью до одного параметра, являющегося коэффициентом пропорциональности для этой нагрузки.

Силовые факторы N , M_x , M_y , q_x^0 и q_y^0 , зависящие от внешней нагрузки и граничных условий и вместе с геометрическими размерами поперечного сечения стержня и упругими характеристиками его материала определяющие коэффициенты дифференциальных уравнений (1.28), в этом случае будут находиться в линейной зависимости от параметра нагрузки. С изменением этого параметра изменяется также внешняя нагрузка, действующая на упругую систему, и изменяются, следовательно, коэффициенты дифференциальных уравнений (1.28); при некотором определенном значении параметра для системы наступает состояние неустойчивого равновесия, при котором оскопая форма равновесия может перейти в смежную с ней другую форму, характеризующуюся вариациями перемещений ξ , η и θ и представленную дифференциальными уравнениями (1.28).

Математически такое состояние неустойчивого равновесия выражается в том, что при некотором (критическом) значении определенного параметра λ и при однородных граничных условиях система линейных однородных дифференциальных уравнений (1.28) может иметь решения, отличные от нуля.

Существует бесчисленное множество решений для функций $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$, удовлетворяющих при определенных значениях параметра λ дифференциальным уравнениям (1.28) и граничным условиям. Все эти решения образуют так называемую *систему фундаментальных функций*. Каждое частное решение этих дифференциальных уравнений при заданных однородных граничных условиях определяется своим фундаментальным числом, пропорциональным параметру λ критической нагрузки.

Бесконечному множеству фундаментальных чисел будет соответствовать бесконечное число критических нагрузок и бесконечное множество форм состояния равновесия упругой системы после потери устойчивости. Каждая из этих возможных форм равновесия определяется с точностью до произвольной константы фундаментальными функциями системы уравнений (1.28). Неопределенность решения рассматриваемой здесь проблемы устойчивости обусловлена тем, что при выводе этих уравнений, мы, вследствие малости перемещений ξ , η и θ , выразили равновесие упругой системы в координатах недеформированного состояния.

Фундаментальные числа, определяемые уравнениями (1.28) и граничными условиями, могут иметь как положительные, так и отрица-

тельные значения. Для определения расчетной критической нагрузки из бесконечного множества положительных и отрицательных значений параметра λ следует выбрать те, которые по своей абсолютной величине являются наименьшими*).

§ 2. Устойчивость стержней при действии продольных сил, распределенных по длине стержня по произвольному закону

Дифференциальные уравнения (1.28) являются общими и охватывают, в частности, широкий класс задач по устойчивости открытых тонкостенных профилей при произвольном действии нагрузки (продольной и поперечной), вызывающей в профиле до потери им устойчивости нормальные напряжения $n(z, s)$, распределенные в сечении $z = \text{const}$ по линейному закону.

Если внешняя нагрузка состоит из одних только продольных сил, распределенных по длине стержня по произвольному закону и вызывающих в сечении (до потери стержнем устойчивости) нормальные напряжения, распределенные по линейному закону, то мы имеем:

$$q_x^0 = q_y^0 = 0, \quad M_x = Ne_y, \quad M_y = -Ne_x, \quad (2.1)$$

где e_x и e_y — эксцентриситеты приложения продольной силы $N = N(z)$. Уравнения (1.28) при условиях (2.1) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - [N(\xi' + a_y \theta')] + (Ne_y \theta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - [N(\eta' - a_x \theta')] - (Ne_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_\omega \theta'' - [N(r^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_x e_x) \theta'] + \\ + a_x (N\eta)' - a_y (N\xi)' + Ne_y \xi'' - Ne_x \eta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Эти уравнения представляют собой обобщение полученных ранее уравнений (6.2) гл. V для случая, когда продольная сила приложена только по концам стержня и, следовательно, по длине стержня остается постоянной.

Если $e_x = e_y = 0$, то уравнения (2.2) переходят в следующие уравнения устойчивости при центральном сжатии:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - [N(\xi' + a_y \theta')] &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - [N(\eta' - a_x \theta')] &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_\omega \theta'' - r^2 (N\theta)' - a_y (N\xi)' + a_x (N\eta)' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Считая, что продольная сила $N = N(z)$ линейно задана с точностью до одного параметра, мы можем написать

$$N(z) = N^0(z) + \lambda N_1(z),$$

* Описанная здесь однородная краевая задача, приводящая к фундаментальным функциям и числам, может быть решена при помощи интегральных уравнений.

где $N^0(z)$ — вполне определенная постоянная нагрузка, вызывающая в стержне заданные начальные напряжения; $\lambda N_1(z)$ — временная нагрузка, меняющаяся по длине стержня по вполне определенному закону и заданная с точностью до коэффициента пропорциональности λ , характеризующего интенсивность действия этой нагрузки.

Примером может служить весомый стержень, нагруженный на конце центрально приложенной продольной силой, критическое значение которой является искомым; продольная сила $N(z)$ для произвольного сечения $z = \text{const}$ здесь определяется по формуле

$$N(z) = -\gamma Fz + N_1, \quad (2.4)$$

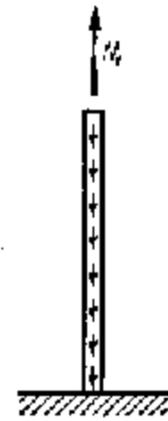


Рис. 177. где γFz — вес части стержня длиной z ; N_1 — продольная сила, приложенная на конце стержня (рис. 177).

Подставляя выражения (2.4) в уравнения (2.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - [(N_1 - \gamma Fz) (\xi' + a_y \theta')] &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - [(N_1 - \gamma Fz) (\eta' - a_x \theta')] &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - r^2 [(N_1 - \gamma Fz) \theta'] - a_y [(N_1 - \gamma Fz) \xi'] + a_x [(N_1 - \gamma Fz) \eta'] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

При $\gamma = 0$, т. е. в случае невесомого стержня, уравнения (2.5) переходят в рассмотренные ранее уравнения (3.1) гл. V для стержня, нагруженного по концам сжимающей силой $P \equiv -N_1$.

Положив в уравнениях (2.5) N_1 равным нулю и принимая $\gamma F = g$ за параметр нагрузки, получим уравнения устойчивости для случая, когда стержень находится под действием центрально приложенной продольной нагрузки, имеющей по длине постоянную интенсивность. Эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + [gz (\xi' + a_y \theta')] &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + [gz (\eta' - a_x \theta')] &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + r^2 (gz \theta') - a_x (gz \eta') + a_y (gz \xi') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Критическое значение интенсивности нагрузки g определяется из условия, чтобы система однородных линейных уравнений (2.6) при заданных однородных граничных условиях имела ненулевые решения.

Уравнения (2.3), как и более общие исходные уравнения (1.28), относятся к стержню, имеющему в поперечном сечении произвольное очертание.

Если поперечное сечение таково, что центр изгиба совпадает с центром тяжести, как это имеет место, например, в профилях с двумя

оси симметрии, то $a_x = a_y = 0$; система совместных уравнений (2.3) распадается в этом случае на три независимых дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - (N \xi') &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - (N \eta') &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - r^2 (N \theta') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Первые два уравнения относятся к потере устойчивости стержня в форме изгиба относительно главных осей сечения. Третьим уравнением описывается форма потери устойчивости, возникающая вследствие закручивания стержня относительно центра изгиба.

В случае равномерно распределенной продольной нагрузки уравнения (2.7) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + (gz \xi') &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + (gz \eta') &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + r^2 (gz \theta') &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения после интегрирования один раз по z могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi''' + gz \xi' + C_1 &= 0, \\ EJ_x \eta''' + gz \eta' + C_2 &= 0, \\ EJ_\omega \theta''' - GJ_d \theta' + r^2 gz \theta' + C_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где C_1 , C_2 и C_3 — постоянные интегрирования. Из этих постоянных первые две по своему физическому смыслу представляют поперечные силы Q_x^0 и Q_y^0 , а третья — крутящий момент H_0^0 , действующие в начальном сечении $z = 0$. Если начальное сечение свободно от поперечных сил и крутящего момента, то постоянные интегрирования обращаются в нуль, и уравнения (2.8) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi''' + gz \xi' &= 0, \\ EJ_x \eta''' + gz \eta' &= 0, \\ EJ_\omega \theta''' - GJ_d \theta' + r^2 gz \theta' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Из этих уравнений первые два совпадают с известными дифференциальными уравнениями для стержня, находящегося под действием равномерно распределенной продольной нагрузки и терпящего устойчивость вследствие изгиба*), третье же уравнение относится к закручиванию стержня после потери устойчивости и по своему виду совпадает с первыми двумя уравнениями. Подставляя в первые два уравнения

*) См. [84], разд. I, гл. IV.

(2.9) выражение

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{g}{B}} z^3,$$

и в третье уравнение (2.9) — выражение

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{gr^2}{B}} \left(z - \frac{GJ_d}{gr^2} \right)^3,$$

где B — соответствующая характеристика жесткости: EJ_x , EJ_y или EJ_{ω} ; приведем каждое из уравнений (2.9) к виду:

$$v'''' + \frac{1}{u} v'' + \left(1 - \frac{1}{9u^3} \right) v' = 0, \quad (2.10)$$

где под v нужно понимать соответственно ξ , η и θ .

Это есть уравнение Бесселя относительно v . Общий интеграл уравнения (2.10) относительно производной от искомой функции будет

$$\frac{dv}{du} = C_1 J_{\frac{2}{3}}(z) + C_2 J_{-\frac{2}{3}}(z), \quad (2.11)$$

где $J_{\frac{2}{3}}(z)$ и $J_{-\frac{2}{3}}(z)$ — функции Бесселя, зависящие не только от z , но также и от параметра внешней нагрузки g , входящего в аргументы этих функций; C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

В рассматриваемом здесь случае краевой задачи функции Бесселя при соответствующих однородных граничных условиях образуют систему фундаментальных функций, определяющих (с точностью до постоянного множителя) возможные для данного упругого стержня формы потери устойчивости. Фундаментальные числа этих функций определяют величины критических нагрузок. Из этих нагрузок за расчетную выберется та, которая имеет наименьшее значение.

§ 3. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных балок при действии поперечной нагрузки. Общий случай

Полагая в уравнениях (1.28) продольную силу N равной нулю, получим следующие общие дифференциальные уравнения устойчивости для стержня, находящегося под действием произвольно заданной поперечной нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'''' + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta'''' + (M_y \theta)'' &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta'''' + [(2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \theta]'' + \\ + [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \theta + M_x \xi'' + M_y \eta'' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где $q_x^0(z)$ и $q_y^0(z)$ — компоненты интенсивности заданной погонной поперечной нагрузки, приложенной по линии $x = e_x$ и $y = e_y$ и проходящей через центр изгиба; $M_x(z)$ и $M_y(z)$ — изгибающие моменты

от заданной нагрузки, определяемые из статического расчета с учетом условий закрепления бруса на концах.

Внешняя поперечная нагрузка, входящая в уравнения (3.1), может быть задана по произвольному закону. Эта нагрузка в зависимости от абсциссы z может быть переменной не только по величине, но и по своему направлению, поскольку компоненты $q_x^0(z)$ и $q_y^0(z)$, входящие в уравнения (3.1), могут быть заданы независимо друг от друга.

Если направление поперечной нагрузки по длине бруса остается постоянным, то компоненты нагрузки $q_x^0(z)$ и $q_y^0(z)$, а следовательно, и компоненты моментов $M_x(z)$ и $M_y(z)$ будут находиться между собой в заданном постоянном отношении.

Уравнения (3.1) относятся к стержню, имеющему в поперечном сечении произвольное очертание. В случае профиля с двумя осями симметрии величины a_x , a_y , β_x и β_y равны нулю. Уравнения (3.1) при этом принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'''' + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta'''' + (M_y \theta)'' &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta'''' - GJ_d \theta'' + (q_x^0 e_x + q_y^0 e_y) \theta + M_x \xi'' + M_y \eta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Если поперечная нагрузка действует в плоскости, параллельной Oyz , то $q_x^0 = 0$, $M_y = 0$; второе уравнение системы (3.2) выделяется, а остальные два образуют систему, определяющую (вместе с граничными условиями) форму потери устойчивости при изгибе в плоскости Oyz . Эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'''' + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta'''' - GJ_d \theta'' + q_y^0 e_y \theta + M_x \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

При $e_y = 0$, т. е. в случае поперечной нагрузки $q_y^0(z)$, приложенной в центре тяжести сечения, уравнения (3.3) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'''' + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta'''' - GJ_d \theta'' + M_x \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Дифференциальные уравнения (3.4) относятся к стержню, имеющему в поперечном сечении две оси симметрии и нагруженному поперечной нагрузкой $q_y^0(z)$, распределенной по произвольному закону на линии центров тяжести сечений и действующей в одной из плоскостей симметрии Oyz . Изгибающий момент M_x в общем случае в уравнениях (3.4) рассматривается как заданная функция. Эта функция определяется нагрузкой $q_y^0(z)$ и условиями закрепления концов стержня.

§ 4. Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки. Обобщение задачи Тимошенко

Дифференциальные уравнения (3.4), полученные нами как частный случай более общих уравнений (3.1), в свою очередь, являются обобщением известных уравнений по устойчивости двутавровой балки, полученных С. П. Тимошенко [181]. Для двутавровой балки секториальный момент инерции J_ω определяется по формуле

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = \frac{b^3 h^3}{24}, \quad (4.1)$$

где b и h — соответственно ширина и толщина полок балки; h — высота стенки двутавра.

Выделив в правой части равенства (4.1) множитель $J_y = \frac{2b^3}{12}$, мы можем величину J_ω представить в виде

$$J_\omega = \frac{h^2}{2} J_y. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (3.4), получим уравнения устойчивости для двутавровой балки:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' &= 0, \\ \frac{h^2}{2} EJ_y \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + M_x \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Уравнения, выведенные Тимошенко для консольной балки, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'' + M_x \theta &= 0, \\ \frac{h^2}{2} EJ_y \theta'' - GJ_d \theta' + M_x \xi' + \int_0^z M_x'' \xi dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Сравнивая уравнение (4.3) с уравнениями Тимошенко (4.4), мы видим, что они различаются между собой порядком производных от искоемых функций. Объясняется это тем, что Тимошенко при выводе уравнений (4.4) исходил из условий равновесия конечного участка балки и заранее удовлетворял статическим условиям на свободном конце консольной балки. Первое из уравнений (4.4) выражает собой равенство нулю моментов относительно оси Oy для участка балки со свободным концом. Второе уравнение получено из условия приравнивания нулю суммы крутящих моментов, относящихся к тому же участку балки в ее состоянии до потери устойчивости.

Дифференциальные уравнения (4.3) выражают собой равновесие бесконечно малого элемента двутавровой балки $dz \rightarrow 1$. Первое уравнение представляет собой равенство нулю вариаций поперечных нагрузок, действующих в направлении оси Ox и возникающих вследствие

изменения деформированного состояния балки. Второе уравнение относится к крутящим моментам, приходящимся также на бесконечно малый элемент dz . Интегрируя первое уравнение (4.3) два раза, а второе — один раз и применяя для второго уравнения формулу интегрирования по частям, мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'' + M_x \theta &= Az + B, \\ \frac{h^2}{2} EJ_y \theta'' - GJ_d \theta' + M_x \xi' - M_x' \xi + \int_0^z M_x'' \xi dz &= C, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где A , B и C — произвольные постоянные. Эти постоянные, как легко усмотреть из статического смысла преобразования уравнений (4.3) в уравнения (4.5), равны соответственно вариациям поперечной силы Q_x , действующей в начальном сечении $z=0$ по направлению оси Ox , изгибающего момента M_y относительно оси Oy и крутящего момента H , действующих в том же сечении. Если в начальном сечении $z=0$ вариации статических факторов Q_x , M_y и H равны нулю, как это имеет место, например, в случае консольной балки, то постоянные интегрирования A , B и C равны нулю, и уравнения (4.5) переходят в уравнения (4.4) для балки, у которой статические факторы на свободном конце при изменении деформированного состояния, т. е. с увеличением перемещений ξ и θ , не меняют своего значения.

Если балка на концах имеет жесткое или упругое закрепление от линейных и угловых перемещений, то постоянные интегрирования A , B и C уже не будут равны нулю. В этом случае вместо формул (4.4) следует воспользоваться более общими уравнениями (4.3), свободными от предположений в отношении начальных условий, поскольку этими общими уравнениями выражено равновесие бесконечно малого элемента балки.

Дифференциальные уравнения (3.4), полученные для стержня с двумя осями симметрии из более общих уравнений (3.1), по своему виду ничем не отличаются от уравнений (4.3) для двутавровой балки. Отсюда следует, что все исследования Тимошенко, относящиеся к устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, могут быть целиком использованы при расчете на устойчивость тонкостенных балок с двумя осями симметрии. Нужно только в формулах, выведенных Тимошенко, вместо величины $\frac{h^2}{2} EJ_y$ подставить соответствующее значение секториальной жесткости EJ_ω .

Дифференциальные уравнения (4.3) в отношении внешней поперечной нагрузки, вызывающей в поперечном сечении изгибающий момент $M_x(z)$, носят общий характер.

Эти уравнения применимы для внешней поперечной нагрузки, распределенной вдоль оси Oz балки по любому закону. В частности, если внешняя нагрузка состоит из двух равных моментов, приложенных по концам балки и действующих в противоположных направлениях, то

момент в любом сечении балки остается постоянным, и уравнения (4.3) переходят в уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - M_x \eta'' &= 0, \\ EJ_m \eta^{IV} - GJ_d \eta'' - M_x \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Уравнения (4.6) выражают равновесие балки после потери устойчивости при чистом изгибе. Эти уравнения нами были подробно рассмотрены ранее в § 12 гл. V.

Если балка нагружена в пролете сосредоточенной силой P , то момент $M_x(z)$ на участке между опорой и силой будет меняться по линейному закону. В случае балки с обоими открытыми краями, если сила P

приложена посередине, а начало координат находится на левой опоре, для участка, расположенного слева от силы P (рис. 178, а), будем иметь

$$M_x(z) = \frac{Pz}{2}.$$

Внося это выражение в уравнения (4.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + \frac{1}{2} P(z) \eta'' &= 0, \\ EJ_m \eta^{IV} - GJ_d \eta'' + \frac{1}{2} Pz \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Уравнения (4.7) проинтегрированы Тимошенко в бесконечных рядах.

Критическая сила $P_{кр}$, определяемая однородными дифференциальными уравнениями (4.7) и однородными граничными условиями, в общем случае выражается формулой

$$P_{кр} = \frac{KV \sqrt{EJ_y GJ_d}}{\beta^2}. \quad (4.8)$$

Коэффициент устойчивости K зависит от величины

$$m^2 = \frac{GJ_d^2}{EJ_y}. \quad (4.9)$$

В табл. 39 дан ряд значений коэффициента K при различных значениях упругой характеристики m^2 . Эти данные, вычисленные Тимошенко для двутавровой балки, на основании указанного выше обобщения

Таблица 39

m^2	0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	96	160	240	320	400
K	85,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,8	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2

могут быть использованы при расчете на устойчивость балки любого профиля с двумя осями симметрии.

В случае равномерно распределенной нагрузки, момент M_x в каком-нибудь сечении балки при шарнирном устройстве опор определяется формулой

$$M_x = \frac{qz(l-z)}{2}, \quad (4.10)$$

где q — интенсивность нагрузки. Начало координат выбрано на левой опоре (рис. 178, б). Подставляя формулу (4.10) в уравнения (4.3), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + \frac{1}{2} q [z(l-z)] \eta'' &= 0, \\ EJ_m \eta^{IV} - GJ_d \eta'' + \frac{1}{2} qz(l-z) \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Критическое значение нагрузки q в этом случае может быть определено по формуле

$$ql = \frac{KV \sqrt{EJ_y GJ_d}}{\beta^2}.$$

Здесь коэффициент устойчивости K зависит от той же вспомогательной величины m^2 , что и в рассмотренном выше случае сосредоточенной нагрузки, а именно: от величины, определяемой по формуле (4.9). Значения коэффициента K для случая равномерно распределенной нагрузки приведены в табл. 40.

Таблица 40

m^2	0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	96	160	240	320	400
K	143	53,0	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6

Если внешние силы, действующие на балку, состоят из равномерно распределенной по всему пролету нагрузки интенсивности q и сосредоточенной нагрузки P , приложенной в середине пролета, то для момента $M_x(z)$ получаем выражение

$$M_x = \frac{1}{2} [Pz + qz(l-z)].$$

Уравнения (4.3) в этом случае принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + \frac{1}{2} [Pz + qz(l-z)] \eta'' &= 0, \\ EJ_m \eta^{IV} - GJ_d \eta'' + \frac{1}{2} [Pz + qz(l-z)] \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} (4.11)$$

В этих уравнениях внешняя нагрузка представлена двумя параметрами: q и P . Снятая параметр q величиной постоянной, имеющей

вношенное определенное числовое значение, а P — переменной, получим уравнения устойчивости для балки, испытывающей начальные напряжения от заданной нагрузки q (например, от собственного веса) и нагруженной сосредоточенной силой P . Критическое значение этой силы определяется дифференциальными уравнениями (4.11) и граничными условиями.

В зависимости от величины нагрузки q критическая сила P может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, может быть равной нулю, если заданная нагрузка случайно окажется критической.

§ 5. Устойчивость плоской формы изгиба стержней с нулевой секториальной жесткостью. Обобщение задачи Прандтля

Полагая в уравнениях (3.1) секториальную жесткость EJ_m равной нулю, получим уравнения устойчивости при поперечном изгибе для стержней, сопротивление которым кручению характеризуется одной только крутильной жесткостью GJ_d . Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - (M_x \eta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + (M_y \xi)'' &= 0, \\ M_x \xi'' + M_y \eta'' + [(2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \eta]' + \\ &+ [q_x^0 (e_x - a_x) - q_y^0 (e_y - a_y)] \eta = 0. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Если поперечное сечение бруса имеет две оси симметрии, то $a_x = a_y = 0$, $\beta_x = \beta_y = 0$; в этом случае уравнения (5.1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + (M_x \eta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + (M_y \xi)'' &= 0, \\ M_x \xi'' + M_y \eta'' - GJ_d \eta'' - (q_x^0 e_x + q_y^0 e_y) \eta &= 0. \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Если поперечная нагрузка действует в плоскости симметрии Oyz , то $q_x^0 = M_y = 0$.

Второе уравнение системы (5.2) в этом случае выделяется, а первое и третье образуют систему, которая при $e_y = 0$, т. е. в случае, если нагрузка q_y приложена по линии центров тяжести сечений, будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + (M_x \eta)'' &= 0, \\ M_x \xi'' - GJ_d \eta'' &= 0. \end{aligned} \right\} (5.3)$$

Приведенные здесь уравнения охватывают весьма широкий класс практически важных задач. Эти уравнения применимы во всех случаях, когда секториальная жесткость EJ_m равна нулю, т. е. когда в тонкостенном стержне с недеформируемым контуром сечения при кручении возникают только касательные напряжения, неравномерно распре-

ленные по толщине стенки, нормальные же и касательные напряжения, определяемые по закону секториальных площадей, равны нулю.

В § 1 гл. II указывалось, что секториальные нормальные напряжения приближенно равны нулю в стержнях, состоящих в поперечном сечении из одной или нескольких весьма тонких пластинок, пересекающихся по общей прямой (рис. 179). В этом случае секториальную жесткость EJ_m следует считать равной нулю. Крутильная же жесткость, относящаяся к случаю чистого кручения, определяется как произведение модуля упругости при сдвиге G на крутильный момент инерции J_d . Для профилей, изображенных на рис. 179, величина J_d с достаточной для практики точностью может быть вычислена по формуле

$$J_d = \frac{1}{3} \sum d_i \delta_i^3, \quad (5.4)$$

где d_i и δ_i — соответственно ширина и толщина пластинки с номером i .

Уравнения (5.3) относятся к профилю, имеющему в поперечном сечении две оси симметрии. Из этих уравнений как частный случай получаются уравнения Прандтля для стержня прямоугольного сечения, у которого один из главных моментов инерции мал по сравнению с другим.

Систему дифференциальных уравнений (5.3), после интегрирования первого из них два раза, мы можем представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'' + M_x \eta &= Az + B, \\ GJ_d \eta'' - M_x \xi'' &= 0, \end{aligned} \right\} (5.5)$$

где A и B — произвольные постоянные, равные соответственно вариациям поперечной силы Q_x и момента M_y в начальном сечении балки $z = 0$. Если эти вариации равны нулю, как это имеет место, например, на свободном конце консольной балки, то постоянные A и B равны нулю и уравнения (5.5) принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi'' + M_x \eta &= 0, \\ GJ_d \eta'' - M_x \xi'' &= 0. \end{aligned} \right\} (5.6)$$

Выражая ξ'' в первом уравнении через η и подставляя это выражение во второе уравнение, получим основное дифференциальное уравнение устойчивости для профилей рассматриваемого здесь типа. Это уравнение может быть записано в форме:

$$EJ_y GJ_d \eta'' + M_x^2 \eta = 0. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6) и (5.7) совпадают с уравнениями Прандтля для прямоугольной полосы. Поскольку в нашем случае поперечное сечение бруса может быть задано произвольно, лишь бы оно имело две оси



Рис. 179.

симметрии и характеризовалось секторной жесткостью EJ_{ω} , равной нулю, то исследования Прандтля по устойчивости прямоугольной полосы могут быть целиком использованы при расчете на устойчивость более сложных симметричных профилей.

Рассмотрим несколько частных случаев нагрузки.

а) Чистый изгиб. Считая в уравнении (5.7) момент M величиной постоянной, получим уравнение с постоянными коэффициентами, которое относится к чистому изгибу и интегрируется в тригонометрических функциях. Если концы бруса оперты, то

$$M_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_d}, \quad (5.8)$$

а если зажаты, то

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_d}.$$

Формула (5.8) нами была выведена в § 12 гл. V как частный случай более общей задачи о чистом изгибе с продольной силой.

б) Изгиб балки поперечными сосредоточенными силами*). Если на балку в плоскости симметрии Oxz действует система сосредоточенных сил, то момент $M_x = M_x(z)$ меняется по линейному закону. Мы можем этот момент для какого-нибудь незагруженного участка балки представить в виде

$$M(z) = M_0 + M_1 z, \quad (5.9)$$

где M_0 и M_1 — некоторые величины, находящиеся в линейной зависимости от сил P_1, P_2, \dots , действующих на балку. Подставляя (5.9) в (5.7), получим

$$EJ_y GJ_d y'' + (M_0 + M_1 z)^2 y = 0. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) интегрируется в бесселевых функциях порядка $\pm \frac{1}{4}$. Обобщенная критическая сила $P_{кр}$ может быть представлена формулой

$$P_{кр} = \frac{KV \sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}, \quad (5.11)$$

где коэффициент устойчивости K зависит от расположения сил, отношений между этими силами и условий закрепления концов бруса. Этот коэффициент выражается через наименьший корень соответствующей бесселевой функции.

В табл. 41 даны коэффициенты устойчивости K для разных случаев граничных условий при нагружении балки одной сосредоточенной силой.

*) Вопросы устойчивости плоской формы изгиба балки с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника рассмотрены также в работе Коробова [106].

Таблица 41

Схема нагрузки и граничные условия	I критическая сила P	II критическая сила P	Взвешенные критические силы P
	$4,01 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$10,24 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$\frac{\pi}{4} (8n - 3) \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$
	$5,55 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$11,82 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$\frac{\pi}{4} (8n - 1) \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$
	$16,94 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$68,6 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$2\pi (8n - 5) \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$

Эта таблица составлена нами на основании данных, полученных акад. А. Н. Динником и относящихся к балке-полосе, состоящей из одной узкой пластинки*). В первой графе табл. 41 показаны схемы нагрузки и граничные условия. Во второй графе даны формулы для определения расчетной критической силы, соответствующей наименьшему корню бесселевой функции. Третья графа содержит формулы критической силы, соответствующей второму корню бесселевой функции.

В последней (четвертой) графе приведены формулы для определения высших критических сил. Эти формулы получены на основании асимптотических формул для корней соответствующего бесселевого трансцендентного уравнения.

Если сила P приложена на расстоянии a от одной из опор, то критическая сила выражается той же формулой (5.11), причем коэффициент K определяется из трансцендентного уравнения, составленного по граничным условиям из функций Бесселя. В табл. 42 даны значения этого коэффициента K для балки с обоими открытыми концами.

Таблица 42

$\frac{a}{l}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
K	16,94	17,82	21,01	29,11	56,01	112

в) Действие равномерно распределенной нагрузки. Изгибающий момент $M_x(z)$ в рассматриваемом случае меняется по закону параболы 2-й степени. Обозначая интенсивность равномерной нагрузки через q и выбирая начало координат на левом конце балки, мы можем написать (рис. 178, б):

$$M = \frac{qz(l-z)}{2}.$$

Внося это выражение в уравнение (5.7), получим

$$EJ_y GJ_d \nu^4 + \frac{1}{4} q^2 z^2 (l-z)^2 \nu = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) интегрируется в бесселевых функциях порядка $\pm \frac{1}{6}$. Критическое значение нагрузки q , входящей в состав аргумента этих функций, определяется из граничных условий, приводящих к трансцендентному уравнению Бесселя. Формулы критических нагрузок для разных случаев граничных условий даны в табл. 43.

*) См. книгу А. Н. Динника [85], гл. IV.

Таблица 43

Схемы нагрузки и граничные условия	I критическая нагрузка q	II критическая нагрузка q	Высшие критические нагрузки q
	$12,85 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$38,56 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$2\pi(3n-1) \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$
	$15,95 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$34,6 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	$\pi(6n-1) \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$
	$28,3 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_d}}{l^2}$	—	—

§ 6. Применение метода возможных перемещений к задаче о пространственной устойчивости стержней

Уравнения (1.28) в общем случае имеют переменные коэффициенты. Разыскание по этим уравнениям и граничным условиям фундаментальных функций и чисел представляет собой сложную математическую задачу, требующую большой вычислительной работы.

Определение критических сил в этой задаче значительно упрощается, если воспользоваться принципом возможных перемещений по методу Бубнова — Галеркина. Сущность этого принципа в применении к рассматриваемой здесь проблеме состоит в том, что прогибы $\xi(z)$, $\eta(z)$ и угол закручивания $\theta(z)$, характеризующие изгибно-крутильную форму потери устойчивости бруса, представляются в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} \xi(z) &= \sum A_n \varphi_n(z), \\ \eta(z) &= \sum B_n \psi_n(z), \\ \theta(z) &= \sum C_n \chi_n(z), \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где функции $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ подбираются с таким расчетом, чтобы деформированное состояние бруса, выраженное каждым членом рядов (6.1), отвечало заданным граничным условиям.

Подставляя выражения (6.1) в уравнения (1.2), мы тем самым аппроксимируем при помощи рядов (6.1) вариации интенсивностей поперечных нагрузок и крутящих моментов, выраженные левыми частями этих уравнений.

Мы получаем таким образом механическую систему, на которую действуют внешние силы и моменты, определенные с точностью до коэффициентов рядов (6.1). Поскольку эта система находится в равновесии, то работа всех внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях должна быть равна нулю. Выбирая за возможные перемещения

$$\xi_k = \varphi_k(z), \quad \eta_k = \psi_k(z) \quad \text{и} \quad \theta_k = \chi_k(z) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

и приравняв нулю работу на этих перемещениях, получим для коэффициентов A , B , C систему линейных однородных уравнений. Число этих уравнений будет равно числу искоемых коэффициентов. Приравняв нулю определитель системы уравнений с неизвестными A , B и C , получим уравнение для определения критической силы. Порядок этого уравнения в общем случае будет равен $3n$ (*). Если в выражениях (6.1) сохранить по одному члену ряда, т. е. задать ξ , η и θ в виде:

$$\xi = A\varphi(z), \quad \eta = B\psi(z), \quad \theta = C\chi(z), \quad (6.2)$$

то для определения A , B и C получим систему трех однородных уравнений. Так, например, в случае центрального сжатия подстановка

* Мы поступаем здесь совершенно так же, как и в § 13 гл. V.

равенств (6.2) в левые части уравнений (2.3) дает для интенсивностей вариации поперечных нагрузок и крутящих моментов следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta q_x &= A[EJ_y \varphi^{IV} - (N\varphi)'] - Ca_y (N\chi)', \\ \delta q_y &= B[EJ_x \psi^{IV} - (N\psi)'] - Ca_x (N\chi)', \\ \delta m &= C[EJ_\omega \chi^{IV} - GJ_d \chi'' - r^2 (N\chi)'] - Aa_y (N\varphi)' + Ba_x (N\psi)'. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа для этих сил на возможных перемещениях $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$, после применения интегрирования по частям к некоторым слагаемым и использования естественных граничных условий, имеющих место на концах стержня, принимают следующий вид*):

$$\left. \begin{aligned} A[EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz + \int_0^l N(\varphi')^2 dz] + Ca_y \int_0^l N\varphi'\chi' dz &= 0, \\ B[EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz + \int_0^l N(\psi')^2 dz] - Ca_x \int_0^l N\psi'\chi' dz &= 0, \\ C[EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + GJ_d \int_0^l (\chi')^2 dz + r^2 \int_0^l N(\chi')^2 dz] + \\ + Aa_y \int_0^l N\varphi'\chi' dz - Ba_x \int_0^l N\psi'\chi' dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных A , B и C , получим для параметра внешней нагрузки, входящего в выражение функции $N = N(z)$, кубическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz + \int_0^l N(\varphi')^2 dz & 0 & a_y \int_0^l N\varphi'\chi' dz \\ 0 & EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz + \int_0^l N(\psi')^2 dz & -a_x \int_0^l N\psi'\chi' dz \\ a_y \int_0^l N\varphi'\chi' dz & -a_x \int_0^l N\psi'\chi' dz & EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \\ + GJ_d \int_0^l (\chi')^2 dz + r^2 \int_0^l N(\chi')^2 dz \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

* Так, например,

$$\int_0^l \varphi^{IV} \varphi dz = [\varphi'''\varphi]_{z=0}^{z=l} - [\varphi''\varphi']_{z=0}^{z=l} + \int_0^l (\varphi'')^2 dz = \int_0^l (\varphi'')^2 dz.$$

не проинтегрированные члены исчезают, так как они выражают работу внешних сил, приложенных на концах стержня, а эта работа равна нулю;

Корни уравнения (6.4) дают три значения критической нагрузки, соответствующие трем изгибно-крутильным формам потери устойчивости в плоскости поперечного сечения. Все эти корни действительные, поскольку определитель (6.4) симметричный.

Если профиль имеет две оси симметрии, то $a_x = a_y = 0$; система уравнений (6.4) распадается на три независимых уравнения. В этом случае уравнения для определения критических сил имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz + \int_0^l N(\varphi')^2 dz &= 0, \\ EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz + \int_0^l N(\psi')^2 dz &= 0, \\ EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + GJ_d \int_0^l (\chi')^2 dz + r^2 \int_0^l N(\chi')^2 dz &= 0. \end{aligned} \right\} (6.5)$$

Первые два уравнения (6.5) относятся к продольному изгибу в главных плоскостях по заданным формам потери устойчивости. Третье уравнение относится к продольному закручиванию. Из трех критических сил за расчетную выбирается та, которая имеет наименьшее по абсолютной величине значение.

Таким же способом может быть решена задача об устойчивости плоской формы изгиба стержней при действии поперечной нагрузки. Задавая искомые перемещения $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ в форме (6.2), получим по уравнениям (3.1) для интенсивностей вариаций поперечных нагрузок и крутящих моментов следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta q_x &= AEJ_y \varphi^{IV} + C(M_x \chi)''', \\ \delta q_y &= BEJ_x \psi^{IV} - C(M_y \chi)''', \\ \delta m &= C \{ EJ_\omega \chi^{IV} + [(2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) \chi']' + \\ &+ [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \chi \} + AM_x \varphi'' - BM_y \psi''. \end{aligned}$$

Составляя уравнения работ этих нагрузок и моментов последовательно на перемещениях $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$, применяя, подобно предыдущему, интегрирование по частям и удовлетворяя естественным граничным условиям в проинтегрированных слагаемых, получим:

$$\left. \begin{aligned} AEJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz + C \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz &= 0, \\ BEJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz + C \int_0^l M_y \psi'' \chi dz &= 0, \end{aligned} \right\} (6.6)$$

поскольку на концах стержня либо статические, либо соответствующие им геометрические факторы равны нулю.

$$\begin{aligned} C \{ EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz - \int_0^l (2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) (\chi')^2 dz + \\ + \int_0^l [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \chi^2 dz \} + \\ + A \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz + B \int_0^l M_y \psi'' \chi dz = 0. \end{aligned} (6.6)$$

Уравнение для определения критического значения параметра внешней поперечной нагрузки, при котором происходит потеря устойчивости плоской формы изгиба, получается путем приравнивания нулю определителя, составленного из коэффициентов уравнений (6.6). Это уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz & 0 & \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz \\ 0 & EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz & \int_0^l M_y \psi'' \chi dz \\ \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz & \int_0^l M_y \psi'' \chi dz & EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz - \int_0^l (2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GJ_d) (\chi')^2 dz + \\ + \int_0^l [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \chi^2 dz. \end{vmatrix} = 0. (6.7)$$

Уравнение (6.7) также даст три значения для параметра критической нагрузки.

Если поперечное сечение имеет одну ось симметрии и поперечная нагрузка действует в плоскости симметрии, то устойчивость плоской формы изгиба представляется уравнениями:

$$\begin{aligned} AEJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz - C \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz &= 0, \\ A \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz + C [EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \int_0^l (2\beta_y M_x + GJ_d) (\chi')^2 dz + \\ + \int_0^l q_y^0 (e_y - a_y) \chi^2 dz] &= 0. \end{aligned}$$

Определитель, соответствующий этим уравнениям и дающий критические значения для поперечной нагрузки, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz & \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz \\ \int_0^l M_x \varphi'' \chi dz & EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \int_0^l (2\beta_y M_x + GJ_d) (\chi')^2 dz + \int_0^l q_y^0 (e_y - a_y) \chi^2 dz \end{vmatrix} = 0.$$

Изложенный здесь метод, так же как и метод Ритца — Тимошенко, дает точное решение задачи в случае, если функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$, характеризующие изменение деформаций стержня по переменной z , удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям устойчивости. Так, например, задавая для прогибов и углов закручивания синусоидальный закон, т. е. полагая

$$\varphi = A \sin \lambda z, \quad \psi = B \sin \lambda z, \quad \chi = C \sin \lambda z, \quad (6.8)$$

где $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), и составляя на этих перемещениях уравнения работ, мы получим для стержня, имеющего на концах шарнирные крепления и нагруженного продольной силой $N = \text{const}$, точное решение. Это следует из того, что, как мы видели ранее, функции (6.8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3.1) гл. V и граничным условиям. Определитель системы (6.3) в этом случае совпадает с определителем (3.2) гл. V.

Если функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$ не являются решениями дифференциальных уравнений устойчивости, то метод возможных перемещений дает для критических сил приближенные значения. Эти значения будут отклоняться от точных тем больше, чем менее удачно заданы формы потери устойчивости.

Можно показать, что критические силы, найденные методом возможных перемещений, будут иметь преувеличенные значения. Действительно, задаваясь формами потери устойчивости приближенно, мы тем самым с механической точки зрения заменяем заданную упругую систему с бесконечным числом степеней свободы системой, имеющей конечное число степеней свободы. Такая замена равносильна введению в упругую систему связей, повышающих устойчивость системы.

Метод возможных перемещений дает наиболее эффективные решения, если в качестве функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$, аппроксимирующих согласно выражениям (6.1) деформированное состояние стержня при потере устойчивости, выбрать фундаментальные функции поперечных колебаний балки. Эти функции, как мы видели в § 13 гл. V, удовле-

творяют однородному дифференциальному уравнению вида

$$X^{IV} - \mu^4 X = 0 \quad (6.9)$$

и однородным граничным условиям.

Задавая изгибно-крутильные формы потери устойчивости по балочным фундаментальным функциям, мы должны эти функции подбирать в соответствии с граничными условиями. При помощи функций, выписанных в табл. 33 § 13 гл. V, можно составить уравнения работ (6.3) или (6.6) для разных случаев граничных условий. Эти условия могут быть заданы и в смешанной форме: для прогибов — одни, а для угла кручения — другие.

Характеристическое уравнение, определяющее критические силы, получается путем приравнивания нулю определителя соответствующей системы.

В качестве примера рассмотрим балку, имеющую в сечении одну ось симметрии. Пусть поперечная нагрузка действует в плоскости симметрии. Уравнения устойчивости (3.1) в этом случае имеют вид:

$$EJ_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' = 0,$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - 2\beta_y (M_x \theta)' + q_y^0 e_y \theta + M_x \xi'' = 0 \quad (0 < z < l).$$

Граничные условия при шарнирном закреплении концов будут:

$$\xi(0) = \xi(l) = \xi''(0) = \xi''(l) = 0,$$

$$\theta(0) = \theta(l) = \theta'(0) = \theta'(l) = 0.$$

Если ввести отвлеченные величины:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l M_x}{EJ_y}, & a &= \frac{EJ_\omega}{l^2 GJ_d}, & b_1 &= \frac{2\beta_y EJ_y}{l GJ_d}, \\ & & & & b_2 &= \frac{e_y EJ_y}{l GJ_d}, & c &= \frac{EJ_y}{GJ_d}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

и произвести замену независимой переменной, положив $z = l\xi$, то написанные уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi^{IV} + l(x\theta)'' &= 0, \\ a\theta^{IV} - \theta'' - b_1(x\theta)' + b_2 x^2 \theta + c x \xi'' &= 0 \quad (0 < \xi < 1), \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

где аргументом всех функций считается ξ и штрихами обозначено дифференцирование по этой переменной. Что касается граничных условий, то они примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi(0) = \xi(1) = \xi''(0) = \xi''(1) &= 0, \\ \theta(0) = \theta(1) = \theta'(0) = \theta'(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Можно было бы применять метод Бубнова — Галеркина к системе уравнений (6.11), но при этом пришлось бы задаваться выражениями обеих величин: ξ и θ , что отрицательно сказалось бы на точности

результата. Для получения большей точности можно применить метод Бубнова — Галеркина к одному дифференциальному уравнению, задаваясь только одной из неизвестных функций, например функцией θ .

Вместо того чтобы произвести исключение ξ из системы (6.11) формально (это привело бы к довольно громоздкому уравнению и потребовало выяснения механического смысла последнего), мы воспользуемся частично граничными условиями. Именно, из первого уравнения системы (6.11) имеем

$$\xi'' + lxb = C_1 + C_2 \zeta, \quad (6.13)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Но из граничных условий (6.12) видно, что левая часть уравнения (6.13) обращается в нуль при $\zeta = 0$ и при $\zeta = 1$, а потому $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно,

$$\xi'' = -lxb.$$

Подстановка этого выражения во второе из уравнений (6.11) приводит к следующему дифференциальному уравнению для θ :

$$a\theta^{IV} - \theta'' - b_1(x\theta)' + (b_2x'' - cx^2)\theta = 0. \quad (6.14)$$

Применим теперь метод Бубнова — Галеркина к уравнению (6.14), положив

$$\theta = A \sin \pi \zeta. \quad (6.15)$$

Для этого подставляем последнее выражение в уравнение (6.14), умножаем результат на $\sin \pi \zeta$ и интегрируем по ζ от 0 до 1:

$$\begin{aligned} (a\pi^4 - 1) \frac{\pi^2}{2} - \pi b_1 \int_0^1 (x \cos \pi \zeta)' \sin \pi \zeta d\zeta + \\ + b_2 \int_0^1 x'' \sin^2 \pi \zeta d\zeta - c \int_0^1 x^2 \sin^2 \pi \zeta d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Чтобы избавиться от производных функций x , преобразуем интегралы с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x \cos \pi \zeta)' \sin \pi \zeta d\zeta &= -\pi \int_0^1 x \cos^2 \pi \zeta d\zeta, \\ \int_0^1 x'' \sin^2 \pi \zeta d\zeta &= -2\pi \int_0^1 x' \sin \pi \zeta \cos \pi \zeta d\zeta = \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 x (\cos^2 \pi \zeta - \sin^2 \pi \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (6.16) после упрощения дает

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[(b_1 + 4b_2)x + \frac{c}{\pi^2}x^2 \right] \cos 2\pi \zeta d\zeta + \\ + \int_0^1 \left(b_1x - \frac{c}{\pi^2}x^2 \right) d\zeta + (a\pi^2 - 1)x = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Это уравнение дает приближенно интересующее нас критическое значение параметра нагрузки, входящего в выражение x .

Применим уравнение (6.17) к частным случаям.

а) Чистый изгиб. В этом случае $M_x = \text{const}$, а следовательно, и $x = \text{const}$ и уравнение (6.17) принимает вид

$$b_1x - \frac{c}{\pi^2}x^2 + a\pi^2 + 1 = 0,$$

откуда

$$M_{\text{кр}} = \frac{EJ_y}{l} x_{\text{кр}} = \frac{EJ_y}{l} \left[\frac{\pi^2 b_1}{2c} \pm \sqrt{\frac{\pi^4 b_1^2}{4c^2} + \frac{\pi^2(1 - \pi^2 a)}{c}} \right],$$

или, после подстановки выражений для a , b_1 и c и упрощений, получим

$$M_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \beta_y = \sqrt{\frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \left(\frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \beta_y^2 + \frac{\pi^2 EJ_m}{l^2} + GJ_d \right)}.$$

Так как в данном случае заданная форма потери устойчивости (6.15) оказалась точной, то полученные значения $M_{\text{кр}}$ являются точными значениями двух наименьших по абсолютной величине критических моментов.

б) Равномерно распределенная нагрузка интенсивности q . В этом случае

$$M_x = \frac{q}{2} z(l-z) = \frac{q l^2}{2} \zeta(1-\zeta), \quad x = \frac{\lambda}{2} \zeta(1-\zeta),$$

где $\lambda = \frac{q l^3}{EJ_y}$. Подставляя в (6.17) значения интегралов

$$\int_0^1 x \cos 2\pi \zeta d\zeta = -\frac{\lambda}{4\pi^2}, \quad \int_0^1 x^2 \cos 2\pi \zeta d\zeta = -\frac{3\lambda^2}{8\pi^2},$$

$$\int_0^1 x d\zeta = \frac{\lambda}{12}, \quad \int_0^1 x^2 d\zeta = \frac{\lambda^2}{120},$$

получим

$$-\frac{c}{\pi^2} \left(\frac{3}{8\pi^2} + \frac{1}{120} \right) \lambda^2 + \left[\left(-\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \right) b_1 - \frac{b_2}{\pi^2} \right] \lambda + (a\pi^2 + 1)x = 0,$$

или

$$c\lambda^2 + (82,08b_2 - 46,99b_1)\lambda - (7995a + 810,1) = 0. \quad (6.18)$$

Это уравнение даст приближенно два критических значения параметра $\lambda_{кр}$, которым соответствуют два приближенных критических значения интенсивности нагрузки $q_{кр}$ (положительная и отрицательная критическая интенсивность), определяемых по формуле

$$q_{кр} = \frac{EJ_y}{l^3} \lambda_{кр}.$$

Чтобы оценить точность получаемых таким путем результатов, рассмотрим конкретные задачи. Предположим сперва, что речь идет о потере устойчивости при поперечном изгибе балки-полосы (длиной l , высотой h и толщиной δ), подвергнутой действию равномерно распределенной нагрузки q , приложенной вдоль линии центров тяжести сечения. В этом случае

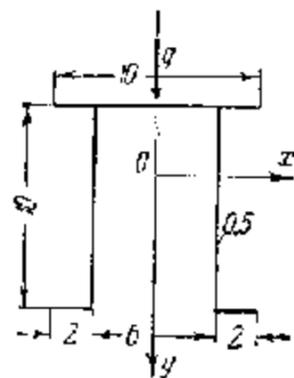


Рис. 180.

$$EJ_y = E \frac{h\delta^3}{12}, \quad GJ_d \approx G \frac{h\delta^3}{3}, \quad J_w = 0, \\ \beta_y = 0, \quad e_y = 0,$$

так что

$$a = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c = \frac{E}{4G},$$

и уравнение (6.18) для данного случая будет иметь следующий вид:

$$\frac{E}{4G} \lambda^2 - 810,1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{кр} = \pm 56,92 \sqrt{\frac{G}{E}}, \\ q_{кр} = - \frac{h\delta^3 E}{12l^3} \lambda_{кр} = \pm 4,74 \frac{h\delta^3}{l^3} \sqrt{GE}.$$

По Тимошенко*) эта величина получается равной $q_{кр} = \pm 4,72 \frac{h\delta^3}{l^3} \sqrt{GE}$. Ошибка, следовательно, меньше половины процента.

Рассмотрим также случай поперечного изгиба шарнирно опертой по концам балки сложного поперечного сечения, имеющей длину $l = 100$ см и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q , как показано на рис. 180; толщина стенок, образующих контур поперечного сечения балки, равна $\delta = 0,5$ см, остальные размеры (в сантиметрах) даны на рисунке.

*) С. П. Тимошенко. Об устойчивости упругих систем, Киев, 1910, стр. 106.

Подсчет по формуле (6.10) дает для данного случая (если считать $G = 0,4E$):

$$\frac{EJ_y}{GJ_d} = 290,0; \quad \frac{EJ_w}{GJ_d} = 1010; \quad \beta_y = 7,206; \quad e_y = -4,118; \\ a = 0,1010; \quad b_1 = 41,80; \quad b_2 = -11,94; \quad c = 290,0.$$

Уравнение (6.18) принимает вид

$$290\lambda^2 - 2944\lambda - 1618 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{кр}^{(1)} = -0,522; \quad \lambda_{кр}^{(2)} = +10,67,$$

и так как $J_y = 164,3$ см⁴; $l = 100$ см, то $q_{кр}^{(1)} = -8,58 \cdot 10^{-5} E \frac{\text{кг}}{\text{см}}$,

$$q_{кр}^{(2)} = +175 \cdot 10^{-5} E \frac{\text{кг}}{\text{см}}.$$

Более точный расчет (если исходить из выражения для θ с тремя параметрами: $\theta = A \sin \pi \zeta + B \sin 2\pi \zeta + C \sin 3\pi \zeta$) показывает, что полученные приближенные значения критической интенсивности нагрузки преувеличены по абсолютной величине соответственно на 3 и 6%.

няя продольная сжимающая сила, приложенная в центре тяжести поперечного сечения стержня-оболочки; M_x, M_y — внешние изгибающие моменты, приложенные по концам стержня и действующие соответственно относительно осей Ox, Oy ; R_k — сила натяжения k -го стержня

ГЛАВА VII

РАВНОВЕСИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

§ 1. Изгиб и кручение стержней, испытывающих начальные напряжения

Если стержень, обладающий в поперечном сечении жестким профилем, под действием некоторой критической нагрузки, состоящей в общем случае из продольных сил и моментов, находится в неустойчивом состоянии, то любая поперечная нагрузка, приложенная к стержню, согласно линейной теории, вызовет бесконечно большие деформации. Отсюда следует, что напряженное состояние, возникающее от какой-либо продольной нагрузки, меньшей критической (но близкой к ней), будет оказывать существенное влияние на деформацию стержня от поперечной нагрузки.

Таким образом, возникает задача о пространственном равновесии стержня, испытывающего, помимо напряжений от внешней поперечной нагрузки, еще заданное начальное напряженное состояние, характеризующееся одними только продольными нормальными напряжениями. Такое состояние будет иметь место в случае чистого растяжения (сжатия) или чистого изгиба от внешней продольной внецентренно или центрально приложенной растягивающей или сжимающей силы, а также и в случае предварительного натяжения продольной арматуры или воздействия температуры. Мы будем предполагать, что не только силы натяжения арматуры, но и внешняя продольная нагрузка передаются на стержень через жесткие торцовые диафрагмы (рис. 181, а).

По этой причине мы можем нормальные напряжения начального состояния, постоянные по длине стержня, определять по формулам закона плоских сечений, которые в общем случае будут иметь вид:

$$\sigma_p = -\frac{P}{F} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x, \quad (1.1)$$

$$\sigma_R = -\frac{\sum R_k}{F} - \frac{\sum R_k y_k}{J_x} y - \frac{\sum R_k x_k}{J_y} x, \quad (1.2)$$

где x, y — координаты точки поперечного сечения стержня-оболочки, отнесенного к главным центральным осям Ox, Oy ; F — площадь поперечного сечения стержня-оболочки; J_x, J_y — главные моменты инерции площади сечения соответственно относительно осей Ox, Oy ; P — внеш-

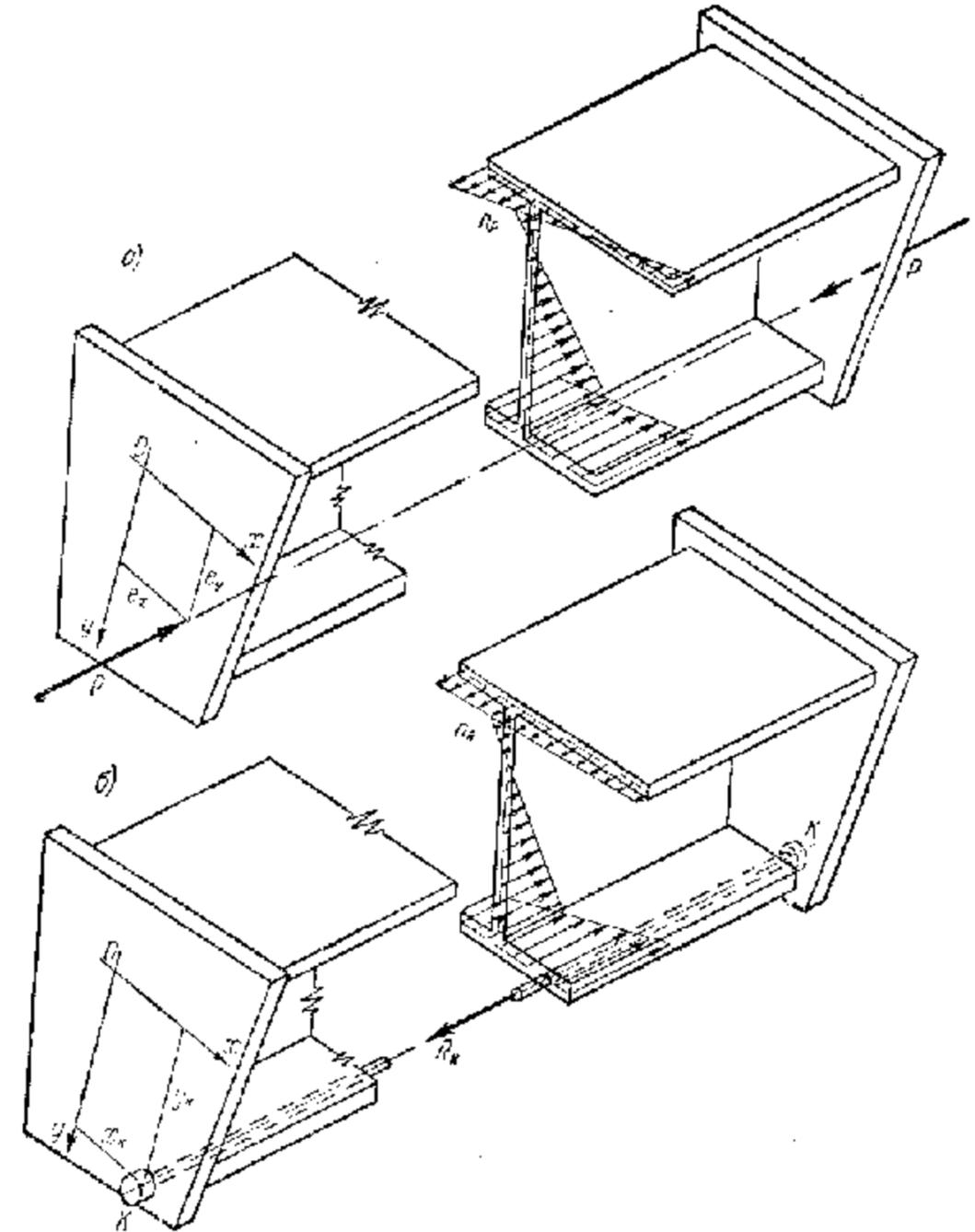


Рис. 181.

арматуры (рис. 181, б); x_k, y_k — координаты точки приложения силы R_k , являющиеся также и координатами центра тяжести площади поперечного сечения k -го стержня арматуры.

Формулой (1.1) определяются напряжения σ_p от внешней нагрузки. Эти напряжения для всего поперечного сечения стержня приводятся

к статически эквивалентным им продольной силе P и изгибающим моментам M_x, M_y :

$$\int_F n_p dF = -P, \quad \int_F n_p y dF = M_x, \quad \int_F n_p x dF = -M_y.$$

Формулой (1.2) определяются напряжения n_k от предварительного натяжения арматуры, состоящей из k продольных стержней. Эти напряжения совместно с напряжениями, возникающими поперечным сечениям арматурных стержней, в своей совокупности приводятся к системе сил, статически эквивалентных нулю для каждого поперечного сечения, т. е. к бимоментам. Следовательно, в случае предварительного натяжения продольной арматуры в каждом поперечном сечении стержня возникает бимоментное напряженное состояние. Поскольку площадь сечения арматуры по сравнению с площадью всего поперечного сечения достаточно мала, силы, возникающие в арматуре, можно отнести к категории сосредоточенных сил.

В этом и заключается существенное различие между начальными напряжениями, возникающими от внешней продольной нагрузки, и начальными напряжениями, возникающими от предварительного натяжения продольной арматуры; как будет видно из дальнейшего, это окажет влияние и на дифференциальные уравнения равновесия стержня с предварительным напряженным состоянием в зависимости от характера причин, вызывающих это напряженное состояние.

При выводе дифференциальных уравнений равновесия стержня с начальным напряженным состоянием, будем исходить из дифференциальных уравнений стержня, находящегося под действием внешней поперечной нагрузки [(7.3) гл. I]:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - q_x &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - q_y &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Полагаем при этом, что наличие в стержне начальных напряжений, определяемых трехчленной формулой закона плоских сечений, при деформации его внешней поперечной нагрузкой вызовет появление дополнительных приведенных погонных нагрузок \bar{q}_x, \bar{q}_y и \bar{m} , формулы для которых могут быть получены совершенно аналогично тому, как это сделано при выводе дифференциальных уравнений устойчивости в § 1 гл. V.

Эти формулы имеют вид [(1.4) гл. V]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= \xi'' \int_L n \delta ds - \theta'' \int_L n \delta (y - a_y) ds, \\ \bar{q}_y &= \eta'' \int_L n \delta ds + \theta'' \int_L n \delta (x - a_x) ds, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\bar{m} = -\xi'' \int_L n \delta (y - a_y) ds + \eta'' \int_L n \delta (x - a_x) ds + \theta'' \int_L n \delta [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] ds. \quad (1.4)$$

В зависимости от причин, вызвавших в стержне начальное напряженное состояние, в формулу (1.4) вместо n нужно вставить либо n_p , выраженное формулой (1.1), либо n_k , выраженное формулой (1.2).

Подставляя в первые части формул (1.4) вместо n их значения n_p по формуле (1.1) и имея в виду, что сечение стержня отнесено к главным центральным осям, получим для стержня с предварительным напряженным состоянием от *внешней внецентренно приложенной на концах сжимающей силы P* выражения (1.5) гл. V для компонентов дополнительной приведенной погонной нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= -P \xi'' - (a_y P + M_x) \theta'', \\ \bar{q}_y &= -P \eta'' + (a_x P - M_y) \theta'', \\ \bar{m} &= -(a_y P + M_x) \xi'' + (a_x P - M_y) \eta'' + \\ &\quad + (-r^2 P + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta'', \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где коэффициенты a_x, a_y, r^2, β_x и β_y вычисляются по формулам (7.5) гл. I и (1.6) гл. V.

Внося компоненты (1.5) в уравнения (1.3), получим дифференциальные уравнения для рассматриваемого случая предварительно напряженного стержня:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' + (M_x + a_y P) \theta'' &= q_x, \\ EJ_x \eta^{IV} - P \eta'' + (M_y - a_x P) \theta'' &= q_y, \\ EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y - GJ_d) \theta'' + \\ &\quad + (M_x + a_y P) \xi'' + (M_y - a_x P) \eta'' = m. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Если предварительно напряженное состояние стержня вызвано не сжимающей силой P , а внецентренно приложенной на концах продольной растягивающей силой P , то дифференциальные уравнения для такого стержня получим из системы (1.6), изменив знак перед P на обратный и полагая $M_x = P e_y, M_y = -P e_x$.

В случае, когда внешняя поперечная нагрузка приложена только на концах, а в пролете отсутствует, система (1.6) будет однородной, т. е. в уравнениях (1.6) нужно положить $q_x = q_y = m = 0$, а приложенная на концах внешняя поперечная нагрузка будет учтена соответствующими неоднородными граничными условиями.

Если сжимающая сила P близка к критической, то основная форма равновесия стержня, для которой были выведены уравнения (1.6), становится неустойчивой. В таком критическом состоянии стержня, как

было указано выше, возможна другая форма равновесия. Относя систему дифференциальных уравнений (1.6) к этой другой форме равновесия стержня и полагая в (1.6) $q_x = q_y = m = 0$, мы приходим к уравнениям устойчивости (1.10) гл. V, полученным ранее.

Наконец, полагая в уравнениях (1.6) равной нулю внешнюю продольную нагрузку, т. е. полагая $P = M_x = M_y = 0$, приходим к исходной системе уравнений (1.3).

Как видно из изложенного, система дифференциальных уравнений (1.6) носит довольно общий характер и охватывает достаточно большой класс практически важных задач.

Обратимся теперь к стержням, начальное напряженное состояние которых вызвано предварительно напряженной арматурой. Будем для простоты полагать, что в теле стержня имеется только один предварительно напряженный арматурный стержень; пусть это будет k -й стержень, проходящий через точку с координатами x_k и y_k (рис. 181, б). Знак суммы в формуле (1.2) опускаем.

Подставляя выражение n_R (1.2), как указано выше, в выражения (1.4) и помня при этом, что одновременно с напряжениями n_R , возникающими в поперечном сечении стержня, мы должны учитывать и напряжение в самой арматуре, которое считаем сосредоточенной силой R_k , приложенной в точке x_k , y_k , получим, учитывая, что поперечное сечение стержня отнесено к главным центральным осям:

$$\bar{q}_x = 0, \quad \bar{q}_y = 0, \quad \bar{m} = -R_k \mathfrak{M}_k \theta''$$

$$\mathfrak{M}_k = \frac{J_x + J_y}{F} + \frac{U_x}{J_x} y_k + \frac{U_y}{J_y} x_k - \rho_k^2 \quad (1.7)$$

где

$$U_x = \int_F y \rho^2 dF, \quad U_y = \int_F x \rho^2 dF,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rho_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Мы видим, что предварительное натяжение арматуры, в отличие от ранее рассмотренного случая внешней продольной сжимающей силы, совершенно не оказывает влияния на первые два уравнения (1.3), относящиеся к поперечному изгибу стержня в главных плоскостях, и влияет на третье уравнение, относящееся к кручению стержня.

Прибавляя m (приведенный крутящий момент от воздействия предварительно натяжения арматуры) к m (крутящему моменту от внешней поперечной нагрузки) и объединяя члены со второй производной от угла закручивания, получим третье уравнение системы (1.3) в виде

$$EJ_\omega \theta'''' - (GJ_d - R_k \mathfrak{M}_k) \theta'' - m = 0. \quad (1.8)$$

Если обозначить выражение в скобках в формуле (1.8) через

$$\bar{GJ}_d = GJ_d - R_k \mathfrak{M}_k \quad (1.9)$$

то уравнение (1.8) по виду будет совершенно аналогично третьему уравнению системы (1.3)

$$EJ_\omega \theta'''' - \bar{GJ}_d \theta'' - m = 0. \quad (1.10)$$

Мы приходим, таким образом, к весьма важному выводу: задачи расчета и исследования напряженного и деформированного состояния при кручении от действия внешней поперечной нагрузки в тонкостенных стержнях с предварительно натянутой арматурой определяются дифференциальным уравнением (1.10), подобным третьему дифференциальному уравнению системы (1.3) для обыкновенного тонкостенного стержня (без предварительно натянутой арматуры), с заменой в последнем жесткости при чистом кручении GJ_d на новую приведенную жесткость \bar{GJ}_d , определяемую формулой (1.9).

Следовательно, теория и методы расчета тонкостенных стержней, находящиеся под действием внешней поперечной нагрузки, могут быть целиком распространены на тонкостенные стержни с предварительно натянутой арматурой. Таким образом открываются большие возможности как для теоретических, так и для экспериментальных исследований в этой области и практического их использования.

Поскольку дифференциальные уравнения в рассматриваемом случае относятся к тонкостенному железобетонному стержню, в котором предварительно натянутая арматура после бетонирования работает совместно с бетоном, то главные характеристики сечения J_x , J_y , J_ω так же, как и момент инерции при чистом кручении J_d , следует вычислять для всего приведенного поперечного сечения с учетом площадей сечения арматуры, умноженных на отношение модулей упругости арматурной стали и бетона.

Если предварительное напряженное состояние в стержне вызвано не только предварительно натянутой арматурой, но и внешней сжимающей продольной силой, то мы должны пользоваться системой дифференциальных уравнений (1.6), заменив в третьем уравнении этой системы жесткость при чистом кручении GJ_d на новую приведенную жесткость \bar{GJ}_d , определяемую формулой (1.9).

§ 2. Изгиб и кручение стержня, предварительно нагруженного продольными силами

Рассмотрим некоторые случаи нагружения стержня продольными силами. Пусть стержень в своем начальном состоянии нагружен по концам центрально приложенной продольной силой P . Будем считать, что в поперечном сечении стержень имеет две оси симметрии; в этом случае центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного стержня. При этих условиях, очевидно, $M_x = M_y = 0$; $a_x = a_y = 0$ и система уравнений (1.6) распадается на три независимых уравнения следующего

вида:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} \pm P \xi'' &= q_x, \\ EJ_x \eta^{IV} \mp P \eta'' &= q_y, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - (GJ_d \mp r^2 P) \theta'' &= m. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В этих уравнениях верхний знак перед P относится к случаю сжимающей внешней силы P , а нижний знак — к случаю растягивающей силы.

Каждое из уравнений (2.1) можно представить либо в виде

$$X^{IV} + \frac{k^2}{l^2} X'' = Q, \quad (2.2)$$

либо в виде

$$X^{IV} - \frac{k^2}{l^2} X'' = Q, \quad (2.3)$$

где под X нужно понимать любую из функций ξ , η или θ в зависимости от того, какое уравнение мы рассматриваем; точно так же k^2 и Q будут иметь для каждого уравнения различные значения, а именно:

$$k^2 = \frac{P l^2}{EJ_y}, \quad \frac{P l^2}{EJ_x}, \quad \frac{(GJ_d - r^2 P) l^2}{EJ_\omega}, \quad \frac{(GJ_d + r^2 P) l^2}{EJ_\omega};$$

$$Q = \frac{q_x}{EJ_y}, \quad \frac{q_y}{EJ_x}, \quad \frac{m}{EJ_\omega}.$$

Уравнение (2.3) совершенно подобно уравнению кручения тонкостенного стержня, поэтому при интегрировании его можно воспользоваться изложенными ранее результатами, изменяя соответственным образом коэффициенты уравнений. Так, например, если на сжатый стержень действует внешний крутящий момент, то деформация кручения этого стержня определяется уравнением

$$EJ_\omega \theta^{IV} - (GJ_d - r^2 P) \theta'' = m.$$

Это уравнение отличается от ранее рассмотренного уравнения кручения (2.1) гл. II только коэффициентом при второй производной от угла кручения; в отличие от прежнего значения $\frac{k^2}{l^2} = \frac{GJ_d}{EJ_\omega}$, в этом случае величина $\frac{k^2}{l^2}$ будет выражаться формулой

$$\frac{k^2}{l^2} = \frac{GJ_d - r^2 P}{EJ_\omega}.$$

Следовательно, используя полученные ранее решения, мы должны заменить жесткость при чистом кручении GJ_d новой жесткостью $(GJ_d - r^2 P)$.

Дифференциальное уравнение (2.2) отличается от уравнения (2.3) только знаком перед членом со второй производной и, следовательно,

общее решение его будет отличаться от общего решения уравнения (2.3) тем, что частные решения, представленные гиперболическими функциями, теперь будут представлены тригонометрическими функциями того же аргумента.

Пример 1. Рассмотрим шарнирно-опертый сжатый стержень, на который действуют изгибающие моменты M_{0y} , приложенные по концам (рис. 182). Дифференциальное уравнение равновесия в данном случае (при $\theta = 0$) будет иметь вид

$$EJ_x \eta^{IV} + P \eta'' = 0. \quad (2.4)$$

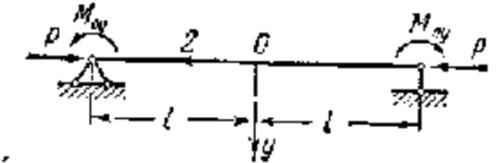


Рис. 182.

Общее решение однородного уравнения (2.4) представляется в виде

$$\eta = C_0 + C_1 z + C_2 \cos \frac{kz}{l} + C_3 \sin \frac{kz}{l}, \quad (2.5)$$

$$k = l \sqrt{\frac{P}{EJ_x}}.$$

Если начало координат взято в середине пролета, то в силу симметрии задачи $C_1 = C_3 = 0$, а C_0 и C_2 определяются из граничных условий (при $z = l$ $\eta = 0$ и $M_y = M_{0y}$):

$$C_0 = -\frac{M_{0y} l^2}{EJ_x k^2}, \quad C_2 = \frac{M_{0y} l^2}{EJ_x k^2 \cos k}.$$

Таким образом, для прогиба и изгибающего момента получим окончательные формулы:

$$\eta = -\frac{M_{0y} l^2}{EJ_x k^2} \left(1 - \frac{\cos \frac{kz}{l}}{\cos k} \right),$$

$$M_y = -EJ_x \eta'' = M_{0y} \frac{\cos \frac{kz}{l}}{\cos k}.$$

Вычисления, сделанные для стержня двутаврового сечения № 24а длиной 3 м, дают для изгибающего момента в середине пролета значения $M_{max} = 1,56 M_{0y}$, т. е. учет продольной сжимающей силы увеличивает расчетный изгибающий момент на 56%. Если сила P не сжимающая, а растягивающая, то для изгибающего момента в середине пролета формула будет аналогичной, но с заменой тригонометрических функций на гиперболические:

$$M_y = M_{0y} \frac{\operatorname{ch} \frac{kz}{l}}{\operatorname{ch} k}.$$

Сравнение обоих аналитических выражений для моментов и их графиков (рис. 183) показывает, что в случае центральнопримененной сжимающей силы стержень будет в устойчивом состоянии всегда,

а в случае сжимающей силы — только при условии $P \leq P_{кр}$, где $P_{кр}$ определяется по формуле (3.3) гл. V при $\lambda = \frac{\pi}{l}$.

Пример 2. Рассмотрим тот же сжатый стержень при действии на него равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q в плоскости Oyz .

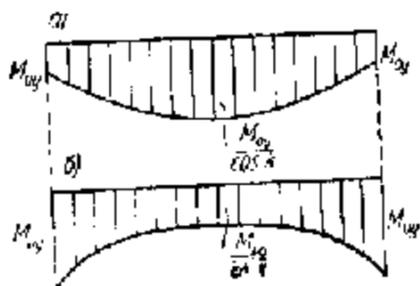


Рис. 183.

Для прогиба η вместо уравнения (2.4) теперь будем иметь соответствующее ему неоднородное уравнение

$$EJ_x \eta^{IV} + P\eta'' = q, \quad (2.6)$$

а общее решение уравнения (2.6) получим, добавляя к решению однородного уравнения (2.5) частный интеграл неоднородного уравнения, зависящий от нагрузки q . Таким образом, получим

$$\eta = C_0 + C_1 z + C_2 \cos \frac{kz}{l} + C_3 \sin \frac{kz}{l} + \frac{q}{2P} z^2. \quad (2.7)$$

Исходя из решения (2.7) и полагая в граничных условиях шарнирное опирание, получим (при пролете $2l$ и выборе начала координат в середине пролета) для прогиба и момента следующие выражения:

$$\eta = \frac{q}{2P} (z^2 - l^2) - \frac{q l^2}{P k^2} \left(1 - \frac{\cos \frac{k}{l} z}{\cos k} \right),$$

$$M_y = - \frac{q l^2}{P k^2} \left(1 - \frac{\cos \frac{k}{l} z}{\cos k} \right).$$

Эти формулы аналогичны ранее полученным формулам (5.9) гл. II (для случая кручения тонкостенного стержня под воздействием внешнего равномерно распределенного крутящего момента m), в которых θ заменено на η , B — на M_y , m — на q , GJ_d — на P , гиперболические функции заменены на тригонометрические с учетом знаков и т. д.

Здесь так же, как и ранее, можно исходить не из общего решения (2.7), а решать задачу методом начальных параметров. В нашем случае основными расчетными величинами являются η , η' , M и Q , причем в силу принятого правила знаков изгибающий момент и поперечная сила определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M &= -EJ_x \eta'', \\ Q &= - \int q dz = - \int (EJ_x \eta^{IV} + P\eta'') dz = -EJ_x \eta''' - P\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Поскольку уравнение (2.4) и формулы (2.8) сходны с уравнением (3.1) гл. II и формулами (2.5) гл. II, то, очевидно, матрица начальных параметров получится из матрицы табл. 3 § 3 гл. II, если в ней заменить θ на η , θ' на η' , B на M , H на Q и GJ_d на $-P$.

§ 3. Изгиб и кручение стержней с предварительно напряженной арматурой

1. Возвратимся к формуле (1.7), определяющей коэффициент M_k приведенного крутящего момента, заменяющего действие на стержень предварительно напряженной арматуры. Величина M_k зависит как от геометрических размеров стержня, так и от координат точки месторасположения арматуры R_k (рис. 181, б). Изменяя координаты x_k и y_k , мы можем придать величине M_k как положительное, так и отрицательное значение и, в частности, нулевое значение. Из формулы (1.9) следует, что при $M_k = 0$ предварительно напряженный стержень не оказывает никакого влияния на изменение величины GJ_d , оставляя ее равной GJ_d ; при $M_k > 0$ жесткость стержня при чистом кручении уменьшается, а при $M_k < 0$ — увеличивается. Полагая $M_k = 0$, мы получим уравнение кривой, каждая точка которой обладает тем свойством, что расположенная в ней предварительно напряженная арматура не меняет величины жесткости стержня при кручении. Уравнение этой кривой будет иметь вид

$$x_k^2 + y_k^2 - \frac{U_x}{J_x} y_k - \frac{U_y}{J_y} x_k - \frac{J_x + J_y}{F} = 0. \quad (3.1)$$

Оно совершенно аналогично уравнению (8.1) гл. V и тоже представляет уравнение окружности, радиус и координаты центра которой определяются формулами (8.2) и (8.3) гл. V:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= \frac{U_x^2}{4J_x^2} + \frac{U_y^2}{4J_y^2} + \frac{J_x + J_y}{F}, \\ k_x &= \frac{U_y}{2J_y}, \quad k_y = \frac{U_x}{2J_x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Для стержня с двумя осями симметрии величина $U_x = U_y = 0$ и радиус окружности равен полярному радиусу инерции $R = \sqrt{\frac{J_x + J_y}{F}}$, а центр ее совпадает с центром тяжести сечения. В частности, для квадрат а со стороной a будем иметь $R = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0,408 a$.

Внутри круга, ограниченного окружностью (3.1), $M_k > 0$, а вне этого круга $M_k < 0$. Если в уравнении (1.7) считать, что $M_k = C$, где C — некоторая постоянная величина, то мы приходим к уравнению окружности, радиус которой определяется формулой

$$R^2 = \frac{U_x^2}{4J_x^2} + \frac{U_y^2}{4J_y^2} + \frac{J_p}{F} - M_k \quad (3.3)$$

здесь $J_p = J_x + J_y$ — полярный момент инерции.

Эта окружность интересна тем, что предварительно напряженная арматура воздействует на напряженное состояние стержня одинаковым

образом, независимо от того, в какой точке окружности она расположена.

Из формулы (3.3) видно, что наибольшее положительное значение, которое может принять M_k , равно

$$M_{k \max} = \frac{U_x^2}{4J_x^2} + \frac{U_y^2}{4J_y^2} + \frac{J_p}{F} \quad (\text{при этом } R_C = 0);$$

при $M_k = 0$ имеет место равенство $R_C = R$ [см. (3.2)]; при дальнейшем увеличении R_C величина M_k будет отрицательной. На рис. 184 дан график зависимости между R_C и M_k для стержня квадратного сечения со стороной a .

Из формулы (1.9) следует, что можно подобрать такое значение величины M_k , при котором будет $\overline{GJ_d} = 0$, т. е. стержень не будет сопротивляться кручению; для этого нужно положить

$$\overline{GJ_d} = GJ_d - R_k M_k = 0,$$

откуда

$$M_k = \frac{GJ_d}{R_k}.$$

Для стержней с двумя осями симметрии получим

$$\frac{J_p}{F} - \rho_k^2 = \frac{GJ_d}{R_k},$$

откуда

$$\rho_k^2 = x_k^2 + y_k^2 = \frac{J_p}{F} - \frac{GJ_d}{R_k}.$$

Если предварительно напряженная арматура расположена в центре тяжести сечения ($\rho_k = 0$), то, для того чтобы стержень не оказывал сопротивления кручению, напряжение R_k в арматурном стержне должно иметь величину

$$R_k = GF \frac{J_d}{J_p}.$$

Того же эффекта (отсутствия сопротивления стержня кручению) можно достичь соответствующим расположением двух или нескольких, предварительно напряженных арматур, располагая их внутри и вне круга, ограниченного окружностью (3.2).

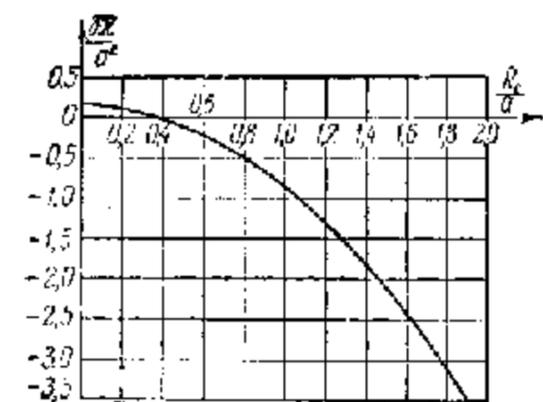


Рис. 184.

2. Полученные здесь и в предыдущем параграфе теоретические результаты, относящиеся к определению при кручении приведенной жесткости предварительно напряженного стержня, экспериментально проверены в Институте механики АН СССР на небольших моделях.

Одна из таких моделей показана на рис. 185. Модель представляет собой тонкостенный стержень, состоящий из двух узких пластинок и имеющий в поперечном сечении форму симметричного креста. Внутри стержня, вдоль его оси (в центре поперечного сечения) имеется цилиндрическое отверстие, в котором свободно размещается продольный металлический арматурный стержень. Этому стержню при помощи несложных опорных приспособлений может быть сообщено начальное натяжение, величина которого регулируется поворотом опорного винта.

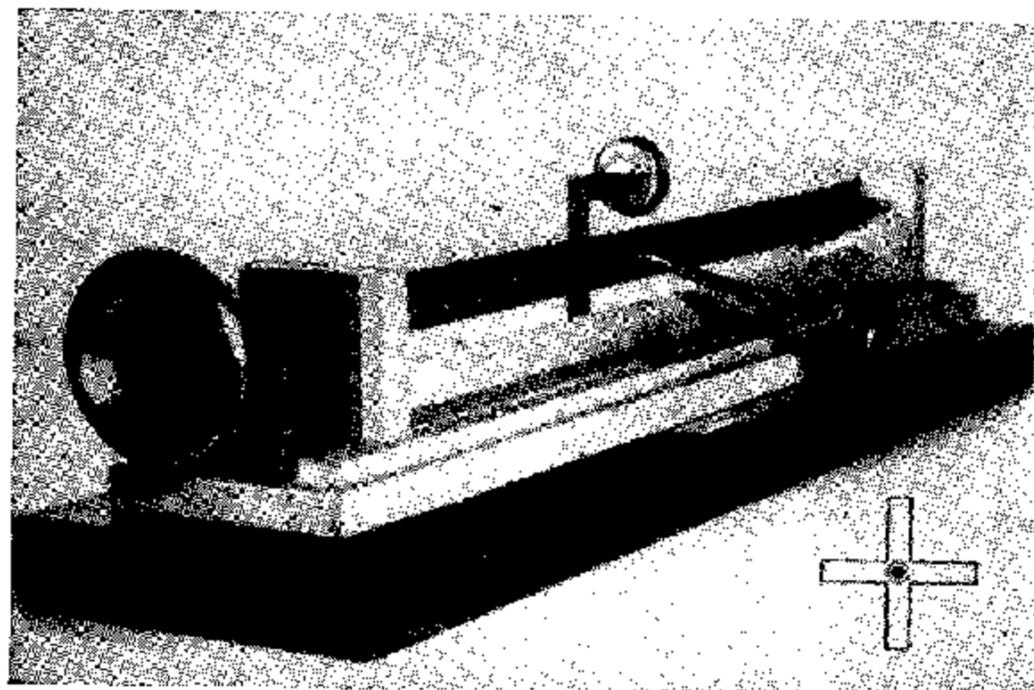


Рис. 185.

Модель по середине пролета снабжена боковым горизонтальным рычагом. Груз, подвешенный на конце рычага, помимо поперечного изгиба, вызывает также и кручение модели. Угол закручивания, измеряемый для среднего сечения стрелкой индикатора, при заданном внешнем крутящем моменте будет зависеть также и от степени натяжения размещенной внутри стержня продольной арматуры. С увеличением этого натяжения приведенная крутильная жесткость, согласно сказанному ранее, уменьшается и, следовательно, угол кручения в среднем сечении при заданном крутящем моменте будет увеличиваться.

4. Кручение стержней, испытывающих заданные температурные напряжения

Рассмотрим теперь пространственную задачу о равновесии тонкостенного стержня со свободными концами, имеющего начальные температурные напряжения и находящегося под действием внешней поперечной

нагрузки. Эти напряжения могут быть представлены одночленной бимоментной формулой*)

$$n(z, s) = T\Phi(z)\varphi(s), \quad (4.1)$$

где T — параметр, определяющий температуру; $\Phi(z)$ — функция, зависящая от одной координаты z и характеризующая распределение нормальных напряжений n по длине стержня; $\varphi(s)$ — функция, характеризующая распределение напряжений от температуры по поперечному сечению стержня.

При переходе стержня под действием внешней поперечной нагрузки в новое деформированное состояние, определяемое прогибами $\xi = \xi(z)$, $\tau = \tau(z)$ и углом кручения $\theta = \theta(z)$, имеющиеся в этом стержне начальные температурные напряжения могут быть приведены к дополнительной (фиктивной) внешней поперечной нагрузке, аналогично тому, как это было сделано выше для стержней с предварительно натянутой арматурой. В данном случае, поскольку n , определяемое формулой (4.1), зависит также от координаты z , для вычисления компонентов этой нагрузки будем иметь формулы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_{xt} &= (\xi' \int_F n dF)' - [\theta' \int_F n (y - a_y) dF]', \\ \bar{q}_{yt} &= (\tau' \int_F n dF)' + [\theta' \int_F n (x - a_x) dF]', \\ \bar{m}_t &= -[\xi' \int_F n (y - a_y) dF]' + [\tau' \int_F n (x - a_x) dF]' + \\ &\quad + [\theta' \int_F n [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF]'. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

здесь штрихами обозначены производные по z .

Внося в (4.2) значения n из формулы (4.1) и принимая во внимание условия ортогональности функции $\varphi(s)$ с обобщенными координатами $1, x, y$ закона плоских сечений ($\int_F 1 \varphi dF = \int_F x \varphi dF = \int_F y \varphi dF = 0$), получим:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{xt} &= \bar{q}_{yt} = 0, \\ \bar{m}_t &= T[\Phi(z)\theta'(z)]' \int_F \varphi(s) [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF = KT(\Phi\theta)'. \end{aligned}$$

где K — обобщенная упругая характеристика, зависящая от вида функции $\varphi(s)$ и от геометрических размеров поперечного сечения стержня.

*) Подробнее об этом будет сказано в гл. XI.

вычисляемая по формуле

$$K = \int_F \varphi [(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2] dF,$$

где a_x, a_y — координаты центра изгиба.

Основное уравнение теории стесненного кручения принимает теперь вид

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - KT(\Phi\theta)' - m = 0.$$

Это уравнение в общем случае имеет переменные коэффициенты. Во многих случаях функции $\Phi(z)$ мало отличаются от постоянной величины, по крайней мере, на среднем участке стержня. Полагая $\Phi(z) = \text{const}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами, и задача приводится к определению приведенной жесткости чистого кручения, которая в данном случае равна

$$\bar{GJ}_d = GJ_d + KT\Phi.$$

§ 5. Устойчивость стержней, испытывающих начальные напряжения

1. В § 1 настоящей главы были выведены общие дифференциальные уравнения (1.6) равновесия стержней, испытывающих заданное начальное напряженное состояние, и было отмечено, что при известных условиях эти уравнения переходят в ранее выведенные уравнения устойчивости (1.10) гл. V. Затем было показано, что если начальные напряжения определяются предварительным натяжением арматуры или действием температуры (в тех случаях, когда можно считать ее не изменяющейся по длине стержня), то первые два уравнения системы (1.6) не изменяются, а третье уравнение изменяется таким образом, что внешний вид его остается прежним, если жесткость стержня при чистом кручении GJ_d заменить новой приведенной жесткостью \bar{GJ}_d , которая в зависимости от характера начального напряженного состояния выражается формулой

$$\bar{GJ}_d = GJ_d - R_k M_k, \quad (5.1)$$

или

$$\bar{GJ}_d = GJ_d + KT\Phi. \quad (5.2)$$

Сопоставляя все сказанное, мы приходим к выводу, что все задачи, связанные с системой дифференциальных уравнений устойчивости (1.10) гл. V, а также вопросы изгибно-крутильных колебаний и динамической устойчивости тонкостенных стержней, которые будут нами рассмотрены в гл. IX, легко обобщаются на случаи стержней с предварительно напряженным состоянием; для этого необходимо только заменить жесткость при чистом кручении GJ_d на приведенную жесткость \bar{GJ}_d , которая в случае предварительно напряженной арматуры вычисляется по

формуле (5.1), а в случае предварительно напряженного температурного состояния вычисляется по формуле (5.2) (для участков, в которых температурный режим по длине остается постоянным). Из этих рассуждений также следует, что предварительно напряженные состояние стержня оказывает влияние на величину критической силы, связанной с крутильной формой потери устойчивости и не отражается на величине эйлеровских критических сил, поскольку эти последние не зависят от величины GJ_d .

2. Все задачи, связанные с предварительно напряженным состоянием стержня, изложенные в четырех последних параграфах для тонкостенных стержней открытого профиля, обобщаются на стержни, рассчитываемые с учетом продольных изгибающих моментов, и на стержни замкнутого профиля. Для стержней закрытого профиля, как было указано ранее, деформацию сечения при кручении нужно задавать в виде $\omega = \alpha x$ и биомомент инерции определить по формуле

$$J_{\omega} = \int_F x^2 y^2 dF;$$

под GJ_d следует понимать сен-венановскую жесткость на кручение. В частности, для прямоугольного коробчатого закрытого профиля со сторонами a_1 и a_2 и толщиной δ , рассмотренного нами в гл. IV, геометрические характеристики определяются по формулам (1.18) гл. V. Контурные интегралы в случае расчета стержней с учетом продольных изгибающих моментов замещаются двойными интегралами, взятыми по всей площади поперечного сечения.

ГЛАВА VIII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГИМИ И ЖЕСТКИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ДЛИНЕ СТЕРЖНЯ НЕПРЕРЫВНО

§ 1. Устойчивость стержней, находящихся в упругой среде

В предыдущих главах мы рассматривали вопрос об устойчивости тонкостенного стержня в предположении, что этот стержень по всей длине свободен от внешних связей, препятствующих в той или иной степени изменению деформированного состояния стержня и, следовательно, увеличивающих значение расчетной критической силы.

В инженерных расчетах имеет большое значение задача об устойчивости стержней, находящихся в упругой среде. С такой задачей мы встречаемся, например, при расчете на устойчивость сжатого пояса открытого моста. Роль упругой среды для этого пояса играют поперечные рамы, связывающие между собой главные фермы. При частом расположении поперечных рам упругая среда, с достаточной для практики степенью точности, может быть принята непрерывно распределенной по длине стержня.

Для получения уравнений устойчивости нам нужно в общих уравнениях равновесия (1.2) гл. VI считать функции $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ искомыми вариациями основных перемещений и вместо внешних силовых факторов подставить выражения $q_x + \bar{q}_x$, $q_y + \bar{q}_y$ и $m + \bar{m}$. Здесь q_x , q_y и m определяются по формулам (1.13) и (1.27) гл. VI и являются дополнительной приведенной нагрузкой, получающейся при заданном напряженном состоянии от возникновения добавочных перемещений вследствие потери основной формы равновесия, а дополнительная приведенная нагрузка \bar{q}_x , \bar{q}_y и \bar{m} определяется по формулам (5.3) гл. III и является следствием непрерывно распределенных по длине стержня упругих связей. Выполняя указанную подстановку получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + k_z [\xi - (h_y - a_y) \theta] - [N(\xi' + a_y \theta)'] + (M_x \theta)'' &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + k_y [\eta + (h_x - a_x) \theta] - [N(\eta' - a_x \theta)'] + (M_y \theta)'' &= 0, \\ EJ_z \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - [(r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta]' + \\ + [q_x^0 (e_x - a_x) + q_y^0 (e_y - a_y)] \theta + a_x (N \eta')' - a_y (N \xi')' + \\ + M_x \xi'' + M_y \eta'' - k_z (h_y - a_y) \xi + k_y (h_x - a_x) \eta + \\ + [k_z (h_y - a_y)^2 + k_y (h_x - a_x)^2 + k_z] \theta &= 0. \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Дифференциальные уравнения (1.1) являются общими уравнениями устойчивости тонкостенного стержня в упругой среде.

При выводе уравнений (1.1) мы, как и в рассмотренном ранее случае свободного стержня, отбрасывали по малости перемещений члены, содержащие квадраты или попарные произведения искомых функций ξ , η и θ .

Коэффициенты уравнений (1.1) зависят:

1) от упругих свойств материала стержня E и G и геометрических характеристик поперечного сечения: J_x , J_y , J_d , J_ω , F , a_x , a_y , β_x , β_y ;

2) от коэффициентов упругости среды: k_ξ , k_η , k_θ и координат точки контакта этой среды со стержнем в плоскости поперечного сечения h_x , h_y ;

3) от внутренних силовых факторов: $N(z)$, $M_x(z)$ и $M_y(z)$, характеризующих заданное напряженное состояние стержня и определяемых из статического расчета;

4) от компонентов внешней поперечной нагрузки q_x^0 , q_y^0 и координат точки приложения ее в плоскости поперечного сечения e_x и e_y .

Как внутренние силовые факторы $N(z)$, $M_x(z)$ и $M_y(z)$, так и компоненты поперечной нагрузки $q_x^0(z)$ и $q_y^0(z)$, входящие в коэффициенты уравнений (1.1), задаются с точностью до одного общего параметра. Критические значения этого параметра выражаются через характеристические числа краевой задачи, описываемой системой однородных дифференциальных уравнений (1.1) с однородными граничными условиями. За расчетную критическую нагрузку выбирается та, которая имеет наименьшее (положительное или отрицательное) значение.

Интегрирование дифференциальных уравнений (1.1) в общем случае представляет собой весьма трудную математическую проблему, поскольку эти уравнения при произвольной внешней нагрузке могут иметь сложные переменные коэффициенты. Это объясняется тем, что при выводе уравнений (1.1) явление потери устойчивости стержня в упругой среде мы рассматриваем, исходя из весьма общих предположений как в отношении внешней нагрузки, так и в отношении поперечного сечения и характеристик упругой среды. Из имеющихся приближенных методов решения системы уравнений (1.1) и определения критических нагрузок можно рекомендовать изложенный выше вариационный метод Бубнова-Галеркина.

§ 2. Устойчивость стержня при центральном действии продольной силы

1. Общий случай. Для практики весьма важным является случай центрального сжатия, при котором стержень с упругими связями до потери устойчивости испытывает одни только нормальные напряжения, распределенные по сечению равномерно. Полагая в уравнениях (1.1) $M_x = M_y = 0$; $q_x^0 = q_y^0 = 0$, получим основные уравнения устойчивости для случая, когда внешняя нагрузка состоит из одних только продольных сил, вызывающих в поперечном сечении центрально приложенную

нормальную силу $N(z)$:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + k_\xi [\xi - (h_y - a_y) \theta] - [N(\xi' + a_y \theta')] &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + k_\eta [\eta - (h_x - a_x) \theta] - [N(\eta' - a_x \theta')] &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - a_y (N\xi')' + a_x (N\eta')' - r^2 (N\theta')' - \\ &- k_\xi (h_y - a_y) \xi + k_\eta (h_x - a_x) \eta + \\ &+ [k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\eta (h_x - a_x)^2 + k_\theta] \theta = 0. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

В уравнениях (2.1) нормальная сила $N = N(z)$ рассматривается как заданная (с точностью до одного параметра) функция от z .

Полагая $N = -P = \text{const}$, получим уравнения устойчивости для стержня, находящегося в упругой среде и нагруженного по концам продольной сжимающей силой P . Эти уравнения можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P\xi'' + k_\xi \xi + a_y P\theta'' - k_\xi (h_y - a_y) \theta &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - P\eta'' + k_\eta \eta - a_x P\theta'' + k_\eta (h_x - a_x) \theta &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GJ_d)\theta'' + [k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\eta (h_x - a_x)^2 + \\ &+ k_\theta] \theta + a_y P\xi'' - k_\xi (h_y - a_y) \xi - a_x P\eta'' + k_\eta (h_x - a_x) \eta = 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Уравнения (2.2) при постоянных k_ξ , k_η , k_θ , h_x и h_y имеют постоянные коэффициенты и интегрируются в замкнутой аналитической форме. Эти уравнения охватывают ряд практически важных задач. Достаточно указать, что при $k_\xi = k_\eta = k_\theta = 0$, т. е. при отсутствии упругой среды, уравнения (2.2) переходят в рассмотренные ранее уравнения (3.1) гл. V для свободного стержня.

Если граничные условия таковы, что на концах стержня ($z = 0$ и $z = l$) равны нулю вариации перемещений ξ , η и θ и вариации нормальных напряжений σ (пропорциональных вторым производным от этих перемещений), то частное решение уравнений (2.2) может быть представлено следующими уравнениями:

$$\xi = A \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad \eta = B \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad \theta = C \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad (2.3)$$

где A , B и C — некоторые коэффициенты; n — любое целое положительное число.

Подставляя выражения (2.3) в (2.2) и приравнявая затем нулю определитель, составленный из коэффициентов при постоянных A , B и C , получим уравнение для определения критического значения силы P :

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - \lambda_n^2 P + k_\xi & 0 & -a_y \lambda_n^2 P - k_\xi (h_y - a_y) \\ 0 & EJ_x \lambda_n^4 - \lambda_n^2 P + k_\eta & a_x \lambda_n^2 P + k_\eta (h_x - a_x) \\ -a_y \lambda_n^2 P - k_\xi (h_y - a_y) & a_x \lambda_n^2 P + k_\eta (h_x - a_x) & EJ_\omega \lambda_n^4 - \lambda_n^2 (r^2 P - GJ_d) + \\ & & + [k_\xi (h_y - a_y)^2 + \\ & & + k_\eta (h_x - a_x)^2 + k_\theta] \end{vmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) при любом заданном числе n полуволен синусоиды дает для критической силы P три значения, соответствующие трем степеням свободы стержня в плоскости Oxy . Заметим, что наименьшее значение критической силы может оказаться при числе полуволен n , большем единицы.

2. Стержень с двумя плоскостями симметрии. Уравнения (2.2) относятся к стержню, имеющему в поперечном сечении произвольное очертание. Если центр изгиба совпадет с центром тяжести сечения (например, у профилей с двумя осями симметрии), и точка контакта стержня с упругой средой также находится в центре тяжести, то $a_x = a_y = h_x = h_y = 0$. Система совместных дифференциальных уравнений (2.2) в этом частном случае распадается на три независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P\xi'' + k_\xi \xi &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + P\eta'' + k_\eta \eta &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GJ_d) \theta'' + k_\theta \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Первыми двумя из этих уравнений вместе с граничными условиями определяются изгибные формы равновесия стержня, при которых поперечные сечения получают одна только поступательные смещения. Третье уравнение с соответствующими граничными условиями определяет потерю устойчивости стержня в форме закручивания, при которой линия центров изгиба (совпадающая в данном случае с линией центров тяжести) остается неподвижной.

Если концы стержня шарнирно закреплены, то изгибно-крутильные формы потери устойчивости по длине стержня представляются синусоидами $\sin \lambda_n z$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Характеристическое уравнение (2.4), определяющее критические силы, в соответствии с уравнениями (2.6), распадается на три отдельных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 + k_\xi &= 0, \\ EJ_x \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 + k_\eta &= 0, \\ EJ_\omega \lambda_n^4 - (r^2 P - GJ_d) \lambda_n^2 + k_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Из уравнений (2.7) получаем следующие формулы для определения критических сил:

$$\left. \begin{aligned} P_{xn} &= EJ_x \lambda_n^2 + \frac{k_\eta}{\lambda_n^2}, \\ P_{yn} &= EJ_y \lambda_n^2 + \frac{k_\xi}{\lambda_n^2}, \\ P_{\omega n} &= \frac{1}{r^2} \left(EJ_\omega \lambda_n^2 + GJ_d + \frac{k_\theta}{\lambda_n^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Первые две формулы совпадают с известными формулами продольного изгиба стержня, находящегося в упругой среде. Третья формула дает новое значение для критической силы, определяемой на условия продольного закручивания.

Критические силы, определяемые формулами (2.8), при заданных упругих характеристиках стержня и среды зависят от длины полуволен синусоиды, соответствующей форме потери устойчивости.

Вычисляя критические силы по формулам (2.8), мы должны в каждом из трех возможных форм потери устойчивости (двух изгибных и одной крутильной) определить число полуволен синусоиды из условия минимума соответствующей сжимающей критической силы. За расчетную критическую силу выбирается та, которая имеет наименьшее значение.

Определим критические силы для бесконечно длинного стержня, находящегося в упругой среде. Длины полуволен синусоид, дающих для трех критических сил P_x , P_y и P_ω наименьшие значения, в формулах (2.8) представлены параметрами λ_n (2.5). Полагая $\lambda_n = \lambda$ и дифференцируя критические силы по этому параметру (что законно, так как в случае стержня бесконечной длины можно считать, что критические силы являются непрерывными функциями от λ), получим, приравняв нулю производные $\frac{dP}{d\lambda}$:

$$EJ_x \lambda - \frac{k_\eta}{\lambda^3} = 0, \quad EJ_y \lambda - \frac{k_\xi}{\lambda^3} = 0, \quad EJ_\omega \lambda - \frac{k_\theta}{\lambda^3} = 0.$$

Отсюда для параметров λ трех возможных форм потери устойчивости (двух изгибных и одной крутильной) получаем значения:

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{k_\eta}{EJ_x}}, \quad \lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{k_\xi}{EJ_y}}, \quad \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{k_\theta}{EJ_\omega}}.$$

Соответствующие длины полуволен синусоид равны:

$$l_1 = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ_x}{k_\eta}}, \quad l_2 = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ_y}{k_\xi}}, \quad l_3 = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ_\omega}{k_\theta}}. \quad (2.9)$$

Критические силы P_x , P_y и P_ω , принимающие при этих длинах свои наименьшие значения, определяются по формулам:

$$P_x = 2 \sqrt{EJ_x k_\eta}, \quad P_y = 2 \sqrt{EJ_y k_\xi}, \quad P_\omega = \frac{1}{r^2} \left(\sqrt{EJ_\omega k_\theta} + GJ_d \right). \quad (2.10)$$

Из этих трех сил за расчетную выбирается та, которая имеет наименьшее значение.

Из формул (2.9) и (2.10) видно, что как длины полуволен, так и критические силы зависят только от упругих характеристик стержня и среды. Следует отметить, что формулы (2.10) дают точные значения критических сил также и для стержней конечной длины при условии, если длины волн, определяемые формулами (2.9), укладываются

на общей длине стержня целое число раз. Критические силы в этом случае не зависят от общей длины стержня.

Если общая длина стержня не будет кратной длине полуволны синусоиды, то при расчете на устойчивость из двух соседних целых значений числа полуволн n выбирается то, которое, будучи подставлено в одну из формул (2.10), дает для соответствующей критической силы наименьшее значение.

3. Стержень с одной плоскостью симметрии. Если поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии (например, Oy) и поперечные связи, образующие упругую среду, лежат в плоскости симметрии (в данном случае — в плоскости Oyz), то система уравнений (2.2) разделяется на одно уравнение с искомой функцией $\eta(z)$ и систему двух уравнений с искомыми функциями $\xi(z)$ и $\theta(z)$:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta'''' + P \eta'' + k_\eta \eta &= 0, \\ EJ_y \xi'''' + P \xi'' + k_\xi \xi + a_y P \theta'' - k_\xi (h_y - a_y) \theta &= 0, \\ EJ_z \theta'''' + (r^2 P - GJ_d) \theta'' + [k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\theta] \theta + \\ + a_y P \xi'' - k_\xi (h_y - a_y) \xi &= 0. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Первое уравнение относится к потере устойчивости стержня в форме изгиба в плоскости симметрии Oyz . Коэффициент упругости среды в этом уравнении представлен величиной k_η . Второе и третье уравнения образуют систему, которая совместно с граничными условиями определяет изгибно-крутильные формы равновесия после потери устойчивости.

В соответствии с уравнениями (2.11) детерминантное уравнение (2.4), относящееся к случаю шарнирного закрепления стержня на концах, распадается на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \lambda_n^2 - P \lambda_n^2 + k_\eta &= 0, \\ \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 + k_\xi & -a_y P \lambda_n^2 - k_\xi (h_y - a_y) \\ -a_y P \lambda_n^2 - k_\xi (h_y - a_y) & EJ_z \lambda_n^4 - \lambda_n^2 (r^2 P - GJ_d) + \\ + k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\theta \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \right\} (2.12)$$

Первое из уравнений (2.12) дает уже знакомое нам выражение для критической силы [вторая из формул (2.7)].

Второе уравнение дает для критической силы два значения, соответствующих при заданном числе полуволн n двум возможным изгибно-крутильным формам потери устойчивости. Критические силы, определяемые этим уравнением, зависят не только от величин EJ_y , λ_n и k_ξ , но также и от других упругих и геометрических характеристик: EJ_z , GJ_d , a_y и h_y , имеющих в вопросе устойчивости весьма важное значение.

Эти характеристики во многих случаях оказывают на величину критической силы существенное влияние.

Из второго уравнения (2.12) видно, что при $a_y \neq 0$ потеря устойчивости в форме «чистого» изгиба (без кручения), которая рассматри-

вается в работах Ясинского и Тимошенко, для стержней в упругой среде в случае центрального сжатия не может иметь места.

Существенное влияние на форму потери устойчивости, а следовательно, и на величину критической силы, оказывает также величина $(h_y - a_y)$, определяющая точку контакта стержня с упругой средой (точку пересечения горизонтальных реактивных сил упругой среды с осью симметрии).

При $h_y = a_y$, т. е. при прохождении горизонтальных сил упругой среды через центр изгиба, второе уравнение (2.12) несколько упрощается:

$$\left| \begin{array}{cc} EJ_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 + k_\xi & -a_y P \lambda_n^2 \\ -a_y P \lambda_n^2 & EJ_z \lambda_n^4 - (r^2 P - GJ_d) \lambda_n^2 + k_\theta \end{array} \right| = 0. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) получаем выражение для критических сил:

$$P = \frac{\lambda_n^2 [\lambda_n^2 (P_\omega + r^2 P_y) + r^2 k_\xi + k_\theta]}{2 \lambda_n^4 (r^2 - a_y^2)} \pm \sqrt{\frac{\lambda_n^2 [\lambda_n^2 (P_\omega + r^2 P_y) + r^2 k_\xi + k_\theta]^2 - 4 \lambda_n^4 (r^2 - a_y^2) [\lambda_n^4 P_y P_\omega + \lambda_n^2 (k_\xi P_\omega + k_\theta P_y) + k_\xi k_\theta]}{2 \lambda_n^4 (r^2 - a_y^2)}}} \quad (2.14)$$

где

$$P_y = EJ_y \lambda_n^2, \quad P_\omega = EJ_z \lambda_n^2 + GJ_d.$$

Нетрудно показать, что наименьшая критическая сила, определяемая по формуле (2.14) и соответствующая изгибно-крутильной форме потери устойчивости, будет меньше силы, которая получается по известной формуле Ясинского — Тимошенко (без учета кручения). Механически это следует из того, что, учитывая одни только изгибные формы потери устойчивости, мы тем самым неявно предполагаем наличие по всей длине стержня поперечных связей, закрепляющих стержень от кручения. Эти связи повышают устойчивость стержня.

§ 3. Устойчивость стержня при внецентренном действии продольной силы

Пусть стержень имеет одну плоскость симметрии и находится под действием продольных сил, приложенных на концах. Будем считать, что стержень находится в сплошной упругой среде, оказывающей упругое сопротивление как изгибу из плоскости симметрии, так и кручению. Поскольку в основе нашей теории лежит гипотеза о недеформируемости контура сечения, мы можем реактивные силы и моменты среды считать приложенными в плоскости симметрии на линии, параллельной образующей стержня. Другими словами, будем предполагать,

что контакт стержня со средой в плоскости поперечного сечения осуществлен в точке, лежащей на оси симметрии.

Рассмотрим задачу об устойчивости стержня в случае, когда продольная сжимающая сила P действует в плоскости симметрии.

Если эта сила не превосходит известного предела, то стержень находится в условиях сложного сопротивления при сжатии и изгибе. Напряженное состояние стержня в этом случае характеризуется одними только нормальными напряжениями, постоянными по длине стержня и меняющимися в сечении по закону расстояния от некоторой прямой, перпендикулярной к оси симметрии.

При некотором значении силы P плоская форма изгиба стержня становится неустойчивой. Стержень из одной формы равновесия переходит в другую, причем этот переход в общем случае характеризуется появлением деформаций изгиба из плоскости симметрии и кручения. Уравнения устойчивости легко могут быть получены из общих уравнений (1.1).

Пологая в первом и третьем из уравнений (1.1)

$$N = -P = \text{const}, \quad M_x = -Pe_y = \text{const}, \quad M_y = 0, \quad q_x^0 = q_y^0 = 0$$

и отбрасывая второе уравнение, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' - k_\xi \xi + P(a_y - e_y) \theta'' - k_\xi (h_y - a_y) \theta &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} + [P(r^2 + 2\beta_y e_y) - GJ_d] \theta'' - [k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\theta] \theta + \\ + P(a_y - e_y) \xi'' - k_\xi (h_y - a_y) \xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Если на концах стержня $z=0$ и $z=l$ имеются шарнирные закрепления, обращающие в нуль перемещения ξ и θ и их вторые производные, то фундаментальными функциями системы дифференциальных уравнений (3.1) будут:

$$\xi = A \sin \lambda_n z, \quad \theta = C \sin \lambda_n z,$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

Характеристическое уравнение для критических сил имеет вид:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 + k_\xi & -P \lambda_n^2 (a_y - e_y) - k_\xi (h_y - a_y) \\ -P \lambda_n^2 (a_y - e_y) - k_\xi (h_y - a_y) & EJ_\omega \lambda_n^4 - [P(r^2 + 2\beta_y e_y) - GJ_d] \lambda_n^2 - \\ & + k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\theta \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Критические силы, определяемые уравнением (3.2), при заданных геометрических и упругих характеристиках стержня и среды и заданном эксцентриситете приложения силы, зависят от числа n полуволн синусоиды. Поскольку уравнение (3.2) относительно P — квадратное, то, задаваясь в этом уравнении числом полуволн n , мы получим для критической силы P два значения. Из всевозможных целых численных значений n ($n=1, 2, 3, \dots$) за расчетное нужно выбрать то, которое

для критической силы дает наименьшее значение. Для стержней, находящихся в упругой среде, число полуволн синусоиды, определяющее первую (после потери устойчивости) форму равновесия, как правило, получается больше единицы. Это число зависит от коэффициентов упругости среды k_ξ и k_θ . С увеличением коэффициентов k_ξ и k_θ число полуволн синусоиды возрастает.

Из уравнения (3.2) легко можно определить критические силы также и для бесконечно длинного стержня. Для этого необходимо продифференцировать уравнение (3.2) по λ_n^2 , считая, что $P = f(\lambda_n^2)$ есть непрерывная функция величины λ_n^2 , что, очевидно, справедливо для случая бесконечно длинного стержня.

Принимая при этом, что $\frac{dP}{d\lambda_n^2} = 0$, поскольку наименьшее значение

критической силы отвечает минимуму функции $P = f(\lambda_n^2)$, мы получим дополнительное условие, связывающее наименьшую критическую силу P и величину λ_n . Из этого условия и уравнения (3.2) мы найдем значение наименьшей критической нагрузки и соответствующей ей длины волны.

Уравнения (3.1), полученные как частный случай более общих уравнений (1.1), в свою очередь, являются обобщением целого ряда задач, рассмотренных нами ранее. Так, например, при $k_\xi = k_\theta = 0$ уравнения (3.1) и (3.2) переходят в уравнения устойчивости свободного стержня с одной осью симметрии. При $a_y = \beta_y = e_y = 0$ эти уравнения относятся к рассмотренной в п. 2 § 2 задаче об устойчивости стержня, имеющего две плоскости симметрии и находящегося под действием центрально приложенной продольной нагрузки.

Помимо рассмотренных выше задач уравнения (3.1) и (3.2) позволяют решить ряд новых задач по устойчивости стержней в упругой среде.

Рассмотрим некоторые из этих задач.

1. Из уравнения (3.2) как частный случай легко получаем уравнение критических сил для прямоугольной узкой пластинки, которая имеет по линии $y = h_y$ упругие связи, соответствующие прогибам из плоскости Oyz и углам кручения, и испытывает до потери устойчивости сжатие и изгиб (рис. 186). Для этого нужно в уравнении (3.2) положить $a_y = \beta_y = 0$:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2 - k_\xi & Pe_y \lambda_n^2 - k_\xi h_y \\ Pe_y \lambda_n^2 - k_\xi h_y & -Pr^2 \lambda_n^2 + GJ_d \lambda_n^2 + k_\xi h_y^2 - k_\theta \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Критические силы, определяемые уравнением (3.3), относятся к потере устойчивости пластинки по изгибно-крутильной форме. Эта форма характеризуется тем, что пластинка после потери устойчивости переходит в линейчатую поверхность, получающуюся путем поворота

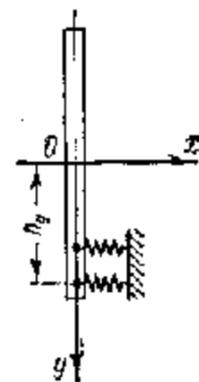


Рис. 186.

поперечных сечений относительно некоторой оси, параллельной образующей; эта ось представляет собой линию центров вращения и лежит в плоскости симметрии на расстоянии

$$e_y = \frac{Pe_y \lambda_n^2 - k_\xi h_y}{EJ_y \lambda_n^4 - Pk_n^2 + k_\xi}$$

от начала координат, которое определяется таким же образом, как и координаты центра вращения в § 4 гл. V. Углы поворота сечений по длине стержня меняются по закону синуса:

$$\theta = C \sin \lambda_n z.$$

Коэффициент C в этом выражении остается неопределенным. Число полуволн синусоиды n подбирается из условия минимума критической силы.

При $k_\xi = k_\theta = 0$ уравнение (3.3) переходит в уравнение критических сил для свободной пластинки. Изгибно-крутильная форма потери устойчивости в этом случае

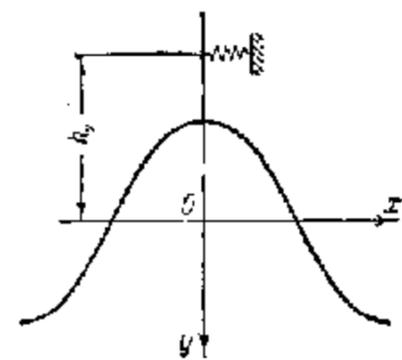


Рис. 187.

характеризуется синусоидой с одной полуволной.

2. Полагая в уравнении (3.2) равным нулю k_θ (коэффициент упругого сопротивления среды вращения), получим уравнение критических сил для стержня, закрепленного упруго только от прогибов из плоскости симметрии (рис. 187). При $EJ_\omega = 0$, $a_y = \xi_y = 0$ и $k_\theta = 0$ уравнение (3.2) относится к устойчивости шарнирно закрепленной по концам пластинки, имеющей по линии $y = h_y$ упругие поперечные связи. Продольные края пластинки — свободные. Уравнение критических сил для такой пластинки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - Pk_n^2 + k_\xi & Pe_y \lambda_n^2 - k_\xi h_y \\ Pe_y \lambda_n^2 - k_\xi h_y & -(Pr^2 - GJ_d) \lambda_n^2 + k_\xi h_y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

3. Полагая в уравнении (3.2) $P = 0$, $Pe_y = -M_x$ при $e_y \rightarrow \infty$, получим уравнение для определения критических значений момента M_x при чистом изгибе в плоскости симметрии:

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 + k_\xi & -M_x \lambda_n^2 - k_\xi (h_y - a_y) \\ -M_x \lambda_n^2 - k_\xi (h_y - a_y) & EJ_\omega \lambda_n^4 + (2\beta_y M_x + GJ_d) \lambda_n^2 + k_\xi (h_y - a_y)^2 + k_\theta \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

4. Для стержня с двумя плоскостями симметрии и при $h_y = 0$ из уравнения (3.5) для критического момента M_x получаем формулу

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 + k_\xi & -M_x \lambda_n^2 \\ -M_x \lambda_n^2 & EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 + k_\theta \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

Число полуволн синусоиды n , как и в предыдущем случае, здесь выбирается из условия минимума критического значения M_x .

§ 4. Устойчивость стержней, жестко закрепленных по линии, параллельной оси

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу об устойчивости стержня в упругой среде, оказывающей сопротивление как изгибу, так и кручению.

При расчете на устойчивость элементов конструкций часто встречается задача об устойчивости тонкостенных стержней, имеющих жесткое закрепление по какой-либо образующей против изгиба и упругое закрепление против кручения.

Такую задачу можно было бы решить путем предельного перехода в формулах предыдущего параграфа к случаю бесконечно больших коэффициентов упругости среды k_ξ и k_θ . Мы здесь решим эту задачу непосредственно, исходя из общих уравнений (1.28) гл. VI устойчивости тонкостенного стержня.

Пусть стержень по линии $x = c_x$, $y = c_y$ жестко закреплен от прогибов и находится в упругой среде, оказывающей сопротивление кручению (рис. 188). С введенным двух жестких поперечных связей стержень в поперечном сечении теряет две степени свободы. Форма потери устойчивости для такого стержня будет изгибно-крутильной с осью вращения, совпадающей с линией закрепления, т. е. каждое сечение стержня может поворачиваться только относительно точки с координатами $x = c_x$, $y = c_y$.

Очевидно, что в момент потери устойчивости по оси вращения будут возникать реактивные силы, являющиеся дополнительной поперечной нагрузкой на стержень. Обозначим компоненты этой дополнительной нагрузки через q_x^* и q_y^* . Кроме того, упругое закрепление против кручения даст дополнительную поперечную нагрузку $m^* = k_\theta \theta$, где k_θ — коэффициент упругости среды против кручения.

Вспомня физический смысл уравнений (1.28) гл. VI, мы можем установить, что эта дополнительная поперечная нагрузка должна стоять вместо нулей в правой части этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - [N(\xi' + a_y \eta')] + (M_x \theta)'' &= q_x^*, \\ EJ_x \eta^{IV} - [N(\eta' - a_x \xi')] + (M_y \theta)'' &= q_y^*, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - [(r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta'] + \\ + [q_x^* (c_x - a_x) + q_y^* (c_y - a_y)] \theta - a_y (N \xi') + a_x (N \eta') + \\ + M_x \xi'' + M_y \eta'' &= m^* + q_y^* (c_x - a_x) - q_x^* (c_y - a_y). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Перемещения ξ , η и θ сечений стержня должны быть положены

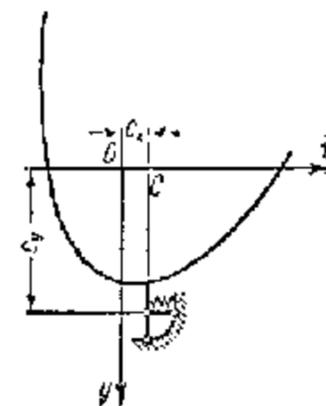


Рис. 188.

ограничивающие условия, выражающие неподвижность точки C :

$$\eta(c_x - a_x) + \xi = 0, \quad -\theta(c_y - a_y) + \xi = 0,$$

откуда

$$\eta = -\theta(c_x - a_x), \quad \xi = \theta(c_y - a_y). \quad (4.2)$$

Заменяя в уравнениях (4.1) ξ и η их выражениями (4.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y(c_y - a_y) \theta^{IV} - (Nc_y \theta') + (M_x \theta)'' &= q_x^*, \\ -EJ_x(c_x - a_x) \theta^{IV} + (Nc_x \theta') + (M_y \theta)'' &= q_y^*, \\ EJ_c \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - [(Nr^2 + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta'] + \\ + [e_x(c_x - a_x) + q_y^*(c_y - a_y)] \theta - a_y(c_y - a_y) (N\theta)' - \\ - a_x(c_x - a_x) (N\theta)' + M_x(c_y - a_y) \theta'' - M_y(c_x - a_x) \theta'' &= \\ = m^* + q_y^*(c_x - a_x) - q_x^*(c_y - a_y). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Из этих трех уравнений можно исключить величины q_x^* и q_y^* , и тогда мы получим одно дифференциальное уравнение устойчивости тонкостенного стержня (жестко закрепленного по линии), соответствующее одной степени свободы поперечного сечения такого стержня.

Для упрощения задачи примем N , M_x и M_y постоянными по длине стержня, т. е. будем рассматривать случай эксцентричного сжатия — растяжения. При этом, учитывая, что

$$M_x = Ne_y = \text{const}, \quad M_y = -Ne_x = \text{const},$$

мы можем уравнениям (4.3) придать вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y(c_y - a_y) \theta^{IV} - N(c_y - e_y) \theta'' &= q_x^*, \\ -EJ_x(c_x - a_x) \theta^{IV} + N(c_x - e_x) \theta'' &= q_y^*, \\ EJ_c \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - N(r^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_x e_x) \theta'' - \\ - N(a_y - e_y)(c_y - a_y) \theta'' - N(a_x - e_x)(c_x - a_x) \theta'' &= \\ = m^* + q_y^*(c_x - a_x) - q_x^*(c_y - a_y). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Подставляя в последнее из уравнений (4.4) значения q_x^* и q_y^* из двух первых уравнений, получим:

$$\begin{aligned} E[J_c + J_x(c_x - a_x)^2 + J_y(c_y - a_y)^2] \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - \\ - N(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \theta'' - N(c_x - a_x)(a_x + c_x - 2e_x) \theta'' - \\ - N(c_y - a_y)(a_y + c_y - 2e_y) \theta'' + k_b \theta = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим теперь, что величина

$$J_c + J_x(c_x - a_x)^2 + J_y(c_y - a_y)^2 = J_{\omega C} \quad (4.6)$$

равна секториальной жесткости сечения $\int \omega_c^2 dF$, определенной относительно точки $x = c_x$, $y = c_y$. Это вытекает из общей формулы изменения секториального момента инерции при смещении полюса из центра изгиба в точку C ; эта формула имеет вид

$$J_{\omega C} = J_{\omega} + J_x c_x^2 + J_y c_y^2 + k^2 F,$$

где c_x и c_y — компоненты вектора смещения полюса; k — некоторый коэффициент, зависящий от c_x , c_y , а также от положения новой начальной точки отсчета секториальных площадей на контуре сечения; эту новую начальную точку всегда можно выбрать таким образом, чтобы k равнялось нулю; при этом $J_{\omega C}$ будет иметь минимальное значение, а соответствующая элипсоидальная секториальная площадь будет ортогональна эллипсу распределения материала по сечению. В последнем нетрудно убедиться, пользуясь выражением (4.3) гл. I для преобразования секториальной площади при переносе полюса и начала отсчета.

Величина $J_{\omega C}$, характеризующая при $k = 0$ жесткость сечения стержня при изгибе с кручением, но без продольной силы, определяется так же, как и J_{ω} , но только полюс берется не в центре изгиба, а в точке c_x , c_y .

Введя выражение $J_{\omega C}$ и изменяя величины r , β_x и β_y их значениями по формулам (1.6) гл. V, мы можем привести уравнение (4.5) к виду:

$$\begin{aligned} EJ_{\omega C} \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - N \left[\frac{J_x + J_y}{F} + c_x^2 + c_y^2 + \right. \\ \left. + e_x \left(\frac{U_y}{J_y} - 2e_x \right) + e_y \left(\frac{U_x}{J_x} - 2e_y \right) \right] \theta'' + k_b \theta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, задаваясь деформацией вида $\theta = C \sin \lambda_n z$, находим критические значения $N = N_{кр}$ для стержня, закрепленного вдоль линии $x = c_x$, $y = c_y$ и шарнирно закрепленного от поворотов по концам (при $z = 0$ и $z = l$, $\theta = \theta'' = 0$):

$$N_{кр} = - \frac{EJ_{\omega C} \lambda_n^2 + GJ_d + \frac{k_b}{\lambda_n^2}}{\frac{J_x + J_y}{F} + c_x^2 + c_y^2 + e_x \left(\frac{U_y}{J_y} - 2e_x \right) + e_y \left(\frac{U_x}{J_x} - 2e_y \right)}, \quad (4.7)$$

где, как и прежде [см. (2.5)], $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.

Критические силы, определяемые формулой (4.7), при заданной длине стержня зависят от числа полуволн синусоиды n . Из всевозможных целочисленных значений величины n за расчетную выбирается та, которая для критической силы даст наименьшее абсолютное значение.

Для бесконечно длинного стержня дается полуволна синусоиды, дающей для критической сжимающей силы $P_{кр} = -N_{кр}$ наименьшее значение, определяется формулой

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ_{\omega C}}{k_{\theta}}} \quad (4.8)$$

Формулу (4.8) мы получили, продифференцировав правую часть выражения (4.7) по λ_n и приравняв производную нулю, совершенно аналогично тому, как это сделано при выводе формул (2.9). Аналогичным образом получим выражение для наименьшей критической силы.

Формула (4.7) позволяет рассчитать стержень на устойчивость при весьма общих предположениях как относительно точки приложения продольной силы на оси симметрии сечения, так и относительно связей, закрепляющих стержень от перемещений в плоскости поперечного сечения.

Из этой формулы как частные случаи можно получить в готовом виде решения отдельных задач по пространственной устойчивости стержней и пластинок.

Рассмотрим некоторые задачи, имеющие практический интерес.

а) Центральное сжатие стержня. Полагая в формуле (4.7) $e_x = e_y = 0$, получим

$$P_{кр} = \frac{EJ_{\omega C} \lambda_n^2 + GJ_d + \frac{k_{\theta}}{2}}{\frac{J_x + J_y}{P} + c_x^2 + c_y^2} \quad (4.9)$$

б) Чистый изгиб. Полагая $N = 0$, $\lim (Ne_y) = M_x$, $e_y \rightarrow \infty$, $e_x = 0$, получим из уравнения (4.7) (освободившись предварительно в правой части от знаменателя) формулу для момента, при котором стержень теряет основную форму изгиба в плоскости Oyz :

$$M_{xкр} = \frac{EJ_{\omega C} \lambda_n^2 + GJ_d + \frac{k_{\theta}}{2}}{2c_y - \frac{U_x}{J_x}} \quad (4.10)$$

в) Стержень, не имеющий упругих связей против кручения. В этом случае коэффициент упругости среды k_{θ} нужно считать равным нулю. Формула (4.7) принимает вид

$$P_{кр} = \frac{EJ_{\omega C} \lambda_n^2 + GJ_d}{\frac{J_x + J_y}{P} + c_x^2 + c_y^2 + e_x \left(\frac{U_y}{J_y} - 2c_x \right) + e_y \left(\frac{U_x}{J_x} - 2c_y \right)} \quad (4.11)$$

Форма потери устойчивости для рассматриваемого случая среды характеризуется синусоидой с одной полуволной на всей длине стержня.

Критическая сила, определяемая формулой (4.11) или (4.7), при заданных упругих и геометрических характеристиках стержня и заданной в плоскости поперечного сечения точке контакта с жесткими поперечными связями, зависит от эксцентриситета приложения силы P . При некоторых значениях эксцентриситета e , определяемого из уравнения

$$\frac{J_x + J_y}{P} + c_x^2 + c_y^2 + e_x \left(\frac{U_y}{J_y} - 2c_x \right) + e_y \left(\frac{U_x}{J_x} - 2c_y \right) = 0, \quad (4.12)$$

эта сила становится равной бесконечности. Если левая часть равенства (4.12) меньше нуля, то критическая сила $N_{кр}$ принимает положительные значения, что указывает на возможность потери устойчивости плоской формы изгиба при внецентренном растяжении (рис. 189).

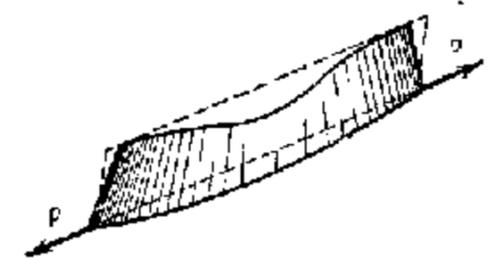


Рис. 189.

Соотношение (4.12) есть уравнение границы устойчивого равновесия стержня при внецентренном сжатии — растяжении. При заданных геометрических характеристиках стержня это уравнение в простой алгебраической форме связывает между собой координаты e_x , e_y и c_x , c_y , определяющие соответственно точку приложения силы N и центр вращения.

Задаваясь положением одной из этих точек, мы можем из уравнения (4.7) определить геометрическое место других точек, дающих для критической силы бесконечно большое значение.

Легко видеть, что при заданном центре вращения геометрическим местом точек приложения силы, дающих бесконечно большое значение для критической силы, будет некоторая прямая; при заданном эксцентриситете геометрическим местом центров вращения, при которых критическая сила обращается в бесконечность, будет окружность. Такой же вид имеют геометрические места соответствующих точек при заданном положении другой точки и заданном конечном значении критической силы.

г) Продольный изгиб стержня. Формулой (4.11) выражена критическая сила $P_{кр}$, соответствующая потере устойчивости стержня в форме кручения относительно заданной прямой $x = c_x$, $y = c_y$.

Меняя координаты c_x и c_y , мы будем получать различные значения для критической силы. При $c_x = \infty$ или $c_y = \infty$ формула (4.11) согласно (4.6) переходит в формулы Эйлера (3.3) гл. V:

$$P_{xкр} = EJ_x \lambda^2, \quad P_{yкр} = EJ_y \lambda^2.$$

Форма потери устойчивости, соответствующая эйлеровской критической силе, независимо от точки приложения этой силы на оси симметрии, будет изгибной, поскольку ось вращения находится в бесконечности.

д) Продольное закручивание стержня относительно центра изгиба. Полагая в формуле (4.7) $c_x = a_x$, $c_y = a_y$, получим

$$P_{кр} = \frac{EJ_{\omega} \lambda_n^2 + GJ_d + \frac{k_0}{\lambda_n^2}}{r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y} \quad (4.13)$$

Формула (4.13) дает критическую силу $P_{кр}$ для стержня, испытывающего сжатие и изгиб в плоскости симметрии и теряющего устойчивость в форме кручения относительно линии центров изгиба.

е) Прямоугольная узкая пластинка. Формула (4.7) позволяет рассчитывать отдельные элементы тонкостенного стержня (пластинки) на местную устойчивость.

Полагая $k_0 = 0$, $U_x = U_y = 0$, $J_x = 0$, получим формулу критической силы для пластинки, имеющей на краях $z = 0$ и $z = l$ шарнирные закрепления, а также закрепленной вдоль линии $x = 0$, $y = c_y$ и нагруженной продольной силой, действующей в плоскости пластинки на расстоянии e_y от середины сечения (рис. 190, а):

$$P_{кр} = \frac{P_y c_y^2 + GJ_d}{\frac{d^2}{12} + e_y (e_y - 2e_x)} \quad (4.14)$$

так как в этом случае, согласно (4.6),

$EJ_{\omega} \lambda_n^2 = EJ_y \lambda_n^2 c_y^2 = P_y c_y^2$, где P_y — эйлеровская сила, вычисляемая по формуле

$$P_y = EJ_y \lambda_n^2 = \frac{E d \delta^3 \pi^2}{12 l^2}$$

причем d и δ — соответственно ширина и толщина пластинки.

При потере устойчивости по крутильной форме пластинка принимает форму линчатой поверхности. Поперечные сечения пластинки, оставаясь плоскими, поворачиваются относительно заданной оси вращения.

Полагая в формуле (4.14) $c_y = -\frac{\sigma}{2}$, $J_d = \frac{1}{3} d \delta^3$, получим формулу критической силы для пластинки с одним свободным и тремя шарнирно опертыми краями (рис. 190, б):

$$P_{кр} = \frac{3P_y d + 4G\delta^3}{4d + 12e_y} \quad (4.15)$$

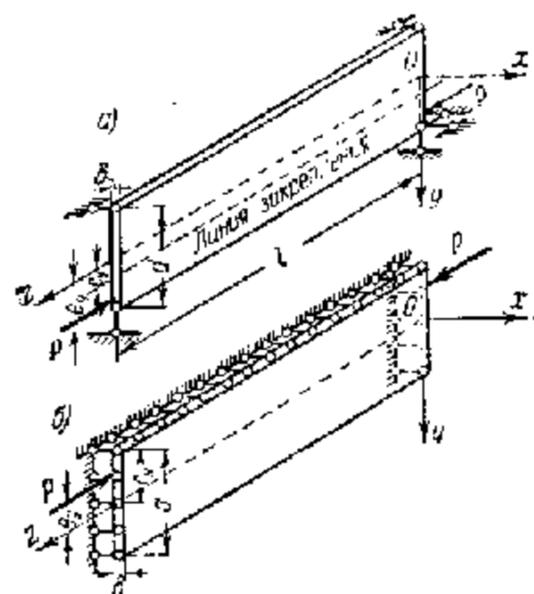


Рис. 190.

Критическая сила, определяемая формулой (4.15), зависит от эксцентриситета e_y приложения этой силы.

При $e_y = -\frac{d}{3}$ знаменатель правой части равенства (4.15) обращается в нуль, и критическая сила становится равной бесконечности.

При $e_y = 0$ получаем формулу критической силы для случая центрального сжатия:

$$P_{кр} = \frac{3}{4} P_y + G \frac{\delta^3}{d} \quad (4.16)$$

Выведенные здесь формулы (4.15) и (4.16) для узких пластинок с отношением длины пластинки к ее ширине $\frac{l}{d} > 4$ дают для критических сил значения, весьма мало отличающиеся от точных значений, полученных Тимошенко с учетом деформации изгиба пластинки по двум направлениям [181].

§ 5. Применение метода возможных перемещений

Если на стержень действует продольная сплошная нагрузка, произвольно распределенная по длине, то в поперечном сечении возникает нормальная сила $N = N(z)$, зависящая от положения сечения по длине стержня. Уравнения (1.1) в этом случае будут с переменными коэффициентами. Для стержня с двумя плоскостями симметрии при упругом закреплении по оси симметрии и при действии одной продольной нагрузки по той же оси, уравнения пространственной устойчивости имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - (N\xi')' + k_\xi \xi &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - (N\eta')' + k_\eta \eta &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} - [(r^2 N + GJ_d) \theta']' + k_\theta \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Средние члены этих уравнений имеют переменные коэффициенты, зависящие от вида функции $N(z)$.

Если внешняя продольная нагрузка имеет постоянную интенсивность q и действует в направлении положительной оси Oz , причем в начальном сечении $z = 0$ нормальная сила $N(0) = 0$, то для $N(z)$ из условия равновесия части стержня получается выражение

$$N(z) = -qz.$$

Уравнения (5.1) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + q(z\xi')' + k_\xi \xi &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + q(z\eta')' + k_\eta \eta &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} + [(r^2 qz - GJ_d) \theta']' + k_\theta \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Уравнения (5.2) и граничные условия полностью описывают явление потери устойчивости вращающегося стержня, находящегося в упругой среде

и обладающего поперечным сечением, для которого центр изгиба совпадает с центром тяжести.

Если интенсивность нагрузки по длине стержня меняется по линейному закону, как это имеет место, например, в сжатых поясах открытых балочных мостов, нагруженных по всему пролету равномерно распределенной поперечной нагрузкой, то функция $N(z)$ представляет собою квадратную параболу.

Действительно, в балке длиной $2l$, при шарнирном закреплении ее концов и выборе начала отсчета в середине балки, изгибающий момент от действия вертикальной, равномерно распределенной нагрузки q определяется по формуле

$$M(z) = \frac{q}{2}(l^2 - z^2).$$

Рассмотрим ферму моста, состоящую из двух поясов: верхнего и нижнего, соединенных между собой стойками, причем верхний пояс сжат, а нижний растянут; для верхнего сжатого пояса фермы получим

$$N(z) = -\frac{q}{2h}(l^2 - z^2), \quad (5.3)$$

где h — расстояние между поясами, а q — погонная нагрузка на одну ферму.

Подставляя выражение (5.3) в уравнения (5.1), найдем:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \xi'] + k_{\xi} \xi &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} + \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \eta'] + k_{\eta} \eta &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} + \left\{ \left[\frac{r^2 q}{2h} (l^2 - z^2) - GJ_d \right] \theta' \right\}' + k_{\theta} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

В уравнениях (5.4) сопротивление отдельных стоек заменено действием упругой среды, которая представлена коэффициентами k_{ξ} , k_{η} и k_{θ} . При расчете на устойчивость сжатого пояса открытого моста эти коэффициенты определяются упругостью стоек фермы. Считая, что эти стойки образуют для сжатого пояса в вертикальной плоскости Oyz жесткое основание, т. е., пренебрегая (в момент потери устойчивости) деформациями удлиненной стоек и исходя из шарнирного присоединения стоек к сжатому поясу, получим для коэффициентов упругости k_{ξ} и k_{θ} среды значения:

$$k_{\xi} = \infty, \quad k_{\theta} = 0.$$

Коэффициент k_{ξ} , входящий в первое из уравнений (5.4), определяется сопротивлением стоек изгибу пояса в горизонтальной плоскости.

Второе уравнение при $k_{\eta} = \infty$ выпадает, поскольку в этом предельном случае прогибы η равны нулю. Остальные два уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} + \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \xi'] + k_{\xi} \xi &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} + \left\{ \left[\frac{r^2 q}{2h} (l^2 - z^2) - GJ_d \right] \theta' \right\}' &= 0. \end{aligned}$$

Если сжатый пояс моста имеет в поперечном сечении одну (вертикальную) ось симметрии и поперечные рамы оказывают упругое сопротивление как изгибу в горизонтальной плоскости, так и кручению, то уравнения устойчивости имеют вид:

$$\begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - (N \xi') + k_{\xi} \xi + a_y (N \theta)' + k_{\xi \theta} \theta &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - r^2 (N \theta)' + k_{\theta} \theta + a_y (N \xi)' + k_{\theta \xi} \xi &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях прежние коэффициенты упругой среды обозначены через k_{ξ} , k_{θ} . Через $k_{\xi \theta}$ и $k_{\theta \xi}$ обозначены новые коэффициенты приведенной упругой среды, представляющие собой соответственно погонные упругие реакции поперечных рам, возникающие вследствие единичного поворота $\theta = 1$ элементарной поперечной полоски верхнего пояса фермы, и моменты поперечных рам, возникающие вследствие единичного смещения $\xi = 1$ поперечной полоски пояса. Таким образом, коэффициентами $k_{\xi \theta}$ и $k_{\theta \xi}$ выражены взаимные силы реакции упругой среды, равные между собой.

В случае равномерно распределенной нагрузки для продольной силы $N(z)$ сжатого пояса моста имеем формулу (5.3).

Уравнения устойчивости будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \xi^{IV} - \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \xi'] + k_{\xi} \xi + \\ + a_y \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \theta'] + k_{\xi \theta} \theta &= 0, \\ EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - r^2 \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \theta'] + k_{\theta} \theta + \\ + a_y \frac{q}{2h} [(l^2 - z^2) \xi'] + k_{\theta \xi} \xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Критическое значение интенсивности поперечной нагрузки, при котором сжатый пояс может потерять устойчивость по изгибно-крутильной форме, определяется однородными дифференциальными уравнениями (5.5) и граничными условиями. Точное определение критической силы по уравнениям (5.5) и граничным условиям представляет собой весьма сложную математическую задачу, поскольку в этих уравнениях имеются переменные коэффициенты. Для практики при удачном выборе форм потери устойчивости достаточную

точность даст метод Бубнова—Галеркина, изложенный подробно в § 6 гл. VI.

В качестве примера рассмотрим стержень, имеющий на концах шарнирные закрепления*). Для форм потери устойчивости зададимся функциями

$$\xi = \sum A_n \sin \lambda_n z, \quad \eta = \sum B_n \sin \lambda_n z. \quad (5.6)$$

Эти функции, как было показано ранее, удовлетворяют условиям шарнирного закрепления.

Уравнения работ на перемещениях m -го члена рядов (5.6) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} & \sum A_n \int_0^l [EJ_y \lambda_n^4 \sin \lambda_n z - (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' - k_z \sin \lambda_n z] \sin \lambda_m z dz + \\ & \quad + \sum B_n \int_0^l [a_y (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' - k_z \sin \lambda_n z] \sin \lambda_m z dz = 0, \\ & \sum A_n \int_0^l [k_y \sin \lambda_n z + a_y (N \lambda_n \cos \lambda_n z)'] \sin \lambda_m z dz + \\ & \quad + \sum B_n \int_0^l [EJ_\omega \lambda_n^4 \sin \lambda_n z + GJ_d \lambda_n^2 \sin \lambda_n z - r^2 (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' + \\ & \quad \quad + k_y \sin \lambda_n z] \sin \lambda_m z dz = 0. \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Полагая в уравнениях (5.7) $m=1, 2, 3, \dots$, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n и B_n ($n=1, 2, 3, \dots$) разложений (5.6).

Приравняв определитель этой системы нулю, получим характеристическое уравнение для определения критических сил. Порядок характеристического уравнения относительно искомой критической силы будет равен удвоенному числу членов разложения. Определение критической силы по характеристическому уравнению системы (5.6) при большом числе членов разложения потребует большой вычислительной работы.

В целях упрощения расчета в данной задаче можно воспользоваться методом последовательных приближений. Мы можем в первой приближении в разложениях (5.6) удерживать по одному члену. Пусть

$$\xi = A_n \sin \lambda_n z, \quad \eta = B_m \sin \lambda_m z. \quad (5.8)$$

Будем считать, что в выражениях (5.8) n и m в общем случае могут иметь разные значения. Уравнения работ при перемещениях (5.8) будут

* Такой вид граничных условий соответствует однопролетному балочному мосту, имеющему на концах шарнирные опоры.

иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} & A_n \int_0^l [EJ_y \lambda_n^4 \sin \lambda_n z - (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' - k_z \sin \lambda_n z] \sin \lambda_n z dz + \\ & \quad + B_m \int_0^l [a_y (N \lambda_m \cos \lambda_m z)' + k_{z0} \sin \lambda_m z] \sin \lambda_n z dz = 0, \\ & A_n \int_0^l [k_y \sin \lambda_n z + a_y (N \lambda_n \cos \lambda_n z)'] \sin \lambda_m z dz + \\ & \quad + B_m \int_0^l [EJ_\omega \lambda_m^4 \sin \lambda_m z + GJ_d \lambda_m^2 \sin \lambda_m z - r^2 (N \lambda_m \cos \lambda_m z)' + \\ & \quad \quad + k_y \sin \lambda_m z] \sin \lambda_m z dz = 0. \end{aligned} \right\} (5.9)$$

Полагая в уравнениях (5.9) побочные члены равными нулю, т. е. пренебрегая в первом приближении взаимной работой реакций упругой среды и пользуясь функцией (5.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} & (EJ_y \lambda_n^4 + k_z) \int_0^l \sin^2 \lambda_n z dz - \frac{q}{2h} \lambda_n^2 \int_0^l (lz - z^2) \sin^2 \lambda_n z dz - \\ & \quad - \frac{q}{2h} \lambda_n \int_0^l (l - 2z) \sin \lambda_n z \cos \lambda_n z dz = 0, \\ & (EJ_\omega \lambda_m^4 + GJ_d \lambda_m^2 + k_y) \int_0^l \sin^2 \lambda_m z dz - \\ & \quad - \frac{r^2 q}{2h} \lambda_m^2 \int_0^l (lz - z^2) \sin^2 \lambda_m z dz - \\ & \quad - \frac{r^2 q}{2h} \lambda_m \int_0^l (l - 2z) \sin \lambda_m z \cos \lambda_m z dz = 0. \end{aligned} \right\} (5.10)$$

Первое уравнение (5.10) относится к изгибной форме потери устойчивости, второе — к крутильной. Раскрывая интегралы и решая эти уравнения относительно критической нагрузки q , получим:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{12 \left(EJ_y \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + k_z \right) h}{n^2 \pi^2 + 9}, \\ q_2 &= \frac{12 \left(EJ_\omega \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k_y \right) h}{r^2 (n^2 \pi^2 + 9)}. \end{aligned} \right\} (5.11)$$

Формулами (5.11) критические силы выражены в функции параметров n и m , определяющих число полуволн синусоид при потере устойчивости по изгибной и крутильной формам в отдельности. Мы можем по этим формулам определять теперь экстремальные значения

параметров n и m , дающие минимум q_1 и q_2 . Таким образом определяется изгибно-крутильная форма потери устойчивости. Подставляя найденные из условия минимума q_1 и q_2 величины n и m в уравнения (5.9) и приравнявая затем определитель этих уравнений нулю, получим

$$\begin{vmatrix} \int_0^l [EJ_y \lambda_n^4 \sin \lambda_n z - (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' + k_{\xi} \sin \lambda_n z] \sin \lambda_n z dz & \int_0^l [a_y (N \lambda_m \cos \lambda_m z)' + k_{\xi} \sin \lambda_m z] \sin \lambda_n z dz \\ \int_0^l [a_y (N \lambda_n \cos \lambda_n z)' + k_{\xi} \sin \lambda_n z] \sin \lambda_m z dz & \int_0^l [EJ_y \lambda_m^4 \sin \lambda_m z + GJ_d \lambda_m^2 \sin \lambda_m z - r^2 (N \lambda_m \cos \lambda_m z)' + k_{\eta} \sin \lambda_m z] \sin \lambda_m z dz \end{vmatrix} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) относительно q — квадратное. Наименьший корень этого уравнения дает расчетную критическую нагрузку. Форма потери устойчивости по длине стержня будет смешанной, складывающейся из деформаций изгиба по синусоиде с n полуволнами и деформаций кручения по синусоиде с m полуволнами.

Учитывая смежные члены разложения, идущие в рядах (5.6) по обе стороны от n и m и составляя таким же способом уравнения работ, получим более точные значения для критической силы. Следует отметить, что изложенный здесь метод определения критической силы обладает весьма хорошей сходимостью, поскольку этот метод по существу основан на разложении определителя бесконечной системы в

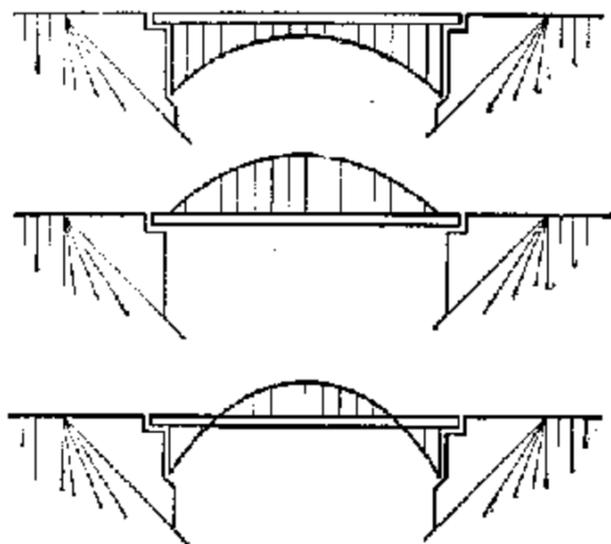


Рис. 191.

окрестности значений величин n и m , дающих для сил q_1 и q_2 наименьшие значения.

1. Применим изложенную теорию к задаче об устойчивости арочных мостов, состоящих из жесткой балки (балки жесткости) в виде конструкции типа тонкостенного стержня и двух сжатых арок. Такие мосты в технической литературе называются мостами системы Лангера и выполняются по одной из трех схем, представленных на рис. 191. Будем для определенности считать, что балка жесткости двутаврового сечения имеет две оси симметрии и поддерживается двумя арками, расположенными в плоскости полок двутавра. Схема поперечного сечения моста показана на рис. 192.

Дифференциальные уравнения устойчивости моста при действии горизонтальной ветровой нагрузки получаются из уравнений устойчивости плоской формы изгиба балок (3.3) гл. VI, если в последние добавить члены, учитывающие влияние сжатых арок. Это влияние выражается в виде приведенной дополнительной нагрузки, передающейся на проезжую часть с каждой арки и возникающей вследствие перехода конструкции моста при потере устойчивости в новое деформированное

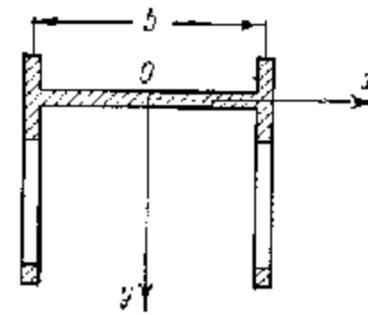


Рис. 192.

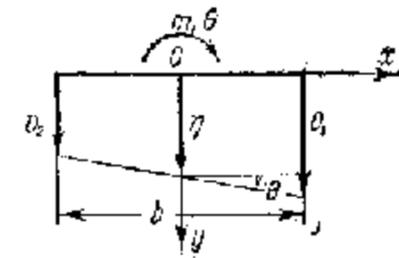


Рис. 193.

состояние. Величина этой приведенной дополнительной нагрузки, передающейся с одной арки, равна $(-Hv'')$, где H — распор каждой арки; v — вертикальные перемещения оси арки, равные прогибам полок двутавра в своей плоскости.

Проекция дополнительной приведенной нагрузки, передающейся с обеих арок на направленные оси Oy , определяется по формуле

$$q_y^0 = -H(v_1'' + v_2''),$$

где v_1 и v_2 — вертикальные перемещения первой и второй арок (рис. 193).

Поскольку сумма вертикальных перемещений обеих арок равна удвоенному перемещению центра тяжести поперечного сечения проезжей части, приведенная вертикальная нагрузка может быть представлена в виде

$$q_y^0 = -2Hv''.$$

Дополнительный приведенный крутящий момент будет равен

$$m^0 = H \frac{b}{2} (v_2'' - v_1''). \quad (6.1)$$

Но из рис. 193 видно, что

$$\frac{v_1 - v_2}{b} = \text{tg } \theta \approx \theta.$$

Поэтому выражение (6.1) примет следующий окончательный вид:

$$m^0 = -H \frac{b^2}{2} \theta''.$$

Внося эти дополнительные нагрузки в уравнения (3.3) гл. VI и учитывая, что в данном случае действует горизонтальная внешняя нагрузка,

получим дифференциальные уравнения пространственной устойчивости арочных мостов:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta^{IV} + 2H\eta'' - (M_y \theta)'' &= 0, \\ M_y \eta'' + EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + H \frac{b^2}{2} \theta'' + q_x e_x \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Однородные дифференциальные уравнения (6.2) вместе с соответствующими однородными граничными условиями определяют бесконечное множество значений q_x , наименьшее из которых будет давать величину критической нагрузки.

2. Чтобы получить дифференциальные уравнения для исследования деформаций и напряжений всякого моста от нагрузок q_y и m с учетом заданного начального напряженного состояния, характеризующегося величинами q_x , M_y , H , нужно правые части уравнений (6.2) считать уже отличными от нуля:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta^{IV} + 2H\eta'' - (M_y \theta)'' &= q_y, \\ M_y \eta'' + EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' + H \frac{b^2}{2} \theta'' + q_x e_x \theta &= m. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Таким образом, система уравнений (6.3) представляет собой дифференциальные уравнения равновесия стержня, находящегося в сложном нагруженном состоянии (помимо внешней поперечной нагрузки стержень испытывает заданное напряженное состояние от бокового действия ветра и распора арок). Из этой системы можно получить и уравнения устойчивости (6.2) и ранее полученные уравнения прочности.

3. Если пролетное строение выполнено в виде тонкостенного стержня замкнутого профиля, то уравнения (6.2) и (6.3) также применимы. Отличие будет заключаться лишь в величине характеристик поперечного сечения J_ω и J_d , относящихся к кручению, и способе их вычисления. О том, как вычисляются эти характеристики для замкнутых профилей, было подробно сказано в § 1 гл. V.

4. Точный метод определения критической нагрузки по уравнениям (6.2) и заданным граничным условиям требует большой вычислительной работы. Задача значительно упрощается, если воспользоваться принципом возможных перемещений, как это было показано в § 6 гл. VI. Полагая

$$\left. \begin{aligned} \eta(z) &= B\psi(z), \\ \theta(z) &= C\chi(z) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

и используя результаты, изложенные в § 6 гл. VI, получим уравнение

для определения критической нагрузки в следующем виде:

$$\left| \begin{array}{cc} \int_0^l [EJ_x (\psi'')^2 - 2H(\psi')^2] dz & q_x \int_0^l \overline{M}_y \psi'' \chi dz \\ q_x \int_0^l \overline{M}_y \psi'' \chi dz & \int_0^l [EJ_\omega (\chi'')^2 + (GJ_d - H \frac{b^2}{2}) (\chi')^2] dz + q_x e_x \int_0^l \chi^2 dz \end{array} \right| = 0, \quad (6.5)$$

где $\alpha = \alpha(z)$ — функция, выражающая закон распределения нагрузки q_x вдоль пролета*; $M_y = \overline{M}_y(z)$ — изгибающий момент от нагрузки $q_x = 1$.

Уравнение устойчивости (6.5) обладает симметрией относительно главной диагонали, идущей из верхнего левого в правый нижний угол, что находится в соответствии с теоремой Бетти о взаимности работ. Наличие указанной симметрии обуславливает вещественность всех значений критической нагрузки, определяемой из уравнения (6.5).

5. В качестве примера рассмотрим устойчивость арочного моста при действии горизонтальной ветровой нагрузки, которую будем считать равномерно распределенной по длине моста. Опирание пролетного строения на устой предполагается шарнирным. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \alpha(z) &= 1, \\ \overline{M}_y &= \frac{z(l-z)}{2}, \\ \psi(z) &= \sin \lambda z, \\ \chi(z) &= \sin \lambda z, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

где $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ (n — целое число).

Функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$, определенные по формулам (6.6), удовлетворяют всем граничным условиям задачи.

Вычисляя интегралы, входящие в уравнение устойчивости (6.5), получим уравнение для определения критической нагрузки в нашем конкретном случае:

$$\left| \begin{array}{cc} EJ_x \lambda^2 - 2H\lambda^2 & \frac{q_x}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2 l^2}{3}\right) \\ \frac{q_x}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2 l^2}{3}\right) & EJ_\omega \lambda^4 + \left(GJ_d - H \frac{b^2}{2}\right) \lambda^2 + q_x e_x \end{array} \right| = 0. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) позволяет найти при заданном распоре H два значения критической нагрузки для каждого значения числа полуволн n . Отметим, что полученные значения q_x будут приближенными, так как функции $\sin \lambda z$ не являются интегралами уравнений (6.2).

* Мы ранее ввели для поперечной ветровой нагрузки параметр q_x , так что эта нагрузка в новом обозначении будет $q_x \alpha(z)$. При критическом значении параметра q_x происходит потеря устойчивости.

Число полуоволн n надо выбирать так, чтобы критическая нагрузка была минимальной. Потеря устойчивости по форме $n=1$ связана с растяжением (сжатием) арок. Поскольку сопротивление арок растяжению значительно больше, чем сопротивление балки жесткости и арок изгибу, эта форма потери устойчивости практически также исключается.

Поэтому в уравнении (6.7) n может принимать целочисленные значения от двух до бесконечности. Обычно минимальная критическая нагрузка получается при $n=2$.

Изменяя в полученных выражениях для q_x какую-либо величину, например H , можно изучить влияние последней на величину критической нагрузки.

Уравнение устойчивости (6.7) можно разрешить не только относительно q_x , но и относительно любой другой величины, например J_x . В этом случае мы определим минимальное значение J_x , которое при заданной боковой нагрузке q_x и прочих заданных величинах обеспечит устойчивость моста.

6. Исследуя зависимость q_x от распора H , можно установить, что при увеличении распора критическая нагрузка уменьшается и даже может при некотором значении H стать равной нулю. В последнем случае мост потеряет устойчивость при действии одной лишь вертикальной нагрузки.

Полагая в уравнении (6.7) $q_x=0$, увидим, что оно распадается на два независимых уравнения:

$$EJ_x \lambda^4 - 2H \lambda^2 = 0, \quad (6.8)$$

$$EJ_\omega \lambda^4 - GJ_d \lambda^2 - H \frac{b^2}{2} \lambda^2 = 0. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.8) определяет критическое значение распора при потере устойчивости в форме изгиба в вертикальной плоскости:

$$H_{кр} = \frac{n^2 \pi^2}{2l^2} EJ_x.$$

Соответствующая этому распору вертикальная, равномерно распределенная критическая нагрузка, приходящаяся на две арки, равна

$$q_{укр} = \frac{8n^2 \pi^2}{l^4} EJ_x f,$$

где f — стрела подъема каждой арки*).

Уравнение (6.9) определяет критическое значение распора, при котором происходит пространственная потеря устойчивости в форме изгибного кручения проезжей части:

$$H_{кр} = \frac{2}{b^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d \right).$$

* Стрела подъема арки длиной l при действии на нее равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q определяется, как известно из строительной механики, по формуле

$$f = \frac{q l^2}{8H}.$$

Соответствующая критическая вертикальная нагрузка в этом случае будет равна

$$q_{укр} = \frac{32f}{b^2 l^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d \right).$$

Согласно сделанным выше замечаниям, минимальная нагрузка получится при $n=2$ и определится по одной из формул

$$q_{укр} = \frac{32\pi f}{l^4} EJ_x \quad (6.10)$$

или

$$q_{укр} = \frac{32f}{b^2 l^2} \left(\frac{4\pi^2}{l^2} EJ_\omega + GJ_d \right).$$

Из полученных двух значений $q_{укр}$ надо выбрать меньшее.

Если пренебречь жесткостью чистого кручения GJ_d , то можно показать, что для двутаврового сечения формулы (6.10) дают одинаковый результат, так как в этом случае $J_\omega = \frac{b^2}{4} J_x$.

§ 7. Пространственная устойчивость висячих мостов

1. Дифференциальные уравнения устойчивости висячих мостов с балкой жесткости в виде тонкостенного стержня симметричного профиля (рис. 194) при действии горизонтальной ветровой нагрузки q_x

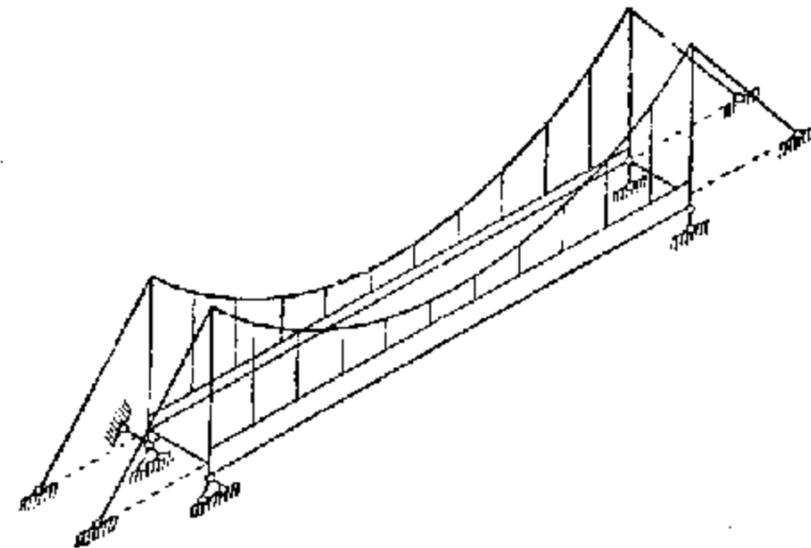


Рис. 194.

получаются из уравнений для арочного моста (см. § 6) заменой знака перед распором H на обратный. В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta^{IV} - 2H \eta'' + (M_y \eta)'' &= 0, \\ M_y \eta'' + EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - H \frac{b^2}{2} \theta'' + q_x e_x \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Применяя, как и в предыдущем параграфе, принцип возможных перемещений к определению критической нагрузки из уравнений (7.1),

получим уравнение устойчивости

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^l [EJ_x (\psi'')^2 + q_x \int_0^l \bar{M}_y \psi'' \chi dz + 2H (\psi')^2] dz \\ & q_x \int_0^l \bar{M}_y \psi'' \chi dz \int_0^l [EJ_\omega (\chi')^2 + (GJ_d + H \frac{b^2}{2}) (\chi')^2] dz + \\ & + q_x e_x \int_0^l \chi^2 a dz \end{aligned} \right\} = 0. \quad (7.2)$$

Поскольку уравнение (7.2) обладает симметричной структурой, все значения критической нагрузки получаются также действительными.

2. Рассмотрим в качестве примера устойчивость Такомакого висячего моста (США) при статическом действии горизонтальной ветровой нагрузки. Ветровую нагрузку будем считать равномерно распределенной вдоль пролета:

$$a(z) = 1.$$

Будем считать также, что проезжая часть опирается на концах шарнирно. При этом будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_y &= \frac{z(l-z)}{2}, \\ \psi(z) &= \sin \lambda z, \quad \chi(z) = \sin \lambda z, \quad \eta(z) = B \sin \lambda z, \quad \theta(z) = C \sin \lambda z. \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Выражения (7.3) при $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ удовлетворяют всем граничным условиям задачи.

Уравнение устойчивости получается из уравнения (6.6) заменой $+H$ на $-H$:

$$\left| \begin{array}{cc} EJ_x \lambda^4 + 2H \lambda^2 & \frac{q_x}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2 l^2}{3} \right) \\ \frac{q_x}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2 l^2}{3} \right) & EJ_\omega \lambda^4 + \left(GJ_d + H \frac{b^2}{2} \right) \lambda^2 + q_x e_x \end{array} \right| = 0. \quad (7.4)$$

Решение уравнения (7.4) представим в форме:

$$q_{кр} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\lambda^2 l^2}{3} \right)^2, \\ b &= -(EJ_x \lambda^4 + 2H \lambda^2) e_x, \\ c &= -(EJ_x \lambda^4 + 2H \lambda^2) \left[EJ_\omega \lambda^4 + \left(GJ_d + H \frac{b^2}{2} \right) \lambda^2 \right]. \end{aligned}$$

Переходя к конкретным числовым данным, будем иметь следующие, взятые нами из работы [87] значения для характеристик поперечного сечения проезжей части, схематично представленного на рис. 195:

$$\begin{aligned} J_x &= 0,0539 \text{ м}^4, \\ J_\omega &= 1,903 \text{ м}^6, \\ J_d &= 1,146 \cdot 10^{-2} \text{ м}^4, \end{aligned}$$

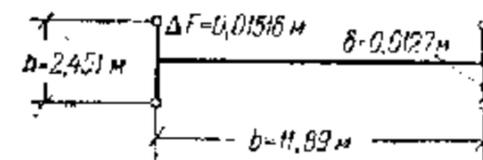


Рис. 195.

пролет моста $l = 853,4 \text{ м}$; распор цепи $H = 5650 \text{ т}$.

Модули упругости материала проезжей части (сталь) примем равными:

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}, \quad G = 0,8 \cdot 10^7 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}.$$

Рассматривая давление ветра лишь на наветренную сторону и пренебрегая отсосом, положим

$$e_x = \frac{b}{2} = 5,944 \text{ м}.$$

Отбрасывая значение $n = 1$ по соображениям, изложенным в предыдущем параграфе, устанавливаем на основании вычислений, что

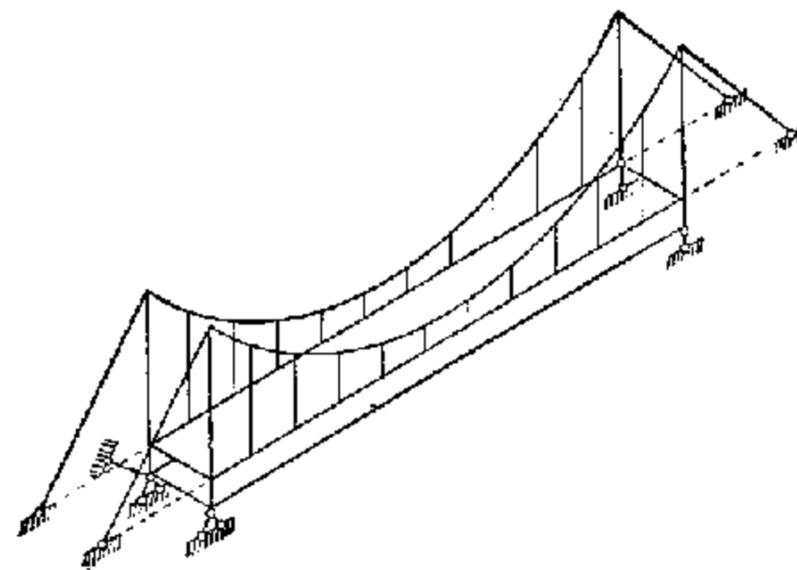


Рис. 196.

потеря устойчивости произойдет по форме с двумя полуволнами. Соответствующая этой форме потеря устойчивости минимальная критическая нагрузка равна

$$q_{кр} = 0,90 \frac{\text{т}}{\text{м}}.$$

8. Устойчивость висячих мостов можно значительно повысить при той же самой затрате материала, если пролетное стропение проезжей части выполнять не в виде тонкостенного открытого профиля, а в виде коробчатого сечения (рис. 196). Жесткость на кручение в последнем

случае значительно возрастает, что соответственно повышает минимальную критическую нагрузку.

4. Увеличению устойчивости висячего моста можно также достичь и при проезжей части в виде открытого профиля с помощью специальных конструктивных мероприятий, увеличивающих жесткость профиля на кручение (см. гл. III). Наиболее эффективными связями являются поперечные бимоментные связи, препятствующие деформации поперечного сечения. Такими связями могут быть планки, стержни решетчатой формы, косые диафрагмы. Для придания конструкции большей изгибно-крутильной жесткости поперечные бимоментные связи должны быть расположены наиболее часто у концов пролетного строения.

§ 8. Приложение теории к расчету устойчивости крыла самолета

1. Рассмотрим задачу об устойчивости плоской формы изгиба стержня прямоугольного коробчатого сечения (кессона), показанного на рис. 197. Будем считать, что поперечное сечение не деформируется в своей плоскости. Конструкция такого типа может являться несущей конструкцией крыла самолета.

Дифференциальные уравнения устойчивости (3.3) гл. VI плоской формы изгиба при действии поперечной нагрузки в плоскости Oxz будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta^{IV} + (M_y \theta)'' &= 0, \\ EJ_\omega \eta^{IV} - GJ_d \theta'' - q_x e_x \theta + M_y \eta'' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где q_x — равнодействующая сил лобового давления на единичную поперечную полоску поверхности крыла, e_x — эксцентриситет точки приложения равнодействующей сил лобового давления q_x .

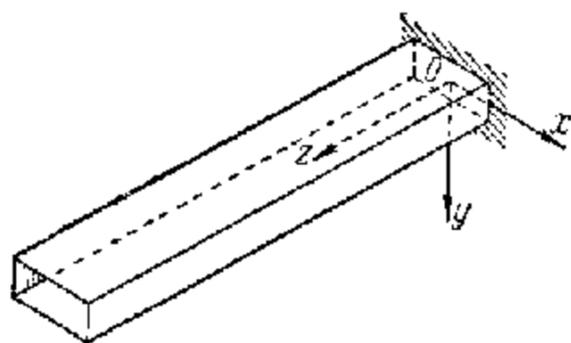


Рис. 197.

Поперечную нагрузку q_x для крыла самолета, движущегося в стационарном воздушном потоке со скоростью v , можно представить как величину, пропорциональную квадрату скорости:

$$q_x = -k v^2, \quad (8.2)$$

где k — аэродинамический коэффициент, зависящий от формы крыла самолета (обтекаемости) и других факторов. Изгибающий момент M_y для случая равномерного распределения q_x вдоль крыла самолета и при граничных условиях, соответствующих жесткой заделке края $z=0$ и свободному от закрепления краю $z=l$, выражается формулой

$$M_y = \frac{q_x (l-z)^2}{2}, \quad (8.3)$$

где l — длина крыла. При подстановке выражения (8.2) формула (8.3) принимает вид

$$M_y = -\frac{k v^2 (l-z)^2}{2}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (8.1) вместе с присоединенными к ним однородными граничными условиями позволяет определить критическую скорость самолета v в стационарном воздушном потоке, при которой крыло может потерять устойчивость плоской формы изгиба, испытывая деформацию изгибного кручения.

Полагая, как и ранее [см. (6.4)],

$$\eta = B\psi(z), \quad \theta = C\chi(z),$$

выбирая функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям задачи и принимая эти же функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ за возможные перемещения изложенного ранее вариационного метода, мы можем характеристическое уравнение рассматриваемой здесь однородной краевой задачи представить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \int_0^l EJ_x (\psi'')^2 dz & q_x \int_0^l \bar{M}_y \chi \psi'' dz \\ q_x \int_0^l \bar{M}_y \chi \psi'' dz & \int_0^l [EJ_\omega (\chi'')^2 + GJ_d (\chi')^2] dz + q_x e_x \int_0^l \alpha \chi^2 dz \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4)$$

Здесь, как и ранее в § 6, $\alpha = \alpha(z)$ — функция, выражающая закон распределения поперечной нагрузки q_x вдоль образующей; $\bar{M}_y = \bar{M}_y(z)$ — изгибающий момент от нагрузки $q_x = 1$.

$$\text{При } \alpha(z) = 1 \quad \bar{M}_y = \frac{(l-z)^2}{2}.$$

Уравнение (8.4) можно разрешить не только относительно q_x , но и относительно любой другой величины, входящей в это уравнение, при прочих заданных величинах. Например, можно найти минимальное значение бимомента инерции J_ω , который при заданных значениях q_x , e_x , EJ_x и GJ_d обеспечивает устойчивость кессона.

2. При рассмотрении задачи о прочности и устойчивости крыла самолета можно считать, что последнее жестко заделано у фюзеляжа и свободно на другом конце. В соответствии с этим для приближенного определения критической нагрузки в качестве функций $\psi(z)$ и $\chi(z)$ можно взять с точностью до произвольного множителя функции статического прогиба консольной балки от равномерно распределенной поперечной нагрузки. Жесткость этой консольной балки, вообще говоря, должна меняться по тому же закону, что и соответствующая жесткость крыла самолета. Однако в порядке первого приближения

можно и для крыльев переменного сечения пользоваться кривыми изгиба балки постоянного сечения [75].

Пусть $\psi(z)$ и $\chi(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $Z^{IV}(z) = 1$ и граничным условиям:

$$Z(0) = Z'(0) = 0, \quad Z''(l) = Z'''(l) = 0.$$

Тогда с точностью до постоянного множителя можем принять:

$$\psi(z) = \chi(z) = z^4 - 4lz^3 + 6l^2z^2. \quad (8.5)$$

Определенные интегралы, входящие в состав определителя (8.4), легко вычисляются:

$$\int_0^l (\psi'')^2 dz = \frac{144}{5} l^5, \quad \int_0^l M_y \chi \psi'' dz = \frac{4}{15} l^5,$$

$$\int_0^l (\chi')^2 dz = \frac{72}{7} l^5, \quad \int_0^l \chi^2 dz = \frac{104}{45} l^5,$$

и определитель (8.4) в раскрытом виде, после некоторых преобразований, принимает вид:

$$v^4 - \frac{936 EJ_x e_x^2}{k^2} v^2 - \frac{5832 EJ_x}{7k^2 l^3} (14 EJ_\omega + 5GJ_d) = 0. \quad (8.6)$$

Уравнением (8.6) определяется критическая скорость самолета.

В качестве функций $\psi(z)$ и $\chi(z)$ можно взять также фундаментальные функции собственных изгибных колебаний. Эти функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению $Z^{IV} = \mu^4 Z$ и соответствующим граничным условиям, описаны в § 13 гл. V.

3. При вычислении геометрических характеристик сечения крыла, входящих в состав коэффициентов дифференциальных уравнений (8.1), мы исходим из формы поперечного сечения кессона, являющегося несущей конструкцией крыла; что же касается обтекаемости, то эта внешняя форма крыла учитывается аэродинамическим коэффициентом k . При вычислении геометрических характеристик кессона закон деформации принимаем не секторный, как для открытых профилей, а аксиальный:

$$\omega = \chi y.$$

Винт момент инерции, следовательно, вычисляем по формуле

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = \int_F x^2 y^2 dF,$$

а момент инерции J_d определяется методами теории чистого кручения. В частности, для профиля, имеющего форму закрытого прямоугольника со сторонами d_1 и d_2 и толщиной δ , геометрические характеристики определяются по формулам (1.18) гл. V.

4. Мы можем также учесть наличие в кессоне предварительного напряженного состояния, возникающего от температурного воздействия или от предварительного натяжения арматуры. В этом случае, на основании изложенного в гл. VII, мы вместо жесткости GJ_d при чистом кручении должны пользоваться приведенной жесткостью $\overline{GJ_d}$, вычисляемой по одной из следующих формул:

а) в случае начального температурного режима — по формуле (5.2) гл. VII

$$\overline{GJ_d} = GJ_d - KT\Phi,$$

б) в случае предварительного натяжения арматуры — по формуле (1.9) гл. VII

$$\overline{GJ_d} = GJ_d - R_k M_k.$$

Соответствующим расположением предварительно натянутой арматуры мы можем уменьшать или увеличивать приведенную жесткость $\overline{GJ_d}$ (см. § 3 гл. VII).

5. Изложенная здесь теория устойчивости конструкции типа крыла самолета описывается однородными дифференциальными уравнениями (8.1) и присоединенными к ним однородными граничными условиями. Параметром этих уравнений является скорость самолета в стационарном воздушном потоке. Если эта скорость меньше критической, то определитель системы (8.1) будет отличен от нуля. В этом случае однородные уравнения (8.1) при однородных же граничных условиях (т. е. при отсутствии внешней нагрузки) будут иметь только нулевые решения.

Если же конструкция находится под действием вертикальной поперечной нагрузки, например подъемной силы крыла самолета, то уравнения (8.1) в этом случае будут неоднородные и правые части этих уравнений будут содержать величины, зависящие от этой нагрузки; неоднородная система уравнений, соответствующая системе (8.1), будет иметь решения, отличные от нулевых. Наличие в левых частях этих неоднородных уравнений членов q_x и M_y , пропорциональных квадрату скорости v , показывает, что общая жесткость конструкции в рассматриваемом случае зависит не только от упругих и геометрических характеристик кессона, но также и от скорости движения самолета. При приближении этой скорости к ее критическому значению изгибно-крутильная жесткость конструкции в целом уменьшается.

6. Несущая конструкция крыла самолета может быть выполнена также в виде тонкостенного коробчатого профиля переменного сечения. Дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба (8.1) в этом случае обобщаются и принимают вид:

$$(EJ_x \eta''')' - (M_y \eta'') = 0, \\ M_y \eta'' + (FJ_\omega \eta'')' - (GJ_d \eta')' + q_x e_x \eta = 0.$$

Характеристическое уравнение (8.4) сохраняет свой вид и для стержня переменного поперечного сечения, отличаясь тем, что в последнем случае характеристики поперечного сечения J_x, J_y, J_d являются уже некоторыми заданными функциями от координаты z .

§ 9. Устойчивость системы, состоящей из цилиндрической оболочки и подкрепляющих ее стержней [54]

Изложенная теория тонкостенных стержней и теория ортотропной безмоментной в одном только продольном направлении цилиндрической оболочки, позволяет разрешить сложную контактную задачу по проч-

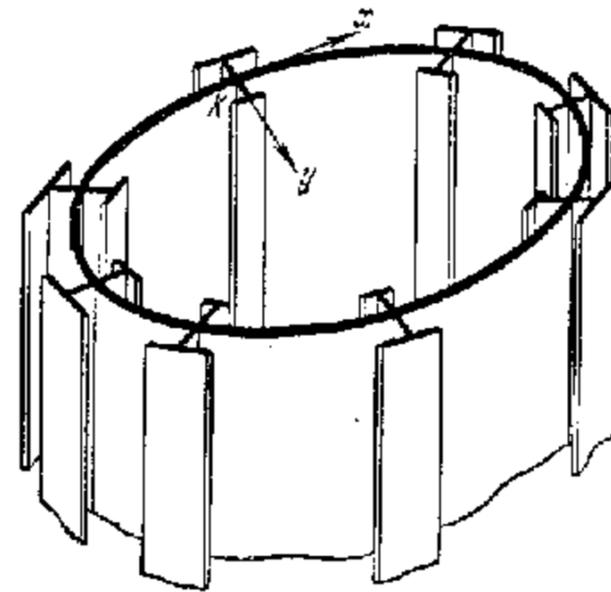


Рис. 198.

ности, устойчивости и колебаниям тонкостенной пространственной системы, состоящей из цилиндрической оболочки и усиливающих ее в продольном направлении стержней-оболочек. Применяя общий вариационный метод к расчету центрально сжатой оболочки (рис. 198) и представляя компоненты деформации на дуге окружности поперечного сечения средней поверхности тригонометрическими функциями $\sin n\beta$, получим для каждого компонента разложения основной разрешающей функции $W=W(z)$ обыкновенное дифференциаль-

ное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами:

$$(AJ_2 - S^2) W^{VI} + \left(2B_2S - AK - B_1J_1 + AK_1 \frac{\rho}{E} \right) W^{IV} + \left(AJ_2 + B_1K - B_2^2 - B_1K_1 \frac{\rho}{E} \right) W'' - B_1J_2 W = 0. \quad (9.1)$$

Входящие в коэффициенты этого уравнения величины вычисляются по формулам, выписанным в табл. 44.

В верхней строке таблицы указан номер разложения основной двумерной функции $\Phi(z, \beta) = \sum_{n=1}^4 W(z) \cos n\beta$ в тригонометрический полином по угловой координате $\beta = s/R$. В левом столбце выписаны определяемые величины. В формулах приняты следующие обозначения: h — толщина оболочки; R — радиус ее средней поверхности; F — площадь поперечного сечения тонкостенного стержня; J_x, J_y — моменты инерции сечения стержня относительно осей, проходящих через точку контакта K профиля стержня с оболочкой.

Таблица 44

	$n=4$	$n=3$	$n=2$	$n=1$
A	$2\pi Rh + 16F$	$2\pi Rh + 8F$	$2\pi Rh + 8F$	$2\pi Rh + 8F$
B_1	$\frac{8\pi h}{R}$	$\frac{9\pi h}{2R}$	$\frac{2\pi h}{R}$	$\frac{\pi h}{2R}$
B_2	$2\pi h$	$\frac{3\pi h}{2}$	πh	$\frac{\pi h}{2}$
J_1	$256J_x$	$8 \left(J_y + 9J_x - \frac{16}{R} J_{\text{ос}} + \frac{64}{R^2} J_{\text{ос}} \right)$	$8 \left(J_y + 4J_x - \frac{6}{R} J_{\text{ос}} + \frac{9}{R^2} J_{\text{ос}} \right)$	$8(J_y + J_x)$
J_2	$7200 \frac{\pi}{R^3} J + 240\pi \frac{q}{G}$	$1152 \frac{\pi}{R^3} J + 72\pi \frac{q}{G}$	$72 \frac{\pi}{R^3} J + 12\pi \frac{q}{G}$	0
S	$64S_x$	$24S_x$	$16S_x$	$8S_x$
K	$\frac{\pi Rh}{2}$	$\frac{\pi Rh}{2} + \frac{255}{R^2} J_d$	$\frac{\pi Rh}{2} + \frac{36}{R^2} J_d$	$\frac{\pi Rh}{2}$
K_1	$34\pi Rh + 256F$	$20\pi Rh + 80F + 128 \frac{S_x}{R} + 512 \frac{J_x + J_y}{R^2}$	$10\pi Rh + 40F + 48 \frac{S_x}{R} + 72 \frac{J_y + J_x}{R^2}$	$4\pi Rh + 16F$

Оси Ky , Kx для стержня выбраны так, что ось Kx направлена по касательной к окружности оболочки, а Ky — по нормали (рис. 199).

Обобщенные координаты $1, x(s), y(s), \omega(s)$ для профиля стержня, при выборе начала отсчета координат осей $x(s), y(s)$ и полюса секториальной площади $\omega(s)$ в точке контакта K , в общем случае не будут

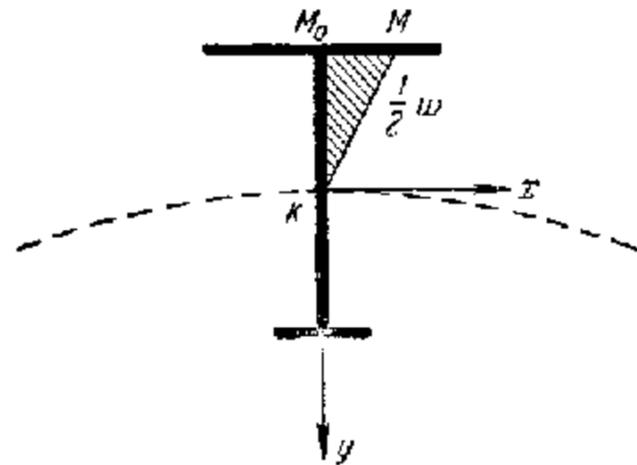


Рис. 199.

ортогональными. J_ω — секториальный момент инерции профиля стержня; S_x — статический момент инерции сечения стержня относительно оси Kx ; $J_{\omega y}$ — секториальный центробежный момент инерции; J_a — момент инерции стержня при чистом кручении; G — модуль упругости при сдвиге; q — интенсивность внутреннего давления. J — приведенный погонный момент инерции оболочки по продольному сечению; этот

момент при усилении оболочки поперечными ребрами следует вычислять с учетом осредненного погонного момента инерции поперечных сечений ребер.

Величины $J_x, J_y, S_x, J_\omega, J_{\omega x}$ для произвольного симметричного профиля с осью симметрии Ky вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF, & J_y &= \int_F x^2 dF, & S_x &= \int_F y dF, \\ J_\omega &= \int_F \omega^2 dF, & J_{\omega x} &= \int_F x\omega dF. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Здесь интегралы вычисляются для всего поперечного сечения стержня; если $\delta = \delta(s)$ — толщина стенки стержня, то $dF = \delta ds$.

Величина p в уравнении (9.1) представляет собой искомое критическое напряжение для рассматриваемой тонкостенной пространственной конструкции при продольном центральном сжатии; E — модуль упругости.

Полагая в уравнении (9.1)

$$W(z) = \sin \frac{\pi z}{\lambda},$$

где λ — длина полуволны синусоиды в продольном направлении, получим уравнение для искомого критического напряжения:

$$\begin{aligned} &-(AJ_1 - S^2) + \left(AK_1 \frac{p}{E} - AK - B_1 J_1 - 2B_2 S \right) \gamma + \\ &+ \left(B_1 K_1 \frac{p}{E} - AJ_2 - B_1 K + B_2^2 \right) \gamma^2 - B_1 J_2 \gamma^3 = 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $\gamma = \lambda^2$. Этим кубическим уравнением и присоединенным к нему условием минимума $\frac{\partial p}{\partial \gamma} = 0$ при заданных величинах A, J_1, S^2, \dots, J_2 определяются три действительных значения искомого продольного критического напряжения p для каждой из четырех рассматриваемых здесь циклических форм деформаций оболочки в поперечном направлении. За расчетное напряжение следует выбрать наименьшее значение $p_{кр}$. Этому напряжению будут соответствовать определенные длины полуволн синусоиды как в поперечном направлении, так и в продольном.

Если в формуле для J_2 положить $q = 0$, то мы будем иметь общее решение по устойчивости оболочки при отсутствии внутреннего давления q . При $p = Aq$ и $q < 0$ будем иметь общее решение задачи по устойчивости оболочки, находящейся под действием внешнего давления.

Если оболочка усилена продольными стержнями, каждый из которых сопротивляется только растяжению (сжатию), как это имеет место, например, в случае железобетонной конструкции, то в приведенных выше формулах следует для каждого стержня положить $J_x = J_y = J_\omega = J_{\omega x} = S_x = J_a = 0$.

При отсутствии поперечных ребер величина J зависит только от толщины h оболочки и вычисляется по формуле $J = \frac{h^3}{12}$. При $J = 0$

будем иметь решение задачи для тонкой безмоментной оболочки, усиленной продольными ребрами. Если же оболочка усилена также и поперечными ребрами, то величина J при достаточно частом расположении этих ребер может быть определена по формуле

$$J = \frac{J_p}{a},$$

где J_p — момент инерции площади совокупного сечения ребра и оболочки в продольном направлении; a — расстояние между поперечными ребрами.

ГЛАВА IX

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
И ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ И КОНСТРУКЦИЙ

§ 1. Дифференциальные уравнения свободных колебаний

Изложенная в настоящей работе общая теория тонкостенных стержней, наряду с проблемами прочности и устойчивости, позволяет также разрешить в общем виде задачу о пространственных колебаниях стержней, обладающих недеформируемым контуром поперечного сечения.

При решении задачи о колебаниях стержней мы будем исходить из принципа Даламбера, формально рассматривая динамическую задачу как задачу статическую с добавлением к силам упругости стержня сил инерции.

Статическая задача о равновесии стержня, как было показано в гл. I, в случае отсутствия внешних сдвигающих сил по продольным краям, приводится к дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} EF\zeta'' + \int_L p_z ds &= 0, \\ EJ_y \xi^{IV} - \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds - q_x &= 0, \\ EJ_x \eta^{IV} - \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds - q_y &= 0, \\ EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' - \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds - m_A &= 0, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где $p_z = p_z(z, s)$ — проекция интенсивности поверхностной нагрузки на направление образующей цилиндрической поверхности; $q_x(z)$ и $q_y(z)$ — проекции интенсивности погонной поперечной нагрузки; $m_A(z)$ — интенсивность внешнего крутящего момента от поперечных нагрузок q_x и q_y относительно центра изгиба.

Переходя к задаче о колебаниях стержня, мы должны перемещения ξ, ζ, η, θ рассматривать как функции двух переменных: абсциссы z и времени t .

Определим инерционные силы, приходящиеся на единицу площади срединной поверхности стержня. В процессе колебаний стержня какая-нибудь точка M срединной поверхности будет совершать движение. Перемещение этой точки представляет собой вектор, зависящий как от положения точки на поверхности (от координат z, s), так и от времени t . Компоненты этого вектора в осях x, y, z определяются формулами (3.4) и (3.16) гл. I:

$$\left. \begin{aligned} \xi_M &= \xi - (y - a_y) \theta, \\ \eta_M &= \eta + (x - a_x) \theta, \\ \zeta_M &= \zeta - \xi'x - \eta'y - \theta'\omega, \end{aligned} \right\} (1.2)$$

в которых ξ, ζ, η и θ суть функции двух переменных z и t . Зная компоненты полного перемещения произвольной точки, мы можем по этим компонентам определить инерционные силы, приходящиеся на единицу площади срединной поверхности. Для этого нужно умножить массу тела, заключенного в объеме параллелепипеда с основанием $dx ds = 1$ и высотой, равной толщине стенки стержня δ , на ускорение по соответствующему направлению. Пролетав это, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= -\frac{\gamma \delta}{g} \frac{\partial^2 \xi_M}{\partial t^2}, \\ p_y &= -\frac{\gamma \delta}{g} \frac{\partial^2 \eta_M}{\partial t^2}, \\ p_z &= -\frac{\gamma \delta}{g} \frac{\partial^2 \zeta_M}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} (1.3)$$

где γ — объемный вес материала стержня, $\delta = \delta(s)$ — толщина стенки стержня, g — ускорение силы тяжести.

Подставляя теперь в формулы (1.3) перемещения точки M , определяемые по формулам (1.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= -\frac{\gamma \delta}{g} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right], \\ p_y &= -\frac{\gamma \delta}{g} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right], \\ p_z &= -\frac{\gamma \delta}{g} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial t^2} x - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t^2} y - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t^2} \omega \right). \end{aligned} \right\} (1.4)$$

Компонентами p_x, p_y, p_z определяется вектор интенсивности поверхностной инерционной силы в произвольной точке M срединной поверхности стержня. По этим компонентам мы можем теперь определить левые факторы q_x, q_y, m_A , входящие в уравнения (1.1). Принимая внимание условия ортогональности функций $1, x(s), y(s)$ и $\omega(s)$,

выраженные формулами:

$$\left. \begin{aligned} \int_F x dF &= \int_F y dF = \int_F xy dF = 0, \\ \int_F \omega dF &= \int_F \omega x dF = \int_F \omega y dF = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

и имея в виду формулы (1.4), получим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \int_L p_x ds = - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \frac{\gamma F}{g}, \\ q_y &= \int_L p_y ds = - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \frac{\gamma F}{g}, \\ m_A &= \int_L [p_y (x - a_x) - p_x (y - a_y)] ds = \\ &= - \left(a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \frac{\gamma F}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Определенные интегралы, входящие в уравнения (1.1), по подстановке в них выражения для p_z из третьей формулы (1.4) и по использовании условий ортогональности (1.5), принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_L p_z ds &= - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, & \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds &= \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2 \partial t^2}, \\ \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds &= \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2 \partial t^2}, & \int_L \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds &= \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Внося в уравнения (1.1) вместо грузовых членов их выражения, определяемые в случае колебаний стержня по формулам (1.6) и (1.7), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EF \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \\ - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) относятся к свободным колебаниям тонкостенного стержня с открытым несформированным в плоскости поперечного сечения профилем произвольного очертания. Первым уравнением независимо от остальных трех уравнений, вместе с граничными и начальными условиями, определяются продольные колебания стержня. Остальные три уравнения образуют в общем случае совокупную симметрично построенную систему, определяющую вместе с граничными и начальными условиями поперечные изгибно-крутильные колебания стержня. В частном случае при $a_x = a_y = 0$, т. е. в случае, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения (что имеет место, например, в случае профиля с двумя осями симметрии), система совместных уравнений (1.8) распадется на независимые дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EF \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Первое из уравнений (1.9), как и в рассмотренном выше общем случае, относится к продольным колебаниям стержня. Второе и третье из уравнений (1.9) относятся к поперечным чисто изгибным колебаниям стержня в главных плоскостях. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений, приводимых в курсах динамики сооружений, наличием средних членов, представляющих собой компоненты инерционных поперечных нагрузок от поворотов поперечного сечения относительно главных осей^{*}).

Последнее уравнение (1.9) относится к вращению элемента стержня относительно продольной оси, проходящей через центр изгиба (в данном случае через центр тяжести), поскольку координаты центра изгиба a_x и a_y равны нулю.

Из приведенного здесь анализа следует, что поперечные изгибные колебания балок в чистом виде (без кручения) возможны только в том случае, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

^{*} В книге С. П. Тимошенко «Теория колебаний в инженерном деле»,ряду с двучленным уравнением вида

$$EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

приводится также уравнение вида второго уравнения (1.9). В теории колебаний блок средним членом по малости обычно пренебрегают.

В общем же случае колебания тонкостенных стержней (как и ребристых сводов-оболочек и ребристых складчатых систем) будут изгибно-крутильные, определяемые совместной системой трех последних уравнений (1.8), и соответствующими граничными и начальными условиями.

§ 2. Интегрирование уравнений колебаний стержней

Уравнения (1.8) линейные однородные, с постоянными коэффициентами, зависящими от физических и геометрических характеристик стержня. Эти уравнения, помимо производных от искомым функций ξ , η и θ по абсциссе z содержат также вторые производные по времени t . Из сказанного следует, что рассматриваемые колебания стержня будут гармоническими. Применяя метод разделения переменных в форме, предложенной Пуассоном, т. е. полагая:

$$\left. \begin{aligned} \xi(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} x_n(z) \sin k_n t, \\ \eta(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \varphi_n(z) \sin k_n t, \\ \theta(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \psi_n(z) \sin k_n t, \\ \theta(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \chi_n(z) \sin k_n t, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

подставляя (2.1) в уравнения (1.8) и сокращая на общий множитель $\sin k_n t$, получим для n -го члена разложения:

$$\left. \begin{aligned} EFx_n'' - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 x_n &= 0, \\ EJ_y \varphi_n^{IV} - \frac{\gamma J_y}{g} k_n^2 \varphi_n'' - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \varphi_n - \frac{\alpha_y \gamma F}{g} k_n^2 \chi_n &= 0, \\ EJ_x \psi_n^{IV} + \frac{\gamma J_x}{g} k_n^2 \psi_n'' - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \psi_n + \frac{\alpha_x \gamma F}{g} k_n^2 \chi_n &= 0, \\ \frac{\alpha_x \gamma F}{g} k_n^2 \psi_n - \frac{\alpha_y \gamma F}{g} k_n^2 \varphi_n + EJ_\omega \chi_n^{IV} - \\ - \left(GJ_d - \frac{\gamma J_\omega}{g} k_n^2 \right) \chi_n'' - \frac{r^2 \gamma F}{g} k_n^2 \chi_n &= 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Дифференциальные уравнения (2.2) — обыкновенные, однородные. Коэффициенты этих уравнений образуют симметричную матрицу и зависят как от физических и геометрических характеристик стержня, так и от квадрата частоты колебаний k_n^2 . Симметричная структура уравнений (2.2), как и уравнений (1.8), есть следствие принципа взаимности Бетти, являющегося общим принципом линейной динамической теории упругости. Однородными дифференциальными уравнениями (2.2) при однородных граничных условиях определяются фундаментальные числа

и соответствующие им фундаментальные функции рассматриваемой краевой задачи. Поскольку уравнения (2.2) имеют симметричную структуру, фундаментальные числа будут действительные. Эти числа, как известно из теории линейных интегральных уравнений с симметричными регулярными ядрами, образуют спектр, состоящий из дискретных точек. Мы получим таким образом для заданной однородной краевой задачи, описываемой системой однородных дифференциальных уравнений (2.2) и однородными самосопряженными граничными условиями, счетное множество фундаментальных чисел, определяемых соответствующим характеристическим трансцендентным уравнением. Этими фундаментальными числами определяются все частоты продольных [из первого уравнения (2.2)] и изгибно-крутильных [из системы трех последних уравнений (2.2)] колебаний тонкостенного стержня, обладающего жестким контуром в плоскости поперечного сечения.

Рассмотрим задачу о колебаниях стержней, у которых концевые сечения шарнирно отперемещены ξ , η и θ , т. е. концевые сечения, будучи закреплены от прогибов ξ и η и угла кручения θ , могут перемещаться свободно из плоскости сечений. Эти граничные условия соответствуют опиранию стержня или цилиндрической оболочки на жесткие в своей плоскости и гибкие из своей плоскости диафрагмы, поставленные в концевых сечениях, и близко соответствуют реальным условиям опирания оболочек по криволинейным краям. Выбирая начало координаты z на одном из концов стержня и обозначая длину этого стержня (расстояние между опорными диафрагмами) через l , мы можем граничные условия в этом случае записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0; \\ \text{при } z=l \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Равенство нулю вторых производных от перемещений ξ , η и θ следует из условия отсутствия на концах стержня нормальных напряжений σ , которые, как показано нами ранее, выражаются линейно через вторые производные от прогибов ξ и η и угла кручения θ .

Граничные условия (2.3) относительно искомым функций φ_n , ψ_n и χ_n , входящих в уравнения (2.2) и являющихся коэффициентами выражений (2.1), представляются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \varphi_n = \psi_n = \chi_n = 0, \quad \varphi_n'' = \psi_n'' = \chi_n'' = 0; \\ \text{при } z=l \quad \varphi_n = \psi_n = \chi_n = 0, \quad \varphi_n'' = \psi_n'' = \chi_n'' = 0. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Условия (2.4) относятся к изгибно-крутильным колебаниям стержня с шарнирно-закрепленными концами. Продольные колебания, выраженные первым уравнением (2.2), мы не рассматриваем, поскольку мы получили для этих колебаний известное волновое уравнение.

Так как уравнения (2.2) содержат искомые функции и четные производные от этих функций, и коэффициенты этих уравнений не зависят от переменной интегрирования, то фундаментальные функции изгибно-крутильных колебаний стержня при граничных условиях (2.4) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= A_n \sin \lambda_n z, \\ \psi_n &= B_n \sin \lambda_n z, \\ \chi_n &= C_n \sin \lambda_n z, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, n — любое целое положительное число, A_n, B_n, C_n — постоянные величины, зависящие от номера члена разложения.

Подставляя выражения (2.5) в дифференциальные уравнения (2.2) и сокращая каждое из этих уравнений на общий множитель $\sin \lambda_n z$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(EJ_y \lambda_n^4 - \frac{\gamma J_y}{g} \lambda_n^2 k_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \right) A_n - \frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 C_n &= 0, \\ \left(EJ_x \lambda_n^4 - \frac{\gamma J_x}{g} \lambda_n^2 k_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \right) B_n - \frac{a_x \gamma F}{g} k_n^2 C_n &= 0, \\ -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 A_n - \frac{a_x \gamma F}{g} k_n^2 B_n + \\ + \left[EJ_w \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 - (J_w \lambda_n^2 + r^2 F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 \right] C_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Функции (2.5), как мы видим, удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.2) при условии, если коэффициенты A_n, B_n и C_n удовлетворяют линейным однородным алгебраическим уравнениям (2.6). Следовательно, функции (2.5), образующие полную систему функций и обладающие в интервале $(0 \div l)$ свойством ортогональности, являются фундаментальными функциями рассматриваемой краевой задачи. Частоты изгибно-крутильных колебаний стержня k_n определяются из условия обращения в нуль определителя системы (2.6):

$$\begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - (J_y \lambda_n^2 + F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 & 0 & -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 \\ 0 & EJ_x \lambda_n^4 - (J_x \lambda_n^2 + F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 & \frac{a_x \gamma F}{g} k_n^2 \\ -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 & \frac{a_x \gamma F}{g} k_n^2 & EJ_w \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 - (J_w \lambda_n^2 + r^2 F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) — кубическое относительно квадрата частоты k_n^2 . Корни этого уравнения действительные. Каждому значению величины λ_n (или, что же самое, значению n), характеризующей вместе с выражениями (2.5) изгибно-крутильные колебания, соответствуют три значения

частоты колебаний стержня. Этим частотам соответствуют три формы поперечных колебаний стержня. Каждая из этих форм характеризуется тем, что поперечные сечения поворачиваются относительно некоторой оси, параллельной образующей стержня. Координаты центра вращения в плоскости поперечного сечения определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_{nx} &= \frac{1 - \frac{\gamma}{Eg} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2}}{1 - \frac{\gamma}{Eg} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \left(1 - \frac{F}{J_x \lambda_n^2} \right)} a_x, \\ c_{ny} &= \frac{1 - \frac{\gamma}{Eg} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2}}{1 - \frac{\gamma}{Eg} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{F}{J_y \lambda_n^2} \right)} a_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Формулы (2.8) получаются из первых двух формул (1.2) при использовании условий неподвижности точки с координатами (c_x, c_y) , первых двух уравнений (2.6) и выражений (2.1) и (2.5).

Таким образом, каждой синусоидальной форме колебаний (каждому значению λ_n) соответствуют три центра вращения и три формы колебаний в поперечном сечении.

В частном случае при $a_x = a_y = 0$, т. е. в случае, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, для корней уравнения (2.7) получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} k_{nx}^2 &= \frac{EJ_x \lambda_n^4}{J_x \lambda_n^2 + F} \frac{g}{\gamma}, \\ k_{ny}^2 &= \frac{EJ_y \lambda_n^4}{J_y \lambda_n^2 + F} \frac{g}{\gamma}, \\ k_{nw}^2 &= \frac{EJ_w \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2}{J_w \lambda_n^2 + r^2 F} \frac{g}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Первыми двумя формулами определяются частоты изгибных колебаний стержня, при которых поперечные сечения стержня в плоскости сечения $z = \text{const}$ получают одни только поступательные перемещения, параллельные главным осям сечения. Эти формулы отличаются от обычных формул, приводимых в различных курсах, наличием в знаменателе членов $J_x \lambda_n^2, J_y \lambda_n^2$, происходящих от инерционных сил вращения элемента балки $dz = 1$ относительно главных осей сечения.

Пренебрегая этими инерционными силами, мы получим для частот поперечных колебаний формулы, совпадающие с формулами, приведенными,

например, в книге С. П. Тимошенко [179]:

$$k_{nx}^2 = \frac{EJ_x \lambda_n^4}{F} \frac{g}{\gamma},$$

$$k_{ny}^2 = \frac{EJ_y \lambda_n^4}{F} \frac{g}{\gamma}.$$

Последняя формула (2.9) дается нами, по-видимому, впервые. Этой формулой определяются частоты круглых колебаний тонкостенного стержня открытого профиля с жестким контуром. При этих колебаниях поперечные сечения поворачиваются относительно центра изгиба, совпадающего в данном случае с центром тяжести сечения. Если пренебречь, как и в случае изгибных колебаний, инерционными силами от продольных секториальных перемещений материальных точек стержня, то третья формула (2.9) примет более простой вид:

$$k_{nm}^2 = \frac{EJ_{\omega} \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2}{J_x + J_y} \frac{g}{\gamma}.$$

Заметим, что указанные здесь упрощения формул (2.9) дают небольшую погрешность только для тонкостенных стержней, применяемых в строительных и авиационных конструкциях. В случае же ребристых сводов-оболочек и складчатых покрытий, обладающих недеформируемым (при наличии поперечных ребер жесткости) контуром, пренебрежение продольными инерционными силами может привести к большим погрешностям. Поэтому при определении частот колебаний тонкостенных конструкций с весьма развитым поперечным сечением следует исходить из более точных формул (2.9) для сечений с двумя осями симметрии и уравнения (2.7) для произвольных несимметричных открытых профилей.

Рассмотрим теперь стержень, имеющий в поперечном сечении одну ось симметрии. Обозначая эту ось через Oy , имеем: $a_x = 0$. Уравнение (2.7) в этом случае распадается на два уравнения, из которых одно будет уравнением первой степени, а другое — уравнением второй степени относительно квадрата частоты:

$$EJ_x \lambda_n^4 - (J_x \lambda_n^2 + F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} EJ_y \lambda_n^4 - (J_y \lambda_n^2 + F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 & - \frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 \\ - \frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 & EJ_{\omega} \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 - \\ & - (J_{\omega} \lambda_n^2 + r^2 F) \frac{\gamma}{g} k_n^2 \end{aligned} \right\} = 0, \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Первое уравнение дает частоты изгибных колебаний балки в плоскости симметрии Oyz . Второе уравнение при заданном числе полуволи синусоиды (заданном значении величины n) дает для частоты два действительных положительных значения, соответствующих формам изгибно-крутильных колебаний стержня.

§ 3. Колебание стержней, нагруженных продольной силой

Рассмотрим задачу о колебаниях тонкостенных упругих стержней, нагруженных по концам в общем случае эксцентрично приложенной продольной сжимающей (или растягивающей) силой P . Пусть координаты точки приложения сжимающей силы P в плоскости поперечного сечения стержня будут e_x, e_y . Предположим, что эта сила является равнодействующей элементарных продольных сил, распределенных на концевых сечениях стержня по линейному закону. Тогда нормальные напряжения n в любой точке стержня в состоянии равновесия определяются по формуле

$$n = -\frac{P}{F} - \frac{Pe_x}{J_y} x - \frac{Pe_y}{J_x} y.$$

Составим уравнения движения элементарной поперечной полоски стержня dz , нагруженной по сечениям $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ продольными силами $n\delta$ [$\delta = \delta(s)$ — толщина стенки стержня]. Эти уравнения мы получим путем обобщения уравнений (1.8), присоединяя к силам упругости и инерционным силам, выраженным левыми частями уравнений, приведенные поперечные нагрузки q_{xP}, q_{yP} и крутящие моменты m_{AP} , получающиеся от заданных продольных сил вследствие изменения (при колебаниях) деформированного состояния срединной поверхности стержня. Для задачи об устойчивости стержня при малых перемещениях ξ, η и θ нами получены следующие формулы для этих сил (см. § 1 гл. V):

$$q_{xP} = -[P\xi'' - P(e_y - a_y)\theta''],$$

$$q_{yP} = -[P\eta'' + P(e_x - a_x)\theta''],$$

$$m_{AP} = -[-P(e_y - a_y)\xi'' + P(e_x - a_x)\eta'' +$$

$$+ P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y)\theta''],$$

где r^2, β_x и β_y — геометрические характеристики сечения стержня, определяемые по формулам (1.6) и (1.7) гл. V.

Добавляя нагрузки q_{xP}, q_{yP} и моменты m_{AP} к левым частям уравнений (1.8) и отбрасывая первое уравнение, относящееся к продольным колебаниям, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\gamma F a_y}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \\ - P(e_y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \\ EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \\ + P(e_x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma F a_y}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P(e_y - a_y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P(e_x - a_x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \\ & + \left[EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right] + \frac{\gamma F r^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\ & + P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) — линейные, однородные, с коэффициентами, зависящими как от упругих и геометрических характеристик стержня, так и от величины продольной силы P и координат e_x, e_y точки приложения этой силы в плоскости поперечного сечения*).

Этими уравнениями и однородными граничными условиями определяются изгибно-крутильные формы и частоты колебаний стержня, нагруженного продольной силой. Из уравнений (3.1) видно, что свободные колебания нагруженных стержней будут гармоническими. Полагая, как и ранее [см. (2.1)]:

$$\left. \begin{aligned} \xi(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \varphi_n(z) \sin k_n t, \\ \eta(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \psi_n(z) \sin k_n t, \\ \theta(z, t) &= \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \chi_n(z) \sin k_n t \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

и подставляя (3.2) в уравнения (3.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \varphi_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_y}{g} k_n^2 + P \right) \varphi_n'' - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \varphi_n - \frac{\gamma F a_y}{g} k_n^2 \chi_n - \\ - P(e_y - a_y) \chi_n = 0, \\ EJ_x \psi_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_x}{g} k_n^2 + P \right) \psi_n'' - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \psi_n + \frac{\gamma F a_x}{g} k_n^2 \chi_n + \\ + P(e_x - a_x) \chi_n = 0, \\ EJ_\omega \chi_n^{IV} + \left[P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) + \frac{\gamma J_\omega}{g} k_n^2 - GJ_d \right] \chi_n'' - \\ - \frac{\gamma F r^2}{g} k_n^2 \chi_n - \frac{\gamma F a_y}{g} k_n^2 \varphi_n - P(e_y - a_y) \varphi_n - \frac{\gamma F a_x}{g} k_n^2 \psi_n - \\ - P(e_x - a_x) \psi_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

* Если в уравнениях (3.1) продольную силу P рассматривать как заданную функцию от времени t : $P = P(t)$, то эти уравнения будут относиться к общей теории пространственной динамической устойчивости тонкостенных стержней. При $P(t) = P_0 \cos(\rho t)$ будем иметь систему 3-х уравнений с периодическими коэффициентами. Некоторые частные задачи этой теории рассмотрены в работах В. В. Болотина и И. И. Гольденבלата [19, 67].

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) вместе с однородными граничными условиями определяются фундаментальные числа и фундаментальные функции краевой задачи.

В частном случае при граничных условиях (2.4), соответствующих стержню со свободными шарнирными опорами, фундаментальными будут функции $\sin \frac{n\pi}{l} z$. Подставляя выражения для искомых функций φ_n, ψ_n и χ_n (2.5) в уравнения (3.3), получим для коэффициентов A_n, B_n и C_n систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[EJ_y k_n^4 - \left(\frac{\gamma J_y}{g} k_n^2 + P \right) k_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \right] A_n - \\ - \left[\frac{\gamma F a_y}{g} k_n^2 - P(e_y - a_y) k_n^2 \right] C_n = 0, \\ \left[EJ_x k_n^4 - \left(\frac{\gamma J_x}{g} k_n^2 + P \right) k_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 \right] B_n + \\ + \left[\frac{\gamma F a_x}{g} k_n^2 - P(e_x - a_x) k_n^2 \right] C_n = 0, \\ - \left[\frac{\gamma F a_y}{g} k_n^2 - P(e_y - a_y) k_n^2 \right] A_n + \left[\frac{\gamma F a_x}{g} k_n^2 - P(e_x - a_x) k_n^2 \right] B_n + \\ + \left\{ EJ_\omega k_n^4 - \left[P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) - GJ_d + \frac{\gamma J_\omega}{g} k_n^2 \right] k_n^2 - \right. \\ \left. - \frac{\gamma F r^2}{g} k_n^2 \right\} C_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) линейные, однородные, с коэффициентами, зависящими от геометрических и физических характеристик стержня, от величины продольной силы и координат точек приложения этой силы, от параметра k_n , характеризующего длину полуволны синусоиды $\sin k_n z$ и от частоты колебаний k_n^2 , соответствующей n -й синусоидальной форме изменения деформаций по длине стержня. Приравнявая определитель системы уравнений (3.4) нулю, получим для определения частот колебаний следующее уравнение:

$$\left| \begin{array}{ccc} P_{ay} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2} \right) - P & 0 & - \frac{\gamma F a_y}{g} \frac{k_n^2}{k_n^2} + P(e_y - a_y) \\ 0 & P_{nx} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2} \right) - P & \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{k_n^2}{k_n^2} - P(e_x - a_x) \\ - \frac{\gamma F a_y}{g} \frac{k_n^2}{k_n^2} + P(e_y - a_y) & \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{k_n^2}{k_n^2} - P(e_x - a_x) & P_{n\omega} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n\omega}^2} \right) r^2 - \\ & & - P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \end{array} \right| = 0. \quad (3.5)$$

Здесь для краткости приняты обозначения (3.3), (3.4) гл. V и (2.9):

$$\begin{aligned} P_{nx} &= EJ_x \lambda_n^2, & k_{nx}^2 &= \frac{EJ_x \lambda_n^2}{J_x \lambda_n^2 + F \gamma} \frac{g}{\gamma}, \\ P_{ny} &= EJ_y \lambda_n^2, & k_{ny}^2 &= \frac{EJ_y \lambda_n^2}{J_y \lambda_n^2 + F \gamma} \frac{g}{\gamma}, \\ P_{n\omega} &= \frac{1}{r^2} (EJ_\omega \lambda_n^2 + GJ_d), & k_{n\omega}^2 &= \frac{EJ_\omega \lambda_n^2 + GJ_d \lambda_n^2}{J_\omega \lambda_n^2 + Fr^2} \frac{g}{\gamma}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Уравнением (3.5) для каждой синусоидальной формы $\sin \lambda_n z$ определяются три частоты, соответствующие трем изгибно-крутильным формам колебаний стержня. Координаты центров вращения поперечных сечений стержня определяются по формулам:

$$\begin{aligned} e_{nx} &= \frac{\left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{P_{nx} \lambda_n^2}\right) a_x - \frac{P}{P_{nx}} e_x}{1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2} - \frac{P}{P_{nx}}}, \\ e_{ny} &= \frac{\left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{P_{ny} \lambda_n^2}\right) a_y - \frac{P}{P_{ny}} e_y}{1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2} - \frac{P}{P_{ny}}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Полагая в уравнении (3.5) $e_x = e_y = 0$, получим уравнение частот для стержня, нагруженного центральной продольной сжимающей силой P :

$$\begin{vmatrix} P_{ny} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2}\right) - P & 0 & -\left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + P\right) a_y \\ 0 & P_{nx} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2}\right) - P & \left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + P\right) a_x \\ -\left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + P\right) a_y & \left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + P\right) a_x & \left[P_{n\omega} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n\omega}^2}\right) - P\right] r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

2) Меняя в уравнении (3.6) знак перед силой на обратный, получим уравнение частот для стержня, нагруженного центрально растягивающей силой P :

вающей силой P :

$$\begin{vmatrix} P_{ny} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2}\right) - P & 0 & -\left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} - P\right) a_y \\ 0 & P_{nx} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2}\right) + P & \left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} - P\right) a_x \\ -\left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} - P\right) a_y & \left(\frac{\gamma F}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} - P\right) a_x & \left[P_{n\omega} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n\omega}^2}\right) + P\right] r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Полагая в уравнении (3.5) $P = e_x = 0$, а произведение $Pe_y = -M_x = \text{const}$ величиной конечной, получим уравнение частот для стержня, нагруженного по концам изгибающими моментами M_x , действующими в плоскости Oyz и вызывающими в стержне (в статическом состоянии) нормальные напряжения $n = \frac{M_x}{J_x} y$:

$$\begin{vmatrix} P_{ny} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2}\right) & 0 & -\left(\frac{\gamma F a_y}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + M_x\right) \\ 0 & P_{nx} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2}\right) & \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \\ -\left(\frac{\gamma F a_y}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} + M_x\right) & \frac{\gamma F a_x}{g} \frac{k_n^2}{\lambda_n^2} & P_{n\omega} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n\omega}^2}\right) r^2 + 2\beta_y M_x \end{vmatrix} = 0.$$

4) При $a_x = a_y = \beta_x = \beta_y = 0$ уравнение (3.5) переходит в уравнение, определяющее все частоты колебаний для стержня, имеющего в поперечном сечении две оси симметрии и нагруженного продольной силой P , приложенной в произвольной точке сечения (e_x, e_y):

$$\begin{vmatrix} P_{ny} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{ny}^2}\right) - P & 0 & P e_y \\ 0 & P_{nx} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{nx}^2}\right) - P & -P e_x \\ P e_y & -P e_x & \left[P_{n\omega} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n\omega}^2}\right) - P\right] r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

5) При $a_x = a_y = e_x = e_y = 0$ уравнение (3.5) дает для частот колебаний следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{nx}^2 &= \left(1 - \frac{P}{P_{nx}}\right) k_{nx}^2, \\ \bar{k}_{ny}^2 &= \left(1 - \frac{P}{P_{ny}}\right) k_{ny}^2, \\ \bar{k}_{n\omega}^2 &= \left(1 - \frac{P}{P_{n\omega}}\right) k_{n\omega}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Формулы (3.7) относятся к колебаниям стержней, нагруженных силой P центрально и имеющих центр изгиба в центре тяжести сечения.

Первыми двумя формулами определяются частоты изгибных колебаний стержней в главных центральных плоскостях. Последней формулой определяются частоты крутильных колебаний с центром вращения, совпадающим с центром тяжести сечения. Из формул (3.7) видно, что с увеличением сжимающей силы P частоты колебаний уменьшаются.

б) Если величина продольной силы стремится к критическому значению, определяемому в общем случае полученным нами ранее уравнением

$$\begin{vmatrix} P_{ny} - P & 0 & P(e_y - a_y) \\ 0 & P_{nx} - P & -P(e_x - a_x) \\ P(e_y - a_y) & -P(e_x - a_x) & P_{nw} - P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \end{vmatrix} = 0,$$

то частота колебаний такого стержня стремится к нулю. Период колебаний будет равен бесконечности.

Помимо рассмотренных здесь частных случаев, уравнение (3.5) позволяет решить и другие задачи по колебаниям стержней, нагруженных продольной силой. Из этого уравнения можно, например, при заданной синусоидальной форме и частоте колебаний k_n^2 определить значение силы P , т. е. варьируя параметр P , настроить стержень на определенный тон.

Решение такой задачи может иметь практическое значение в акустике тонкостенных упругих стержней, совершающих изгибно-крутильные колебания.

Изложенная здесь теория пространственных колебаний стержней, нагруженных по концам продольными силами и моментами, может быть использована при экспериментальной проверке теории пространственной устойчивости стержней акустическим методом. На основе этой теории легко также решается в общем виде задача о вынужденных изгибно-крутильных колебаниях тонкостенных стержней, имеющая большое практическое значение при проектировании конструкций в самолетостроении.

§ 4. Действие нагрузки, меняющейся во времени

Полученные в § 1 дифференциальные уравнения свободных колебаний (1.8) могут быть использованы для расчета тонкостенных стержней, а также тонкостенных ребристых оболочек и складок, применяемых в качестве конструкций для перекрытия больших пролетов, при действии сил, меняющихся во времени по произвольному закону.

Если вместо нуля записать в правых частях уравнений (1.8) величины соответствующих компонентов возмущающих сил^{*}, то уравнения

^{*} Первое из уравнений (1.8), описывающее продольные колебания, как и ранее, отбрасываем.

движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= q_x(z, t), \\ EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= q_y(z, t), \\ \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \\ &- \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = m_A(z, t). \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Эти уравнения в общем случае образуют совместную систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\xi = \xi(z, t)$, $\eta = \eta(z, t)$ и $\theta = \theta(z, t)$ и определяют пространственные изгибно-крутильные колебания.

Если стержень имеет вертикальную ось симметрии (ось Oy), то система (4.1) распадается на две независимые группы:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= q_y(z, t), \\ EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= q_x(z, t), \\ \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= m_A(z, t). \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Первое из уравнений (4.2), содержащее лишь частные производные функции $\eta = \eta(z, t)$, представляет собой уравнение вертикальных чисто изгибных вынужденных колебаний.

Второе и третье из уравнений (4.2) образуют совместную систему дифференциальных уравнений и определяют совместно с граничными условиями пространственные изгибно-крутильные колебания.

Если же стержень имеет две оси симметрии, то система (4.1) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= q_y(z, t), \\ EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= q_x(z, t), \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{r^2 \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= m_A(z, t). \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Первые два уравнения (4.3) относятся к изгибным колебаниям в вертикальной и горизонтальной плоскостях; последнее уравнение — к крутильным колебаниям, при которых поперечное сечение поворачивается вокруг центра изгиба, совпадающего в данном случае с центром тяжести сечения.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания ребристой оболочки, имеющей в поперечном сечении вертикальную ось симметрии и опирающейся по криволинейным краям на жесткие в своей плоскости и гибкие из своей плоскости диафрагмы.

Математически, следовательно, задача сводится к интегрированию системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений при заданных граничных и начальных условиях.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \\ \text{при } z=l \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

При этих условиях решение системы (4.2) может быть представлено в форме:

$$\left. \begin{aligned} \xi(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \sin \lambda_n z, \\ \eta(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sin \lambda_n z, \\ \theta(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \sin \lambda_n z, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, n — целое положительное число, l — пролет оболочки. Легко видеть, что каждый член разложения (4.5) удовлетворяет граничным условиям (4.4).

Предполагаем, что внешняя нагрузка может быть разложена в ряд Фурье следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} q_x(z, t) &= f(t) \sum_{n=1}^{\infty} q_{xn} \sin \lambda_n z, \\ q_y(z, t) &= f(t) \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn} \sin \lambda_n z, \\ m_A(z, t) &= f(t) \sum_{n=1}^{\infty} m_{An} \sin \lambda_n z, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $f(t)$ — общая для всех компонент функция, определяющая закон изменения внешних сил во времени; q_{xn} , q_{yn} , m_{An} — коэффициенты ряда, определяемые по известным формулам (как коэффициенты ряда Фурье).

Подставим теперь выражения (4.5) и (4.6) в основные дифференциальные уравнения (4.2). По сокращении на общий множитель $\sin \lambda_n z$, получим для n -го члена обыкновенные неоднородные дифференциальные

уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \lambda_n^4 \xi_n(t) + \frac{\gamma}{g} (J_x \lambda_n^2 + F) \xi_n''(t) &= q_{yn} f(t), \\ EJ_y \lambda_n^4 \eta_n(t) + \frac{\gamma}{g} (J_y \lambda_n^2 + F) \eta_n''(t) + \frac{a_y \gamma F}{g} \theta_n''(t) &= q_{xn} f(t), \\ \frac{a_y \gamma F}{g} \xi_n''(t) + (EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2) \theta_n(t) - \frac{\gamma}{g} (J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) \theta_n''(t) &= m_{An} f(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Общее решение однородных уравнений (4.7)* может быть получено в виде простых гармонических колебаний с частотой k_n и фазой μ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_n(t) &= A \sin(k_n t + \mu), \\ \eta_n(t) &= B \sin(k_n t - \mu), \\ \theta_n(t) &= C \sin(k_n t + \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Подставляя в однородные уравнения (4.7) выражения (4.8) и сокращая на общий множитель $\sin(k_n t + \mu)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} [EJ_x \lambda_n^4 - \frac{\gamma}{g} (J_x \lambda_n^2 + F) k_n^2] A &= 0, \\ [EJ_y \lambda_n^4 - \frac{\gamma}{g} (J_y \lambda_n^2 + F) k_n^2] B - \frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 C &= 0, \\ -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 B + [EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 - \frac{\gamma}{g} (J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) k_n^2] C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Функции (4.8) удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям (4.7) при условии, если коэффициенты A , B и C удовлетворяют полученным линейным однородным алгебраическим уравнениям (4.9).

Частоты собственных колебаний оболочки получим, приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при постоянных A , B и C . Для этих частот получаем два независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \lambda_n^4 - \frac{\gamma}{g} (J_x \lambda_n^2 + F) k_n^2 &= 0, \\ \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_n^4 - \frac{\gamma}{g} (J_y \lambda_n^2 + F) k_n^2 & -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 \\ -\frac{a_y \gamma F}{g} k_n^2 & EJ_\omega \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 - \frac{\gamma}{g} (J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) k_n^2 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Первое из этих уравнений является уравнением первой степени, а второе — уравнением второй степени относительно квадрата частоты k_n . Каждому значению величины $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), характеризую-

* Однородные уравнения (4.7) получаются путем приравывания нулю правых частей неоднородных уравнений (4.7).

шей согласно выражениям (4.5) форму колебаний, соответствуют, таким образом, три частоты свободных колебаний оболочки k_{n0} , k_{n1} и k_{n2} . Первая частота соответствует вертикальным изгибным колебаниям, а вторая и третья — сложным изгибно-крутильным колебаниям.

После того как из уравнений (4.10) найдены значения частот, общий интеграл однородной системы (4.7) может быть представлен в виде:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(t) &= A \sin(k_{n0}t + \mu_0), \\ \xi_n(t) &= B_1 \sin(k_{n1}t + \mu_1) + B_2 \sin(k_{n2}t + \mu_2), \\ \theta_n(t) &= \rho_1 B_1 \sin(k_{n1}t + \mu_1) + \rho_2 B_2 \sin(k_{n2}t + \mu_2). \end{aligned} \right\} (4.11)$$

В этих выражениях ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты, устанавливающие зависимость между произвольными постоянными B и C выражений (4.8).

Пользуясь вторым из уравнений (4.9), получим:

$$\rho_1 = \frac{EJ_y \lambda_n^2 \frac{K}{\gamma} - (J_y \lambda_n^2 + F) k_{n1}^2}{\alpha_y F k_{n1}^2}, \quad \rho_2 = \frac{EJ_y \lambda_n^2 \frac{K}{\gamma} - (J_y \lambda_n^2 + F) k_{n2}^2}{\alpha_y F k_{n2}^2}.$$

Общий интеграл (4.11) однородной системы уравнений (4.7) может быть представлен также и в другом виде:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(t) &= A \sin k_{n0}t + E \cos k_{n0}t, \\ \xi_n(t) &= B_1 \sin k_{n1}t + D_1 \cos k_{n1}t + B_2 \sin k_{n2}t + D_2 \cos k_{n2}t, \\ \theta_n(t) &= \rho_1 (B_1 \sin k_{n1}t + D_1 \cos k_{n1}t) + \rho_2 (B_2 \sin k_{n2}t + D_2 \cos k_{n2}t). \end{aligned} \right\} (4.12)$$

Переходим теперь к составлению частного интеграла неоднородных уравнений (4.7). Выражение для частного интеграла может быть получено при помощи метода вариации произвольных постоянных или метода начальных условий*). Остановимся на рассмотрении последнего.

Выразим шесть произвольных постоянных интеграла (4.12) однородной системы (4.7) через перемещения $\eta_n(0)$, $\xi_n(0)$ и $\theta_n(0)$ и скорости $\dot{\eta}_n(0)$, $\dot{\xi}_n(0)$ и $\dot{\theta}_n(0)$ в начальный момент времени. Из выражений (4.12) для $\eta_n(t)$, $\xi_n(t)$ и $\theta_n(t)$ и их производных получим шесть уравнений для определения шести постоянных, а именно:

$$\left. \begin{aligned} E &= \eta_n(0), & k_{n0}A &= \dot{\eta}_n(0), \\ D_1 + D_2 &= \xi_n(0), & k_{n1}B_1 + k_{n2}B_2 &= \dot{\xi}_n(0), \\ \rho_1 D_1 + \rho_2 D_2 &= \theta_n(0), & \rho_1 k_{n1}B_1 + \rho_2 k_{n2}B_2 &= \dot{\theta}_n(0). \end{aligned} \right\} (4.13)$$

*) Метод начальных параметров в применении к задачам колебаний мы называем методом начальных условий.

Решение уравнений (4.13) даст:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\dot{\eta}_n(0)}{k_{n0}}, & E &= \eta_n(0), \\ B_1 &= \frac{\dot{\xi}_n(0) \rho_2 - \dot{\theta}_n(0)}{k_{n1}(\rho_2 - \rho_1)}, & D_1 &= \frac{\xi_n(0) \rho_2 - \theta_n(0)}{\rho_2 - \rho_1}, \\ B_2 &= \frac{\dot{\theta}_n(0) - \dot{\xi}_n(0) \rho_1}{k_{n2}(\rho_2 - \rho_1)}, & D_2 &= \frac{\theta_n(0) - \xi_n(0) \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \end{aligned} \right\} (4.14)$$

В общем интеграле (4.12) мы можем заменить произвольные постоянные другими величинами, имеющими определенный физический смысл. Внося выражения (4.14) в выражения (4.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(t) &= \eta_n(0) \cos k_{n0}t + \frac{\dot{\eta}_n(0)}{k_{n0}} \sin k_{n0}t, \\ \xi_n(t) &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left[(\rho_2 \cos k_{n1}t - \rho_1 \cos k_{n2}t) \xi_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + (\cos k_{n2}t - \cos k_{n1}t) \theta_n(0) + \left(\frac{\rho_2}{k_{n1}} \sin k_{n1}t - \frac{\rho_1}{k_{n2}} \sin k_{n2}t \right) \dot{\xi}_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{k_{n2}} \sin k_{n2}t - \frac{1}{k_{n1}} \sin k_{n1}t \right) \dot{\theta}_n(0) \right], \\ \theta_n(t) &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left[\rho_1 \rho_2 (\cos k_{n1}t - \cos k_{n2}t) \xi_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + (\rho_2 \cos k_{n2}t - \rho_1 \cos k_{n1}t) \theta_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_1 \rho_2 \left(\frac{1}{k_{n1}} \sin k_{n1}t - \frac{1}{k_{n2}} \sin k_{n2}t \right) \dot{\xi}_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho_2}{k_{n2}} \sin k_{n2}t - \frac{\rho_1}{k_{n1}} \sin k_{n1}t \right) \dot{\theta}_n(0) \right]. \end{aligned} \right\} (4.15)$$

При помощи выражений (4.15) можно определить значения функций $\xi_n(t)$, $\eta_n(t)$, $\theta_n(t)$, входящих в разложения (4.5), если известны начальные условия. Следовательно, при помощи выражений (4.5) и (4.15) мы в случае свободных колебаний можем определить перемещения и скорости любого бесконечно малого элемента оболочки.

Пусть в начальный момент перемещения и скорости любого элемента оболочки равны нулю, а в момент времени t_1 к элементу приложены скорости $\dot{\eta}_n(t_1)$, $\dot{\xi}_n(t_1)$ и $\dot{\theta}_n(t_1)$. Закон движения, происходящего под влиянием полученных скоростей, описывается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \eta_n(t) &= \frac{\dot{\eta}_n(t_1)}{k_{n0}} \sin k_{n0}(t - t_1), \\ \xi_n(t) &= \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left\{ \left[\frac{\rho_2}{k_{n1}} \sin k_{n1}(t - t_1) - \frac{\rho_1}{k_{n2}} \sin k_{n2}(t - t_1) \right] \dot{\xi}_n(t_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{k_{n2}} \sin k_{n2}(t - t_1) - \frac{1}{k_{n1}} \sin k_{n1}(t - t_1) \right] \dot{\theta}_n(t_1) \right\}, \\ \theta_n(t) &= \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \left\{ \left[\frac{1}{k_{n1}} \sin k_{n1}(t - t_1) - \frac{1}{k_{n2}} \sin k_{n2}(t - t_1) \right] \dot{\xi}_n(t_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{\rho_1 k_{n2}} \sin k_{n2}(t - t_1) - \frac{1}{\rho_2 k_{n1}} \sin k_{n1}(t - t_1) \right] \dot{\theta}_n(t_1) \right\}. \end{aligned} \right\} (4.16)$$

Приложение этих скоростей эквивалентно действию мгновенной силы. Считая, что эта мгновенная сила известна, выразим через нее скорости $\eta'_n(t_1)$, $\xi'_n(t_1)$ и $\theta'_n(t_1)$. Если сила, компоненты которой равны $q_{xn}f(t_1)$, $q_{yn}f(t_1)$ и $m_{An}f(t_1)$, действует в течение весьма малого времени Δt_1 , то она сообщает элементу ускорения: $\eta''_n(t_1)$, $\xi''_n(t_1)$ и $\theta''_n(t_1)$. Эти ускорения легко определяются из уравнений (4.7), если в них, согласно предыдущим рассуждениям, положить $t = t_1$, $\eta_n(t_1) = \xi_n(t_1) = \theta_n(t_1) = 0$.

Решение полученных таким образом уравнений даст следующие значения для ускорений:

$$\begin{aligned}\eta''_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{q_{yn}}{J_x \lambda_n^2 + F} f(t_1), \\ \xi''_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{q_{xn}(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - m_{An} a_y F}{(J_y \lambda_n^2 + F)(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - a_y^2 F^2} f(t_1), \\ \theta''_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{m_{An}(J_y \lambda_n^2 + F) - q_{xn} a_y F}{(J_y \lambda_n^2 + F)(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - a_y^2 F^2} f(t_1).\end{aligned}$$

Следовательно, скорости получат значения:

$$\left. \begin{aligned}\eta'_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{q_{yn}}{J_x \lambda_n^2 + F} f(t_1) \Delta t_1, \\ \xi'_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{q_{xn}(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - m_{An} a_y F}{(J_y \lambda_n^2 + F)(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - a_y^2 F^2} f(t_1) \Delta t_1, \\ \theta'_n(t_1) &= \frac{g}{\gamma} \frac{m_{An}(J_y \lambda_n^2 + F) - q_{xn} a_y F}{(J_y \lambda_n^2 + F)(J_\omega \lambda_n^2 + r^2 F) - a_y^2 F^2} f(t_1) \Delta t_1.\end{aligned} \right\} (4.17)$$

Подставляя в выражения (4.16) значения скоростей (4.17), получим значения функций $\xi_n(t)$, $\eta_n(t)$ и $\theta_n(t)$, входящих в разложения (4.5) для любого момента времени t после того, как сила перестала действовать. Если же будут действовать несколько импульсов в различное время, то полученные выражения следует просуммировать. При непрерывном распределении импульсов во времени эти суммы переходят в интегралы. Полученные выражения и будут частными интегралами неоднородных уравнений (4.7).

§ 5. Пространственные изгибно-крутильные колебания висячих мостов

Дифференциальные уравнения пространственных колебаний висячих мостов, поперечное сечение которых имеет две оси симметрии, получим из уравнений (7.1) гл. VIII пространственной устойчивости тех же мостов, если добавим в эти уравнения силы инерции и аэродинамические силы. Добавляя силы инерции так же, как это было проделано

в § 1, получим:

$$\left. \begin{aligned}EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \theta) &= \bar{q}_y, \\ M_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F r^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \bar{m}.\end{aligned} \right\} (5.1)$$

Здесь:

\bar{q}_y — подъемная сила, приходящаяся на единицу длины моста, вычисляемая по формуле

$$\bar{q}_y = C_L(\theta) \frac{\rho}{2} A v^2, \quad (5.2)$$

где C_L — коэффициент подъемной силы, являющийся функцией угла кручения θ (рис. 200); ρ — плотность воздуха; A — горизонтальная проекция единицы длины моста; v — скорость ветра;

\bar{m} — вызванный ветром крутящий момент, приходящийся на единицу длины моста и вычисляемый по формуле

$$\bar{m} = C_T(\theta) a b^2 \frac{v^2}{2g}, \quad (5.3)$$

где b — ширина моста между подвесками; a — вес единицы объема воздуха; g — ускорение силы тяжести; C_T — коэффициент закручивания, являющийся функцией угла кручения θ ; для малых углов наклона θ значение C_T может быть выражено в форме:

$$C_T = -k\theta \quad (5.4)$$

(k — величина постоянная).

В дальнейшем пренебрегаем подъемной силой, мало влияющей на окончательные результаты.

Подставляя в правую часть уравнений (5.1) крутящий момент (5.3) и используя зависимость (5.4), получим дифференциальные уравнения динамической устойчивости в виде:

$$\left. \begin{aligned}EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - 2H \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \theta) &= 0, \\ M_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - H \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - & \\ - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F r^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + k a b^2 \frac{v^2}{2g} \theta &= 0.\end{aligned} \right\} (5.5)$$

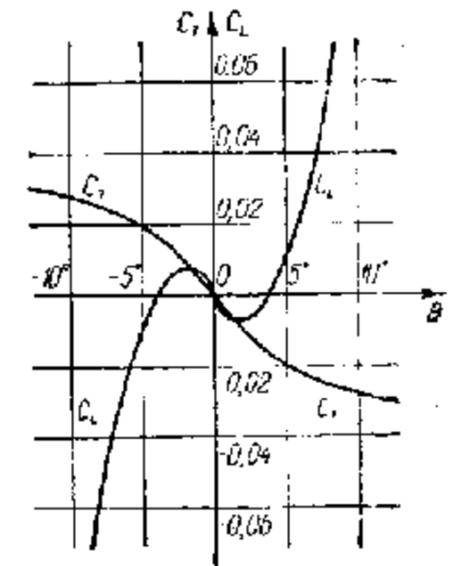


Рис. 200.

Поскольку в уравнения (5.5) входят вторые производные по времени, колебания будут простыми гармоническими:

$$\left. \begin{aligned} \eta(z, t) &= \eta(z) \sin \omega t, \\ \theta(z, t) &= \theta(z) \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где ω — круговая частота колебаний.

После подстановки выражений (5.6) в уравнения (5.5) и сокращения на общий множитель $\sin \omega t$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \eta^{IV} - 2H\eta'' + \frac{\gamma J_x}{g} \omega^2 \eta'' - \frac{\gamma F}{g} \omega^2 \eta - (M_y \eta)'' &= 0, \\ M_y \eta'' - EJ_\omega \theta^{IV} - \left(GJ_d + H \frac{b^2}{2} \right) \theta'' + \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega^2 \theta'' - \\ - \frac{\gamma F r^2}{g} \omega^2 \theta - kub^2 \frac{v^2}{2g} \theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где производные берутся по переменной z .

В дальнейшем будем считать, что по длине моста ветровое давление распределено равномерно. В этом случае

$$M_y = \frac{q}{2} z(l-z).$$

Мы также будем считать, что колебания моста имеют в главном пролете две полуволны. Это можно обосновать точно так же, как мы это сделали в § 7 гл. VIII, где рассматривали статическую устойчивость висячих мостов.

Положим

$$\eta(z) = B \sin \frac{2\pi}{l} z, \quad \theta(z) = C \sin \frac{2\pi}{l} z.$$

Использование принципа возможных перемещений к интегрированию дифференциальных уравнений (5.7) приводит к системе двух однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[EJ_x \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - 2H \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{\gamma J_x}{g} \omega^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{\gamma F}{g} \omega^2 \right] \frac{l}{2} B - \\ - \frac{\alpha_1 v^2 l}{8} \left(1 + \frac{2\pi^2}{3} \right) C = 0, \\ - \frac{\alpha_1 v^2 l}{8} \left(1 + \frac{2\pi^2}{3} \right) B + \left[EJ_\omega \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 + \left(GJ_d + H \frac{b^2}{2} \right) \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega^2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{\gamma F r^2}{g} \omega^2 - kub^2 \frac{v^2}{2g} \right] \frac{l}{2} C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

При написании уравнений (5.8) мы считали, что зависимость между скоростью ветра v и напором q приближенно может быть представлена в виде

$$q = \alpha_1 v^2,$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при B и C , получим для скорости v биквадратное уравнение

$$av^4 - bv^2 - c = 0. \quad (5.9)$$

Коэффициенты этого уравнения зависят от различных физических, геометрических и аэродинамических величин и в том числе от величины ω^2 .

Присоединяя к уравнению (5.9) условие экстремума скорости

$$\frac{\partial (v^2)}{\partial (\omega^2)} = 0,$$

будем иметь возможность определять критическую скорость ветра, при которой должен разрушиться висячий мост.

Применим полученные уравнения к определению критической скорости ветра, при которой произошло разрушение уже упомянутого Такомакского висячего моста. Вид изгибно-крутильных деформаций проезжей части моста показан на рис. 201 и 202. Описание конструкции моста и самой катастрофы даны в работе Ф. Д. Дмитриева [87].

Имеем следующие исходные данные:

$$\begin{aligned} l &= 853 \text{ м}, & H &= 5,65 \cdot 10^6 \text{ кг}, \\ b &= 11,9 \text{ м}, & E &= 2,1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2, \\ F &= 0,654 \text{ м}^2, & G &= 0,8 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2, \\ Fr^2 &= J_p = J_x - J_y = 10,7 \text{ м}^4, & \gamma &= 7,85 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^2, \\ J_x &= 0,122 \text{ м}^4, & u &= 1,29 \text{ кг/м}^2, \\ J_y &= 10,6 \text{ м}^4, & g &= 9,81 \text{ м/сек}^2, \\ J_d &\approx 0, & \alpha_1 &= 0,144 \text{ кг/сек}^2/\text{м}^2, \\ J_\omega &= 4,31 \text{ м}^6, & k &= 0,267. \end{aligned}$$

Значение k мы взяли как тангенс угла наклона касательной к кривой C_r (рис. 200) в начале координат, так как нами рассматриваются весьма малые колебания. Если эти колебания неустойчивы, то их амплитуда растет с течением времени, что в окончательном итоге приводит к разрушению конструкции.

Произведенные вычисления дали следующее значение критической скорости ветра:

$$v_{кр} = 60,9 \text{ км/час} = 16,9 \text{ м/сек.}$$

Этой скорости соответствует давление

$$q = 41,4 \text{ кг/м}.$$

Действительная скорость ветра в день катастрофы была $v = 67 \text{ км/час} = 18,6 \text{ м/сек.}$ Как видим, погрешность в величине

вычисленной критической скорости по сравнению с действительной не превышает 10% . Эта погрешность в основном обусловлена несколько иными граничными условиями опирания проезжей части моста, меньшей

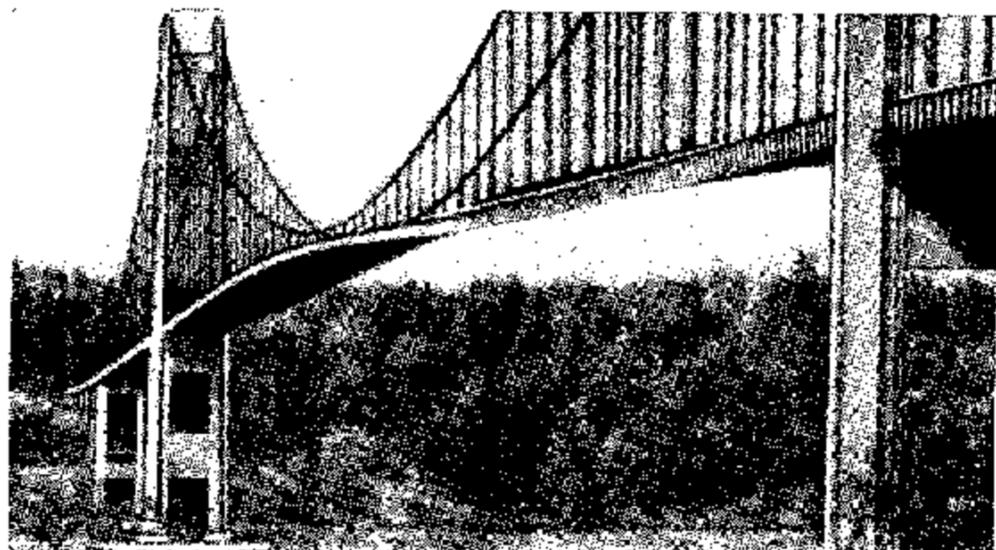


Рис. 201.



Рис. 202.

упругое защемление, а не шарниры по концам. Это увеличение жесткости расчетной системы и привело к тому, что вычисленная критическая скорость оказалась меньше скорости, при которой разрушился мост.

Если сравнить статическую горизонтальную нагрузку $q_{ст}$, которую может выдержать мост без потери устойчивости, со скоростным

напором ветра $q_{дин}$, соответствующим скорости при катастрофе, то увидим, что

$$q_{ст} \gg q_{дин}$$

т. е. при колебаниях мост может выдержать очень малую динамическую горизонтальную нагрузку, в то время, как критическая статическая горизонтальная нагрузка довольно значительна.

Следует также подчеркнуть тот факт, что катастрофа наступила вследствие изгибно-крутильных колебаний, которые и учитываются нашей теорией. Одни вертикальные, чисто изгибные колебания не приводили к катастрофе даже при 36 циклах в минуту, которых они достигали в день катастрофы и которые уменьшились до 14 циклов в минуту непосредственно перед катастрофой и затем перешли в изгибно-крутильные, которые и явились решающими. Это подтверждается также и испытаниями модели в $1/100$ натуральной величины моста, произведенными еще до катастрофы и показавшими динамическую неустойчивость конструкции.

В заключение отметим, что основным мероприятием по повышению динамической устойчивости висячих мостов является создание конструкций пролетного строения с большой изгибно-крутильной жесткостью. Этого можно достичь, проектируя пролетное сечение замкнутой коробчатой формы или усиливая открытое поперечное сечение дополнительными поперечными бимоментными связями — планками, косыми диафрагмами и т. п., увеличивающими крутильную жесткость (см. гл. III).

§ 6. Свободные колебания и аэродинамическая устойчивость конструкции типа крыла самолета

1. Рассмотрим сначала задачу о свободных колебаниях жесткого прямоугольного коробчатого профиля, имеющего две оси симметрии. Будем считать, что на одном поперечном краю коробчатая оболочка жестко заделана, другой же поперечный край свободен от закрепления (рис. 197).

Дифференциальные уравнения свободных поперечных колебаний стержня открытого профиля с двумя осями симметрии представлены уравнением (1.9):

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma r^2 F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Эти уравнения сохраняют свою силу и для тонкостенной закрытой оболочки с жестким профилем. Различие будет лишь в способе вычисления геометрических характеристик J_d и J_ω (см. гл. VIII, § 6, п. 3).

Для коробчатой оболочки с толщиной стенок δ , поперечное сечение которой представляет прямоугольник со сторонами d_1 и d_2 , геометрические характеристики сечения вычисляются по формулам (1.18) гл. V:

$$\left. \begin{aligned} F &= 2\delta(d_1 + d_2), \quad J_x = \frac{1}{6} \delta d_1^3(d_2 + 3d_2), \quad J_y = \frac{1}{6} \delta d_2^3(d_1 + 3d_1), \\ J_\omega &= \frac{4}{F} \delta^3 d_1^2 d_2^2, \quad J_\omega = \frac{1}{48} F d_1^2 d_2^2, \quad Fr^2 = J_x + J_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Система уравнений (6.1) представляет собой три независимых друг от друга уравнения. Поэтому частоты свободных поперечных колебаний оболочки, соответствующие чисто изгибным колебаниям в плоскостях Oxz и Oyz и чисто крутильным колебаниям, можно определять независимо друг от друга. Для определения этих частот воспользуемся приближенным вариационным методом Бубнова—Галеркина. В соответствии со сказанным положим:

$$\left. \begin{aligned} \xi(z) &= A \sin k_x z \cdot \varphi(z), \\ \eta(z) &= B \sin k_y z \cdot \psi(z), \\ \theta(z) &= C \sin k_\omega z \cdot \chi(z). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

В формулах (6.3) k_x есть искомая круговая частота колебаний в плоскости Oxz , k_y — частота колебаний в плоскости Oyz и k_ω — частота крутильных колебаний.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$ представляют собой формы поперечных колебаний коробчатой оболочки. Этими функциями мы задаемся заранее. Они точно удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \psi(0) = \chi(0) = 0, \\ \varphi'(0) &= \psi'(0) = \chi'(0) = 0, \end{aligned}$$

что соответствует жесткой заделке края $z=0$, и условиям

$$\begin{aligned} \varphi''(l) &= \psi''(l) = \chi''(l) = 0, \\ \varphi'''(l) &= \psi'''(l) = \chi'''(l) = 0, \end{aligned}$$

что соответствует свободному от закрепления краю $z=l$. Что же касается уравнений (6.1), то выражения (6.3), вообще говоря, не являются интегралами этих уравнений и, следовательно, при подстановке выражений (6.3) в (6.1) левые части уравнений (6.1) в нуль не обращаются.

Поэтому мы потребуем удовлетворения уравнений (6.1) в интегральной форме в соответствии с принципом возможных перемещений Лагранжа, выбирая за возможные перемещения функции φ , ψ и χ , как мы это сделали в § 13 гл. V. Для этого подставим (6.3) в уравнения (6.1), умножим полученные выражения соответственно на возможные перемещения φ , ψ и χ и проинтегрируем их по всей длине оболочки. После

применения интегрирования по частям и сокращения на A , B , C мы придем к следующим уравнениям относительно k_x , k_y и k_ω :

$$\begin{aligned} EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz - \frac{\gamma J_y}{g} k_x^2 \int_0^l (\varphi')^2 dz - \frac{\gamma F}{g} k_x^2 \int_0^l \varphi^2 dz &= 0, \\ EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz - \frac{\gamma J_x}{g} k_y^2 \int_0^l (\psi')^2 dz - \frac{\gamma F}{g} k_y^2 \int_0^l \psi^2 dz &= 0, \\ EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \left(GJ_\omega - \frac{\gamma J_\omega}{g} k_\omega^2 \right) \int_0^l (\chi')^2 dz - \frac{\gamma Fr^2}{g} k_\omega^2 \int_0^l \chi^2 dz &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для частот:

$$\left. \begin{aligned} k_x^2 &= \frac{EJ_y \int_0^l (\varphi'')^2 dz}{J_y \int_0^l (\varphi')^2 dz + F \int_0^l \varphi^2 dz} \frac{g}{\gamma}, \\ k_y^2 &= \frac{EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz}{J_x \int_0^l (\psi')^2 dz + F \int_0^l \psi^2 dz} \frac{g}{\gamma}, \\ k_\omega^2 &= \frac{EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + GJ_\omega \int_0^l (\chi')^2 dz}{J_\omega \int_0^l (\chi')^2 dz + Fr^2 \int_0^l \chi^2 dz} \frac{g}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Принимая за функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$ функции прогиба консольной балки (8.5) гл. VIII

$$\varphi(z) = \psi(z) = \chi(z) = z^4 - 4lz^3 + 6l^2z^2$$

и вычисляя определенные интегралы в формулах (6.4), получим формулы для частот:

$$\begin{aligned} k_x^2 &= \frac{1134EJ_y}{(405J_y + 91l^2F)l^2} \frac{g}{\gamma}, \\ k_y^2 &= \frac{1134EJ_x}{(405J_x + 91l^2F)l^2} \frac{g}{\gamma}, \\ k_\omega^2 &= \frac{81(14EJ_\omega + 5l^2GJ_\omega)}{(405J_\omega + 91l^2Fr^2)l^2} \frac{g}{\gamma}. \end{aligned}$$

Если воспользоваться формулами (6.2), то выражения для определения частот собственных колебаний принимают вид:

$$k_x^2 = E \frac{g}{\gamma l^2} \frac{378d_2^2 (d_2 + 3d_1)}{[135d_2^2 (d_2 + 3d_1) + 364l^2 (d_1 + d_2)]},$$

$$k_y^2 = E \frac{g}{\gamma l^2} \frac{378d_1^2 (d_1 + 3d_2)}{[135d_1^2 (d_1 + 3d_2) + 364l^2 (d_1 + d_2)]},$$

$$k_\theta^2 = E \frac{g}{\gamma l^2} \frac{162d_1^2 d_2^2 \left[7(d_1 + d_2)^2 + 120 \frac{G}{E} l^2 \right]}{(d_1 + d_2)^2 [405d_1^2 d_2^2 + 364l^2 (d_1 + d_2)^2]}.$$

Из этих формул видно, что крутильная жесткость стержня-оболочки, пропорциональная модулю сдвига G , оказывает влияние только на частоту колебаний при стесненном кручении; изгибные колебания от этой жесткости не зависят. Отсюда следует, что наличие в оболочке кессона начальных напряжений, температурных или механических от предварительного натяжения продольных элементов (стрингеров, лонжеронов), может через приведенную жесткость \overline{GI}_θ [формулы (5.2) и (1.9) гл. VII] существенным образом повлиять и на частоту крутильных колебаний.

2. Рассмотрим теперь задачу об аэродинамической устойчивости той же коробчатой оболочки с жестким профилем, находящейся в стационарном потоке воздуха (рис. 197).

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки для этого случая получаются из уравнений (6.1), если к ним добавить аэродинамические нагрузки, учитывающие влияние лобового сопротивления и подъемной силы. Поступая совершенно так же, как и в § 8 гл. VIII, но уже применительно к колебаниям, будем иметь систему двух дифференциальных уравнений, поскольку первое уравнение (6.1) при лобовом сопротивлении крыла в плоскости Oxz отделяется от двух остальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \eta) - \overline{q}_y, \\ M_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma Fr^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + q_x e_x \theta = \overline{m}. \end{aligned} \right\} (6.5)$$

Правые части этих уравнений представляют соответственно нормальную силу и крутящий момент — результат действия подъемной силы конструкции типа крыла самолета; эти величины определяются по формулам (5.2) и (5.3). Так как мы рассматриваем малые колебания, то положим

$$\overline{q}_y = -k_x(v) \eta(z, t), \quad \overline{m} = -k_\theta(v) \theta(z, t), \quad (6.6)$$

где $k_x(v)$ и $k_\theta(v)$ — аэродинамические коэффициенты, зависящие от формы и геометрических размеров обтекаемого профиля, а также ли-

нейно зависящие от скорости движения самолета в стационарном потоке воздуха.

Равнодействующая сил лобового давления q_x , как указывалось в § 5, также зависит от скорости движения самолета v и может быть, например, представлена в таком виде:

$$q_x = -kv^2,$$

где k — тоже аэродинамический коэффициент, зависящий от формы и геометрических размеров обтекаемого профиля и от некоторых других факторов.

Изгибающий момент M_y при равномерно распределенной нагрузке q_x определяется по формуле (8.3) гл. VIII.

Воспользовавшись выражениями (6.6), перепишем систему дифференциальных уравнений (6.5) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \eta) - k_x(v) \eta = 0, \\ M_y \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \\ + \frac{\gamma Fr^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + [q_x e_x + k_\theta(v)] \theta = 0. \end{aligned} \right\} (6.7)$$

Для того чтобы определить частоту колебаний оболочки, положим

$$\eta(z, t) = \tau(z) \sin \omega t, \quad \theta(z, t) = \vartheta(z) \sin \omega t, \quad (6.8)$$

где ω — искомая круговая частота колебаний.

Подставляя выражения (6.8) в систему (6.7), получим, после сокращения на общий множитель $\sin \omega t$, систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \tau^{IV} + \frac{\gamma J_x}{g} \omega^2 \tau'' - \frac{\gamma F}{g} \omega^2 \tau + (M_y \eta)'' + k_x(v) \eta = 0, \\ M_y \tau'' + EJ_\omega \vartheta^{IV} - \left(GJ_d - \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega^2 \right) \vartheta'' - \\ - \left[\frac{\gamma Fr^2}{g} \omega^2 - q_x e_x - k_\theta(v) \right] \vartheta = 0. \end{aligned} \right\} (6.9)$$

При интегрировании дифференциальных уравнений (6.9) используем метод возможных перемещений. Положим с этой целью

$$\tau(z) = B\psi(z), \quad \vartheta(z) = C\chi(z), \quad (6.10)$$

где $\psi(z)$ и $\chi(z)$ — выбранные известные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи. В качестве этих функций может быть принята с точностью до постоянного множителя функция прогиба консольной балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки [см. (8.5) гл. VIII]. Принимая за возможные перемещения также функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ и подставляя выражения (6.10) в уравнения (6.9), получим для интенсивностей вариаций поперечной

нагрузки и крутящего момента следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta q_y &= B \left[EJ_x \psi^{IV} + \frac{\gamma^J_x}{g} \omega^2 \psi'' - \frac{\gamma^F}{g} \omega^2 \psi \right] + C [(M_y \chi)'' + k_\gamma(v) \chi], \\ \delta m &= BM_y \psi'' + C \left\{ EJ_\omega \chi^{IV} - \left(GJ_d - \frac{\gamma^J_\omega}{g} \omega^2 \right) \chi'' - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\gamma^F r^2}{g} \omega^2 - q_x e_x - k_\theta(v) \right] \chi \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа для этих сил на указанных возможных перемещениях после применения интегрирования по частям к некоторым слагаемым и использования естественных граничных условий, имеющих место на концах стержня, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} B \left[EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz - \frac{\gamma^J_x}{g} \omega^2 \int_0^l (\psi')^2 dz - \frac{\gamma^F}{g} \omega^2 \int_0^l \psi^2 dz \right] + \\ + C \left[\int_0^l M_y \chi \psi'' dz + \int_0^l k_\gamma(v) \chi^2 dz \right] = 0, \\ B \int_0^l M_y \chi \psi'' dz + C \left\{ EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \left(GJ_d - \frac{\gamma^J_\omega}{g} \omega^2 \right) \int_0^l (\chi')^2 dz - \right. \\ \left. - \left[\frac{\gamma^F r^2}{g} \omega^2 - q_x e_x - k_\theta(v) \right] \int_0^l \chi^2 dz \right\} = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных B и C , получим для параметра скорости самолета, входящего в выражения функций q_x , M_y , и аэродинамических коэффициентов $k_\gamma(v)$ и $k_\theta(v)$ уравнение:

$$\begin{vmatrix} EJ_x \int_0^l (\psi'')^2 dz - \frac{\gamma^J_x}{g} \omega^2 \int_0^l (\psi')^2 dz - \int_0^l M_y \chi \psi'' dz + k_\gamma(v) \int_0^l \chi^2 dz \\ - \frac{\gamma^F}{g} \omega^2 \int_0^l \psi^2 dz \\ \int_0^l M_y \chi \psi'' dz & EJ_\omega \int_0^l (\chi'')^2 dz + \\ + \left(GJ_d - \frac{\gamma^J_\omega}{g} \omega^2 \right) \int_0^l (\chi')^2 dz - \\ - \left[\frac{\gamma^F r^2}{g} \omega^2 - q_x e_x - k_\theta(v) \right] \int_0^l \chi^2 dz \end{vmatrix} = 0. \quad (6.11)$$

В этом уравнении искомая скорость v связана с частотой круговых колебаний ω ; при принятых зависимостях q_x , M_y , $k_\gamma(v)$ и $k_\theta(v)$, уравнение будет четвертой степени.

Присоединив к уравнению (6.11) условие экстремума, мы сможем определить критическую скорость, при которой должно разрушиться крыло самолета.

3. Кроме указанных факторов, можно также учесть и наличие начальных напряжений от температуры или от предварительного натяжения арматуры; эти начальные напряжения учитываются заменой жесткости при чистом кручении GJ_d приведенной жесткостью $\overline{GJ_d}$ по формулам (1.9) и (5.1) гл. VII.

Изложенная здесь теория может быть распространена также и на задачи аэродинамической устойчивости конструкции крыла самолета в сверхзвуковом потоке. В этом случае члены уравнений (6.7), зависящие от аэродинамических нагрузок, могут быть определены по методу, предложенному А. А. Ильюшиным [93].

ГЛАВА X СТЕРЖНИ СПЛОШНОГО СЕЧЕНИЯ

§ 1. Общая теория. Основные уравнения

1. Рассмотрим упругое тело, имеющее форму цилиндрического или призматического стержня. Отнесем это тело к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, направив ось Oz параллельно боковой образующей (рис. 203, а). Излагаемая здесь теория деформации стержней

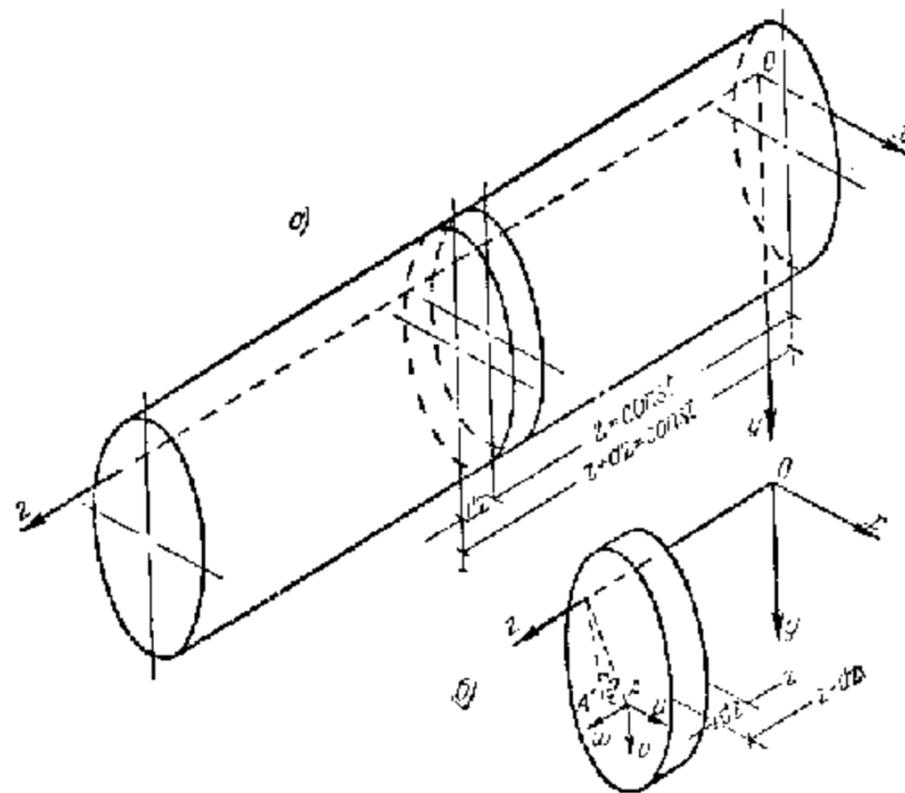


Рис. 203.

сплошного сечения основана на той же гипотезе, что и теория тонкостенных стержней открытого профиля, а именно: на гипотезе об отсутствии деформации стержня в плоскости поперечного сечения. Геометрический смысл этой гипотезы состоит в том, что элементарный диск

стержня, заключенный между сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, в своей плоскости рассматривается как жесткое, абсолютно твердое тело. В силу этой гипотезы элементарный диск в отношении перемещений, происходящих в плоскости поперечного сечения, обладает тремя степенями свободы, соответствующими двум поступательным смещениям u и v , параллельным осям координат Ox и Oy , и одному вращательному перемещению θ относительно продольной оси Oz (рис. 203, б).

Что касается деформации элементарного диска dz из плоскости поперечного сечения, то этот диск рассматривается как деформируемое упругое тело, обладающее, вообще говоря, бесконечно большим числом степеней свободы, из которых три относятся к перемещениям диска из своей плоскости как жесткого тела (поступательное перемещение по оси Oz и два поворота диска относительно осей Ox и Oy). Остальными бесчисленными множествами степеней свободы описываются компоненты деформации диска, возникающие в результате его упругих деформаций из плоскости поперечного сечения. Практически для деформации диска из плоскости поперечного сечения достаточно ограничиться четырехчленной формулой, три компонента которой относятся к деформациям диска по закону плоских сечений, а четвертый компонент относится к деформации сечения. Исходя из принятых здесь гипотез и пользуясь основными результатами теории тонкостенных стержней, мы можем перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ какой-нибудь точки стержня представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u(z) - \theta(z)y, \\ v(x, y, z) &= v(z) + \theta(z)x, \\ w(x, y, z) &= w_1(z) + w_2(z)x + w_3(z)y + w_4(z)\varphi(x, y), \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где $u(z)$, $v(z)$, $\theta(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ и $w_4(z)$ — искомые функции, зависящие каждая только от одной координаты z . Величины $u(z)$ и $v(z)$ представляют собой прогибы оси Oz стержня по направлению двух других осей поперечного сечения Ox и Oy . Величина $\theta(z)$ представляет собой угол поворота поперечного сечения стержня относительно продольной оси Oz (угол кручения).

Величиной $w_1(z)$ определяется поступательное смещение поперечного сечения стержня $z = \text{const}$ вдоль оси Oz . Величины $w_2(z)$ и $w_3(z)$ относятся к погнбу стержня по закону плоских сечений. Величина $w_4(z)$ представляет собой меру деформации поперечного сечения стержня, а распределение продольных перемещений $w(x, y, z)$ при этой деформации в поперечном сечении $z = \text{const}$ представлено функцией $\varphi(x, y)$.

В теории тонкостенных стержней открытого профиля функция $\varphi(x, y)$ при стесненном кручении определялась законом секториальных площадей $\omega(s)$, а мера деформации была равна взятой с обратным знаком производной по переменной z от угла кручения $[-\theta'(z)]$. Это явилось

следствием второй принятой гипотезы, по которой деформации сдвига в срединной поверхности стержня были равны нулю. В данном случае эта гипотеза, а следовательно, и закон секториальных площадей не имеют смысла. Вместо этого закона мы в дальнейшем при кручении будем пользоваться гиперболическим законом аксиальных площадей и задавать функцию φ формулой*)

$$\varphi(x, y) = xy. \quad (1.2)$$

Вообще же деформация стержня при стесненном кручении может быть определена в каждом частном случае и другим законом, например законом, вытекающим из теории Сен-Венана, относящейся к задаче о чистом кручении стержня.

Излагаемая здесь теория деформации стержней сплошного сечения, в отличие от теории тонкостенных стержней открытого профиля, носит более общий характер. Эта теория справедлива для стержней как сплошного сечения, так и для тонкостенных стержней закрытого односвязного или многосвязного профиля и позволяет учесть фактор деформации сечения не только при кручении, но также и при изгибе или растяжении стержня.

Функция $\varphi(x, y)$, которую мы будем называть обобщенной координатой деформации поперечного сечения стержня, вместе с тремя элементарными функциями $1, x, y$, представляющими обобщенные координаты закона плоских сечений, образуют систему четырех линейно независимых между собою функций.

2. Представив перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ в форме конечных разложений (1.1), мы будем иметь для компонентов деформации стержня следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 0, \\ e_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = 0, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = 0, \\ e_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} = w'_1(z) + w'_2(z)x + w'_3(z)y + w'_4(z)\varphi(x, y), \\ e_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} = \\ &= u'(z) + w_2(z) - \theta'(z)y + w_4(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = \\ &= v'(z) + w_3(z) + \theta'(z)x + w_4(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (1.3)$$

*) Такой закон был впервые предложен нами для тонкостенных стержней-оболочек закрытого профиля.

Из этих шести компонентов в нашей модели отличными от нуля являются деформации удлинения e_{zz} в продольном направлении и деформации сдвига e_{xz} и e_{yz} соответственно в продольных плоскостях Oxz и Oyz .

Остальные деформации, происходящие в плоскости поперечного элементарного диска, в соответствии с принятой гипотезой, равны нулю.

3. Зная деформации, мы можем по общим формулам теории упругости определить и напряжения.

Из условий

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z, \\ \sigma_y &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \end{aligned}$$

При этих соотношениях закон упругости для продольной деформации e_{zz} принимает вид

$$\sigma_z = E_1 e_{zz}, \quad (1.4)$$

где

$$E_1 = \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} E \quad (1.5)$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Величина E_1 , определяемая формулой (1.5), представляет собою приведенный модуль упругости при продольном растяжении. В дальнейшем этот модуль будем обозначать буквой E , определяя его либо по формуле (1.5), либо приравнявая, как и в случае тонкостенного стержня открытого профиля, простому модулю упругости при растяжении.

Формула (1.4) по подстановке в нее выражения для e_{zz} , определяемого соответствующей формулой (1.3), принимает вид

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = E [w'_1(z) + w'_2(z)x + w'_3(z)y + w'_4(z)\varphi(x, y)]. \quad (1.6)$$

Для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , возникающих в нашей модели в результате упругой деформации, получаем, воспользовавшись зависимостями (1.3), выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G e_{xz} = G \left[u'(z) + w_2(z) - \theta'(z)y + w_4(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right], \\ \tau_{yz} &= G e_{yz} = G \left[v'(z) + w_3(z) + \theta'(z)x + w_4(z) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right], \end{aligned} \right\} (1.7)$$

где G — модуль упругости при сдвиге.

Положительные направления этих напряжений показаны на выделенном из стержня элементарном параллелепипеде со сторонами dx , dy , dz (рис. 204).

Касательные напряжения определяются здесь, исходя из закона Гука. В этом еще одно отличие этой теории от теории тонкостенных стержней открытого профиля, в которой, в силу гипотезы об отсутствии в срединной поверхности деформаций сдвига, касательные напряжения определялись, исходя из условий равновесия.

4. Переходим к выводу основных дифференциальных уравнений для определения семи искомых одномерных функций $u(z)$, $v(z)$, $\psi(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ и $w_4(z)$. Воспользуемся предложенным нами общим вариационным методом, применяя принцип возможных перемещений к элементарному поперечному упругому диску толщиной dz , отстоящему по длине стержня от начала координат на произвольно фиксированном расстоянии $z = \text{const}$. На этот элементарный диск дей-

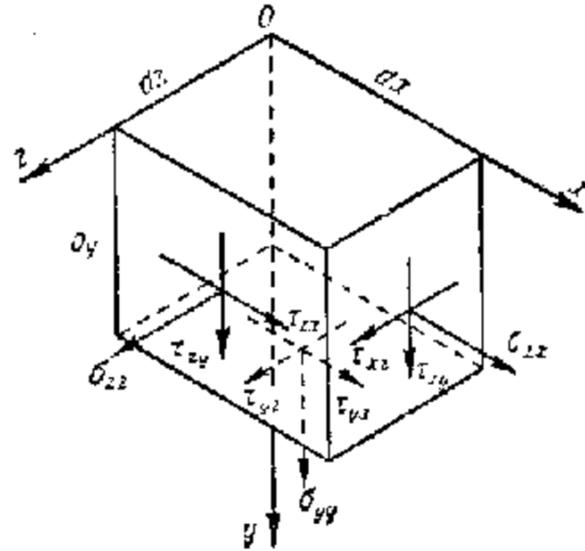


Рис. 204.

ствуют внешние силы, состоящие из сил, действующих на площадках сечений $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$ и происходящих от нормальных и касательных напряжений, заменяющих собою действие отброшенных частей стержня, и сил, обусловленных приходящейся на диск заданной внешней объемной и поверхностной нагрузкой. Кроме того, диск будет испытывать внутренние упругие напряжения, возникающие в результате упругой деформации диска. Так как выделенный из стержня указанным способом элементарный поперечный диск находится в равновесии, то сумма работ всех сил, относящихся к этому диску, как внешних, так и внутренних, на виртуальных перемещениях должна быть равна нулю. За виртуальные перемещения берем продольные перемещения, соответствующие любой из четырех линейно-независимых между собой обобщенных координат:

$$\phi_i(x, y) = 1, x, y, \varphi(x, y). \quad (1.8)$$

Обозначим компоненты по осям координат от внешней объемной нагрузки через X , Y , Z , а от внешней поверхностной нагрузки через X_s , Y_s , Z_s .

Тогда, понимая под ϕ_i одну из обобщенных координат (1.8), можно записать обобщенное условие равновесия упругого элементарного диска

в виде

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \phi_i dx dy - \iint \tau_{xz} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy - \\ - \iint \tau_{yz} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx dy + \iint Z \phi_i dx dy + \int Z_s \phi_i ds = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Двукратное интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения стержня; однократный интеграл вычисляется по координате s для всего контура, ограничивающего поперечное сечение данного стержня в плоскости Oxy .

Первое слагаемое общего вариационного уравнения (1.9) представляет собою сумму работ всех внешних элементарных сил $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy$ на

соответствующем виртуальном перемещении ϕ_i . Вторым и третьим слагаемыми определена работа внутренних касательных напряжений на соответствующих деформациях сдвига рассматриваемого виртуального состояния. Четвертым слагаемым учитывается виртуальная работа всех внешних объемных продольных сил Z , относящихся к данному элементарному диску. Наконец, последним слагаемым представлена сумма работ всех внешних продольных поверхностных сил Z_s , приходящихся на элементарный диск.

Придавая в уравнении (1.9) функции ϕ_i последовательно значения четырех обобщенных координат $1, x, y, \varphi(x, y)$, получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно семи искомых одномерных функций $u(z)$, $v(z)$, $\psi(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ и $w_4(z)$.

Три дифференциальных недостающих уравнения получим, составляя уравнения равновесия элементарного диска, как жесткого тела в своей плоскости (условия равенства нулю проекций всех сил на ось Ox , на ось Oy и моменты относительно продольной оси Oz):

$$\left. \begin{aligned} \iint \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx dy + \iint X dx dy + \int X_s ds &= 0, \\ \iint \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dx dy + \iint Y dx dy + \int Y_s ds &= 0, \\ \iint \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} x - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} y \right) dx dy + \iint (Yx - Xy) dx dy + \\ + \int (Y_s x - X_s y) ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

В раскрытом виде системы уравнений (1.9) и (1.10) после использования формул (1.6) и (1.7) представлены в табл. 45, где $\gamma = \frac{G}{E}$, а D означает взятие производной по переменной z от функции, стоящей в заголовке таблицы:

$$D = \frac{d}{dz}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dz^2}.$$

Таблица 45

	$w_1(z)$	$w_2(z)$	$w_3(z)$	$w_4(z)$	$x(z)$	$\varphi(z)$	$\psi(z)$	$\delta(z)$	Члены от нагрузок
1	FD^2	$S_y D^2$	$S_x D^2$	$S_z D^2$	0	0	0	0	$\frac{1}{E} q_z$
2	$S_y D^2$	$J_y D^2 - \gamma F$	$J_{xy} D^2$	$J(x, \varphi) D^2 - \gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$	$-\gamma FD$	0	0	$\gamma S_x D$	$\frac{1}{E} r_x$
3	$S_x D^2$	$J_{xy} D^2$	$J_x D^2 - \gamma F$	$J(y, \varphi) D^2 - \gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$	0	$-\gamma FD$	$-\gamma FD$	$-\gamma S_y D$	$\frac{1}{E} r_y$
4	$S_z D^2$	$J(x, \varphi) D^2 - \gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$	$J(y, \varphi) D^2 - \gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$	$J_x D^2 - \gamma \left[J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]$	$-\gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) D$	$-\gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) D$	$-\gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) D - \gamma J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) D$	$\gamma \left[J \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - J \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] D$	$\frac{1}{E} r_z$
1	0	FD	0	$J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) D$	FD^2	0	0	$-S_x D^2$	$\frac{1}{G} q_x$
2	0	0	FD	$J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) D$	0	FD^2	FD^2	$S_y D^2$	$\frac{1}{G} q_y$
3	0	$-S_x D$	$S_y D$	$\left[J \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - J \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] D$	$-S_x D^2$	$S_y D^2$	$S_y D^2$	$(J_x + J_y) D^2$	$\frac{1}{G} m$

Вариационные уравнения

Уравнения равновесия

В таблице приняты следующие сокращенные обозначения:

а) принятые в сопротивлении материалов обозначения площади поперечного сечения, статических моментов и моментов инерции:

$$\left. \begin{aligned} \iint dx dy &= F, & \iint y^2 dx dy &= J_x, \\ \iint y dx dy &= S_x, & \iint x^2 dx dy &= J_y, \\ \iint x dx dy &= S_y, & \iint xy dx dy &= J_{xy}; \end{aligned} \right\} (1.11)$$

б) геометрические характеристики, аналогичные секторальному статическому моменту S_ω и секторальному моменту инерции J_ω теории тонкостенных стержней открытого профиля, названные соответственно статическим бимоментом и бимоментом инерции:

$$\left. \begin{aligned} \iint \varphi dx dy &= S_\varphi, \\ \iint \varphi^2 dx dy &= J_\varphi; \end{aligned} \right\} (1.12)$$

в) новые геометрические характеристики, напоминающие по своей структуре моменты инерции и частично имеющие аналогов в теории тонкостенных стержней, а частично специфические для упругого сплошного стержня, обозначенные буквой J с аргументом, равным подынтегральной функции:

$$\left. \begin{aligned} \iint \varphi x dx dy &= J(x\varphi), & \iint x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy &= J \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ \iint \varphi y dx dy &= J(y\varphi), & \iint y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= J \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), & \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \\ \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy &= J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), & \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy &= J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2; \end{aligned} \right\} (1.13)$$

г) наконец, для членов, зависящих от внешней объемной и поверхностной нагрузки, приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \iint Z dx dy &+ \int Z_s ds = q_z, \\ \iint Zx dx dy &+ \int Z_x ds = r_x, \\ \iint Zy dx dy &+ \int Z_y ds = r_y, \\ \iint Z\varphi dx dy &+ \int Z_s \varphi ds = r_\varphi, \\ \iint X dx dy &+ \int X_s ds = q_x, \\ \iint Y dx dy &+ \int Y_s ds = q_y, \\ \iint (Yx - Xy) dx dy &+ \iint (Y_x x - X_y y) ds = m. \end{aligned} \right\} (1.14)$$

5. Система дифференциальных уравнений табл. 45 выведена в произвольной прямоугольной системе координат. Система уравнений значительно упростится, если за оси координат приняты главные центральные оси. Как известно, при этом обращаются в нуль три характеристики:

$$S_x = S_y = J_{xy} = 0.$$

Если в качестве $\varphi(x, y)$ возьмем функцию

$$\varphi(x, y) = xy - \frac{J(x^2y)}{J_y}x - \frac{J(xy^2)}{J_x}y, \quad (1.15)$$

ортогональную с тремя обобщенными координатами 1, x и y закона плоскости, то в нуль будут обращены еще три геометрические характеристики, а именно:

$$S_\varphi = J(x\varphi) = J(y\varphi) = 0.$$

Остальные геометрические характеристики, зависящие от функции $\varphi(x, y)$, при выборе ее в форме (1.15), будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= -\frac{J(x^2y)}{J_y}F, & J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= -\frac{J(xy^2)}{J_x}F, \\ J\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= J_y, & J\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= J_x, \\ J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= J_x + \left[\frac{J(x^2y)}{J_y}\right]^2F, & J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= J_y + \left[\frac{J(xy^2)}{J_x}\right]^2F. \end{aligned} \right\} (1.16)$$

Система дифференциальных уравнений в главных центральных осях, при функции $\varphi(x, y)$, определяемой формулой (1.15), будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} EF\omega_1'' + q_2 &= 0, \\ EJ_y\omega_2'' - GF\omega_2 + GF\frac{J(x^2y)}{J_y}\omega_3 - GFu' - r_x &= 0, & (a) \\ EJ_x\omega_3'' - GF\omega_3 + GF\frac{J(xy^2)}{J_x}\omega_2 - GFv' - r_y &= 0, & (б) \\ GF\frac{J(x^2y)}{J_y}\omega_2 + GF\frac{J(xy^2)}{J_x}\omega_3 + EJ_\varphi\omega_1'' - G\left\{J_x + J_y + \right. & \\ \left. + F\left[\frac{J(x^2y)}{J_y}\right]^2 + F\left[\frac{J(xy^2)}{J_x}\right]^2\right\}\omega_4 + GF\frac{J(x^2y)}{J_y}u' + & \\ \left. + GF\frac{J(xy^2)}{J_x}v' + G(J_x - J_y)\theta' + r_\varphi &= 0, & (в) \\ GF\omega_2'' - GF\frac{J(x^2y)}{J_y}\omega_4 + GFu'' + q_x &= 0, & (г) \\ GF\omega_3'' - GF\frac{J(xy^2)}{J_x}\omega_4 + GFv'' + q_y &= 0, & (д) \\ G(J_y - J_x)\omega_2'' + G(J_x + J_y)\theta'' + m &= 0. & (е) \end{aligned} \right\} (1.17)$$

Первое уравнение (1.17) не связано с остальными шестью уравнениями системы и в дальнейших преобразованиях не нуждается. Система

остальных шести дифференциальных уравнений путем исключения функций ω_2 , ω_3 и ω_4 может быть приведена к системе трех дифференциальных уравнений относительно трех функций u , v и θ . Исключение можно провести следующим образом: из трех последних уравнений (г), (д) и (е) определяем ω_2' , ω_3' и ω_4' через вторые производные от функций u , v и θ и подставляем в три уравнения (а), (б) и (в), предварительно пролифференцировав их один раз по переменной z . После преобразования получим три следующих дифференциальных уравнения относительно трех искомых функций $u(z)$, $v(z)$ и $\theta(z)$:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y u^{IV} + EJ(x^2y)\frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}\theta^{IV} &= \bar{q}_x, \\ EJ_x v^{IV} - EJ(xy^2)\frac{J_x - J_y}{J_y - J_x}\theta^{IV} &= \bar{q}_y, \\ EJ_y \theta^{IV} - G\frac{4J_x J_y}{J_x - J_y}\theta'' &= \bar{m}, \end{aligned} \right\} (1.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= q_x + r_x' - \frac{EJ_y}{GF}q_x'' - \frac{EJ(x^2y)}{G(J_y - J_x)}m'', \\ \bar{q}_y &= q_y + r_y' - \frac{EJ_x}{GF}q_y'' - \frac{EJ(xy^2)}{G(J_y - J_x)}m'', \\ \bar{m} &= m - \frac{EJ_\varphi}{G(J_x + J_y)}m'' + \frac{J_y - J_x}{J_x + J_y}\left[r_\varphi' - \frac{J(x^2y)}{J_y}q_x - \frac{J(xy^2)}{J_x}q_y\right]. \end{aligned} \right\}$$

Первое уравнение системы (1.17), относящееся к продольному растяжению, полностью совпадает с аналогичным уравнением теории тонкостенных стержней. Последнее уравнение (1.18) аналогично уравнению стесненного кручения теории тонкостенных стержней, если считать выражение $\frac{4J_x J_y}{J_x - J_y}$ приближенным значением момента инерции при чистом кручении J_d .

Два остальных уравнения, т. е. два первых уравнения системы (1.18), относящихся к изгибу стержня в главных плоскостях, отличаются от соответствующих уравнений теории тонкостенных стержней наличием членов с четвертой производной от угла кручения $\theta(z)$. Эти уравнения тоже можно привести к виду, совершенно аналогичному соответствующим уравнениям изгиба в главных плоскостях тонкостенных стержней открытого профиля. С этой целью обратимся к первым двум уравнениям (1.1), которые выражают перемещения любой точки поперечного сечения через перемещения и угол поворота начала координат. Пусть, для определенности, точка A с координатами a_x и a_y является точкой, для которой определяются перемещения u_A и v_A ; тогда формулы (1.1) примут вид:

$$u_A = u - a_y\theta, \quad v_A = v + a_x\theta. \quad (1.19)$$

Разрешая уравнения (1.19) относительно u и v (перемещений начала координат), получим:

$$u = u_A + a_y\theta, \quad v = v_A - a_x\theta. \quad (1.20)$$

Если в формулах (1.19) угол кручения θ относится к оси, проходящей через начало координат, то в формуле (1.20) нужно угол θ отнести к оси, проходящей через точку $A(a_x, a_y)$.

Подставляя (1.20) в два первых уравнения системы (1.18), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y u_A^{IV} + \left(EJ_y a_y + EJ(x^2 y) \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x} \right) \theta^{IV} &= \bar{q}_x, \\ EJ_x v_A^{IV} + \left(-EJ_x a_x + EJ(xy^2) \frac{J_x - J_y}{J_y - J_x} \right) \theta^{IV} &= \bar{q}_y. \end{aligned} \right\} (1.21)$$

Выберем точку A так, чтобы ее координаты обращали в нуль коэффициенты при θ^{IV} . Тогда уравнения (1.21) будут иметь вид, совершенно аналогичный соответствующим уравнениям тонкостенных стержней с открытым профилем:

$$EJ_y u_A^{IV} = \bar{q}_x, \quad EJ_x v_A^{IV} = \bar{q}_y. \quad (1.22)$$

Точка A будет центром изгиба для стержней сплошного сечения и ее координаты будут определяться формулами, аналогичными соответствующим формулам тонкостенных стержней открытого профиля:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{J(xy^2)}{J_x} \cdot \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}, \\ a_y &= -\frac{J(x^2 y)}{J_y} \cdot \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}. \end{aligned} \right\} (1.23)$$

6. Исходя из отмеченного в предыдущем пункте совпадения вида дифференциальных уравнений стесненного кручения для стержней сплошного сечения и тонкостенных стержней открытого профиля, мы по аналогии можем коэффициент $\frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$ отождествить с моментом инерции при чистом кручении J_d .

Полагая $J_d = \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$, мы получаем приближенную и очень простую формулу для определения жесткости при чистом кручении для стержней сплошного или полого сечения.

Ниже в табл. 46 мы приводим значения величин $\frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$, вычисленные для стержня прямоугольного сечения с различным соотношением

Таблица 46

$\frac{b}{a}$	1	2	3	4	5	10	∞
$\frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$	0,167	0,267	0,300	0,319	0,321	0,330	0,333
J_d	0,141	0,229	0,263	0,281	0,291	0,313	0,333

сторон $\frac{b}{a}$. Для сравнения даны величины J_d , вычисленные точными методами теории упругости для тех же сечений (в таблице даны коэффициенты при $a^3 b$) [136].

Как видно из таблицы, несмотря на приближенность формулы $\frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$, значения величин, полученные при помощи этой формулы, довольно близко подходят к точным значениям J_d , особенно при больших значениях отношения $\frac{b}{a}$; наиболее неблагоприятный случай соотношения $\frac{b}{a} = 1$ (квадратное сечение) даст расхождение 18% .

7. Основные уравнения изложенной здесь общей теории деформации стержней могут быть получены также и методом непосредственного приведения трехмерной проблемы теории упругости к одномерной. Уравнение равновесия элементарного параллелепипеда в направлении оси Oz имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

Определяя в этом уравнении напряжения по формулам:

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{zy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z},$$

и принимая во внимание нашу основную гипотезу об отсутствии деформаций ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} в плоскости, перпендикулярной к оси стержня, получим уравнение для продольного перемещения $w = w(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{E}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{G} Z = 0, \quad (1.24)$$

где E — приведенный модуль продольной упругости.

Полагая в уравнении (1.24)

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1, 2, 3, \dots, n} W_k(z) \varphi_k(x, y)$$

(где φ_k — функции заданные, а $W_k(z)$ — искомые), умножая это уравнение в соответствии с вариационным методом приведения на $\varphi(x, y) dx dy$, беря затем от левой части уравнения интеграл по всей площади поперечного сечения стержня, применяя там, где требуется по ходу выкладок, формулу интегрирования по частям и приравнявая результат нулю, получаем при фиксированном значении номера i и при надлежащем выборе аппроксимирующих функций соответствующее i -е вариационное уравнение системы табл. 45.

Изложенный здесь вариационный метод приведения к обобщенным дифференциальным уравнениям при широком использовании основных физических гипотез и понятий может быть с успехом применен не только в теории стержней, пластинок и оболочек, но также и к другим задачам математической физики. Так, например, на основе этого метода могут быть разработаны приближенные решения ряда задач теории фильтрации, гидродинамики, теплопроводности и т. д.

8. Следует отметить, что изложенная здесь теория изгиба и кручения стержней сплошного сечения, представленная основным уравнением (1.24), имеет принципиальное отличие от теории Сен-Венана. Это отличие состоит в том, что в то время как в теории Сен-Венана и в элементарной теории изгиба балок предполагается, что продольные волокна (слои) бруса при изгибе и кручении не оказывают давления друг на друга, в нашей теории, наряду с напряжениями в поперечном сечении стержня, учитываются также и нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных оси Oz .

В силу указанного различия исходных гипотез наше основное уравнение (1.24), наряду с производными по x и y , содержит также и вторую частную производную по z . Соответствующее же уравнение теории Сен-Венана имеет частные производные от искомой функции только по координатам x и y поперечного сечения бруса.

9. Заметим, что для стержней сплошного сечения будут справедливы дифференциальные уравнения устойчивости (1.10) гл. V и уравнения колебаний (1.9) гл. IX теории тонкостенных стержней. Это следует из того, что дифференциальные уравнения изгиба (1.22) и уравнение кручения теории стержней сплошного сечения [третье уравнение системы (1.18)] полностью совпадают с соответствующими уравнениями изгиба и кручения теории тонкостенных стержней [уравнений (7.3) гл. I]. Отличие будет заключаться лишь в значении геометрических характеристик. При вычислении этих характеристик контурные интегралы в теории тонкостенных стержней заменяются двукратными интегралами теории стержней сплошного сечения, секториальный бимомент инерции J_ω при законе деформации (1.15) заменяется характеристикой $J_\varphi = \int \int_F \varphi^2 dx dy$, момент инерции при чистом кручении J_a вычисляется по формуле $J_a = \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y}$, а координаты центра изгиба определяются по формулам (1.23).

§ 2. Стержни с двумя осями симметрии

Система дифференциальных уравнений (1.17) значительно упрощается, когда мы имеем дело со стержнями, обладающими в поперечном сечении одной или двумя осями симметрии.

Рассмотрим для примера стержень с двумя осями симметрии; это может быть стержень прямоугольного сечения, двутавр с равными пол-

ками, стержень эллиптического сечения — сплошной или с отверстием эллиптической же формы и т. д. Геометрические характеристики $J(x^2y)$ и $J(xy^2)$ в этом случае обращаются в нуль. Оставляя в стороне вопросы об изгибе в главных плоскостях и растяжении, как хорошо известно из сопротивления материалов, обратимся к задаче о стесненном кручении стержня; система уравнений (1.17) распадается и задача о стесненном кручении описывается двумя дифференциальными уравнениями (а) и (б) системы (1.17):

$$\left. \begin{aligned} EJ_\varphi \omega_4'' - G(J_x + J_y) \omega_4' + G(J_x - J_y) \theta' + r_\varphi &= 0, \\ -G(J_x - J_y) \omega_4' + G(J_x + J_y) \theta'' + m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Систему двух уравнений (2.1) можно свести к одному дифференциальному уравнению относительно угла кручения θ путем исключения функции ω_4 подобно тому, как это было сделано выше. Здесь выгоднее применить другой способ — способ введения разрешающей функции; он удобен тем, что не приходится прибегать к дифференцированию уравнений (2.1) и тем самым вводить в рассмотрение вместо самих функций, зависящих от нагрузок r_φ и m , имеющих ясный физический смысл, их производные.

Введение разрешающей функции особенно просто, когда одно из уравнений системы (2.1) однородное; поэтому мы рассмотрим два случая: а) при внешней продольной нагрузке сохраняем $r_\varphi \neq 0$ и полагаем $m = 0$; б) при внешней поперечной нагрузке полагаем $r_\varphi = 0$ и $m \neq 0$.

а) В первом случае будем иметь систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_\varphi \omega_4'' - G(J_x + J_y) \omega_4' + G(J_x - J_y) \theta' + r_\varphi &= 0, \\ -G(J_x - J_y) \omega_4' + G(J_x + J_y) \theta'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Выбираем разрешающую функцию $F = F(z)$ так, чтобы второе, однородное, уравнение системы (2.2) удовлетворялось тождественно. Для этого нужно положить:

$$\omega_4 = (J_x + J_y) F'', \quad \theta = (J_x - J_y) F'. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первое уравнение системы (2.2), получим разрешающее уравнение для системы (2.2) в следующем виде:

$$EJ_\varphi (J_x + J_y) F'''' - 4GJ_x J_y F'' + r_\varphi = 0. \quad (2.4)$$

В некоторых случаях удобно представить это уравнение относительно бимоента. Бимомент, как известно, представляется по определению в следующем виде:

$$B = \int \int \sigma(z, x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Подставляя сюда значение σ из формулы (1.6), получим:

$$B = EJ_\varphi \omega_4',$$

а на основании первой формулы (2.3) будем иметь

$$B = EJ_z (J_x + J_y) F'''. \quad (2.5)$$

Продифференцировав уравнение (2.4) один раз по переменной z и воспользовавшись выражением (2.5), получим

$$B'' - \frac{G}{E} \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y} B + r_z = 0.$$

б) Во втором случае, при внешней нагрузке, состоящей из поперечных сил, т. е. когда $m \neq 0$, а $r_z = 0$, система дифференциальных уравнений, о которой мы выше говорили, будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \omega_4'' - G(J_x + J_y) \omega_4 + G(J_x - J_y) \psi' &= 0, \\ -G(J_x - J_y) \omega_4' + G(J_x + J_y) \psi'' + m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

В этой системе первое уравнение однородно, и поэтому разрешающую функцию ищем в виде, тождественно ему удовлетворяющем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_4 &= -G(J_x - J_y) F', \\ \psi &= EJ_z F'' - G(J_x + J_y) F. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

После подстановки (2.7) во второе уравнение системы (2.6) получим разрешающее уравнение в виде

$$EJ_z (J_x + J_y) F^{IV} - 4GJ_x J_y F'' + \frac{m}{G} = 0. \quad (2.8)$$

Это уравнение в своей однородной части совпадает с уравнением (2.4).

Уравнение (2.8), если разделить его на $(J_x + J_y)$, можно представить и в таком виде:

$$EJ_z F^{IV} - G \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y} F'' + \frac{m}{G(J_x + J_y)} = 0.$$

Мы можем получить искомое дифференциальное уравнение и относительно неизвестной функции $\psi(z)$. Для этого необходимо первое уравнение системы (2.1) продифференцировать один раз по z , и с помощью второго уравнения (2.1) исключить функцию $\omega_4'(z)$. Обозначая получающийся при этом свободный член через $\bar{m}(z)$, будем иметь

$$EJ_z \psi^{IV} - G \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y} \psi'' - \bar{m} = 0.$$

Это уравнение по своей структуре совпадает с уравнением стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля.

§ 3. Стержни с одной осью симметрии

Большой практический интерес представляют задачи о расчете стержней сплошного сечения или полых толстостенных конструкций, обладающих в поперечном сечении одной осью симметрии, например железнодорожного рельса (рис. 205, а) или корпуса судна с поперечным сечением, изображенным на рис. 205, б. В задачах этого рода мы исследуем вопрос о совместном действии изгиба из плоскости симметрии и стесненного кручения, сопровождающегося деформацией сечения, оставляя в стороне более простой вопрос о продольном растяжении и изгибе в плоскости симметрии.

Таким образом, из семи искомых функций (компонентов перемещения) три, а именно: $w_1(z)$, $w_2(z)$ и $v(z)$, мы исключаем из рассмотрения, а четыре: $u(z)$, $\psi(z)$, $w_3(z)$ и $w_4(z)$ — мы должны определить. Формулы (1.1) для этого случая принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} u(z, x, y) &= u(z) - \psi(z) y, \\ v(z, x, y) &= \psi(z) x, \\ w(z, x, y) &= w_2(z) x + w_3(z) \varphi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Система дифференциальных уравнений табл. 45 тоже будет иметь для этого случая более простой вид, так как мы должны будем отбросить первое и третье вариационные уравнения и второе уравнение равновесия. Предполагая, что сечение отнесено к главным центральным осям, получим систему дифференциальных уравнений, записанную в форме табл. 47.

Закон распределения деформации по поперечному сечению задан в виде произведения координат xu и функцию $\varphi(x, y)$ возьмем в виде

$$\varphi(x, y) = xy + ax. \quad (3.2)$$

Требую, чтобы функция $\varphi(x, y)$ была ортогональна с функцией x , найдем для a следующее значение:

$$a = -\frac{J(x^2 y)}{J_y}.$$

При таком выборе функции $\varphi(x, y)$ величины, входящие в состав коэффициентов системы дифференциальных уравнений табл. 47 будут иметь

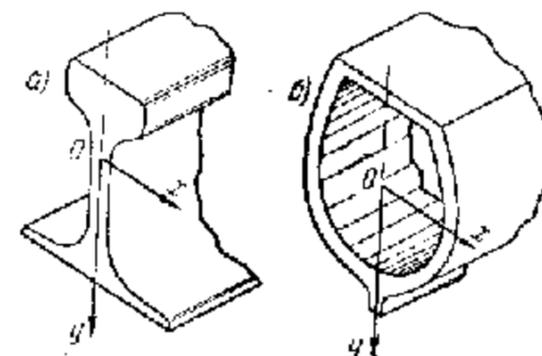


Рис. 205.

следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 J(x\varphi) &= 0, \\
 J_z &= J(x^2y^2) - \frac{J^2(x^2y)}{J_y}, \\
 J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= aF = -F \frac{J(x^2y)}{J_y}, \\
 J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 &= J_x + a^2F = J_x + \frac{J^2(x^2y)}{J_y^2} F, \\
 J\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 &= J_y, \\
 J\left(y \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= J_x, \\
 J\left(x \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= J_y.
 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Система дифференциальных уравнений табл. 47 после некоторых несложных преобразований может быть заменена другой, более удобной системой:

$$\left. \begin{aligned}
 \omega'_1 &= \frac{J_x + J_y}{J_x - J_y} \eta'' + \frac{m}{G(J_x - J_y)}, \\
 \omega'_2 &= -u'' + \frac{J(x^2y)}{J_y} \cdot \frac{J_x + J_y}{J_x - J_y} \eta'' + \bar{q}_x, \\
 -EJ_y u^{IV} + EJ(x^2y) \frac{J_x + J_y}{J_x - J_y} \eta^{IV} + \bar{r}_x &= 0, \\
 EJ_y \eta^{IV} - G \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y} \eta'' - m &= 0,
 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

где \bar{q}_x , \bar{r}_x и \bar{m} обозначают:

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= \frac{J(x^2y)}{GJ_y(J_x - J_y)} m - \frac{1}{GF} q_x, \\
 \bar{r}_x &= q_x + r_x + \frac{E}{G} \frac{J(x^2y)}{J_x - J_y} m'' - \frac{EJ_y}{GF} q_x'', \\
 \bar{m} &= -m + \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y} \left[r_x - \frac{J(x^2y)}{J_y} q_x \right] + \frac{EJ_y}{G(J_x + J_y)} m''.
 \end{aligned}$$

Третье уравнение системы (3.4) может быть преобразовано и к другому виду, если вместо функции $u(z)$, обозначающей перемещение начала координат в направлении оси Ox , ввести другую функцию $u_A(z)$, обозначающую перемещение в направлении оси Ox некоторой точки A ,

Таблица 47

	Число от нагрузки	Правая часть
$\theta(z)$	—	0
$u(z)$	—GFD	0
$\omega_1(z)$	$EJ(x^2y)D^2 - GJ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$	$G \left[J \left(y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - J \left(x \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \right] D$
$\omega_2(z)$	$EJ_y D^2 - GF$	—
	2	1
	4	3
	Уравнения равновесия	

отстоящей от начала координат на расстоянии*)

$$a_y = \frac{J(x^2y)}{J_y} \cdot \frac{J_x + J_y}{J_x - J_y}. \quad (3.5)$$

Третье уравнение системы (3.4) примет обычный вид дифференциального уравнения изгиба балки

$$-EI_y u_A^{IV} + \bar{r}_x = 0. \quad (3.6)$$

После определения θ из последнего уравнения (3.4) и $u(z)$ или $u_A(z)$ из уравнения (3.6), перемещения w_2 и w_4 легко определяются на двух первых уравнений системы (3.4); следовательно, основным разрешающим уравнением является последнее уравнение системы (3.4), аналогичное, как уже указывалось, по своей структуре уравнению стесненного кручения теории тонкостенных стержней открытого профиля.

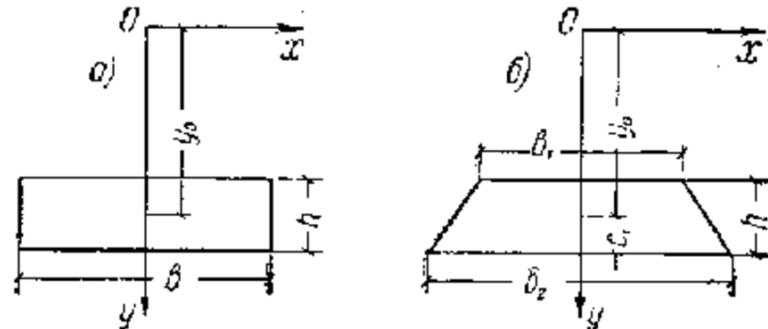


Рис. 206.

Остается сказать несколько слов о вычислении геометрических характеристик, при помощи которых составляются коэффициенты дифференциальных уравнений. Что касается определения координат центра тяжести, площади поперечного сечения и моментов инерции J_x и J_y , то эти величины имеются в большинстве инженерных справочников; поэтому мы обращаем внимание только на вычисление двух новых геометрических характеристик: $J(x^2y)$ и $J(x^2y^2)$, входящих в состав бимоента инерции J_c .

Поскольку точное вычисление интегралов $J(x^2y)$ и $J(x^2y^2)$ представляет достаточные трудности, а при приближенном характере изгибной здесь теории является даже излишним, мы предлагаем при

*) Из первой формулы (3.1) имеем:

$$u_A = u(z) - \theta(z) a_y,$$

откуда

$$u = u_A + a_y \theta.$$

Подставляя последнюю формулу в третье уравнение системы (3.4) и требуя обращения в нуль коэффициента при θ^{IV} , приходим к (3.5).

вычислении $J(x^2y)$ и $J(x^2y^2)$ пользоваться методом разбивки сложных сечений, типа рельса и др., на элементарные прямоугольники и трапеции с основаниями, параллельными оси Ox и соответственным образом вписывающихся в заданную конфигурацию. Формулы же для прямоугольника и трапеции имеют достаточно простой вид. Для прямоугольника с основанием b и высотой h , центр тяжести которого отстоит от оси Ox на расстоянии y_0 (рис. 206, а), имеем:

$$\left. \begin{aligned} J(x^2y) &= \int_{y_0 - \frac{h}{2}}^{y_0 + \frac{h}{2}} y \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx dy = \frac{hb^3}{12} y_0, \\ J(x^2y^2) &= \int_{y_0 - \frac{h}{2}}^{y_0 + \frac{h}{2}} y^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx dy = \frac{hb^3}{12} \left(y_0^2 + \frac{h^2}{12} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Для равнобокой трапеции с основаниями b_1 , b_2 и высотой h , центр тяжести которой отстоит от оси Ox на расстоянии y_0 (рис. 206, б), получаем более сложные формулы:

$$\begin{aligned} J(x^2y) &= \int_{y_0 + c_1 - h}^{y_0 + c_1} y \int_{-\frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{h}(y_0 + c_1 - y))}{\frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{h}(y_0 + c_1 - y))} x^2 dx dy = \\ &= \frac{y_0 h}{48} (b_1^3 + b_2^3) (b_1 + b_2) + \frac{h^3}{360} (b_2 - b_1) (b_1^3 + 3b_1 b_2 + b_2^3), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} J(x^2y^2) &= \int_{y_0 + c_1 - h}^{y_0 + c_1} y^2 \int_{-\frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{h}(y_0 + c_1 - y))}{\frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{h}(y_0 + c_1 - y))} x^2 dx dy = \\ &= \frac{h}{12} \left\{ \left(\frac{y_0}{2} \right)^2 (b_1 + b_2) (b_1^3 + b_2^3) + \frac{y_0 h}{15} (b_2 - b_1) (b_1^3 + 3b_1 b_2 + b_2^3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{180} \frac{b_2^3}{(b_1 - b_2)} [2(b_1 + b_2)(b_1^3 - b_2^3) - 5b_1 b_2 (b_1 - b_2)^2 + b_1^2 b_2^3] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $c_1 = \frac{h}{3} \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}$.

Для подсчета геометрических характеристик стержня типа рельса можно в первом приближении разбить поперечное сечение на небольшое количество простых частей, например, как показано на рис. 207. Результат, конечно, будет ближе к действительности, если контур будет разбит на большее количество прямоугольников и трапеций,

лучше вписывающихся в контур поперечного сечения. $J(x^2y)$ и $J(x^2y^2)$ для всего сечения получается суммированием результатов, полученных по формулам (3.7), (3.8), (3.9) для составляющих поперечное сечение прямоугольников и трапеций. Ясно, что в случае необходимости подобным же образом могут быть подсчитаны и любые геометрические характеристики, как то: F , S_x , S_y , I_x и I_y .

Для того чтобы иметь наглядное представление о том, как влияет количество частей, на которые разбивается площадь при вычислении, на точность результата, ниже приведена сравнительная табл. 48. В ней даны значения величин интегралов $J(x^2y)$ и $J(x^2y^2)$ для равнобокой трапеции, вычисленные по формулам (3.8) и (3.9), и значения тех же интегралов, вычисленные при помощи

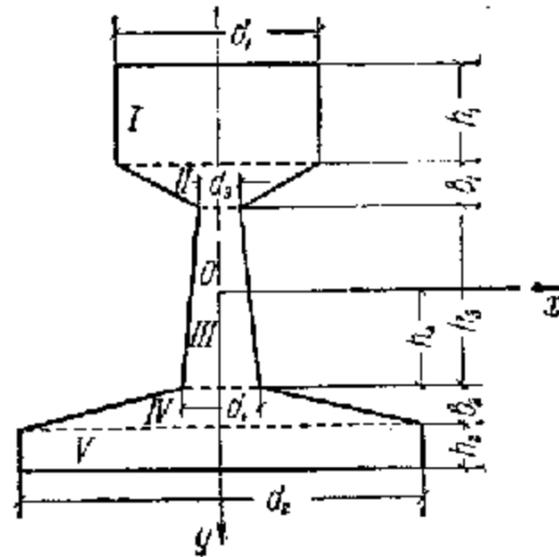


Рис. 207

формул (3.7) путем замены трапеции последовательно одним, двумя и четырьмя прямоугольниками.

В скобках даны значения тех же интегралов для перевернутой трапеции при тех же размерах.

Изложенный выше метод расчета конструкций, обладающих в поперечном сечении одной осью симметрии, как указывалось, в одинаковой мере применим к расчету как стержней сплошного сечения, так и толстостенных полых конструкций типа, например, корпуса судна (рис. 205, б). Однако в последнем случае вычисление геометрических характеристик, входящих в состав коэффициентов дифференциальных уравнений, практически сложно. Поэтому при расчете полых или, вообще говоря, не сплошных (открытых или замкнутых) конструкций мы предлагаем поступать так же, как и в теории тонкостенных стержней, и относить поперечное сечение к средней (профильной) линии, что позволяет при вычислении геометрических характеристик использовать графо-аналитические методы.

Таблица 48

	$h = \frac{1}{2}$ $b_1 = 3\frac{1}{4}; 3\frac{3}{4}; 4\frac{1}{4}; 4\frac{3}{4}$ $y_{01} = 2\frac{1}{2}; 2\frac{3}{4}; 3\frac{1}{4}; 3\frac{3}{4}$	$J(x^2y) = 35,4$ (31,35)	$J(x^2y^2) = 120,69$ (90,36)
	$h = 1$ $b_1 = 3,5; b_2 = 4,5$ $y_{01} = 2,5; y_{02} = 3,5$	$J(x^2y) = 35,5$ (31,49)	$J(x^2y^2) = 116,3$ (92,16)
	$h = 2$ $b = 4$ $y_0 = 3$	$J(x^2y) = 32,0$	$J(x^2y^2) = 90,6$
	$h = 2$ $b_1 = 3; b_2 = 5$ $c_1 = \frac{11}{12}$ $y_0 = 3\frac{1}{12} = \frac{37}{12}$	$J(x^2y) = 35,7$ (31,3)	$J(x^2y^2) = 122,15$ (89,76)

§ 4. Замечание о принципе Сен-Венана

Нами неоднократно указывалось, что в тонкостенных стержнях как открытого, так и замкнутого деформируемого профиля продольные нормальные напряжения от воздействия продольных бимоментных нагрузок, приложенных в каком-либо сечении стержня, могут иметь значительную величину даже в местах, достаточно удаленных от места приложения нагрузок. Другими словами, принцип Сен-Венана в применении к такого рода стержням имеет ограниченную область применения и выполняется безусловно только в случае очень длинных тонкостенных стержней. Стержни сплошного сечения так же, как тонкостенные стержни замкнутого профиля с жестким контуром, в этом отношении отличаются от тонкостенных стержней открытого и замкнутого деформируемого профиля, и принцип Сен-Венана к ним применим в полной мере. Проведем небольшой сравнительный подсчет, подтверждающий это положение.

Рассмотрим стержень сплошного прямоугольного сечения со сторонами a и $b=2a$ и тонкостенный стержень корытного сечения с высотой стенки $b=2a$, шириной полок a и общей толщиной $\delta=0,1a$.

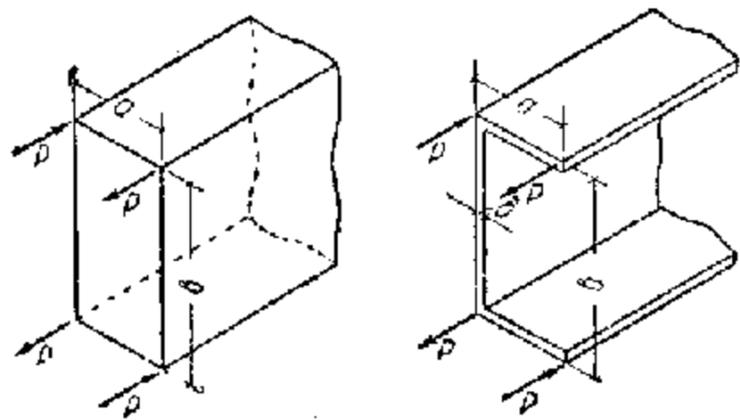


Рис. 208.

Пусть на одном конце каждого стержня приложена уравновешенная нагрузка (бимомент), как показано на рис. 208. Для стержня сплошного сечения

$$B_0 = \sum_{k=1}^4 P x_k y_k,$$

где x_k и y_k — координаты вершин прямоугольника.

Для тонкостенного стержня корытного сечения

$$B_0 = \sum_{k=1}^4 P \omega_k,$$

где ω_k — секторные координаты соответствующих точек поперечного сечения.

Дифференциальное уравнение возьмем в форме

$$B'' - k^2 B = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение это однородное, потому что мы имеем дело с краевой внешней нагрузкой, которую учтем при наложении граничных условий. Для наших целей удобно считать, что стержень имеет неограниченную длину; тогда второе граничное условие будет представлять ограниченность (конечность) напряжений на конце стержня, достаточно удаленном от конца, на котором приложена заданная нагрузка B_0 .

Коэффициент k^2 имеет следующие значения:

$$\text{для стержня сплошного сечения } k^2 = \frac{G}{E} \frac{4J_x J_y}{J_x + J_y};$$

$$\text{для тонкостенного стержня } k^2 = \frac{GJ_d}{EJ_w}.$$

Решение уравнения (4.1) берем в виде

$$B = C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz}.$$

Из условия ограниченности $B(z)$ при $z \rightarrow \infty$ находим $C_2 = 0$. Считая, что бимомент B_0 приложен на начальном крае $z=0$, найдем $C_1 = B_0$. Следовательно, бимомент в любом сечении от воздействия внешнего бимоменты B_0 , приложенного при $z=0$, будет выражаться формулой

$$B(z) = B_0 e^{-kz}. \quad (4.2)$$

Примем $E=2G$ (при коэффициенте Пуассона $\nu=0$). При взятых размерах получим для стержня сплошного сечения $k=2,19a^{-1}$; для тонкостенного стержня $J_d = \frac{1}{3000} a^3$, $J_w = \frac{43}{240} a^3$ и $k=0,061a^{-1}$.

Подставив найденные значения k в формулу (4.2), подсчитаем, что бимомент будет равен $\frac{B_0}{2}$:

а) для стержня сплошного сечения в сечении, отстоящем от начального на расстоянии $z=0,3a$;

б) для тонкостенного стержня в сечении, отстоящем от начального на расстоянии $z=11a$.

Бимомент уменьшится в 10 раз:

а) для стержня сплошного сечения в сечении, отстоящем от начального на расстоянии $z=a$;

б) для тонкостенного стержня в сечении, отстоящем от начального на расстоянии $z=38a$.

Из этих сравнительных подсчетов мы видим, что затухание бимоменты по длине для стержней со сплошным сечением происходит более чем в 30 раз быстрее по сравнению с тонкостенными стержнями открытого профиля и, следовательно, бимоментная нагрузка носит явно выраженный местный характер.

§ 5. Деформация стержня при растяжении

В теории тонкостенных стержней открытого профиля деформация поперечного сечения связана с кручением; обобщенная координата деформации представлена секториальной площадью $\omega(s)$, а мерой деформации служит взятая с обратным знаком производная от угла кручения $[-\theta'(z)]$. В стержнях сплошного сечения и тонкостенных стержнях замкнутого профиля деформация сечения в зависимости от характера задачи может быть связана в равной мере и с другими видами деформации: изгибом или растяжением; обобщенная координата деформации $\varphi(x, y)$, вследствие этого, не может задаваться раз навсегда в какой-то определенной аналитической форме, и вид ее определяется характером задачи, а удачный выбор во многом может зависеть от интуиции исследователя.

Пример. Рассмотрим круглый стержень сплошного сечения длиной $2l$, радиуса $r = a$, растягиваемый продольными сосредоточенными силами P , приложенными по торцам и направленными по оси стержня (рис. 209).

Так как в данном случае мы имеем осесимметричную задачу, то $u = v = \theta = w_x = w_y = 0$ и определению подлежат компоненты продольного перемещения $w_1(z)$ и $w_2(z)$.

Что касается перемещения $w_1(z)$, то оно определяется методом сопротивления материалов из первого уравнения системы табл. 45, которое при $q_2 = 0$ и $S_\varphi = 0$ имеет вид: $w_1'' = 0$. Продольное нормальное напряжение для этой части решения определяется формулой

$$\sigma_1(z) = \frac{P}{F}. \quad (5.1)$$

Продольное нормальное напряжение, соответствующее второму слагаемому продольного перемещения $w_2(z) \varphi(x, y)$, будет выражаться формулой

$$\sigma_2 = E w_2'(z) \varphi(x, y). \quad (5.2)$$

Функцию $w_2(z)$ определим из дифференциального уравнения

$$E J_\varphi w_2'' - G \left[J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] w_2 = 0, \quad (5.3)$$

которое получается из четвертого уравнения системы табл. 45 при $r_\varphi = 0$ и $S_\varphi = 0$.

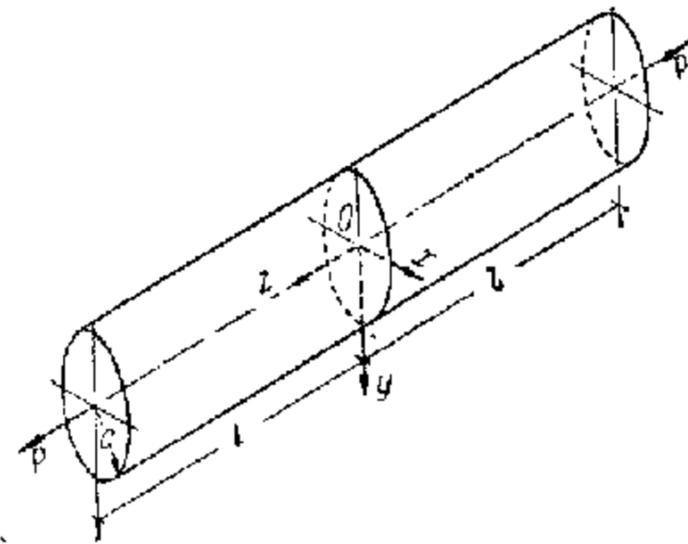


Рис. 209.

Функцию $\varphi(x, y)$ нужно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию осевой симметрии задачи и была ортогональна с функцией $\varphi_1(x, y) = 1$ или, другими словами, чтобы удовлетворялось равенство $S_\varphi = 0$.

Примем $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + C = r^2 + C$, и величину C определим из условия ортогональности

$$S_\varphi = \iint \varphi_1 dx dy = 0.$$

Получим

$$S_\varphi = \iint (x^2 + y^2 + C) dx dy = \iint (x^2 + y^2) dx dy + C \iint dx dy = 0.$$

Величину первого интеграла удобнее вычислить в полярных координатах ($x^2 + y^2 = r^2$):

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Второй интеграл представляет площадь поперечного сечения:

$$\iint dx dy = F = \pi a^2.$$

Следовательно, $C = -\frac{\pi a^4}{2\pi a^2} = -\frac{a^2}{2}$ и функция $\varphi(x, y)$ будет иметь вид (рис. 210):

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.3) при выбранной функции $\varphi(x, y)$ (5.4) будет иметь вид:

$$E J_\varphi w_2'' - 4G(J_x + J_y) w_2 = 0. \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.5) представим в форме

$$w_2 = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz, \quad (5.6)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{4G(J_x + J_y)}{E J_\varphi}}.$$

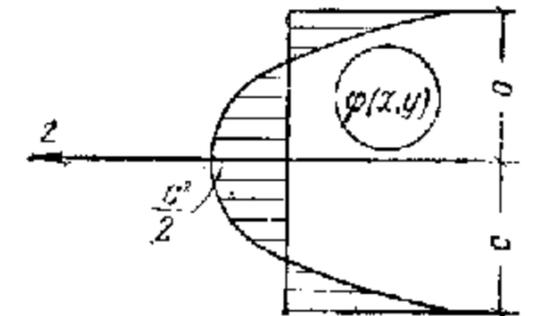


Рис. 210.

Выберем начало координат z в середине стержня. Тогда нам достаточно рассмотреть одну половину стержня от $z = 0$ до $z = l$.

При $z = 0$ в силу симметрии должно выполняться условие $w_2(0) = 0$. Отсюда находим $C_2 = 0$.

Вторую константу найдем из граничного вариационного условия при $z = l$, которое мы получим, приравняв нулю сумму работ продольных нормальных сил и внешней нагрузки на продольных единичных

перемещениях $\varphi(x, y)$:

$$\left[\iiint \sigma(z, x, y) \varphi(x, y) dx dy - \iint P \varphi(0) dx dy \right]_{z=l} = 0^*).$$

Подставляя сюда σ из формулы (5.2) и $\varphi(0) = -\frac{a^2}{2}$ из (5.4), получим

$$EJ_\varphi w'_1 + P \frac{a^2}{2} = 0. \quad (5.7)$$

Дифференцируя w_1 , определяемое формулой (5.6), один раз по z и принимая во внимание, что $C_2 = 0$, после подстановки в (5.7) будем

* В общем случае вариационные граничные условия будут иметь более сложный вид. Если $p(x, y)$ — интенсивность заданной на границе $z=l$ внешней продольной нагрузки, а $\pi(z, x, y)$ — внутреннее продольное напряжение, то при $z=l$, очевидно, должно выполняться равенство

$$\pi(l, x, y) - p(x, y) = 0. \quad (a)$$

При определении $\pi(z, x, y)$ мы всегда исходим из каких-либо предположений, условий и гипотез, упрощающих определение $\pi(z, x, y)$ и связанных с заданием закона распределения этих напряжений по поперечному сечению: это может быть либо закон плоских сечений, либо какой-нибудь из законов деформации, вытекающий из характера задачи. Что же касается интенсивности заданной внешней нагрузки $p(x, y)$, то она задается независимо от каких-либо предположений или гипотез, поэтому равенство (a) не может быть в общем случае выполнено точно. Вместо условия (a) ставим вариационное интегральное условие: требуем, чтобы на границе $z=l$ сумма работ всех сил — внутренних и внешних — на возможных для них перемещениях была равна нулю. Мы будем ближе к действительности, если при этом сможем представить продольные нормальные напряжения в виде суммы

$$\pi(l, x, y) = \sum_{j=1, 2, 3, \dots, n} K_j \varphi_j(x, y), \quad (b)$$

представляющей линейную комбинацию из функций $\varphi_j(x, y)$, каждая из которых представляет собой какой-либо заранее выбранный закон распределения по поперечному сечению, вытекающий из характера задачи; K_j — постоянные числа, подлежащие определению. За возможные перемещения может быть взята любая из функций $\varphi_i(x, y)$ ($i=1, 2, 3, \dots, j, \dots, n$). Тогда граничное вариационное условие может быть записано в таком виде:

$$\iiint \left[\sum_{j=1, 2, 3, \dots, n} K_j \varphi_j(x, y) - p(x, y) \right] \varphi_i(x, y) dx dy = 0. \quad (a)$$

Давая i значения 1, 2, 3, ..., n по количеству выбранных функций $\varphi_j(x, y)$, мы получим n уравнений, из которых могут быть определены все коэффициенты K_j . Мы видим здесь полную аналогию с разложением функций в ряды Фурье. Если функции $\varphi_j(x, y)$ ортогональны, то система (a) распадается на n простых уравнений. В рассматриваемом нами случае закон распределения напряжений σ по сечению представлен при помощи двух функций: функции $\varphi_1(x, y) = 1$, отражающей закон равномерного распределения по сечению (элементарная задача сопротивления материалов) и $\varphi_2(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}$,

отражающей закон деформации при осевой симметрии. Так как при этом $\varphi_2(x, y)$ подобрана ортогональной с функцией $\varphi_1(x, y) = 1$, то граничные условия удовлетворяются для каждого слагаемого в отдельности.

иметь при $z=l$

$$EJ_\varphi k C_1 \operatorname{ch} kl + P \frac{a^2}{2} = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{P}{2EJ_\varphi} \cdot \frac{a^2}{k \operatorname{ch} kl}.$$

Получим теперь формулу для σ_2 :

$$\sigma_2(z, x, y) = -\frac{Pa^2}{2J_\varphi} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl} \left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} \right). \quad (5.8)$$

Объединяя формулы (5.1) и (5.8), получим уточненную формулу для продольных нормальных напряжений для круглого стержня, растягиваемого приложенными по оси силами P :

$$\sigma = \frac{P}{F} - \frac{Pa^2}{2J_\varphi} \left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} \right) \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl}. \quad (5.9)$$

Так как

$$F = \pi a^2, \quad J_\varphi = \iiint \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) r dr d\varphi = \frac{\pi a^6}{12},$$

то формулу (5.9) можно переписать в другом виде:

$$\sigma = \frac{P}{\pi a^2} \left[1 - \frac{6}{a^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl} \right].$$

§ 6. Деформация сжато-изогнутой распорной балки

Рассмотрим однопролетную сплошную балку, имеющую на обоих концах шарнирные неподвижные опоры. Будем считать, что эти опоры расположены на уровне нижней грани и закрепляют каждую из опорных точек от перемещений как вертикальных, так и горизонтальных (рис. 211). Пусть поперечное сечение балки имеет форму двутавра с двумя осями симметрии (рис. 212).

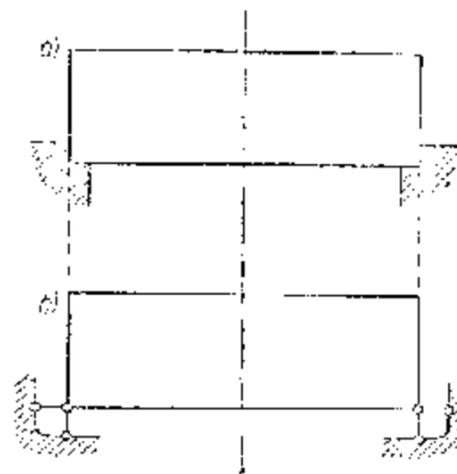


Рис. 211.

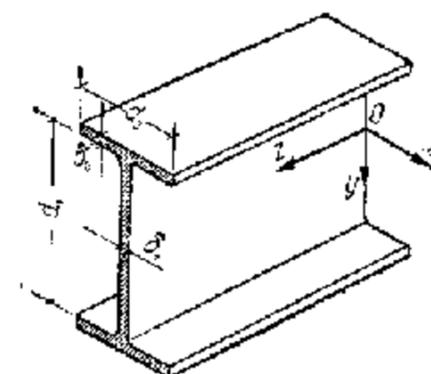


Рис. 212.

Предположим, что балка находится под действием вертикальной нагрузки, лежащей в плоскости симметрии Oyz и проходящей,

следовательно, через линию центров изгиба. Такая нагрузка при наличии в крайних сечениях балки неподвижных шарнирных опор, расположенных ниже оси, вызовет не только изгиб, но также и внецентренное сжатие, происходящее от горизонтальной составляющей опорных реакций, называемой *распором*. Этот распор, будучи применен к точкам одной только нижней полки, помимо напряжений от изгиба и сжатия, вызовет также и дополнительные напряжения, связанные с деформацией поперечного сечения.

Поскольку нагрузка действует в плоскости симметрии Oyz и граничные условия нашей балки также симметричны относительно плоскости Oyz , то формула (1.6) для продольных нормальных напряжений принимает следующий вид:

$$\sigma_x = E[\omega'_1(z) + \omega'_2(z)y + \omega'_3(z)\varphi(y)], \quad (6.1)$$

где функция поперечного распределения деформации $\varphi(y)$ в силу симметрии зависит только от одной переменной y .

Предполагая, что функции 1 , y и $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям ортогональности, умножая (6.1) последовательно на 1 , y и $\varphi(y)$ и интегрируя полученные выражения по всей площади поперечного сечения стержня, мы получим следующие выражения для обобщенных сил поперечного сечения балки: продольной сжимающей силы P , поперечного изгибающего момента M_x и бимоента B :

$$\left. \begin{aligned} P &= -EF\omega'_1(z), \\ M_x &= EJ_x\omega'_2(z), \\ B &= EJ_\varphi\omega'_3(z), \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где бимомент инерции J_φ определяется по формуле

$$J_\varphi = \int_F \varphi^2 dF.$$

Внося выражения (6.2) в (6.1), получим для продольного нормального напряжения следующую трехчленную формулу:

$$\sigma = -\frac{P}{F} + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{B}{J_\varphi}\varphi. \quad (6.3)$$

Остановимся теперь на обобщенной деформации сечения $\varphi(y)$. Предположим, что по высоте нашей двутавровой балки деформация поперечного сечения φ следует параболическому закону, принимая в полках двутавра постоянные, одинаковые для обеих полок значения. В этом случае функция φ , очевидно, будет удовлетворять условию ортогональности с функцией y (рис. 213, б) и нам остается ортогонализировать функцию φ с функцией равномерного растяжения, тождественно равной единице (рис. 213, а). Полагая значения ординат эпюры φ в полках двутавра равными $\varphi\left(\frac{d_1}{2}\right) = \frac{2F_1}{3F}$, а в середине стенки двутавра $\varphi(0) = 1 - \frac{2F_1}{3F}$, где F — площадь всего поперечного сечения балки,

а F_1 — площадь стенки двутавра, мы, очевидно, удовлетворим этому условию; соответствующая эпюра $\varphi(y)$ приведена на рис. 213, в.

Аналитическая запись функции $\varphi(y)$ имеет вид:

$$\varphi(y) = 1 - \frac{2F_1}{3F} - \frac{4y^2}{d_1^2}. \quad (6.4)$$

Главные геометрические характеристики F , J_x , J_φ в случае двутавра вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1 + 2F_2, \\ J_x &= \frac{d_1^3}{12}(F_1 + 3F_2), \\ J_\varphi &= \frac{F_1}{3} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{d_1}{F} \right)^2 + \frac{8}{3} \frac{F_1}{F} + F \right] + \frac{8}{9} \frac{F_1^2 F_2}{F^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Распор H в рассматриваемой задаче является статически неопределимой величиной. Этот распор мы должны определить из условия

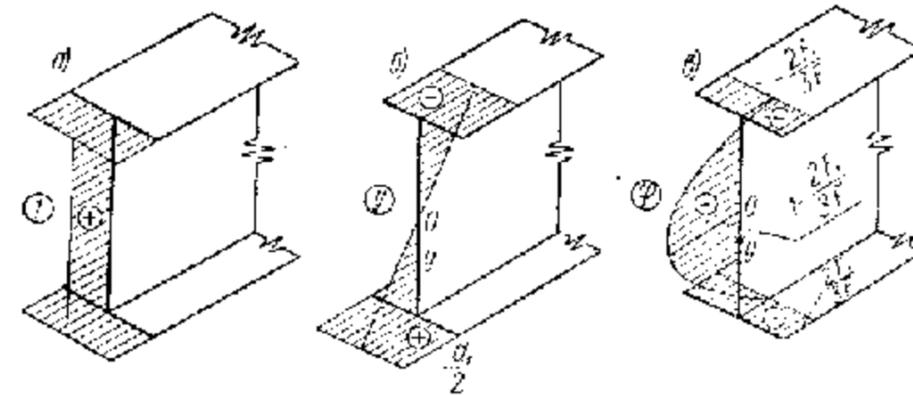


Рис. 213.

равенства нулю взаимного горизонтального перемещения на опорах. Применяя к решению этой задачи метод сил, выберем в качестве основной системы статически-определяемую балку с одной неподвижной и другой подвижной опорой. Такая система получается из заданной путем отбрасывания горизонтальной связи, соответствующей распору H . Уравнение метода сил, определяющее распор H , будет иметь вид

$$\delta_{HH}H + \delta_{Hq} = 0, \quad (6.6)$$

где δ_{HH} — горизонтальное перемещение точки приложения распора H от действия этого распора при единичном его значении; δ_{Hq} — горизонтальное перемещение той же точки в основной системе от заданной нагрузки q .

Относя формулу (6.3) к напряжению σ_H , возникающему в основной системе от действия одного только распора H , мы будем иметь

$$\sigma_H = -\frac{H}{F} - \frac{Hd_1}{2J_x}y + \frac{B(z)}{J_\varphi}\varphi. \quad (6.7)$$

Для определения бимоента $B(z)$ воспользуемся вариационными уравнениями (1.9). Рассматривая работу всех внешних и внутренних сил элементарного поперечного диска нашей балки на возможном перемещении $\varphi(y)$, определяемом формулой (6.4), при отсутствии массовых сил и распределенных продольных нагрузок, мы сможем соответствующее уравнение (1.9) записать в виде

$$\iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \varphi \, dx \, dy - \iint \tau_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dx \, dy = 0, \quad (6.8)$$

где касательное напряжение τ_{yz} определяется по формуле (1.7):

$$\tau_{yz} = G \left[v'(z) + w_1(z) + w_2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]. \quad (6.9)$$

Подставляя в (6.8) выражения (6.1) и (6.9) и интегрируя это уравнение, получим, пользуясь условиями ортогональности:

$$EJ_z w_1''(z) - GJ_{yz} w_2(z) = 0. \quad (6.10)$$

Здесь бимомент инерции J_z определяется по формуле (6.5), а для характеристики J_{yz} получим следующее выражение:

$$J_{yz} = \int_F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dF = \frac{16d_1}{3d_2}.$$

Дифференцируя уравнение (6.10) один раз по z и пользуясь выражением (6.2) для бимоента $B(z)$, получим дифференциальное уравнение

$$B''(z) - k^2 B(z) = 0, \quad (6.11)$$

где упругая характеристика k^2 имеет следующее значение:

$$k^2 = \frac{GJ_{yz}}{EJ_z}.$$

Интегрируя уравнение (6.11), получим

$$B(z) = C_1 \operatorname{ch} kz + C_2 \operatorname{sh} kz.$$

Выбирая начало отсчета координаты z в середине длины стержня, обозначая полную длину через $2l$ и принимая во внимание граничные условия

$$\text{при } z = \pm l \quad B = -H\varphi_H = \frac{2F_1}{3F} H,$$

будем иметь

$$B = \frac{2F_1}{3F} H \operatorname{ch} kz \cdot \varphi(y). \quad (6.12)$$

Внося (6.12) в уравнения (6.7), получим

$$\sigma_H = -H \left[\frac{1}{F} + \frac{d_1}{2J_x} y - \frac{2F_1}{3F} \operatorname{ch} kz \cdot \varphi(y) \right]. \quad (6.13)$$

По этой формуле, в частности, может быть определено напряжение $\sigma = \sigma(z, y)$ в любой точке двутавра от действия продольной сжимающей силы H , приложенной внецентренно. Это напряжение вычисляется с учетом деформации сечения по параболическому закону. Зная напряжение $\sigma = \sigma(z, y)$ в функции от z и y , мы можем затем путем интегрирования уравнения Гука

$$w' = \frac{\sigma}{E} \quad (6.14)$$

получить формулу для продольного перемещения $w = w(z, y)$. Учитывая, что перемещение w в середине пролета по условиям симметрии может быть принято равным нулю, получаем

$$w(z, y) = -\frac{H}{E} \left(\frac{z}{F} + \frac{d_1^2 z}{4J_x} y - \frac{1}{\kappa} \frac{2F_1}{3F} \operatorname{sh} kz \cdot \varphi \right).$$

Пологая в этой формуле $H = 1$ для опорной точки $(z = l, y = \frac{d_1}{2})$, получим

$$\sigma_{HH} = \frac{1}{E} \left[\frac{l}{F} + \frac{d_1^2 l}{4J_x} + \frac{\operatorname{sh} kl}{\kappa} + \left(\frac{2F_1}{3F} \right)^2 \right].$$

Свободный член δ_{Hq} уравнения (6.6) получим из рассмотрения деформации основной системы при действии на нее нагрузки q .

Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки. Для изгибающего момента $M_x = M_x(z)$ в каком-либо сечении $z = \text{const}$ будем иметь формулу

$$M_x = \frac{q(l^2 - z^2)}{2}.$$

Напряжение σ_q в основной системе вычисляется по одночленной формуле

$$\sigma_q = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{q(l^2 - z^2)}{2J_x} y. \quad (6.15)$$

Для продольного перемещения w_q из уравнений (6.13) и (6.15) получаем формулу

$$w_q = \frac{qz}{2EJ_x} \left(l^2 - \frac{z^2}{3} \right) y.$$

Из этой формулы при $z = l, y = \frac{d_1}{2}$ находим:

$$\delta_{Hq} = \frac{qd_1 l^3}{6EJ_x}.$$

Подставляя найденные величины δ_{HH} , δ_{Hq} в уравнение (6.6), получим формулу для распора H :

$$H = \frac{qd_1 l^3}{6} \frac{1}{\frac{J_x l}{F} + \frac{d_1^2 l}{4} + \frac{J_x \operatorname{sh} kl}{\kappa} + \left(\frac{2F_1}{3F} \right)^2} \quad (6.16)$$

С определением распора H дополнительные нормальные напряжения σ_H в любой точке вычисляются по формуле (6.7). Полное напряжение в распорной балке, претерпевающей также и деформацию сечения, получается путем суммирования напряжений: основного σ_σ , вычисляемого по обычной формуле (6.15) сопротивления материалов без учета распора, и дополнительного σ_H , определяемого формулами (6.13) и (6.16).

Если в приведенных выше формулах (6.13) и (6.16) отбросить бимоментные члены, относящиеся к деформации сечения, то мы будем иметь более простое приближенное решение задачи о напряжениях распорной балки или так называемой балки-свода.

ГЛАВА XI

БИМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Основные уравнения

1. Изложенный выше вариационный метод приведения двумерных и трехмерных проблем теории деформируемых тел, имеющих форму цилиндра или призмы, к одномерным задачам наивысшей общей бимоментной теории стержней в значительной степени расширяет рамки сопротивления материалов и прикладной теории упругости и позволяет сравнительно простыми средствами математического анализа, при использовании соответствующих физических гипотез, решить ряд новых практически важных задач по вопросам прочности конструкций. К числу таких задач относится, в частности, проблема начальных напряжений и начальных деформаций, вызванных в стержнях изменением температурного поля.

Имея в виду дать здесь сравнительно простую, но достаточно точную для практики теорию, будем, как и ранее, считать что для стержня как тонкостенного, так и сплошного сечения, подвергающегося действию температуры, из компонентов деформаций существенными являются деформации продольного удлинения и деформации сдвигов в продольных плоскостях. Деформации же удлинений и сдвига, происходящие в плоскости поперечного сечения, принимаются равными нулю.

Пусть по-прежнему x , y , z обозначают координаты какой-либо точки стержня. Обозначим через $w = w(x, y, z)$ полное продольное перемещение точки. Это перемещение в общем случае представляет собою функцию от всех трех координат x , y , z и складывается из перемещения упругого и перемещения, вызванного действием температуры. Полное перемещение $w(x, y, z)$ согласно нашему вариационному методу, будем искать в виде суммы, каждый член которой представляет собою произведение из искомой функции, зависящей от одной только продольной координаты z , на заданную функцию, зависящую от двух других координат x , y в поперечном сечении стержня.

Ограничиваясь, как и в теории тонкостенных стержней, четырехчленной формулой и представляя деформацию сечения каким-либо одним законом, мы можем написать

$$w(x, y, z) = \zeta(z) - \xi'(z)x - \eta'(z)y + w(z)\varphi(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь суммой первых трех членов представлен закон плоских сечений. Последним, четвертым, членом определяется продольное перемещение, возникающее вследствие деформации сечения. Функция φ , описывающая эту деформацию, выбирается по тем или иным физическим соображениям, в зависимости от характера рассматриваемой задачи.

Для тонкостенного стержня открытого профиля деформация сечения при изгибном кручении описывается, как было показано нами, законом секториальных площадей. В случае же тонкостенного стержня закрытого прямоугольного или эллиптического профиля деформация сечения при кручении хорошо описывается гиперболическим законом $\varphi = \alpha x y$. Этот закон, названный нами законом аксиальных площадей, был положен также и в основу теории деформации стержня сплошного сечения, находящегося в условиях изгибного (стесненного) кручения.

При изгибном кручении стержня как тонкостенного, так и сплошного сечения за функцию φ может быть выбрана функция свободного кручения стержня, получающаяся путем решения соответствующей задачи по теории Сен-Венана.

Закон для деформации сечения, как будет показано ниже, может быть также получен и из закона распределения заданной температуры в поперечном сечении стержня. Мы будем считать, что формула (1.1) является общей, пригодной не только для тонкостенного стержня открытого или закрытого профиля, но также и для стержня сплошного сечения. Отличие будет состоять в том, что для тонкостенного стержня функция φ будет зависеть только от одной координаты z , определяющей в поперечном сечении положение точки на кривой профиля, а для стержня сплошного сечения эта функция зависит уже от двух координат x, y , определяющих положение точки в двумерной области, занимаемой сечением. В дальнейшем будем считать, что все четыре линейно-независимые функции $1, x, y, \varphi$ основной формулы (1.1) удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} \int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0, \\ \int_F \varphi dF = \int_F \varphi x dF = \int_F \varphi y dF = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

2. Пусть $T = T(x, y, z)$ — заданная функция от x, y, z , характеризующая изменение температурного поля в пространстве, занимаемом стержнем. Эту функцию мы представим в виде конечной суммы, состоящей из четырех слагаемых, с выделением в этой сумме членов, зависящих линейно от координат x, y и соответствующих, таким образом, закону плоских сечений. Полагая

$$T = t_0(z) + t_1(z)x + t_2(z)y + t(z)\varphi(x, y), \quad (1.3)$$

умножив обе части равенства (1.3) последовательно на $1, x, y, \varphi(x, y)$, беря затем от обеих частей этого равенства определенные интегралы

по площади поперечного сечения и используя условия ортогональности (1.2), получим формулы для коэффициентов разложения (1.3):

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \frac{\int_F T dF}{F}, & t_2 &= \frac{\int_F T y dF}{J_y}, \\ t_1 &= \frac{\int_F T x dF}{J_x}, & t &= \frac{\int_F T \varphi dF}{J_\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где F — площадь сечения; J_x, J_y — главные моменты инерции; J_φ — главный бимомент инерции. Все эти переменные величины являются, таким образом, главными характеристиками сечения, обладающего также четырьмя степенями свободы.

Определим теперь упругую деформацию относительного продольного удлинения стержня в какой-нибудь его точке. Это деформация, очевидно, будет равна разности между полным относительным удлинением $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ и температурным линейным расширением $\epsilon_t = \alpha T$ (α — коэффициент линейного расширения). Принимая во внимание формулы (1.3), получим

$$\epsilon = \zeta' - \alpha t_0 - (\zeta'' + \alpha t_1)x - (\eta'' + \alpha t_2)y - (\omega' - \alpha t)\varphi. \quad (1.5)$$

Умножая упругую деформацию ϵ на модуль упругости E , будем иметь четырехчленную формулу для продольного нормального напряжения

$$\sigma = E[\zeta' - \alpha t_0 - (\zeta'' + \alpha t_1)x - (\eta'' + \alpha t_2)y - (\omega' - \alpha t)\varphi]. \quad (1.6)$$

В этой формуле первыми тремя членами представлены продольные напряжения, распределенные по сечению по закону плоскости. Эти напряжения для всего поперечного сечения приводятся статически к продольной, центрально приложенной силе N и к изгибающим моментам M_x и M_y . Если стержень (тонкостенный или сплошного сечения, безразлично), рассматриваемый как жесткое тело, представляет собою статически-определенный брус, то в таком стержне, при действии на него одной только температуры, все внутренние обобщенные силы, соответствующие закону плоских сечений и рассматриваемые в элементарной теории балок, будут равны нулю. Приравнявая, в частности, нулю продольную силу N и изгибающие моменты M_x, M_y , получим уравнения для функций $\zeta(z), \xi(z), \eta(z)$:

$$\zeta' = \alpha t_0, \quad \xi'' = -\alpha t_1, \quad \eta'' = -\alpha t_2.$$

Этими уравнениями [при функциях $t_0 = t_0(z), t_1 = t_1(z), t_2 = t_2(z)$, вычисляемых по общим формулам (1.4)] определяется свободная температурная деформация осевого растяжения и изгиба стержня, описываемая законом плоских сечений. Последним, четвертым, членом

разложения формулы (1.6) представлены нормальные напряжения σ для внешне статически определенного стержня:

$$\sigma = E(w' - \alpha t) \varphi. \quad (1.7)$$

Эти напряжения возникают вследствие деформации сечения и в главных обобщенных координатах $1, x, y, \varphi$ приводятся к продольному бимоменту

$$B = \int_F \sigma \varphi dF = EJ_\varphi (w' - \alpha t). \quad (1.8)$$

Формула для продольных нормальных напряжений от бимоента может быть представлена и в другом виде:

$$\sigma = \frac{B}{J_\varphi} \varphi. \quad (1.9)$$

Помимо нормальных напряжений σ в поперечных сечениях стержня возникают также и касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} . Эти напряжения при отсутствии внешних нагрузок в любом поперечном сечении также приводятся к системе взаимно уравновешенных сил. Формулы для касательных напряжений будут иметь вид:

$$\tau_{xz} = Gw \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = Gw \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1.10)$$

где G — модуль упругости при сдвиге.

3. Выделяя из стержня элементарный поперечный диск, отстоящий от начала отсчета координаты z на произвольно фиксированном расстоянии $z = \text{const}$ подобно тому, как мы это делали в § 1 гл. X, сообщая этому диску, согласно вариационному методу, виртуальное перемещение $\varphi = \varphi(x, y)$, отвечающее выбранному закону деформации сечения, определяя на виртуальных перемещениях и деформациях работу всех внешних и внутренних сил диска и приравнявая эту работу нулю, получим следующее вариационное уравнение:

$$\int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi dF - \int_F \tau_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dF - \int_F \tau_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dF = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя в уравнение (1.11) напряжения $\sigma, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ по формулам (1.7) и (1.10) и делая некоторые преобразования, получим для искомого функции $w(z)$ уравнение следующего вида:

$$w'' - k^2 w = f, \quad (1.12)$$

где k^2 — обобщенная упругая характеристика деформации стержня, определяемая как отношение поперечной обобщенной жесткости GJ_φ (связанной с деформацией сдвига) к продольной жесткости EJ_z (связанной с деформацией удлинения):

$$k^2 = \frac{GJ_\varphi}{EJ_z}. \quad (1.13)$$

Обобщенные геометрические характеристики сечения J_φ и J_z при заданном законе деформации φ вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} J_\varphi &= \int_F \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dF, \\ J_z &= \int_F \varphi^2 dF. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

В этих формулах определенные интегралы для стержня сложного сечения при $\varphi = \varphi(x, y)$ и $dF = dx dy$ будут, очевидно, двукратными; для тонкостенного же стержня эти интегралы при $\varphi = \varphi(s)$ и $dF = \delta \cdot ds$ приводятся, как уже отмечалось ранее, к однократным.

Стоящая в правой части уравнения (1.12) функция $f = f(z)$ зависит от температуры и определяется формулой

$$f = \alpha \frac{\partial t}{\partial z} \int_F \varphi^2 dF. \quad (1.15)$$

Уравнением (1.12) вместе с присоединенными к нему граничными условиями определяется функция $w = w(z)$, а, следовательно, согласно формуле (1.7) и нормальное напряжение $\sigma = \sigma(x, y, z)$ в любой точке стержня.

4. Предположим, что температура T , действующая на стержень, не зависит от координаты z и представляет собою заданную функцию от двух других координат x, y . Функция $f = f(z)$, определяемая по формуле (1.15), в этом случае будет равна нулю, и уравнение (1.12) будет однородным:

$$w'' - k^2 w = 0. \quad (1.16)$$

Общий интеграл уравнения (1.16) может быть записан в виде

$$w(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}. \quad (1.17)$$

Выражение для нормального напряжения σ получается из общей формулы (1.7):

$$\sigma = E[k(C_1 e^{kz} - C_2 e^{-kz}) - \alpha t] \varphi. \quad (1.18)$$

§ 2. Температурные напряжения в полубесконечном стержне

1. Рассмотрим стержень, имеющий весьма большую длину. Будем отсчитывать координату z от свободного конца стержня. Функция $w(z)$ продольного перемещения, возникающего только вследствие деформации сечения, с возрастанием координаты z , т. е. по мере удаления от свободного конца стержня, должна оставаться ограниченной. Эта функция для бесконечно длинного стержня (при $z \rightarrow \infty$) должна стремиться к нулю. Из этого условия следует, что в общей формуле (1.18) должно быть

$$C_1 = 0.$$

Другую постоянную интегрирования C_2 мы определим из того условия,

что на свободном конце стержня нормальные напряжения σ должны обращаться в нуль. При этом условие постоянная C_2 принимает значение

$$C_2 = -\frac{\alpha t}{k}.$$

Формула (1.18) при найденных значениях постоянных интегрирования принимает следующий вид:

$$\sigma = -E\alpha t(1 - e^{-kz})\varphi. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) показывает, что продольные нормальные напряжения, вызванные температурной деформацией, при условии, что температура не зависит от координаты z , достигают наибольших значений в сечениях, достаточно удаленных от концов стержня. Эти напряжения на среднем участке длинного стержня приближенно могут быть определены по формуле

$$\sigma = -E\alpha t\varphi.$$

Определяя здесь $t\varphi$ из формулы (1.3), получим

$$\sigma = -E\alpha(T - t_0 - t_1x - t_2y). \quad (2.2)$$

В формуле (2.2) $T = T(x, y)$ — заданная температурная функция; t_0, t_1, t_2 — постоянные величины, вычисляемые в главных координатах по формулам (1.4). Нетрудно показать, что формулой (2.2) для бесконечно длинного стержня со свободными (не закрепленными) концами при принятых выше статических гипотезах дано точное решение рассматриваемой здесь задачи о температурных напряжениях. В этой формуле величиной

$$t\varphi = T - t_0 - t_1x - t_2y$$

представлена чисто температурная деформация, отличающаяся от основной функции φ , характеризующей деформацию сечения, постоянным множителем t . Таким образом, в случае действия температуры $T = T(x, y)$, распределенной по площади сечения по произвольно заданному закону, за функцию $\varphi = \varphi(x, y)$, описывающую упругую деформацию сечения, может быть выбрана функция, пропорциональная температурной деформации

$$\varphi = \frac{1}{t}(T - t_0 - t_1x - t_2y).$$

2. В качестве примера, поясняющего изложенный здесь метод определения температурных напряжений, рассмотрим тонкостенную металлическую двутавровую балку с одинаковыми полками (рис. 212). Предположим, что полки двутавровой балки при изменении температурного поля имеют во всех точках одинаковую температуру, которую мы обозначим через t_n . В стенке же двутавра температура распределяется по закону квадратной параболы, принимая экстремальное (максимальное

или минимальное) значение t_0 в центре сечения. Величины t_n и t_0 могут быть как положительными, так и отрицательными. Описанный закон распределения температуры по сечению двутавра для случая $t_0 > t_n > 0$ показан на рис. 214. Так как эпюра заданной температуры T симметрична относительно обеих осей симметрии профиля, то в приведенных выше обидях четырехчленных формулах (1.1) и (1.3) по условиям симметрии образуются в нуль второй и третий члены. Искомая функция $w = w(x, y, z)$ будет представлена двучленной формулой

$$w(z, s) = \zeta(z)1 + w(z)\varphi(s).$$

Эпюры ординат основных функций 1 и φ показаны на рис. 213, а и в. Первая из этих функций представляет собой постоянную для всех точек сечения величину, равную единице. Вторая $\varphi(s)$ на участке стенки двутавра описывается по закону квадратной параболы, с ординатой в середине, равной $1 - \frac{2F_1}{3F}$ (F_1 — площадь стенки, F — площадь всего сечения). На участках же, относящихся к полкам, функция $\varphi(s)$ принимает постоянное, одинаковое для обеих полок отрицательное значение, равное $\left(-\frac{2F_1}{3F}\right)$.

Функция $\varphi(s)$, относящаяся к деформации сечения, проинтегрирована заданным параболическим законом распределения температуры по высоте сечения. Эта функция удовлетворяет условию ортогональности с функцией $\varphi_0 = 1$ равномерного распределения температуры:

$$\int_F \varphi dF = 0.$$

Кроме того, эпюра $\varphi(s)$ подобрана таким образом, что стрела подъема параболы равна единице. Эпюра заданной температуры T , представленная на рис. 214 в компонентах главных координат 1 и $\varphi(s)$, получается путем наложения двух соответствующих эпюр по формуле

$$T(s) = t_{cp} + (t_0 - t_n)\varphi(s), \quad (2.3)$$

где t_{cp} — среднее значение температуры по сечению:

$$t_{cp} = \frac{\int T dF}{F}.$$

Так как стрела подъема эпюры $\varphi(s)$ на участке стенки профиля равна единице, а стрела подъема графика температуры $T(s)$ на том же участке равна разности температур $t_0 - t_n$, то перед функцией $\varphi(s)$ в формуле (2.3) взят множитель $t_0 - t_n$.

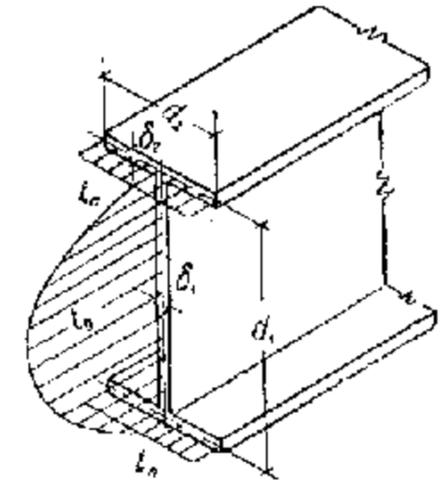


Рис. 214.

Установив по заданной температуре закон деформации сечения, мы можем определить по формулам (1.14) величины $J_{\varphi'}$ и $J_{\varphi''}$:

$$J_{\varphi'} = \int_F (\varphi')^2 \delta ds = \frac{16\delta_1^3}{3d_1^3},$$

$$J_{\varphi''} = \int_F \varphi''^2 \delta ds = \frac{F_1}{3} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{F_1}{F^2} \right)^2 - \frac{8}{3} \frac{F_1}{F} + F \right] + \frac{8}{9} \frac{F_1^2 F_2}{F^2},$$

где d_1, δ_1 — ширина и толщина стенки; F_1, F_2 — площади поперечных сечений соответственно стенки и одной из полок; F — площадь всего сечения двутавровой балки. Определив эти геометрические характеристики, перейдем по формуле (1.13) при заданных физических модулях E и G обобщенную упругую характеристику k . Напряжения σ в точках сечений, примыкающих к концу стержня, вычисляются по формуле (2.1). В этой формуле чисто температурный параметр t для рассматриваемого случая принимает значение

$$t = \frac{\int F \varphi ds}{J_{\varphi}} = t_0 - t_n. \quad (2.4)$$

В поперечных сечениях, удаленных от концов стержня, формула (2.1) для нормального напряжения принимает весьма простой вид:

$$\sigma = E \alpha (t_n - t_0) \varphi.$$

Из этой формулы видно, что внутренние бимоменты напряжений пропорциональны разности температур полки и средней точки стенки. По эюре для функции $\varphi = \varphi(s)$, представленной на рис. 213, в, для напряжений σ_n и σ_0 в точках полки и в центре профиля получаем значения:

$$\sigma_n = -\frac{2}{3} \frac{E \alpha F_1}{F} (t_n - t_0),$$

$$\sigma_0 = \left(1 - \frac{2F_1}{3F} \right) E \alpha (t_n - t_0).$$

§ 3. Температурные напряжения в стержне конечной длины

1. Определим температурные бимоментные напряжения в стержне, имеющем конечную длину. Предполагая, как и ранее, температуру $T = T(x, y)$ не зависящей от координаты z , мы будем исходить из однородного уравнения (1.16).

Общие интегралы для функций $w = w(z)$ и $B = B(z)$, где $B(z)$ определяется формулой (1.8), запишем в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} w &= C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz, \\ B &= EJ_{\varphi} [k (C_1 \operatorname{ch} kz + C_2 \operatorname{sh} kz) - \alpha t]. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Так как температура $T = T(x, y)$ по длине стержня остается посто-

янной, то деформированное и напряженное состояние стержня относительно середины его длины должно быть симметричным. Выбирая начало отсчета для координаты z в середине длины стержня и обозначая длину стержня через $2l$, мы получим граничные условия для одной половины стержня:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \quad w &= 0, \\ \text{при } z=l \quad B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Первое условие (3.2) чисто геометрическое. Оно получается из условия отсутствия продольных перемещений в среднем поперечном сечении $z=0$. Это сечение, плоское до деформации, в силу симметрии должно оставаться плоским и после деформации.

Второе условие (3.2) чисто статическое. Оно получается из условия равенства нулю нормальных напряжений на свободном конце стержня.

При граничных условиях (3.2) постоянные интегрирования C_1, C_2 получают значения:

$$C_1 = \frac{\alpha l}{k \operatorname{ch} kl}, \quad C_2 = 0.$$

Формула (1.9) для нормальных напряжений принимает вид

$$\sigma = -E \alpha t \left(1 - \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl} \right) \varphi. \quad (3.3)$$

Эти напряжения достигают наибольших значений в точках среднего поперечного сечения, т. е. при $z=0$:

$$\sigma_{\max} = -E \alpha t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kl} \right) \varphi.$$

В случае рассмотренной выше двутавровой балки величина t вычисляется по формуле (2.3); функция $\varphi = \varphi(s)$ показана на рис. 213, в.

2. Представляется интересным определить также и касательные напряжения, возникающие от температуры. Эти напряжения для тонкостенного стержня следует определять из условия равновесия путем интегрирования уравнения

$$\frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0.$$

Относя это уравнение к стенке двутавровой балки, отсчитывая координату s от середины высоты стенки, принимая во внимание, что касательное напряжение в средней точке стенки по условиям симметрии равно нулю и используя формулу (3.3) для σ и эпюру $\varphi = \varphi(s)$, показанную на рис. 213, в, получим

$$\tau = -E \alpha t \frac{k \operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl} \left[\left(1 - \frac{2F_1}{3F} \right) s - \frac{4s^3}{3d_1^3} \right]. \quad (3.4)$$

По этой формуле можно вычислить касательное напряжение τ в любой точке стенки двутавровой балки. По высоте сечения касательное

напряжения τ достигает наибольших значений в месте присоединения полки со стенкой, т. е. при значениях $s = \frac{d_1}{2}$, где d_1 — высота стенки:

$$\tau_{\max} = E\alpha tk \frac{d_1}{8} \left(1 - \frac{F_1}{F}\right) \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } kl}.$$

Эти максимальные напряжения по длине балки меняются по закону четной (относительно среднего поперечного сечения) функции $\text{sh } kz$.

3. Таким же путем из другого уравнения равновесия

$$\frac{\partial(\sigma_s z)}{\partial s} + \frac{\partial(\tau z)}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

по найденной функции (3.4) для $\tau = \tau(z, s)$ можно определить и другое нормальное напряжение σ_s , возникающее на площадке продольного сечения стенки двутавра. Предполагая, что в месте присоединения стенки двутавра к полке могут возникать одни только касательные напряжения, т. е., другими словами, пренебрегая по малости нормальными напряжениями между стенкой и полкой, получим выражение для $\sigma_s = \sigma_s(z, s)$:

$$\sigma_s = E\alpha tk^2 \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } kl} \left[\left(1 - \frac{2F_1}{3F}\right) \left(\frac{s^2}{2} - \frac{d_1^2}{8}\right) - \frac{1}{d_1^2} \left(s^4 - \frac{d_1^4}{16}\right) \right].$$

По этой формуле можно вычислить напряжение $\sigma_s(z, s)$ в любой точке стенки двутавра. При $z=0$ и $s=0$, т. е. для центральной точки среднего поперечного сечения стенки, σ_s определяется по формуле

$$\sigma_s = - \frac{E\alpha tk^2 d_1^2}{16\text{ch } kl} \left(1 - \frac{4F_1}{3F}\right).$$

4. Следует отметить, что при определении касательных напряжений τ и поперечных нормальных напряжений σ_s мы пользуемся в данном случае уравнениями статики, в то время как при определении продольных нормальных напряжений используется закон Гука, причем при составлении основного вариационного уравнения (1.11) касательные напряжения также определялись из закона Гука по формулам (1.10). Мы могли бы, конечно, вычислить касательные напряжения по формулам (1.10), но правильнее будет определять их из уравнений статики по формуле (3.4), так как мы пользуемся приближенным вариационным методом. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим консольную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q .

Будем считать, что длина балки значительно больше ее высоты h , т. е. для такой балки справедлива гипотеза плоских сечений, и, следовательно, верны основные теоремы сопротивления материалов:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q, \quad \frac{dQ}{dz} = -q.$$

Интегрируя эти соотношения и учитывая, что изгибающий момент пропорционален продольным нормальным напряжениям, а поперечная сила — касательным, получим следующие порядки этих величин:

$$\sigma \sim \int \int q dz^2, \quad \tau \sim \int q dz, \quad \sigma_s \sim q, \quad (3.6)$$

где порядок поперечного нормального напряжения σ_s мы получаем, воспользовавшись уравнением (3.5).

Из формул (3.6) видно, что существенную роль в напряженном состоянии стержня играют лишь продольные нормальные напряжения. Что же касается касательных напряжений и, тем более, поперечных нормальных напряжений, то они представляют собой факторы более высокого порядка малости. Поэтому естественнее определять эти второстепенные факторы, исходя из уравнений статики, после того как уже известно распределение в стержне продольных нормальных напряжений.

Таким образом, в отношении касательных и поперечных нормальных напряжений используется метод последовательных приближений.

5. Изложенный здесь в виде примера метод определения температурных напряжений в двутавровой балке может быть применен и к расчету узкой прямоугольной пластинки при параболическом законе изменения температуры по ширине пластинки. Формулы для напряжений в пластинке получаются из приведенных выше формул для двутавровой балки, если, считая площади сечения полки равными нулю, положить в них $F = F_1$.

где M_x и M_y — изгибающие моменты в поперечном сечении стержня; H и m — соответственно крутящий момент в сечении и внешний погонный крутящий момент. Как и ранее, моменты M_x , M_y , H и m мы считаем положительными, если при взгляде со стороны положительных

ГЛАВА XII

ТОНКОСТЕННЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ, ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ

§ 1. Изгиб и кручение плоского стержня с круговой осью малой кривизны

Теория тонкостенных стержней может быть обобщена и на тонкостенные криволинейные стержни, имеющие в поперечном сечении произвольный жесткий контур.

Рассмотрим стержень с круговой осью. Отнесем поперечное сечение стержня к главным центральным осям и предположим, что ось Ox лежит в плоскости оси стержня, а оси Oy и Oz образуют вместе с ней левозвинтовую систему координат (рис. 215).

Выделяя на стержня двумя близкими сечениями элементарную поперечную полоску, отнесенную к единице длины оси центров тяжести стержня, мы можем написать шесть дифференциальных уравнений равновесия этой полоски. Для проекций всех сил, действующих на полоску в направлении осей координат, мы получим, учитывая криволинейность стержня, следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} - \frac{N}{R} + q_x &= 0, \\ \frac{dQ_y}{dt} + q_y &= 0, \\ \frac{dN}{dt} - \frac{Q_x}{R} + q_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1.1)$$

В этих уравнениях N — нормальная сила; Q_x , Q_y — поперечные силы в направлении осей Ox , Oy , Oz ; q_x , q_y , q_z — проекции внешних погонных нагрузок на направления осей x , y , z ; l — длина дуга линии центров тяжести стержня и R — радиус кривизны этой линии (рис. 216, а).

Проекция моментов всех сил на оси координат будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} - Q_y + \frac{H}{R} &= 0, \\ \frac{dM_y}{dt} + Q_x &= 0, \\ \frac{dH}{dt} - \frac{M_x}{R} + m_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1.2)$$

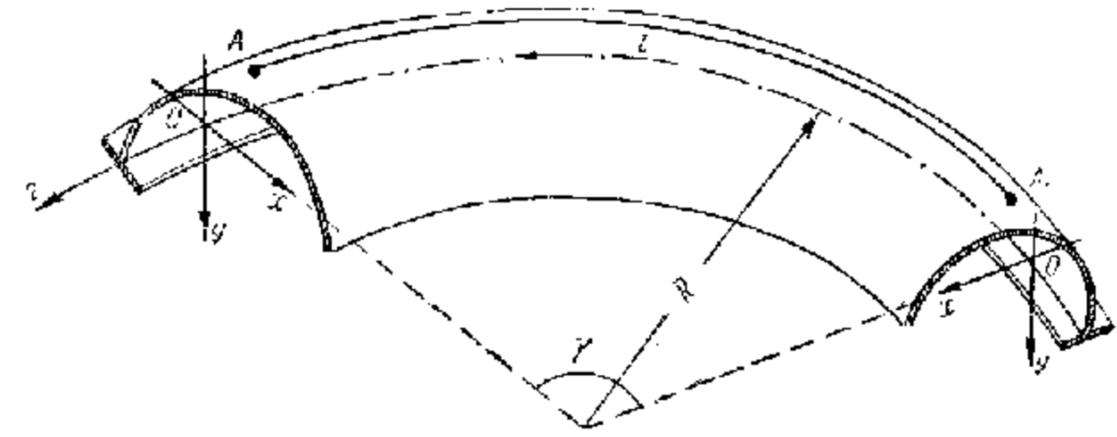


Рис. 215.

значений x , y , z соответственно они вызывают вращение по часовой стрелке. Уравнения (1.2) получены с учетом криволинейности стержня, причем при проектировании мы пользуемся векторным представлением моментов M_x , M_y и H (рис. 216, б).

Заметим, что статические уравнения (1.2) носят приближенный характер. Дело в том, что, согласно теории тонкостенных стержней

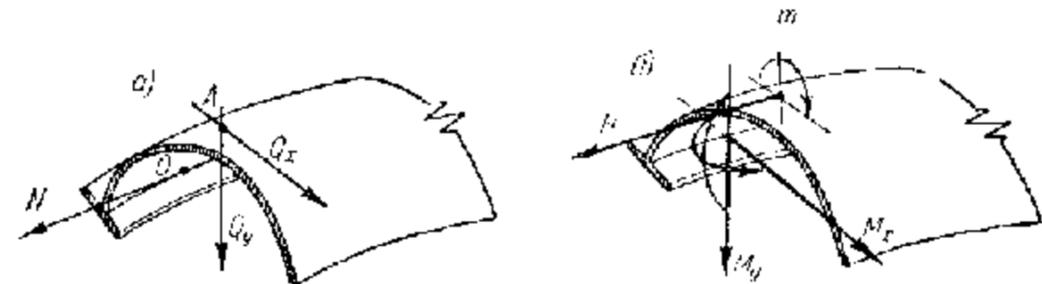


Рис. 216.

открытого профиля, одни силовые факторы мы рассматриваем относительно линии центров тяжести, а другие — относительно линии центров изгиба. Так, например, изгибающие моменты M_x и M_y мы отнесем к главным центральным осям поперечного сечения, а крутящий момент H должен рассматриваться относительно линии центров изгиба. В соответствии с этим в уравнениях (1.2) радиус R будет отличаться от радиуса кривизны линии центров тяжести на величину a_x , где a_x — координата центра изгиба. Будем рассматривать стержни малой начальной кривизны — с отношением наибольшего размера поперечного сечения стержня к радиусу кривизны оси стержня порядка $1/10$ и менее.

В этом случае в уравнениях (1.2) мы пренебрегаем величиной $\frac{a_x}{R}$

по сравнению с единицей. Это допущение сводится к тому, что при выводе статических уравнений мы все силовые факторы относим к линии центров тяжести. Очевидно можно отнести все силовые факторы и к линии центров изгиба и вообще к произвольной оси стержня в плоскости Oxz , находящейся от линии центров тяжести на расстоянии порядка a_x . Погрешность будет незначительной, и мы ею пренебрегаем.

Исключая из уравнений (1.1) и (1.2) силы N , Q_x и Q_y , получим:

$$\left. \begin{aligned} M''_y + \frac{M'_y}{R^2} - q'_x + \frac{q_z}{R} &= 0, \\ M''_x + \frac{M'_x}{R} - q'_y &= 0, \\ -\frac{M_x}{R} + H + m_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где производные берутся по длине дуги t оси стержня.

Пусть, как обычно, $\xi = \xi(t)$ — продольное перемещение стержня; $\xi(t)$, $\eta(t)$ — прогибы соответственно в направлении осей Ox и Oy линии центров изгиба и $\theta = \theta(t)$ — угол поворота сечения $t = \text{const}$ относительно центра изгиба A . Мы по-прежнему будем считать θ положительным, если поперечное сечение, при взгляде на него против положительной касательной к линии центров изгиба, вращается по часовой стрелке.

Как и в случае прямолинейного стержня, деформированное состояние стержня с кривой начальной осью при жестком контуре сечения определяется четырьмя величинами, а именно: относительным продольным удлинением стержня $\epsilon(t)$, деформациями изгиба $\kappa_1(t)$ и $\kappa_2(t)$ этой оси в плоскостях, параллельных главным плоскостям Oyz , Ozx , и деформацией кручения $\tau(t)$.

Выведем выражения для этих деформаций. Будем по-прежнему принимать за ось стержня линию центров тяжести сечений стержня t и брать производные вдоль этой линии, поскольку величиной a_x по сравнению с R мы пренебрегаем.

Для продольной деформации ϵ получим следующую, очевидную формулу:

$$\epsilon = \xi' - \frac{\xi}{R}. \quad (1.4)$$

Для кривизн деформированного состояния стержня k_x , k_y и k_z (k_x и k_y — кривизны соответственно в плоскостях Oyz и Ozx , а k_z — кривизна кручения) в проекциях на оси начального недеформированного состояния стержня получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} k_x &= -\eta'', \\ k_y &= \frac{1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2}, \\ k_z &= \theta'. \end{aligned}$$

Во второй формуле первым слагаемым представлена начальная кривизна стержня, последним — изменение кривизны k_y вследствие расширения кругового стержня за счет перемещения $\xi(t)$. Следует заметить, что в наших рассуждениях мы пользуемся вспомогательной системой координат с началом в центре изгиба и с осями Ox и Oy , параллельными главным центральным осям (рис. 217).

Выражения для кривизн стержня в проекциях на оси Ox' , Oy' и Oz' , относящиеся к деформированному состоянию (рис. 217), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} k_{x'} &= k_x \cos(\alpha x') + k_y \cos(\beta x') + \\ &\quad + k_z \cos(\gamma x'), \\ k_{y'} &= k_x \cos(\alpha y') + k_y \cos(\beta y') + \\ &\quad + k_z \cos(\gamma y'), \\ k_{z'} &= k_x \cos(\alpha z') + k_y \cos(\beta z') - \\ &\quad - k_z \cos(\gamma z'), \end{aligned}$$

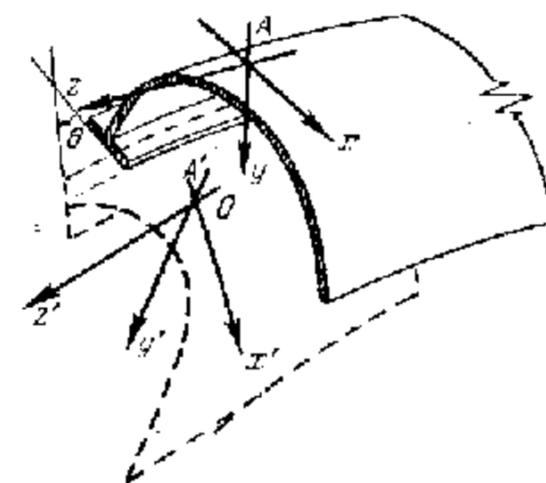


Рис. 217.

где косинусы углов между осями координат, относящимися к начальному и деформированному состояниям стержня, при малых перемещениях ξ , η и малых углах поворота θ определяются из табл. 49:

Таблица 49

	x	y	z
x'	1	0	$-\xi'$
y'	$-\theta$	1	$-\eta'$
z'	ξ'	η'	1

Пользуясь этой таблицей, получим следующие выражения для кривизн $k_{x'}$, $k_{y'}$ и $k_{z'}$:

$$\begin{aligned} k_{x'} &= -\eta'' + \left(\frac{1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right) \theta - \theta' \xi', \\ k_{y'} &= -\eta'' \theta + \frac{1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2} - \theta' \eta', \\ k_{z'} &= -\eta'' \xi' + \left(\frac{1}{R} + \xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right) \eta' + \theta'. \end{aligned}$$

Пренебрегая в этих выражениях по малости произведениями функций ξ , η , θ и их производных, отбрасывая слагаемое $\frac{1}{R}$, выражающее начальную кривизну стержня, получим для деформаций изгиба и кручения следующие окончательные формулы:

$$\alpha_1 = -\eta'' + \frac{\theta}{R}, \quad \alpha_2 = \xi'' + \frac{\xi}{R^2}, \quad \tau = \theta' + \frac{\eta'}{R}. \quad (1.5)$$

Первой и второй формулами определяются изменения кривизны оси стержня $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в плоскостях, параллельных главным плоскостям Oyz , Ozx . Последняя формула даст кривизну кручения $\tau(t)$.

Для обобщенных статических величин N , M_x , M_y и H в силу соотношений

$$\left. \begin{aligned} N &= EF\xi', \\ M_x &= -EJ_x\eta'', \\ M_y &= EJ_y\xi'', \\ H &= -EJ_\omega\theta'' + GJ_d\theta', \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

полученных ранее для стержня с прямой осью [формулы (8.3) и (8.11) гл. I] будем иметь, пользуясь выражениями (1.4) и (1.5), следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} N &= EF \left(\xi' - \frac{\xi}{R} \right), \\ M_x &= -EJ_x \left(\eta'' - \frac{\theta}{R} \right), \\ M_y &= EJ_y \left(\xi'' + \frac{\xi}{R^2} \right), \\ H &= -EJ_\omega \left(\theta'' + \frac{\eta''}{R} \right) + GJ_d \left(\theta' + \frac{\eta'}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Формула (8.3) гл. I для бимомента B принимает вид

$$B = -EJ_\omega \left(\theta'' + \frac{\eta''}{R} \right). \quad (1.8)$$

Для нормальных напряжений мы принимаем четырехчленную формулу (8.5) гл. I:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{B}{J_\omega} \omega, \quad (1.9)$$

в которой $x = x(s)$, $y = y(s)$ — координаты точки контура сечения в главных центральных осях Ox , Oy ; J_x , J_y — главные моменты инерции сечения; J_ω — главный секториальный момент инерции.

Внося выражения (1.7) в (1.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \left(\xi^{IV} + 2 \frac{\xi'''}{R^2} + \frac{\xi'}{R^3} \right) - q_x + \frac{q_z}{R} &= 0, \\ -E \left(\frac{J_\omega}{R^2} + J_x \right) \eta^{IV} + \frac{GJ_d}{R^2} \eta'' - \frac{EJ_\omega}{R} \theta^{IV} + \frac{EJ_x + GJ_d}{R} \theta'' + q_y &= 0, \\ -\frac{EJ_\omega}{R} \eta^{IV} + \frac{EJ_x + GJ_d}{R} \eta'' - EJ_\omega \theta^{IV} + GJ_d \theta'' - \frac{EJ_x}{R^2} \theta + m_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Первым из уравнений (1.10), независимо от двух других, определяются прогибы $\xi = \xi(t)$ в плоскости стержня. Это уравнение, как и формула (1.7) для M_y , совпадает с известным уравнением Буссинеска. Заметим, что при выводе формулы для α_2 и, следовательно, для M_y , мы не пользовались гипотезой нерастяжимости оси стержня. Поэтому уравнение (1.10) для $\xi = \xi(t)$ относится к изгибу кругового стержня в его плоскости, с учетом деформаций удлинения оси.

Второе и третье уравнения (1.10) образуют систему двух совместных, симметрично построенных дифференциальных уравнений относительно функций $\eta = \eta(t)$, $\theta = \theta(t)$, определяющих деформацию кругового стержня около его плоскости. Симметричная структура уравнений (1.10), выражающаяся во взаимности побочных операторов дифференциальной матрицы, как доказано в ряде наших работ по оболочкам [40, 51], является общим свойством уравнений равновесия упругих стержней и оболочек произвольного очертания и согласуется с основными теоремами энергостатики упругого тела.

Исключая из этих уравнений прогибы $\eta = \eta(t)$, получим основное дифференциальное уравнение кручения тонкостенного кругового стержня, в сечениях которого возникают нормальные напряжения не только от изгиба, но и от кручения:

$$\begin{aligned} EJ_\omega \theta^{VI} + \left(\frac{2EJ_\omega}{R^2} - GJ_d \right) \theta^{IV} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{EJ_\omega}{R^2} - 2GJ_d \right) \theta'' - \frac{GJ_d}{R^4} \theta = \\ = -\frac{J_\omega}{RJ_x} q_y + \frac{J_\omega + R^2 J_x}{R^2 J_x} m_z + \frac{EJ_x + GJ_d}{REJ_x} q_y - \frac{GJ_d}{ER^2 J_x} m_z. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Нормальные напряжения определяются согласно четвертому члену формулы (1.9) законом секториальных площадей. Полагая в уравнении (1.11) все члены, содержащие J_ω , равными нулю, получим как частный случай уравнение, относящееся к такому случаю кручения стержня с круговой осью, при котором в сечении возникают нормальные напряжения только от одного изгибающего момента:

$$\theta^{IV} + \frac{2\theta''}{R^2} + \frac{\theta}{R^4} = \frac{m_z}{ER^2 J_x} - \frac{m_z''}{GJ_d} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{GJ_d} + \frac{1}{EJ_x} \right) q_y. \quad (1.12)$$

Заметим, что при расчете стержня с круговой осью на изгиб и кручение из плоскости стержня можно также исходить из уравнения бимоментов.

В силу соотношения

$$H' = B'' - \frac{GM_x}{EJ_\omega} B$$

последние два из уравнений (1.3) могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} M_x'' + \frac{M_x}{R^2} &= -q_y - \frac{m_z}{R}, \\ B^{IV} - [(1-k^2)B'' - k^2\frac{B}{R^2}] &= -\left(m_z + \frac{q_y}{R}\right), \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

где k^2 — упругая характеристика, определяемая формулой

$$k^2 = \frac{GJ_d R^2}{EJ_\omega}.$$

Из уравнений (1.13) легко определяются момент $M_x = M_x(t)$ и бимомент $B = B(t)$. Зная эти величины в функции от координаты t , мы можем затем по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \eta'' - \frac{\eta}{R} &= -\frac{M_x}{EJ_x}, \\ \psi'' + \frac{\eta''}{R} &= -\frac{B}{EJ_\omega} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

определить и кинематические величины $\eta = \eta(t)$, $\psi = \psi(t)$, характеризующие деформацию кругового стержня около плоскости его оси. В уравнениях (1.13) и (1.14) производные следует брать по координате t . Если за независимую переменную выбрать центральный угол $\gamma = \frac{t}{R}$, то уравнения (1.13) и (1.14) преобразуются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} M_x'' + M_x &= -R^2 \left(q_y - \frac{m_z}{R} \right), \\ B^{IV} - [(1-k^2)B'' - k^2 B] &= -R^2 \left(\frac{m_z}{R} + q_y \right), \\ \eta'' - R\eta &= -\frac{R^2}{EJ_x} M_x, \\ R\psi'' + \eta'' &= -\frac{R^2}{EJ_\omega} B. \end{aligned} \right\}$$

К общим интегралам усилий и перемещений нужно присоединить граничные условия, общее число которых, как легко показать, будет равно восьмью (по четыре условия на каждом конце стержня). Эти условия представляют собой обобщение условий для стержня с прямой осью при изгибе этого стержня в плоскости Oxz и кручения. Статические факторы в каком-либо поперечном сечении стержня будут состоять из момента M_x и силы Q_y , относящихся к изгибу, и бимоента B и общего крутящего момента H , относящихся к кручению. Кинематическими независимыми факторами для данного сечения $t = \text{const}$ будут служить перемещение $\eta = \eta(t)$ сечения в направлении оси Oy , угол

поворота сечения η' относительно оси Ox , угол поворота $\psi = \psi(t)$ относительно касательной к оси стержня (угол кручения) и, наконец, деформация сечения, представленная кривизной кручения $\tau = \psi' + \frac{\eta'}{R}$.

Если стержень одним своим концом закреплен так, что сечение на этом конце остается неподвижным в отношении перемещений η , ψ и нормальные напряжения в этом сечении равны нулю, то мы будем иметь случай шарнирного закрепления. Граничные условия в этом случае выражаются в равенстве нулю на конце стержня четырех величин η , ψ ,

$\eta' = \frac{\psi}{R}$, $\psi' = \frac{\eta'}{R}$. В случае жесткой заделки граничные условия выражаются в равенстве нулю величин η , ψ , η' , ψ' .

Изложенная здесь теория охватывает ряд практически важных задач по изгибу и кручению тонкостенных криволинейных плоских стержней и арок с малой начальной кривизной, т. е. стержней и арок, наибольший размер поперечных сечений которых в плоскости начальной кривизны представляет собой величину малую по сравнению с радиусом R оси стержня, не превышающую примерно $\frac{1}{10}$ от этого радиуса.

На основе этой теории могут быть обследованы арки двутаврового, швеллерного, коробчатого и других симметричных сечений, при разных положениях этих сечений относительно плоскости начальной кривизны.

Геометрические характеристики, входящие в приведенные здесь уравнения и определяющие различные жесткости, вычисляются совершенно так же, как и в случае стержня с прямой осью.

§ 2. Пространственная устойчивость круговых стержней, арок и торообразных оболочек с жестким профилем. Основные дифференциальные уравнения

Предположим, что тонкостенный круговой стержень произвольного профиля с главной осью Ox , лежащей в плоскости оси стержня, находится под действием моментов M_y , приложенных по концам стержня и вызывающих изгиб стержня в плоскости этой оси, и нормального давления, приводящегося к полой нагрузке $q_y = \text{const}$, приложенной по окружности, проходящей в поперечном сечении через точку $(e_x, 0)$, и вызывающей в стержне сжимающее усилие P , определяемое формулой

$$P = (R - e_x) q, \quad (2.1)$$

где R — радиус оси стержня. В этой формуле координата e_x предполагается положительной; нагрузка q_y для краткости обозначена через q .

Уравнения устойчивости части кругового стержня, нагруженного моментом $M_y = \text{const}$ и нормальным давлением $q = \text{const}$, мы получим из уравнений (1.3), заменяя в этих уравнениях моменты по формулам (1.6), грузонные члены — по формулам (1.5) гл. V, где мы, согласно (1.5), полагаем: $\xi'' = -\alpha_2$, $\tau'' = -\alpha_1$ и $\psi' = \tau$. Учитывая, что при

пространственной изгибно-крутильной форме потери устойчивости гидростатическая нагрузка q , приложенная в точке K , при повороте сечения на угол θ даст относительно центра изгиба A добавочный внешний приведенный крутящий момент $m_q^* = -q(e_x - a_x)\theta$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \left(x_2'' + \frac{x_2'}{R^2} \right) - Px_2' - a_y P \tau'' &= 0, \\ EJ_x x_1'' + Px_1 - \frac{EJ_w}{R} \tau'' + \left(\frac{GJ_d}{R} + a_x P - M_y \right) \tau' &= 0, \\ a_y P x_2 + \left(\frac{EJ_x}{R} + a_x P - M_y \right) x_1 + EJ_w \tau'' + \\ + (r^2 P + 2\beta_x M_y - GJ_d) \tau' + q(e_x - a_x) \theta &= 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Уравнения (2.2) и (1.5) представляют собой общие уравнения устойчивости части кругового стержня (или арки) произвольного профиля при единственном ограничении, что одна из главных осей сечения (в нашем случае ось Ox) лежит в плоскости начальной кривизны стержня. Входящие в эти уравнения величины $J_x, J_y, J_w, J_d, a_x, a_y, r^2, \beta_x$ представляющие собой геометрические характеристики сечения для тонкостенного открытого профиля, определяются по соответствующим формулам теории тонкостенных стержней с прямой осью.

§ 3. Круговое кольцо под действием радиальной нагрузки. Частные случаи. Обобщенные задачи Мориса Леви

Если на кольцо действует одна только радиальная нагрузка q , приложенная в какой-либо точке $(e_x, 0)$ оси Ox , то $M_y = 0$, и уравнения (2.2) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \left(x_2'' + \frac{x_2'}{R^2} \right) - Px_2' - a_y P \tau'' &= 0, \\ EJ_x x_1'' + Px_1 - \frac{EJ_w}{R} \tau'' + \left(\frac{GJ_d}{R} + a_x P \right) \tau' &= 0, \\ a_y P x_2 + \left(\frac{EJ_x}{R} + a_x P \right) x_1 + EJ_w \tau'' + \\ + (r^2 P - GJ_d) \tau' + q(a_x - e_x) \theta &= 0. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Для замкнутого кругового кольца одной из возможных форм потери устойчивости может быть форма, характеризующаяся поворотом всех сечений кольца на один и тот же угол θ .

Принимая во внимание формулы (1.5) и полагая $\xi = \eta = 0$, а $\theta = \text{const}$, получим из последнего уравнения (3.1) с учетом формулы (2.1) следующее выражение:

$$q = - \frac{EJ_x}{Re_x(R - a_x)} \approx - \frac{EJ_x}{R^2 e_x}. \quad (3.2)$$

Формулой (3.2) определяется критическое значение нормального давления, приложенного на оси Ox в произвольной точке e_x .

Знак минус в формуле (3.2) показывает, что при положительном значении знаменателя критическая нагрузка направлена по отрицательной оси Ox , т. е. от центра кривизны стержня. При $e_x = 0$ форма потери устойчивости кольца в виде поворота всех сечений на один и тот же угол становится невозможной.

Возможными формами в этом случае будут другие, определяемые системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \left(x_2'' + \frac{x_2'}{R^2} \right) - Px_2' - a_y P \tau'' &= 0, \\ EJ_x x_1'' + Px_1 - \frac{EJ_w}{R} \tau'' + \left(\frac{GJ_d}{R} + a_x P \right) \tau' &= 0, \\ a_y P x_2 + \left(\frac{EJ_x}{R} + a_x P \right) x_1 + EJ_w \tau'' + (r^2 P - GJ_d) \tau' &= 0. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Фундаментальными функциями этой системы для замкнутого кругового кольца будут тригонометрические функции аргумента $\frac{nt}{R}$, где n — целое положительное число и t — координата окружности центров тяжести радиуса R . Полагая в уравнениях (3.3)

$$\begin{aligned} x_2 &= A \sin \frac{nt}{R}, \\ x_1 &= B \sin \frac{nt}{R}, \\ \tau &= C \cos \frac{nt}{R}, \end{aligned}$$

получим для коэффициентов A, B, C систему трех линейных однородных уравнений. Критические силы находятся из условия существования нетривиальных решений однородной системы, т. е. решений, дающих для A, B, C ненулевые значения.

Легко показать, что случай $n = 1$ отпадает. Наименьшие значения для критических сил получаются при $n = 2$, т. е. при такой изгибно-крутильной форме потери устойчивости, когда все деформации и перемещения на всей окружности принимают нулевые значения только в четырех, симметрично расположенных точках. Уравнение критических сил, представленное в виде определителя, при $n = 2$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} P - \frac{3EJ_y}{R^2} & 0 & -\frac{2a_y P}{R} \\ 0 & P - \frac{4EJ_x}{R^2} & -\frac{2}{R} \left(\frac{4EJ_w}{R^2} - \frac{GJ_d}{R} + a_x P \right) \\ a_y P & \frac{EJ_x}{R^2} + a_x P & \frac{2}{R} \left(\frac{4EJ_w}{R^2} - r^2 P + GJ_d \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

Трем корням P_1, P_2, P_3 уравнения (3.4) будут соответствовать три изгибно-крутильные формы потери устойчивости кольца произвольного заданного несимметричного сечения.

Каждая из этих форм характеризуется поворотом сечений относительно некоторой окружности. Как и в случае прямолинейного стержня, мы будем иметь, таким образом, в поперечном сечении три мгновенных центра вращения.

Уравнение (3.4) носит общий характер и позволяет определить критические силы P для тонкостенного кольца или торообразной оболочки с произвольным жестким контуром.

Если центр изгиба лежит на оси Ox , что имеет место, например, в случае профилей с одной осью симметрии, лежащей в плоскости кривизны кольца, то $a_y = 0$, и кубическое уравнение (3.4) при $P = qR$ дает для критической нагрузки одно значение, определяемой формулой

$$q_3 = \frac{3EJ_y}{R^2}, \quad (3.5)$$

и два других значения q_1, q_2 , определяемых квадратным уравнением

$$\left(1 - \frac{a_x^2}{r^2}\right) q^2 - \left[\left(1 - \frac{a_x R}{4r^2}\right) q_x + \left(1 + \frac{a_x}{R}\right) q_\omega\right] q + \frac{3}{4} q_\omega q_x = 0, \quad (3.6)$$

в котором положено:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -\frac{4EJ_x}{R^2}, \\ q_\omega &= \frac{1}{Rr^2} \left(\frac{4EJ_\omega}{R^2} + GJ_d \right), \\ r^2 &= \frac{J_x + J_y}{F} + a_x^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

В случае профиля с двумя осями симметрии уравнение (3.6) принимает вид

$$q^2 - (q_x + q_\omega) q + \frac{3}{4} q_x q_\omega = 0.$$

Формула (3.5) совпадает с известной формулой Мориса Леви [251] и дает критическую нагрузку q_3 , отвечающую чисто изгибной форме потери устойчивости кольца в плоскости начальной кривизны этого кольца.

Критические нагрузки q_1, q_2 , определяемые при заданных упругих и геометрических характеристиках тонкостенного кругового стержня уравнениями (3.6) и (3.7), соответствуют изгибно-крутильным формам потери устойчивости около плоскости начальной кривизны кольца с мгновенными центрами вращения на окружностях, лежащих в плоскости кольца.

§ 4. Устойчивость арок, находящихся под действием радиальной нагрузки. Обобщение задачи Тимошенко

Пусть тонкостенная арка имеет произвольное симметричное сечение с осью симметрии Ox и находится под действием направленной к центру нормальной нагрузки q , приложенной на оси арки.

Тогда при $a_y = 0$, $P = qR$ уравнения (3.3) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \left(x_2''' + \frac{x_2'}{R^2} \right) - q R x_2 &= 0, \\ EJ_x x_1'' + q R x_1 - \frac{EJ_\omega}{R} \tau''' + \left(\frac{GJ_d}{R} + R a_x q \right) \tau &= 0, \\ EJ_\omega \tau''' + (r^2 R q - GJ_d) \tau - \left(\frac{EJ_x}{R} + a_x R q \right) x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Если арка на концах имеет шарнирные закрепления, то, полагая в (4.1)

$$x_2 = A \sin \frac{n\pi t}{l}, \quad x_1 = B \sin \frac{n\pi t}{l}, \quad \tau = C \cos \frac{n\pi t}{l},$$

где l — длина всей дуги; t — расстояние по дуге от опоры до рассматриваемой точки и n — целое положительное число ($n = 1, 2, 3, \dots$), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} q - \frac{EJ_y}{R} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \right] &= 0, \\ \left(1 - \frac{a_x^2}{r^2} \right) q^2 - \left[\left(1 + \frac{a_x l^2}{n^2 \pi^2 r^2 R} \right) q_x + \left(1 + \frac{a_x}{R} \right) q_\omega \right] q + & \\ + \left(1 - \frac{l^2}{n^2 \pi^2 R^2} \right) q_x q_\omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где q_x, q_ω определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{EJ_x}{R} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \\ q_\omega &= \frac{1}{Rr^2} \left[EJ_\omega \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - GJ_d \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Первое из уравнений (4.2) при $n=2$ (случай арки с неподвижными шарнирными опорами) дает для q формулу, совпадающую с известной формулой Тимошенко [178] и относящуюся к устойчивости арки в плоскости ее оси. Второе уравнение (4.2) вместе с формулами (4.3) при фиксированном n ($n = 2, 3, 4, \dots$) дает два значения q_1, q_2 , соответствующие изгибно-крутильным формам потери устойчивости тонкостенной арки около ее плоскости. Наименьшие критические силы получаются при $n=1$. Анализ приведенного здесь решения показывает, что опасной формой потери устойчивости тонкостенной круговой арки, как правило, получается изгибно-крутильная, дающая для критической силы значение, меньшее, чем сила, определяемая при $n=2$ первым из уравнений (4.2).

§ 5. Об устойчивости плоской формы изгиба стержня с круговой осью. Обобщение другой задачи Тимошенко

Полагая в уравнениях (2.2) $P = q = 0$, $M_y = M$, получим уравнения устойчивости плоской формы изгиба кругового стержня произвольного сечения с осью Ox , лежащей в плоскости кривизны:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x x_1'' - \left(\frac{GJ_d}{R} - M \right) \tau' &= 0, \\ \left(\frac{EJ_x}{R} - M \right) x_1 + EJ_\omega \tau'' + \left(2\beta_x M - GJ_d \right) \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Если стержень на концах имеет шарнирные закрепления, то

$$x_1 = B \sin \frac{n\pi l}{l}, \quad \tau = C \cos \frac{n\pi t}{l},$$

где n — любое целое положительное число ($n = 1, 2, 3, \dots$). Уравнение критических моментов принимает вид:

$$\begin{vmatrix} -P_x & -\frac{n\pi}{lR} P_\omega - \frac{n\pi}{l} M \\ \frac{n^2\pi^2}{l^2 R} P_x - M & \frac{n\pi r^2}{l} P_\omega - \frac{2n\pi}{l} \beta_x M \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

где

$$P_x = \frac{EJ_x n^2 \pi^2}{l^2}, \quad P_\omega = \frac{1}{r^2} \left(EJ_\omega \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + GJ_d \right).$$

Наименьшие значения M будут при $n = 1$, т. е. при потере устойчивости по синусоиде с одной полуволной на всей заданной длине l арки. Определив M из (5.2) и полагая $n = 1$, получим

$$M = RP_x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 P_\omega}{R^2 P_x} + \frac{l^2}{\pi^2 R^2} - \frac{2\beta_x}{R} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{r^2 P_\omega}{R^2 P_x} + \frac{l^2}{\pi^2 R^2} - \frac{2\beta_x}{R} \right)^2 + \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{l^2}{\pi^2 R^2} \right) \frac{P_\omega}{P_x}} \right\}, \quad (5.3)$$

где

$$P_x = \frac{EJ_x \pi^2}{l^2}, \quad P_\omega = \frac{1}{r^2} \left(EJ_\omega \pi^2 + GJ_d \right). \quad (5.4)$$

Приведенное здесь решение по устойчивости плоской формы изгиба толкостенной арки носит общий характер и позволяет определить критические моменты M для арки произвольного профиля. Геометрические характеристики J_x , J_d , J_ω , β_x , r^2 вычисляются совершенно так же, как и в случае толкостенного стержня с прямой осью. При заданных форме, размерах поперечного сечения, длине и радиусе арки формулами (5.3) и (5.4) определяются два момента, отличающихся между собой не только знаками (что физически совершенно очевидно), но и (вследствие кривизны $\frac{1}{R}$) абсолютными величинами.

В случае профиля с двумя осями симметрии в формулах (5.3) и (5.4) следует положить $\beta_x = 0$, $r^2 = \frac{J_x + J_y}{F}$, где F — площадь всего сечения. В случае стержня с сечением, имеющим форму весьма узкого прямоугольника, мы можем считать $\beta_x = 0$, $J_\omega = 0$, и тогда формула (5.3) принимает вид

$$M = \frac{1}{2R} (EJ_x + GJ_d) \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2} (EJ_x + GJ_d)^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{R^2} \right) EJ_x GJ_d}.$$

Эта формула, полученная как частный случай более общей формулы (5.3), совпадает с формулой Тимошенко [178].

§ 6. Пространственный криволинейный стержень. Закон секториальных площадей для бимоментов

1. Пусть $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, $Z = Z(t)$ — некоторая пространственная кривая, заданная в неподвижных декартовых координатах. За независимую переменную t может быть принято расстояние по кривой от начальной точки $t = 0$, совпадающей с одним из концов ограниченной кривой, до рассматриваемой точки с текущей координатой t , или какой-нибудь другой параметр. На рис. 218 представлена винтовая линия со всеми своими тремя проекциями на координатные плоскости. Эта линия лежит на поверхности кругового цилиндра, и уравнения для координат какой-либо ее точки T имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + a \cos \gamma, \\ Y &= Y_0 + a \sin \gamma, \\ Z &= Z_0 + b\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где X_0 , Y_0 — координаты центра окружности, в которую проектируется поверхность цилиндра; a — радиус этой окружности; γ — полярный угол на плоскости OXY ; b — коэффициент, пропорциональный шагу винта.

В рассматриваемом примере винтовой линии за независимую переменную принимается угловая координата γ . При $\gamma = 0$ формулы (6.1) дают координаты X_K , Y_K , Z_K начальной точки K винтовой линии:

$$X_K = X_0 - a, \quad Y_K = Y_0, \quad Z_K = Z_0.$$

При $\gamma = 2\pi$ будем иметь координаты конечной точки L рассматриваемого отрезка винтовой линии. Уравнения проекций этой линии на координатные плоскости получаются из общих уравнений (6.1) путем исключения переменной γ :

$$\begin{aligned} (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 &= a^2, \\ X &= X_0 + a \cos \frac{Z - Z_0}{b}, \\ Y &= Y_0 + a \sin \frac{Z - Z_0}{b}. \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что проекции винтовой линии представляют собой на плоскости OXY окружность, на плоскости OYZ синусоиду и на плоскости OZX косинусоиду.

Вообразим в какой-либо точке кривой нормальную плоскость и нарисуем на этой плоскости контурную линию поперечного сечения толстостенного стержня так, чтобы точка A , представляющая собой

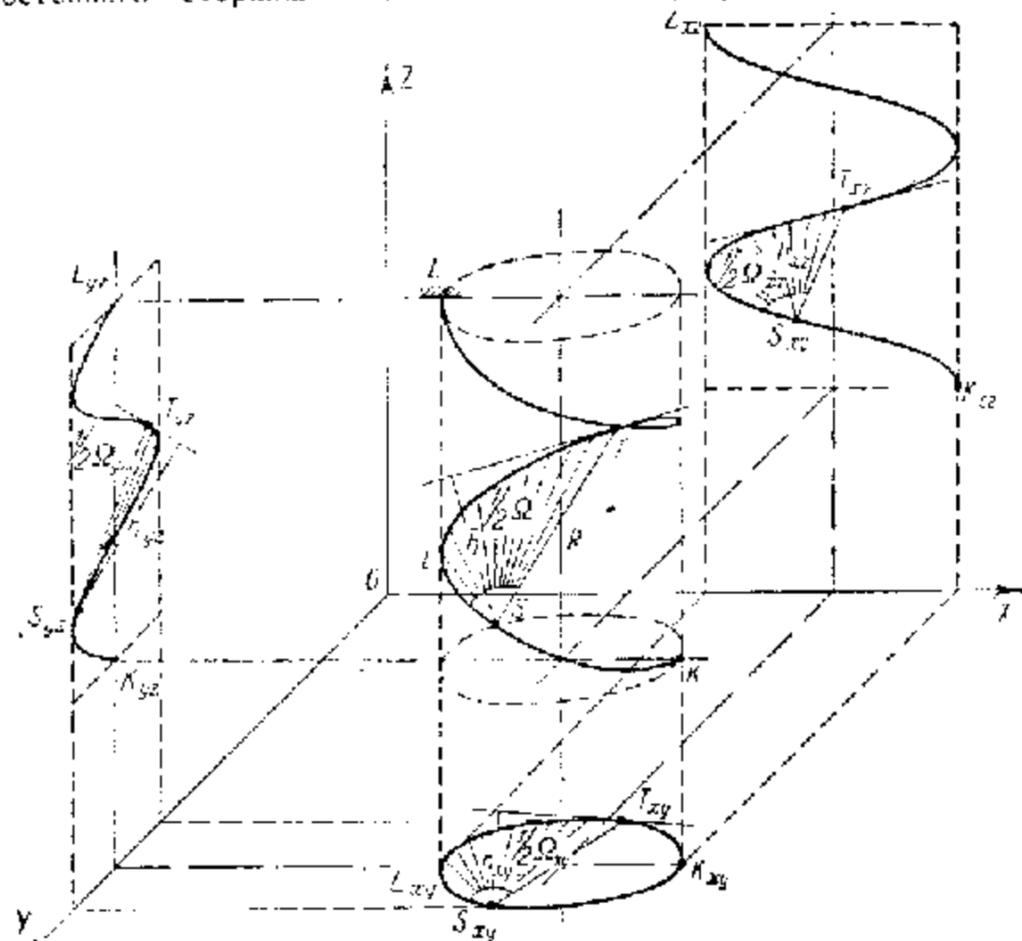


Рис. 218.

центр изгиба для стержня с прямой осью, лежала на заданной кривой (рис. 219). Будем считать, что оси Ax и Ay подвижного трехгранника параллельны главным центральным осям сечения стержня и направлены соответственно по бинормали и по нормали к пространственной кривой. Ось Az направим по касательной к этой кривой в сторону возрастания координаты t . При движении нормальной плоскости по кривой контурная линия, заданная в этой плоскости, очертит в пространстве некоторую поверхность. Эта поверхность и будет представлять собой срединную поверхность толстостенного криволинейного пространственного стержня. За ось стержня мы принимаем, таким образом, линию центров изгиба, т. е. геометрическое место точек A , положение которых в данной нормальной плоскости в подвижных осях координат Ox , Oy поперечного сечения определяется формулами (7.5) гл. I.

Предположим, что в отношении бимоментов для любого элемента dt , заключенного между двумя смежными, нормальными к оси стержня плоскостями, проходящими через точки $t = \text{const}$ и $t + dt = \text{const}$, стержень представляет собой тонкостенную статически определяемую систему. Другими словами, мы рассматриваем стержень, состоящий из весьма тонких полос и испытывающий в поперечном сечении касательные напряжения, распределенные по толщине оболочки равномерно. Мы считаем, таким образом, что жесткость стержня GJ_A при чистом кручении равна нулю. Такой стержень в случае, когда его ось представляла собой прямую линию, был нами рассмотрен в § 9 гл. II.

Стержень, обладающий указанными выше свойствами и сохраняющий после деформации форму контура в поперечном сечении, мы называем *идеально тонкостенным*. Считая кривизну оси стержня достаточно малой, т. е. предполагая размеры контурной линии в поперечном сечении стержня весьма малыми по сравнению с радиусом кривизны, будем иметь:

$$\frac{dB}{dt} = H, \quad (6.2)$$

где H и B — соответственно крутящий момент и бимомент в сечении $t = \text{const}$.

Уравнение (6.2) является точным для идеально тонкостенного стержня с прямой осью и выражает собой нашу теорему о том, что производная от бимомента по дуге t равна крутящему моменту. Эта теорема также представляет собой обобщение теоремы Швеллера — Журавского.

Присоединяя уравнение (6.2) к шести обычным уравнениям статики для стержня в пространстве, мы будем иметь полную систему семи дифференциальных уравнений равновесия для семи обобщенных внутренних статических факторов, а именно: для трех сил, трех моментов и одного бимомента в сечении $t = \text{const}$.

Пусть стержень имеет на конце L жесткую заделку, делающую поперечное сечение стержня на этом конце неподвижным относительно всех введенных нами ранее семи обобщенных перемещений (рис. 218). Мы считаем, таким образом, что на закрепленном конце стержня равны нулю в отдельности каждый из трех компонентов вектора линейного смещения точки оси стержня, каждый из трех компонентов вектора углового смещения поперечного сечения стержня и, наконец, деформация этого сечения. Другой конец стержня K мы

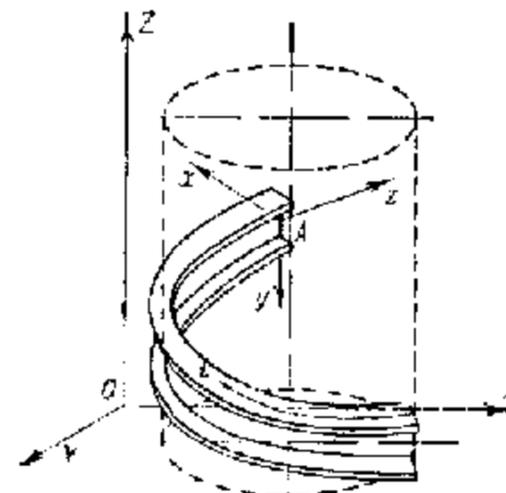


Рис. 219.

будем считать свободным от всех указанных выше семи закреплений. Предположим, что на этот консольный стержень в какой-либо точке S оси его в качестве внешних статических факторов приложена сила \bar{P}_S , заданная в осях OX, OY, OZ своими компонентами P_{SX}, P_{SY}, P_{SZ} , момент \bar{M}_S , имеющий своими компонентами в тех же осях M_{SX}, M_{SY}, M_{SZ} , и, наконец, бимомент B_S .

Под действием указанной нагрузки в сечениях стержня возникнут внутренние силы, состоящие для стержня, поперечное сечение которого претерпевает секториальную деформацию, из семи обобщенных статических факторов, а именно, из шести обычных сил (трех сил и трех моментов) и одного бимомента. На участке KS оси стержня между свободным (незакрепленным) концом K и точкой S приложения указанных внешних сил все внутренние силы, включая для идеально тонкостенного стержня и бимомент, равны нулю. На участке же SL в каждой точке T этого участка внутренние силы находятся из условий равновесия. Вектор силы и вектор момента в каком-либо сечении $t = \text{const}$ находится из шести обычных условий равновесия стержня, как жесткого тела в пространстве. В частности, для крутящего момента $H = H(t)$ мы получаем формулу:

при $t_S \leq t \leq t_L$

$$H(t) = P_{SX}h_{YZ}(t) + P_{SY}h_{ZX}(t) + P_{SZ}h_{XY}(t) + \\ + M_{SX}X'(t) + M_{SY}Y'(t) + M_{SZ}Z'(t), \quad (6.3)$$

где $h_{YZ}(t), h_{ZX}(t), h_{XY}(t)$ — проекции на координатные плоскости OYZ, OZX, OXY перпендикуляра $h(t)$, опущенного из точки S приложения силы P_S на касательную к оси стержня в точке с текущей координатой t ; $X'(t), Y'(t), Z'(t)$ — производные по дуге t от координат. Подставляя (6.3) в уравнение (6.2) и интегрируя затем это уравнение, получим

$$B(t) = P_{SX}\Omega_{YZ}(t) + P_{SY}\Omega_{ZX}(t) + P_{SZ}\Omega_{XY}(t) + \\ + M_{SX}X(t) + M_{SY}Y(t) + M_{SZ}Z(t) + B_S. \quad (6.4)$$

Здесь $\Omega_{YZ}(t), \Omega_{ZX}(t), \Omega_{XY}(t)$ представляют собой проекции на координатные плоскости вектора $\bar{Q}(t)$, величина которого равна удвоенной площади линейчатой поверхности, которую описывает подвижной радиус-вектор, вращаясь вокруг неподвижной точки S (точки приложения силы \bar{P}) при прохождении другого конца этого вектора по оси стержня от точки S до точки T , для которой определяется бимомент. Величины $\Omega_{XY}(t), \Omega_{YZ}(t), \Omega_{ZX}(t)$ определяются как удвоенные площади на координатных плоскостях секторов (сегментов), заключенных между проекцией на соответствующую координатную плоскость отрезка ST оси стержня и проекцией хорды, соединяющей концы этого отрезка.

Величинами $X(t), Y(t), Z(t)$ в формуле (6.4) представлены проекции вектора $\bar{R}(t)$ (расстояния между точками S и T) на оси коор-

динат OX, OY, OZ (начало координат совмещено с точкой S приложения момента \bar{M}_S).

Последнее слагаемое в формуле (6.4) относится к внешнему сосредоточенному бимоменту B_S , приложенному в точке S . Записывая равенство (6.4) в векторной форме

$$B(t) = B_S + \bar{M}_S \bar{R}(t) + \bar{P}_S \bar{Q}(t), \quad (6.5)$$

где последними двумя слагаемыми представлены скалярные произведения из соответствующих векторов, мы можем полученный результат сформулировать в виде следующей теоремы.

Для идеально тонкостенного криволинейного пространственного стержня с жестким открытым профилем, с одним свободным и другим закрепленным концом, в случае действия одного только внешнего бимомента B_S бимомент в любом поперечном сечении стержня на участке между точкой приложения внешних сосредоточенных сил и закрепленным концом остается постоянным и равным по величине внешнему бимоменту; в случае действия одного только сосредоточенного момента \bar{M}_S бимомент определяется как скалярное произведение из вектора этого момента и радиуса-вектора $\bar{R}(t)$, соединяющего точку S приложения момента с точкой T , для которой вычисляется бимомент $B(t)$; в случае действия одной только сосредоточенной силы \bar{P}_S , приложенной в какой-либо точке S оси стержня, внутренний бимомент $B(t)$ в сечении на участке оси стержня между точкой приложения этой силы и закрепленным концом равен скалярному произведению вектора заданной силы \bar{P}_S и вектора $\bar{Q}(t)$ удвоенной площади той поверхности, которую описывает подвижной радиус-вектор на участке оси стержня между точкой S приложения силы P и точкой T , определяющей поперечное сечение с искомым бимоментом; на участке же между свободным концом и точкой приложения внешних сил бимомент $B(t)$ равен нулю.

2. В случае стержня, имеющего своей осью плоскую кривую (или ломаную линию), формула (6.4) принимает вид

$$B(t) = B_S + M_{SX}X(t) + M_{SY}Y(t) + P_{SZ}\Omega_{XY}(t). \quad (6.6)$$

Этой формулой представлен закон для бимомента консольного плоского кривого стержня, аналогичный закону секториальных площадей для продольных перемещений и нормальных напряжений стержня с прямой осью при секториальной деформации поперечного сечения этого стержня.

Заметим, что, в отличие от внутренних изгибающих и крутящих моментов, определяемых из обычных уравнений статики, бимомент $B(t)$ в криволинейном стержне от сосредоточенной силы P зависит не только от точки приложения этой силы, но также и от вида кривой на участке оси стержня, между точкой приложения силы P и точкой с текущей координатой t , определяющей данное сечение. Так, например,

в случае плоского кругового, идеально тонкостенного консольного стержня, показанного на рис. 220, бимомент в заделке определяется как произведение удвоенной площади сегмента на значение вертикальной силы P_z . В случае же И-образного в плане консольного стержня, представленного на рис. 221, бимомент в заделке будет равен нулю, поскольку секторная площадь на рассматриваемом участке равна нулю. Аналогичный же вывод мы получили раньше и для перемещения u из плоскости сечения стержня.

Общая формула (3.16) гл. I распространяется также и на тонкостенные плоские, криволинейные стержни, если под контурной линией, представленной на рис. 220, понимать не линию поперечного

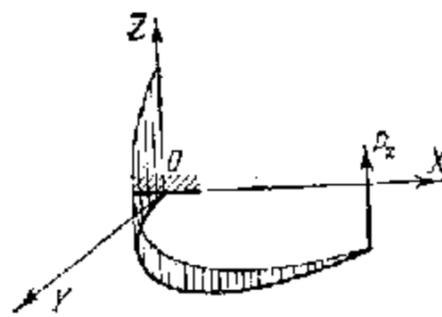


Рис. 220.

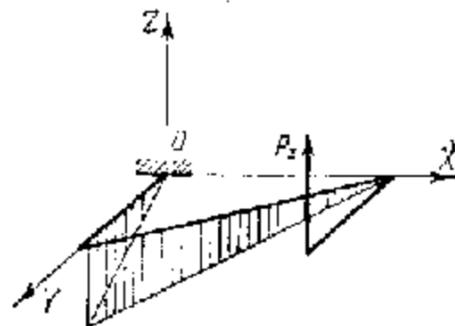


Рис. 221.

сечения стержня, а ось этого стержня. Величина u будет представлять собою перемещение точки оси стержня из ее плоскости; ξ' , η' — углы поворота, а θ' — меру деформации, рассматриваемые теперь в функции координаты t , а не z .

3. Если жесткость стержня GJ_d при чистом кручении отлична от нуля, то вместо уравнения (6.6) мы будем иметь дифференциальное уравнение

$$-EJ_w \theta'' + GJ_d \theta = P_{sx} \Omega_{yz}(t) + P_{sy} \Omega_{zx}(t) + P_{sz} \Omega_{xy}(t) + M_{sx} X(t) + M_{sy} Y(t) + M_{sz} Z(t) + B_s. \quad (6.7)$$

Это уравнение вместе с граничными условиями определяет угол кручения $\theta = \theta(t)$ от сосредоточенных внешних статических факторов, приложенных в какой-либо точке O консольного стержня. Заметим, что на участке $t_A \leq t \leq t_0$ мы должны считать правую часть уравнения (6.7) равной нулю.

Приведенные здесь основные результаты путем некоторого обобщения на статически неопределимые системы положены в основу современной теории расчета плоских и пространственных рам, состоящих из тонкостенных стержней, а также любых криволинейных стержней. На основе этой теории могут быть рассчитаны с учетом секторной деформации сечения вагонные рамы, состоящие из швеллеров, всяко-

го рода плоские и пространственные системы типа тонкостенного криволинейного стержня открытого профиля.

На рис. 222 представлена в качестве примера такой системы конструкция многопролетного покрытия, очерченного по части поверхности

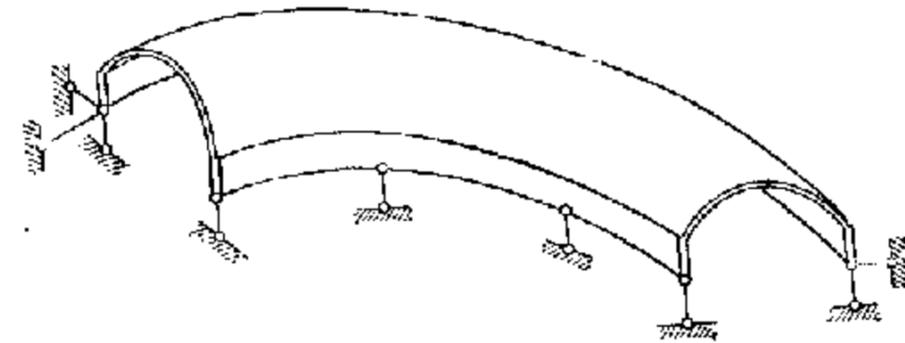


Рис. 222.

тора и усиленного криволинейными бортовыми элементами. Если все три основных размера такой конструкции представляют собою величины разных порядков, то расчет ее может быть произведен методами положенной выше бимоментной теории тонкостенного криволинейного стержня открытого профиля. Реакции мнимых опорных связей могут быть найдены как статически неопределимые величины из условий равенства нулю перемещений по направлению соответствующих опор, подобно тому, как это было показано ранее в § 1 гл. III на примере многоопорного стержня-оболочки с прямой осью.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что распределение напряжений и деформаций в брусе при поперечном изгибе зависит не только от величины изгибающего момента, но также и от положения плоскости действия внешних сил (плоскости изгиба). Гипотеза плоских сечений, лежащая в основе элементарной теории изгиба балок, соблюдается только в одном из частных случаев внешней поперечной нагрузки, а именно: в случае, когда эта нагрузка проходит через так называемый центр изгиба.

В классической теории изгиба отклонение от закона плоских сечений при действии на балку поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, впервые обнаружил экспериментальным путем в 1909 г. Бах [211].

Производя опыты над металлической балкой швеллерного сечения, Бах установил, что поперечная нагрузка, действующая перпендикулярно к плоскости симметрии швеллера и проходящая через центр тяжести его, наряду с деформациями изгиба вызывает также и деформации кручения. Деформации удлинений четырех крайних волокон швеллера при произвольном положении нагрузки не следуют закону плоских сечений.

При прохождении поперечной нагрузки через ось симметрии швеллера деформации от кручения в опытах Баха оказывались значительно меньше, чем в случае приложения нагрузки в центре тяжести. Обнаружив опытным путем отклонения от закона плоских сечений, Бах объяснил это отклонение несимметричностью сечения.

Вопросом изгиба и кручения тонкостенных стержней занимался проф. С. П. Тимошенко в связи со своей работой по устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки [176]. Экспериментальным путем он установил величину жесткости двутавровых балок при чистом кручении и подробно изучил вопрос о кручении, при котором в поперечных сечениях, наряду с касательными напряжениями, возникают также и нормальные. Измеренные в опытах С. П. Тимошенко углы кручения хорошо совпали с теоретическими значениями, вычисленными по его формулам.

После работ Баха и Тимошенко вопрос о кручении тонкостенных балок, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, в течение ряда лет в печати не освещался.

В 1921 г., т. е. спустя 12 лет после опытов Баха, появилась работа Майара [253], посвященная вопросу изгиба и кручения тонкостенных металлических балок. В этой работе автор, анализируя опыты Баха, отмечает, что отклонение от закона плоских сечений при кручении, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, может иметь место также и в симметричных профилях.

В своих последующих статьях, опубликованных в 1922 и 1924 гг., Майар, кроме результатов экспериментальных исследований, приводит расчетные данные по определению центра изгиба [254]. Эти данные получены им на основании метода С. П. Тимошенко. Центр изгиба он, как и ранее Тимошенко, определяет как точку пересечения равнодействующих элементарных касательных напряжений при изгибе балки в главных плоскостях.

В 1927 г. появилась работа С. А. Бернштейна [17], в которой автор отмечал значительное отклонение характера распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях поясов ферм открытых мостов от закона плоских сечений и назвал это явление «депланацией».

В период с 1921 по 1926 г. в иностранной технической литературе были напечатаны работы Циммермана [288], Зонтага, Эгншвилера [226] и Вебера [285]. Из них наиболее интересной является работа Вебера, в которой автор, кроме метода определения центра изгиба, дает обобщение результатов Тимошенко по кручению двутавровой балки и метод определения дополнительных нормальных напряжений при кручении для двухполочных профилей (двутаврового с разными полками, швеллерного и зетового). В этой же работе автор обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. точкой сечения, которая при кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки при кручении, сопровождаемом изгибом полки профиля, совпадают.

Вопросом нахождения центра изгиба для стержней сплошного сечения занимались советские ученые: акад. В. Г. Галеркин [60], акад. М. С. Лейбензон [111] и Г. Э. Проктор [143]. В последние годы оригинальные исследования по определению центра изгиба для стержней сплошного сечения были проведены Н. Х. Арутюняном и Н. О. Гулякяном [7], М. Э. Берманом [16].

Отклонение от закона плоских сечений при кручении тонкостенных стержней, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, играет существенную роль не только в вопросах прочности, но также и в вопросах устойчивости. Экспериментальные исследования, проведенные рядом авторов как в СССР, так и за границей, показывают, что во многих случаях экстремальными формами потери устойчивости, т. е. формами, дающими наименьшее значение для критической силы, являются крутильные или, в более общем случае, изгибно-крутильные.

Так, например, опыты над дюралюминиевыми авиационными стержнями, сделанные в ЦАГИ в 1934 г. [18], показали, что стержни коробчатого сечения с открытым профилем, как правило, теряют

упругую устойчивость вследствие закручивания, причем потеря устойчивости происходит при значениях сил, которые значительно меньше теоретических, полученных по формулам Эйлера.

Вопросом устойчивости тонкостенных авиационных стержней занимался немецкий инженер Вагнер; в 1934 г. он совместно с Претчером опубликовал теоретическую работу, в которой даны формулы для определения критических сил при потере устойчивости авиационных стержней в форме закручивания [284]. При выводе своих формул для дополнительных нормальных напряжений от кручения Вагнер пользовался законом, аналогичным закону секториальных площадей, выведенному автором настоящего труда в 1936 г. для профилей произвольного очертания [41]. Следует отметить, что Вагнер при рассмотрении деформации кручения считал, что центр кручения при потере устойчивости совпадает с центром изгиба. В действительности же центр кручения, как показали наши исследования, как правило, не совпадает с центром изгиба. Совпадение получается только в одном частном случае поперечного сечения стержня, а именно, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения; по этой причине формула Вагнера применима только для стержней, имеющих в сечении две оси симметрии. По-видимому, впервые на неточность результатов Вагнера обратил внимание Остерфельд [269] (1931 г.), получивший точные решения для таврового, уголкового и швеллерного сечений.

Вопросы теории изгиба, кручения и устойчивости стержня полигонального сечения рассматривались Каппусом [242] (1937 г.).

Ланквист и Флиг [252] (1937 г.) определили положение центра вращения, соответствующее минимуму критической нагрузки.

Из советских исследователей вопросами устойчивости авиационных стержней занимался П. М. Знаменский (в связи с экспериментальными исследованиями ЦАГИ, опровергающими теорию продольного изгиба). В 1934 г. им была напечатана статья [92], в которой на основе метода Ритца — Тимошенко были даны приближенные формулы для определения критической силы от продольного закручивания. Однако формулы П. М. Знаменского имеют те же пределы применимости, что и формулы Вагнера, поскольку и П. М. Знаменский при выводе своих формул исходит из предположения, что центр кручения в момент потери устойчивости совпадает с центром изгиба.

В 1936 г. появилась работа Ф. и Г. Блейхов, посвященная вопросу кручения и устойчивости тонкостенных профилей [214]. В этой статье авторы, пользуясь энергетическим методом, получили систему трех дифференциальных уравнений, относящихся к случаю центрального сжатия.

Однако авторы исходили из закона плоских сечений и заменяли заданные в поперечном сечении нормальные напряжения равнодействующей, принимая ее за сосредоточенную силу, приложенную в центре тяжести. Вследствие такой замены, в одном из уравнений, выражающем равновесие стержня при вращении относительно продольной оси,

соответствующих нашему третьему уравнению, в последнем члене не содержится продольной силы, что привело к потере одного из трех корней соответствующего детерминантного уравнения и дало для двух других корней неточные результаты.

В 1931 г. автором настоящей книги была предложена техническая теория ортогональных цилиндрических и призматических оболочек средней длины, имеющих в поперечном сечении произвольно заданное очертание. Эта теория, опубликованная впервые в работе [38] и затем в монографиях [39, 40], основана на рассмотрении оболочки как пространственной системы, способной в каждой точке сопротивляться не только деформациям растяжения (сжатия) по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, но также и деформациям изгиба в одном только поперечном направлении.

Из внутренних усилий в оболочке, помимо нормальных и сдвигающих сил, учитываются также поперечные изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие на продольных сечениях оболочки; продольные изгибающие и крутящие моменты как величины, не играющие существенной роли в пространственной работе конструкции, приняты равными нулю. Отброшены также соответствующие этим моментам (в смысле математической аналогии) деформации поперечных удлинений и деформации сдвига срединной поверхности. При перечисленных статических и геометрических гипотезах проблема равновесия упругой оболочки приводится к интегрированию системы двух симметрично построенных дифференциальных уравнений в частных производных относительно двух искомых функций: продольного нормального напряжения и поперечного изгибающего момента. Каждое из этих уравнений имеет четвертый порядок по контурной координате (в поперечном направлении) и второй по координате, откладываемой в направлении образующей. Решение этой двумерной краевой проблемы применительно к оболочкам покрытий дано на основе предложенного автором нового вариационного метода, позволяющего в синтезе с методами строительной механики стержневых статически неопределимых систем приводить сложные уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с симметричной матрицей.

Эти уравнения при рассмотрении цилиндрической оболочки как пространственной системы, состоящей из конечного числа узких продольных пластинок и бесконечного множества поперечных рам-полос и названной нами дискретно-континуальной, принимают восьмичленную структуру. В соответствии с физическим смыслом восьмичленные уравнения смешанного метода для призматической оболочки делятся на две группы: на уравнения равновесия и уравнения неразрывности деформаций. Для интегрирования дифференциальных уравнений теории цилиндрических и призматических оболочек автором разработан метод разложения искомых решений по фундаментальным функциям поперечных колебаний однородной весомой балки. Таким путем удалось разработать практические методы расчета цилиндрических и призматических

оболочек на любую произвольно заданную нагрузку и при любых произвольно заданных граничных условиях. Эта теория была впоследствии обобщена автором и на оболочки произвольно заданного многосвязного упругого контура.

Из зарубежных работ, содержащих, по существу, техническое приложение смешанного вариационного метода расчета призматических оболочек и применение этого метода к расчету строительных оболочек-покрытий, можно указать, например, на работы [223, 272, 274, 279].

На основе нашей теории разрешен ряд новых, практически важных задач по расчету и проектированию тонкостенных конструкций, применяемых в строительном деле, в авиации, в судостроении и в других областях современной техники. В настоящее время техническая теория ортогональных оболочек составляет новый раздел строительной механики пространственных систем.

В 1935 г. в СССР методами описанной выше теории впервые была рассчитана, спроектирована и осуществлена уникальная по своим размерам конструкция деревянной ребристой оболочки, перекрывающей площадь в 6000 м^2 , — состоящая из двух сваренных между собой цилиндрических оболочек ($100 \text{ м} \times 30 \text{ м}$ каждая) и опирающаяся на поперечные железобетонные рамы, расположенные в торцовых сечениях и отстоящие одна от другой на расстоянии 100 м .

Результаты расчета этой конструкции, приведенные частично в докторской диссертации автора [40], оказались совершенно неожиданными и непривычными с точки зрения обычных понятий и представлений классического сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем.

Исследования показали, что напряженное состояние однопролетной оболочки при действии на нее поперечной нагрузки существенным образом зависит от положения этой нагрузки в плоскости поперечного сечения. Так, например, при вертикальной односторонней, равномерно распределенной нагрузке, приложенной по продольному краю, в поперечных сечениях оболочки, помимо напряжений от изгиба, определяемых на основе закона плоских сечений методами балочной теории, возникают дополнительные нормальные напряжения, не следующие уже закону плоских сечений и происходящие от действия на оболочку внешней крутящей нагрузки. Эта нагрузка, отнесенная к единице длины, определяется как крутящий момент от заданной погонной вертикальной нагрузки относительно линии центров изгиба. Дополнительные нормальные напряжения в рассматриваемом случае односторонней нагрузки по своим величинам значительно превосходят напряжения, определяемые обычными методами сопротивления материалов, основанными на законе плоских сечений и не учитывающими влияния эксцентриситета приложения поперечной нагрузки относительно вертикальной оси симметрии. Эти напряжения связаны с новым видом работы ребристой оболочки, характеризующейся изгибным кручением. В отличие от чистого кручения, рассматриваемого в теории Сен-Венана, изгибное кру-

чение сопровождается возникновением в оболочке не только касательных, но также и нормальных напряжений. Применение теории ортогональных цилиндрических оболочек к расчету названной выше конструкции ребристого покрытия существенным образом изменило представление о работе таких конструкций, как тонкостенные балки корытного профиля, и выявило новые факторы пространственной деформации, связанные с деформацией поперечных сечений и возникающие главным образом от действия на оболочку односторонних несимметричных нагрузок. Результаты расчета сыграли большую роль при назначении основных размеров конструкции, обеспечивающих ее прочность. Выяснилось, в частности, что при односторонней нагрузке в оболочке, помимо нормальных напряжений, возникают большие касательные напряжения, достигающие максимальных значений в крайних верхних частях покрытия, примыкающих к световому проему. Эти напряжения потребовали усиления конструкции путем увеличения на соответствующих ее участках толщины.

Исследования также показали, что для цилиндрических оболочек открытого профиля при достаточной их длине или при наличии достаточно жестких поперечных ребер деформация поперечного изгиба, связанная с изменением формы профиля оболочки и происходящая от поперечных изгибающих моментов, в пространственной работе конструкции не имеет существенного значения. Эта деформация практически не оказывает влияния на величины и характер распределения нормальных и касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях оболочки. Отбрасывая по малости поперечную изгибную деформацию или (что равносильно) вводя дополнительную гипотезу о неизменяемости профиля оболочки, автор тем самым значительно упростил предложенную им ранее более точную теорию и получил в 1935 г. для продольных деформаций и продольных нормальных напряжений новый закон распределения их по поперечному сечению, названный им *законом секториальных площадей*.

Закон секториальных площадей, включающий в себя как частный случай закон плоских сечений Бернулли — Навье и описывающий как плоскую изгибную, так и пространственную изгибно-крутильную деформацию оболочки, был положен в основу практического метода расчета ребристых сводов-оболочек, а затем и в основу общей теории прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных стержней открытого профиля.

Таким образом, современная теория тонкостенных стержней, опубликованная сначала в работах [41, 42, 43], а затем в монографии автора [45], возникла как частный случай из более общей теории автора и основана на рассмотрении тонкостенного стержня как пространственной системы типа цилиндрической или призматической оболочки с жестким профилем. Эта концепция, в сочетании с вариационными принципами механики деформируемых тел, позволившими ввести новые понятия об обобщенных координатах сечения, испытывающего

депланацию, об изгибно-крутящем бимоменте, представляющем собою новую обобщенную продольную силу, соответствующую в смысле виртуальной работы депланации сечения и принципиально отличающуюся от сил и моментов, рассматриваемых в статике твердого тела, оказалась более общей и более плодотворной, чем концепция балочной теории и классического сопротивления материалов, от которой по существу отпоявились все названные выше предшественники автора, начиная с Тимошенко.

Научное и методологическое значение теории тонкостенных стержней-оболочек состоит еще и в том, что она, будучи построена на гипотезах более общего характера, чем гипотезы классической теории изгиба балок, на отказе от гипотезы плоских сечений и от принципа Сен-Венана, выражающего по существу эту гипотезу в смысле внутренних обобщенных сил и моментов, в значительной мере расширяет рамки сопротивления материалов.

Основанная в своей математической части на вариационном методе приведения к обобщенным дифференциальным уравнениям с одной или несколькими обобщенными упругими характеристиками, бимоментная теория автора, путем надлежащего выбора дополнительных физических гипотез, относящихся к законам распределения напряжений и деформаций в плоскости поперечного сечения, дает возможность разработать более точные методы расчета тонкостенных стержней и оболочек как открытого, так и закрытого многосвязного профиля, а также и стержней сплошного сечения с учетом депланации и изменения формы профиля.

Здесь уместно будет отметить, что С. П. Тимошенко в 1945 г. опубликовал по теории тонкостенных стержней (с ссылкой на нашу монографию [45]) обширную статью [281], в которой при изложении основной задачи об изгибном кручении стержня исходит также из идеи рассмотрения стержня как оболочки; статья эта была переведена на французский язык и опубликована в Бельгии [257] в 1947 г.

Статья Тимошенко, опубликованная на русском языке как дополнение ко второму изданию его книги [181], представляет собою по существу краткое изложение основных глав нашей монографии [45], но только в других обозначениях. Теория тонкостенных стержней в концепции автора, с сохранением его терминологии (правда, без ссылки на него), освещалась и в ряде других работ зарубежных авторов, например Гудира, Бескина [213, 232].

Из советских работ по теории тонкостенных стержней в первую очередь следует назвать монографию А. А. Уманского [182], предложившего оригинальный метод расчета тонкостенных стержней с жестким закрытым профилем и рассмотренного на основе бимоментной теории ряд новых задач по расчету плоских свиренных стержневых конструкций, названных им биконструкциями.

Книга Д. В. Бычкова и А. К. Мрошинского [29] содержит систематическое изложение теории тонкостенных стержней примени-

тельно к расчету строительных металлических балок. Книга Д. В. Бычкова [30] содержит методы расчета рам из тонкостенных стержней. Книги Б. Н. Горбунова и А. И. Стрельбицкой [73, 74] освещают вопросы приложения нашей теории к расчету тонкостенных вагонных рам.

Оригинальное изложение теории тонкостенных стержней, основанное на применении вариационных уравнений Эйлера — Лагранжа, дано в работе Г. Ю. Джанелидзе [80]. Теоретический интерес представляет собой также и докторская диссертация Г. Ю. Джанелидзе [81], содержащая, помимо вариационной формулировки нашей теории, и методы расчета стержней закрытого профиля.

В книге Джанелидзе и Паповко [82], помимо основных результатов, относящихся к бимоментной теории изгибного кручения стержней сплошного сечения, с достаточной полнотой излагаются также и методы определения напряжений и деформаций при стесненном кручении стержня закрытого профиля.

Строгое математическое обоснование физических гипотез, лежащих в основе теории тонкостенных стержней, а также выявление области применения этой теории было дано в работе А. Л. Гольдштейнера [70]. Этому весьма важному вопросу посвящены также специальные главы докторской диссертации Ю. Н. Работнова [146].

Важным вопросам экспериментального изучения деформаций тонкостенных стержней (балок и колонн) при изгибном кручении и экспериментальной проверке основных положений нашей теории и, в частности, закона секторяльных площадей было посвящено большое количество работ, проведенных в лабораториях ряда научно-исследовательских институтов и высших учебных заведений. К таким работам относятся, в частности, исследования Н. А. Волобана [18], Д. В. Бычкова [26, 27, 28], М. И. Длугача [86], Н. Г. Добудогло [88, 89, 90], А. Р. Ржаницына [153], С. И. Стельмаха [161, 162], Ю. И. Ягна [207] и др. авторов.

Опыты, проведенные К. Ф. Коваловым [104], подтвердили выводы предложенной нами общей теории, относящейся к расчету стержней-оболочек закрытого профиля с учетом деформации их контура [51]. Они показали, что стесненное кручение таких тонкостенных стержней, как правило, сопровождается значительными искажениями контура. Форма депланации поперечного сечения близка к форме ее при чистом кручении. На основании проведенных экспериментов К. Ф. Ковалов подтверждает наш вывод о необходимости расчета замкнутых тонкостенных профилей, не усиленных поперечными ребрами, с учетом деформации их контура.

Широкой популярностью бимоментной теории тонкостенных стержней способствовали работы Г. Ю. Джанелидзе [81, 82] и Я. Г. Паповко [133, 134], в которых рассмотрены стержни как открытого профиля, так и замкнутого. Вопросы расчета тонкостенных стержней с учетом деформации сдвига рассматривались Р. А. Аладуровым [1, 2].

Приложение теории к расчету тонкостенных конструкций самолета на прочность содержится в трудах С. Н. Кана [94, 95, 96] и В. И. Климова [102].

Тонкостенные стержни с малой кривизной применительно к требованиям авиастроения исследовали Л. И. Балабух [10, 11] и Б. П. Цибуля [193, 194].

Теория тонкостенных стержней была применена для расчета гидротехнических сегментных затворов Б. С. Васильковым и И. Е. Милейковским [34]. Гидротехнические плоские затворы рассматривались В. Н. Пастушихиным [137] как тонкостенные пространственные конструкции типа призматических оболочек.

Вопросы расчета тонкостенных стержней с поперечными связями освещались в работах Г. П. Соболевского [160], М. И. Дзугача [86], А. М. Шаяншавили [204, 205].

Распространение бимоментной теории изгибного кручения на тонкостенные плоские криволинейные стержни дано в работах Н. Я. Грюнберга [76], Г. Ю. Джанелидзе [81], А. Р. Ржаницына [156] и А. А. Уманского [185, 186].

Обобщение этой теории на тонкостенные пространственные стержни дано в нашей работе [48]; там же рассмотрена задача о пространственной устойчивости и пространственных изгибно-крутильных формах равновесия тонкостенного плоского криволинейного стержня с круговой осью.

Большое практическое значение имеет проблема пространственного расчета тонкостенных стержней за пределом упругости и определение несущей способности конструкций типа тонкостенных стержней. Эта проблема в Советском Союзе изучалась также методами описанной выше бимоментной теории путем использования для деформаций закона секториальных площадей.

Вопросы расчета тонкостенных стержней за пределами упругости освещались в работах Р. А. Междумяна [122], Е. А. Расковой [148], Н. Д. Рейна [151], А. Р. Ржаницына [154] и А. И. Стрельбицкой [171, 173], многочисленные исследования которой, подтвержденные экспериментами, имеют большое практическое значение. В последние годы А. Р. Ржаницына, используя наряду с законом секториальных площадей и другие геометрические зависимости нашей общей теории деформации оболочек, лежащие в основе восьмиугольных уравнений, и исходя также из вариационного метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям систем в частных производных, рассмотрел ряд задач по расчету оболочек за пределом упругости и по определению их несущей способности.

Устойчивость балки прямоугольного сечения из упрочняющегося материала при чистом изгибе исследована Хиллом и Кларком [235] (1950 г.) и Уиттриком [287] (1952 г.). Устойчивость двутавровой балки при чистом изгибе в предположении о чистоэластическом характере процесса выпучивания рассматривалась Флинтом [229] (1953 г.).

Некоторые вопросы устойчивости упруго-пластических тонкостенных стержней изучены Л. М. Качановым [100] (1956 г.), исходя из гипотезы об отсутствии разгрузки в момент выпучивания.

Различные случаи устойчивости плоской формы изгиба по теории деформации с учетом разгрузки материала рассмотрены Л. М. Качановым [99] (1951 г.) и К. С. Чобаняном [196] (1953 г.).

Не меньшее значение, чем проблема прочности, имеет для тонкостенных конструкций проблема устойчивости. Проблемой упругой устойчивости тонкостенных стержней при различных граничных условиях занимались С. А. Амбарцумян [5], А. Л. Гольденвейзер [68], З. И. Магурмович [117] и многие другие.

Устойчивость верхнего пояса открытого моста, элементы которого выполнены в виде тонкостенных стержней, рассмотрена П. А. Лукашем [113].

Устойчивость внецентрично сжатых тонкостенных стержней изучалась Г. М. Чувикиным [197, 198, 200]. Приложение теории устойчивости к расчету авиаконструкций было выполнено И. Ф. Образовым [129, 130].

Проблема пространственной устойчивости, разработанная автором [45] применительно к упругим стержням (колоннам, балкам), развивалась затем успешно в направлении определения критических сил для стержней, теряющих устойчивость при напряжениях, превосходящих предел упругости.

К работам, посвященным вопросам устойчивости тонкостенных стержней за пределом упругости, относятся исследования Б. М. Броуде [22, 23, 24], который изучал устойчивость балок за пределами упругости при центрированном и внецентричном нагружении, а также общий случай потери устойчивости внецентрично сжатых стержней за пределом упругости Л. Б. Бунагана [25], А. В. Геммерлинг и Г. В. Долгвиновича [64], Р. А. Междумяна [122], В. В. Пинаджяна [139, 140], А. Р. Ржаницына [157] и др. Обширные экспериментальные исследования устойчивости балок и колонн за пределом упругости произведены Г. М. Чувикиным [24, 199].

Из зарубежных исследований проблеме расчета тонкостенных стержней за пределом упругости посвящены работы [219, 235].

Особенный интерес представляет также исследование работы тонкостенных конструкций при действии динамических нагрузок.

Вопросами расчета тонкостенных стержней и ребристых сводов-оболочек на собственные колебания и действия кратковременных нагрузок занимался Б. М. Теренин [47, 50]. Практически нижняя задача о собственных и вынужденных колебаниях гидротехнических плоских затворов плотин была решена В. И. Пастушихиным [137].

Исследование напряжений и деформаций в тонкостенных балках от подвижной нагрузки выполнено В. Г. Александровым [3].

Проблема динамической устойчивости и пространственных изгибно-крутильных колебаний конструкций типа тонкостенных стержней в

связи с аварией Такомского моста рассматривалась на основе общих уравнений нашей теории в докторских диссертациях В. В. Болотина [19], И. И. Гольденבלата [67] и Ф. Д. Дмитриева [87].

Большое теоретическое и практическое значение имеет также и проблема пространственного расчета тонкостенных гибких стержней, претерпевающих конечные деформации. Эта проблема также с успехом развивается в Советском Союзе и ей, в частности, посвящены оригинальные исследования Л. П. Кобеца [103] и С. П. Вязьменского [58].

Представляет практический интерес метод деформационного расчета сжато-изогнутых стержней, разработанный на основе теории автора Ю. Д. Копейкиным [105], А. А. Пиковским и К. А. Михайличенко [138].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ададуров Р. А., Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки, Труды ЦАГИ, № 614, 1947.
2. Ададуров Р. А., Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жесткими поперечными сечениями, ДАН 62, № 2, 1948.
3. Александров В. Г., Расчет тонкостенных неразрезных балок на совместное действие изгиба и кручения при подвижной нагрузке (канд. диссертация), ЦНИПС, 1949.
4. Александров В. Г., Линии влияния изгибно-крутильных факторов неразрезных тонкостенных балок, Вопр. строит. механ. (Рословский на-Дону инж.-строит. ин-т), М., № 2, стр. 35—51, 1953.
5. Амбарцумян С. А., К вопросу расчета устойчивости тонкостенных стержней, ДАН Армянской ССР, т. XVII, № 1, 1953.
6. Анучкин М. П., Изыскание оптимальных форм балок и колонн из тонкостенных штампованных профилей (канд. диссертация), ЦНИПС, 1949.
7. Арутюнян Н. Х. и Гулкаян П. О., О центре изгиба некоторых призматических стержней с полигональным поперечным сечением, Прикл. матем. и механ., т. XVIII, вып. V, 1954.
8. Афанасьев А. М., О расчете крыла моноблок на стесненное кручение, Труды научно-технической конференции ВВА им. И. Е. Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944.
9. Ахметов У. М., К вопросу о выравнивании нормальных напряжений в обшивке вблизи креплений и вырезов (диссертация), ЛКВВИА, 1950.
10. Балабух Л. И., Изгиб и кручение конических оболочек, Труды ЦАГИ, № 577, 1946.
11. Балабух Л. И., Расчет на прочность конических тессонов, Труды ЦАГИ, № 640, 1947.
12. Балаши А. М., Предварительно напряженные цилиндрические железобетонные оболочки (канд. диссертация), Ин-т стр. мат. и сооруж. АИ Арм. ССР, Ереван, 1949.
13. Беляев В. Н., Расчет свободно несущего крыла, Техника воздушного флота, №№ 7, 8, 9, 1932.
14. Беляев В. Н., Расчет свободно несущего крыла с работающей обшивкой, Техника воздушного флота, 1935.
15. Беляев В. Н., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1953.
16. Берман М. Э., К вопросу о центре изгиба, ДАН СССР, т. LXXII, № 1, 1950.
17. Бернштейн С. А., Опытное исследование работы верхнего пояса открытого моста, Сборник «Исследования напряжений и деформаций при статической работе моста», Транспечать, вып. № 60, 1927.
18. Болобан Н. А., Исследование дюралюминиевых профилей, 1936.
19. Болотин В. В., Динамическая устойчивость сооружений, Гостехиздат, 1952.
20. Болотин В. В., Интегральные уравнения стесненного кручения и устойчивости тонкостенных стержней, Прикл. матем. и механ., 17, № 2, 1953.

21. Борисов М. Д., Крутильная жесткость составных тонкостенных стержней с шпунтовыми планками, Труды Ленингр. текстильн. ин-та, № 6, стр. 109—118, 1955.
22. Броуде Б. М., Предельные состояния стальных балок, Стройиздат, 1953.
23. Броуде Б. М., Об устойчивости слегка искривленных и несимметрично нагруженных двутавровых балок, Сборник «Расчет пространственных конструкций», № 4, Госстройиздат, 1957.
24. Броуде Б. М. и Чувпкин Г. М., Экспериментально-теоретическое исследование общего случая потери устойчивости опенциально сжатых стержней, ТПИ «Проктастальконструкция», вып. 1416, 1954; вып. 701, 1957.
25. Булатин Л. Б., Пространственная устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материалов, Ереван, 1950.
26. Бычков Д. В., Испытание металлических балок на совместное действие изгиба и кручения, Строительная промышленность, № 11—12, 1939.
27. Бычков Д. В., Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках, Сборник «Исследование металлических конструкций», 1940.
28. Бычков Д. В. и Мрошинский А. К., Испытание металлической балки П-образного сечения, Труды лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1941.
29. Бычков Д. В. и Мрошинский А. К., Кручение металлических балок, Стройиздат, 1944.
30. Бычков Д. В., Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов, Стройиздат, 1948.
31. Бычков Д. В., Некоторые проблемы расчета тонкостенных стержней на кручение, Труды лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1949.
32. Бычков Д. В., Тонкостенные металлические профили в применении для прогонов кровли, Труды лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1949.
33. Вагнер Г. В., По поводу оболочки, как элемента конструкции самолета, Сборник переводов ЦАГИ «Исследования прочности тонкостенных конструкций крыла и фюзеляжа», Оборонгиз, 1938.
34. Васильков Б. С. и Милейковский И. Е., Разработка методов расчета сегментных затворов как пространственных систем, Научно-техн. отчет лаб. стронт. механики, ЦНИПС, 1953.
35. Вебер К., Передача крутящего момента в балках двуплощного сечения. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций в самолетостроении, Сборник рефератов и переводов под ред. А. А. Уманского и П. М. Знаменского, ЦАГИ, 1937.
36. Вайков Г. Г., Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки при сложных нагрузках (канд. диссертация), КИСИ, Киев, 1954.
37. Власов В. З., Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек, Строительная промышленность, №№ 11, 12, 1932.
38. Власов В. З., Новый метод расчета тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек, Госстройиздат, 1933.
39. Власов В. З., Строительная механика оболочек, ОНТИ, 1936.
40. Власов В. З., Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения, Вестник ВИА РККА им. В. В. Куйбышева, № 20, II, 1936.
41. Власов В. З., Расчет ребристых сводов-оболочек и балок из тонкостенных профилей на совместное действие изгиба и кручения, «Проект и стандарт», №№ 8, 9, 10, 1936.
42. Власов В. З., Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей, Строительная промышленность, № 6—7, 1938.
43. Власов В. З., Кручение, устойчивость и колебания тонкостенных стержней, Прикл. матем. и механ., т. III, вып. 1, 1939.
44. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940.
45. Власов В. З., Расчет тонкостенных призматических оболочек, Прикл. матем. и механ., т. VIII, вып. 5, 1944.

46. Власов В. З. и Теренин Б. М., Действие импульса воздушной волны на ребристые своды-оболочки, Сборник «Общая прочность и устойчивость сооружений при действии взрывной нагрузки», под ред. И. М. Рабиновича, вып. 1, Стройиздат, 1944.
47. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни и оболочки с жестким открытым профилем, Добавление к книге С. П. Тимошенко «Устойчивость упругих систем», Гостехиздат, 1946.
48. Власов В. З., Приближенная теория тонкостенных изгибаемых призматических систем и пластинки и расчет их на колебания и устойчивость. Исследования по динамике сооружений, Сборник статей под ред. И. М. Рабиновича, Стройиздат, 1947.
49. Власов В. З. и Теренин Б. М., Колебания тонкостенных складчатых конструкций и оболочек. Исследования по динамике сооружений, Сборник статей под ред. И. М. Рабиновича, Стройиздат, 1947.
50. Власов В. З., Строительная механика тонкостенных пространственных систем, Госстройиздат, 1949.
51. Власов В. З., Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней, Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1949.
52. Власов В. З., Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1949.
53. Власов В. З., Некоторые задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости, Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1950.
54. Власов В. З. и Мрошинский А. К., Контактные задачи по теории цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами, Сборник «Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций», Стройиздат, 1950.
55. Власов В. З., Пространственные облегченные конструктивные формы гидротехнических сооружений и методы их расчета, Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1951.
56. Воробьев Л. Н., Влияние сдвига срединной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля с недеформируемым контуром, Научн. труды Новочеркасск. политехн. ин-та, 25, стр. 92—111, 1955.
57. Вязьмепский С. П., О пространственной деформации гибких тонкостенных стержней, Строительная механика и строительные конструкции, Ленинград, 1957.
58. Галеркин Б. Г., Сборник Ленингр. ин-та ниж. путей сообщения, 1927.
59. Галиханов К. Г., Кручение стержней полукруглого сечения, Труды Уфимск. авиац. ин-та, вып. 2, стр. 33—43, 1956.
60. Гвоздев А. А., К расчету тонкостенных цилиндрических оболочек, Строительная промышленность, № 1, 1932.
61. Геккелер И. В., Статика упругого тела, ОНТИ, 1934.
62. Геммерлинг А. В. и Лонгвинич Г. В., Устойчивость сжатых стержней за пределом пропорциональности, Техника воздушного флота, № 12, 1938.
63. Геммерлинг А. В., К расчету несимметрично-сжатых тонкостенных стержней, Тр. лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1949.
64. Гильман Л. С. и Голудкевич С. С., Кручение призматических стержней парама, распределенными по их длине, Труды Высшего инженерного училища ВМФ, вып. 4, 1943.
65. Гольденблат И. И., Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат, 1947.
66. Гольденвейзер А. Л., Устойчивость тонкостенных стержней при действии продольной силы в зависимости от граничных условий, Труды лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1941.
67. Гольденвейзер А. Л., О приближенных методах расчета тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны, Прикл. матем. и механ., т. XI, вып. 4, 1947.

70. Гольденвейзер А. Л., О теории тонкостенных стержней. Прикл. матем. и механ., т. XIII, вып. 6, 1949.
71. Горбунов Б. Н., Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней, Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 1, 1943.
72. Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И., Расчет рам из тонкостенных профилей методом деформаций, Гостехиздат Украины, Сборник трудов КИЭИ, вып. VIII, 1948.
73. Горбунов Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Приближенные методы расчета вагонных рам из тонкостенных стержней, Машиз, 1946.
74. Горбунов Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Теория рам из тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948.
75. Гроссман Е. П., Курс вибрации частей самолета, Оборонгиз, 1940.
76. Грюнберг Н. Я., Изгиб и кручение тонкостенных криволинейных стержней, Труды лаб. стрит. механики ЦНИПС, 1949.
77. Грюнберг Н. Я., Приложение вариационного метода проф. В. З. Власова к расчету складчатых оболочек с круговой осью. Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций, Сборник статей под ред. проф. В. З. Власова, 1952.
78. Дарков А. В. и Кузнецов В. И., Статика сооружений, Трансжелдориздат, 1951.
79. Деркачев А. А., Некоторые вопросы теории тонкостенных стержней открытого профиля (канд. диссертация), Новочеркасский политех. ин-т, 1955.
80. Джанелидзе Г. Ю., Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В. З. Власова, Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 6, 1943.
81. Джанелидзе Г. Ю., Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром, Прикл. матем. и механ., т. 8, вып. 1, 1944.
82. Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948.
83. Джанелидзе Г. Ю., К теории тонких и тонкостенных стержней, Прикл. матем. и механ., т. XIII, вып. 6, 1949.
84. Динник А. Н., Продольный изгиб. Кручение, Изд-во АН СССР, 1935.
85. Динник А. Н., Устойчивость упругих систем, ОНТИ, 1935.
86. Драгач М. И., О расчете тонкостенных стержней, усиленных решетками или планками, Сборник «Расчет пространственных конструкций», Машиздат, 1950.
87. Дмитриев Ф. Д., Крушения инженерных сооружений, Гос. издат. литературы по стрит. и архитектуре, Москва, 1953.
88. Добудогло Н. Г., Экспериментальное исследование устойчивости металлических стержней при центральном сжатии, Строительная промышленность, № 11—12, 1939.
89. Добудогло Н. Г., Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости плоской формы изгиба неразрезных балок узкого прямоугольного и двутаврового сечений, Труды лаб. стрит. механики ЦНИПС, 1941.
90. Добудогло Н. Г., Опытное исследование устойчивости металлических строительных профилей при центральном сжатии, Труды лаб. стрит. механики ЦНИПС, 1941.
91. Еленевский Г. С., О напряжениях и деформациях трапецеидального крыла при скручивании, Труды ЦАГИ, № 578, 1946.
92. Зяменский П. М., Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии, Техника воздушного флота, № 12, 1934.
93. Ильюшин А. А., Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, АН СССР, ИММ, т. XX, вып. 6, 1956.
94. Кап С. Н., Расчет крыла на сдвиг методом Мора, Труды научно-технической конференции ВВА им. Н. Е. Жуковского, т. 2, вып. 1, 1944.
95. Кап С. Н., Расчет тонкостенных конструкций, Изд. ВВИА, 1948.
96. Кап С. Н. и Пановко Я. Г., Элементы строительной механики тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1952.
97. Каляник Л. К., Решение некоторых задач о кручении и изгибе полых призматических стержней (канд. диссертация), Киев. политех. ин-т им. К. Маркса, 1953.
98. Карякин П. И., Кручение тонкостенных стержней в упругой среде, Труды МЭМИИТ, вып. 50, Трансжелдориздат, 1951.
99. Качанов Л. М., Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости, Прикл. матем. и механ., т. XV, № 2, 5, 6, 1951.
100. Качанов Л. М., Устойчивость тонкостенных стержней при упруго-пластических деформациях, ДАН СССР, т. 107, № 6, стр. 803—806, 1956.
101. Киселев В. Ф., Расчет на прочность многополюсной цилиндрической оболочки с жесткими диафрагмами, Труды ЦАГИ, № 619, 1947.
102. Климов В. И., Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций, Труды МАИ, вып. 89, Оборонгиз, 1957.
103. Кобель Л. П., Нелинейная теория изгибного кручения упругих незамкнутых тонкостенных стержней (канд. диссертация), Харьков.
104. Ковалов К. Ф., Изучение стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля (канд. диссертация), Ленинград, 1954.
105. Копейкин Ю. Д., К расчету внеосновно-сжатых тонкостенных стержней по теории В. З. Власова, Прикладная механика, вып. 2, изд. АН УССР, 1957.
106. Коробов А. П., Устойчивость полосы, Киев, 1913.
107. Коробов А. П., Об устойчивости плоской формы изгиба стержней, ось которых представляет собой ломаную линию, Изд. Новочеркасского инж.-строит. ин-та, 1934.
108. Кузьмин Н. Л., Кручение и изгиб тонкостенных стержней открытого профиля, Стройиздат, 1950.
109. Лашманова И. А. и Новожилов В. В., Стесненное кручение труб, Уч. зап. ЛГУ, № 217, стр. 254—271, 1957.
110. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, 1943.
111. Лейбензон Л. С., Труды ЦАГИ, вып. 8, 1924. Технич. зам. ЦАГИ, № 45, Изв. АН СССР, стр. 53—68, 1935.
112. Логкин О. И., Напряжения при чистом изгибе в тонкостенных стержнях-оболочках прямоугольного сечения, Труды Томского электромеханич. ин-та инж. ж.-д. трансп., 18, стр. 17—24, 1953.
113. Лукаш П. А., Применение теории проф. В. З. Власова к исследованию пространственной устойчивости сжатых поясов открытых балочных костов. Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций, Сборник статей под ред. проф. В. З. Власова, 1952.
114. Луковников В. Ф., Устойчивость прямоугольной полосы и двутавровой балки при сложном поперечном и продольном нагружении (канд. диссертация), Рига, 1955.
115. Лунев В. И., Вариационный и графические методы расчета тонкостенных стержней открытого профиля (канд. диссертация), Москва, 1954.
116. Лысков В. П., Инженерные методы при определении собственных значений в задачах В. З. Власова об устойчивости и колебаниях тонкостенных конструкций, Сборник «Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций», Стройиздат, 1950.
117. Мазурмович Э. Н., Пространственная устойчивость тонкостенных криволинейных стержней (канд. диссертация), Киев, 1953.
118. Малкина Р. Л., Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов методом последовательных приближений, Труды Уральск. политех. ин-та, сб. 54, стр. 82—102, 1955.

119. Марьян В. А., К расчету фюзеляжа монокок в области выреза при кручении, Труды Научно-технической конференции ВВА им. П. Е. Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944.
120. Марьян В. А., Приближенный расчет коротких открытых цилиндрических оболочек, Сборник «Расчет пространственных конструкций», вып. 1, Машстройиздат, 1950.
121. Междумян Р. А., Изгиб и кручение тонкостенных цилиндрических оболочек за пределом упругости, Прикл. матем. и механ., т. XIV, вып. 3, 1950.
122. Междумян Р. А., Пространственная устойчивость конструкций при упруго-пластических деформациях, Инженерный сборник, АН СССР, ОН, т. XIV, 1953.
123. Милейковский И. П., Расчет составных стержней методами строительной механики оболочек, Сборник ЦНИПС «Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций», Москва, Гос. издат лит. по стр-ву и архитектуре, 1952.
124. Мрошинский А. К., Исследование работы складчатых профилей методами теории упругости, Труды лаб. стронт. механики ЦНИПС, 1941.
125. Новинский Ю., Кручение тонкостенной балки с разрезанной наружной конической поверхностью, Бюлл. Польской АН, отд. IV, № 2, 1954.
126. Новожилов В. В., Расчет цилиндрических оболочек, Изв. АН СССР, ОН, № 6, 1946.
127. Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951.
129. Образцов И. Ф., Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней (канд. диссертация), Москва, 1949.
130. Образцов И. Ф., К расчету тонкостенных стержней на устойчивость при изгибе, Труды МАИ, вып. 26, Оборонгиз, 1953.
131. Образцов И. Ф., Расчет оболочек типа кессона стреловидного крыла на основе теории В. З. Власова, Труды МАИ, вып. 59, Оборонгиз.
132. Образцов И. Ф., Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета, Труды МАИ, вып. 79, Оборонгиз.
133. Пановко Я. Г., Расчет призматических тонкостенных стержневых систем, Труды ЛВВА, вып. 7, 1945.
134. Пановко Я. Г., Развитие прикладной теории тонкостенных стержней за последние годы, Труды ЛКВВИА, вып. 11, 1947.
135. Пановко Я. Г., О предельных состояниях цилиндрических тонкостенных конструкций, Сборник «Расчет пространственных конструкций», вып. 11, 1952.
136. Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
137. Пастушихин В. Н., Некоторые вопросы статики и динамики плоских гидротехнических затворов (канд. диссертация), МИСИ, 1954.
138. Пиковский А. А. и Михайличенко К. А., Рациональные методы расчета скатых тонкостенных стержней, Научно-технические труды, Сборник № 4, 1956.
139. Пинаджян В. В., К вопросу о несущей способности внецентренно скатых стержней стальных конструкций, ДАН Армянской ССР, т. VII, № 1, 1951.
140. Пинаджян В. В., Экспериментальное изучение действия бимоментов в коротких скатых стержнях двутаврового сечения, ДАН Армянской ССР, т. XVIII, № 4, 1954.
141. Пинаджян В. В., К вопросу о предельном состоянии коротких внецентренно скатых стержней H-образного сечения при двухосном эксцентриситете приложения силы, ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 2, 1955.
142. Пинаджян В. В., Опытное изучение деформации сечений стержня при изгибно-крутильных деформациях за пределами упругости, ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 4, 1955.
143. Проктор Г. Э., О центре изгиба, Приложение к русскому изданию книги А. Фешль и Л. Фешль «Сила и деформация», т. II, ОНТИ, 1936.

144. Пыженко И. А., К вопросу об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней, Сб. научн. трудов Магнитогор. горно-металлург. ин-та, № 7, стр. 404-412, 1954.
145. Рабинович И. М., Курс строительной механики, ч. II, 1954.
146. Работнов Ю. Н., Теория тонких оболочек (докт. диссертация), 1946.
147. Работнов Ю. Н., Курс сопротивления материалов, 1950.
148. Раевская Е. А., Расчет консольной балки двутаврового профиля методом предельного равновесия на стесненное кручение за пределом упругости, Инженерный сборник АН СССР, т. XX, 1954.
149. Раевская Е. А., Несущая способность двутавровых балок при совместном изгибе и кручении (канд. диссертация), МИСИ, 1954.
150. Репман Ю. В., Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней, Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС, 1941.
151. Рейн П. Д., О несущей способности и деформациях тонкостенных стальных балок при изгибе с кручением (канд. диссертация), МИСИ, 1954.
153. Ржаницын А. Р., Экспериментальное исследование внецентренно скатых тонкостенных стержней, Строительная промышленность, № 9, 1939.
154. Ржаницын А. Р., Сложное сопротивление тонкостенных профилей с недеформируемым контуром в пределах и за пределами упругости, Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС, 1941.
155. Ржаницын А. Р., Об определении секториальных геометрических характеристик сечения тонкостенного стержня (метод произвольных опор), Труды лаборатории стронт. механики ЦНИПС, 1941.
156. Ржаницын А. Р., Расчет металлических двутавровых балок, получивших начальное искривление в горизонтальной плоскости, 1946.
157. Ржаницын А. Р., Устойчивость тонкостенных стержней за пределом упругости, Труды лаборатории стронт. механики ЦНИПС, Стройиздат, 1949.
158. Ростовцев Г. Г., Строительная механика самолета, ОНТИ, 1936.
159. Свердлов И. А., О четырехточечном креплении консоли кессонного крыла, Труды Научно-техн. конференции ВВА им. П. Е. Жуковского, т. 2, вып. 1, 1944.
160. Соболевский Г. П., Расчет тонкостенных стержней, усиленных поперечными планками, Изв. Акад. архитектуры Укр. ССР, 1953.
161. Стельмах С. И., Испытание тонкостенных балок на изгиб и кручение, Строительная промышленность, № 9, 1939.
162. Стельмах С. И., Испытание на изгиб и кручение моделей тонкостенных балок, Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС, 1941.
163. Стельмах С. И., Ограницах применения теории Эйлера и Энгессера — Кармана в расчетах стальных стержней на устойчивость, Вестник инженеров и техников, № 2, 1952.
164. Стрельбицкая А. И., Некоторые зависимости между силовыми факторами в предельном состоянии тонкостенного профиля, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 10, 1949.
165. Стрельбицкая А. И., Предельное состояние двутаврового профиля при стесненном кручении, Там же, № 14, 1950.
166. Стрельбицкая А. И., Предельное состояние тонкостенного двутаврового кессона при сложном сопротивлении, Там же, № 15, 1951.
167. Стрельбицкая А. И., Экспериментальное исследование кручения тонкостенных балок за пределом упругости, Инж. сборник, т. 13, 1952.
168. Стрельбицкая А. И., Деформации тонкостенной консольной балки при стесненном кручении, Сб. трудов ин-та стронт. механ. АН УССР, № 16, 1952.
169. Стрельбицкая А. И., Упруго-пластическое кручение тонкостенного стержня, Изд-во АН УССР, Там же, № 17, 1952.
170. Стрельбицкая А. И., Формулы для бимоментов в упруго-пластическом состоянии двутавра, ДАН УССР, № 6, 1954 (на укр. яз.).

171. Стрельбицкая А. И., Предельные нагрузки тонкостенных балок при совместном действии изгиба и кручения, Сборник трудов ин-та стр. механики АН УССР, № 9, 1954.
172. Стрельбицкая А. И., Предельное состояние тонкостенных профилей из стали без площадки текучести при изгибе и кручении, Прикл. механ., т. I, вып. 1, Киев, изд. АН УССР, 1955 (на укр. яз.).
173. Стрельбицкая А. И., Исследование работы тонкостенного швеллерового профиля за пределом упругости, Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР, № 21, 1956.
174. Стрельбицкая А. И., Несущая способность тонкостенных стержней при сложном сопротивлении, Изд-во АН УССР, Прикладная механика, т. II, вып. 3, 1956.
175. Тер-Мкртчян А. Н., К теории устойчивости гибких стержней, Труды Тульск. механ. ин-та, № 7, стр. 182—195, 1955.
176. Тимошенко С. П., Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, Известия СПб Политехнического ин-та, т. IV—V, 1905—1906.
177. Тягунов И. А., Проверка балок на общую устойчивость по теории проф. В. З. Власова, Сборник трудов Одесского гидротехн. ин-та, вып. 6, стр. 144—154, 1954.
178. Тимошенко С. П., Об устойчивости упругих систем, Киев, 1910.
179. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, 1932.
180. Тимошенко С. П., К вопросу об устойчивости упругих систем, Изв. Киевского политехн. ин-та, 1910.
181. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1955.
182. Уманский А. А., Кручение и изгиб тонкостенных аэроконструкций, Москва, Оборонгиз, 1939.
183. Уманский А. А., О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета, Техника воздушного флота, № 12, 1940.
184. Уманский А. А., К графостатике тонкостенных конструкций, Юбилейный сборник трудов ВВА им. Н. Е. Жуковского, т. 1, 1942.
185. Уманский А. А., Расчет тонкостенных криволинейных балок, Труды научно-технической конференции ВВА им. Н. Е. Жуковского, вып. 2, т. 2, 1944.
186. Уманский А. А., О расчете плоских кривых тонкостенных стержней с конечной жесткостью свободного кручения, Труды научно-технической конференции ВВА им. Н. Е. Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944.
187. Урбан И. В., Общая форма расчета на стесненное кручение тонкостенных открытых и закрытых профилей, Труды МЭМИИТ, вып. 62, Трансжелдориздат, 1953.
188. Урбан И. В., Расчет пространственных тонкостенных конструкций, составленных из открытых и закрытых профилей, Машигиз, 1955, стр. 75—95.
189. Урбан И. В., Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций, Трансжелдориздат, 1955.
190. Фенцль А. и Фенцль Л., Сила и деформация, т. 2, Москва, ОНТИ, 1936.
191. Филоенко-Бородич М. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1949.
192. Филоенко-Бородич М. М., К задаче об устойчивости тонкого стержня в упругой среде, Исследов. по вопр. устойч. и прочн., Киев, АН УССР, стр. 52—57, 1956.
193. Цибуля Б. П., Изгиб и кручение конических оболочек типа крыла и фюзеляжа, Труды ВВА им. Н. Е. Жуковского, вып. 253, 1947.
194. Цибуля Б. П., Изгиб и кручение тонкостенных конических оболочек, Сборник «Расчет пространственных конструкций», вып. 1, под ред. А. А. Уманского, 1950.
195. Чече А. А., Применение вариационного метода проф. В. З. Власова к решению некоторых практических задач термоупругости (канд. диссертация), Белорусский политехн. ин-т им. И. В. Сталина, Минск, 1954.

196. Чобанян К. С., Устойчивость плоской формы изгиба за пределами упругости при произвольном законе упрочнения, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. 6, № 4, 1953, стр. 1—20.
197. Чувикин Г. М., Устойчивость рам и стержней, Стройиздат, 1951.
198. Чувикин Г. М., Устойчивость плоской деформации внецентренно сжатых стержней при равных главных моментах инерции сечения, Исследования по теории сооружений, VI, Госстройиздат, 1954.
199. Чувикин Г. М., Экспериментальное исследование устойчивости плоской деформации двутавровых балок за пределом упругости, Сборник «Расчет пространственных конструкций», № 4, Госстройиздат, 1957.
200. Чувикин Г. М., Устойчивость сжато-изогнутых стержней в упругой области при шарнирном закреплении концов, Труды ЦИИ Проектсталь-конструкция, вып. 1, 1957.
201. Шанишвили А. М., Расчет тонкостенных составных стержней на кручение, Сборник «Исследования по вопросам теории и проектирования тонкостенных конструкций», Стройиздат, 1950.
202. Шанишвили А. М., Применение теории В. З. Власова к расчету составных стержней, Труды Грузинск. политехн. ин-та, № 27, 1953.
203. Шанишвили А. М., К расчету центрально сжатых стальных колонн на устойчивость с учетом закручивания, Труды Грузинск. политехн. ин-та, № 33, стр. 9—13, 1954.
204. Шанишвили А. М., К расчету стальных колонн и балок с частично замкнутым контуром, Труды Грузинск. политехн. ин-та, № 4 (39), 1955.
205. Шанишвили А. М., К определению крутильной жесткости стальных колонн и балок с частично замкнутым контуром, Труды Грузинск. политехн. ин-та, № 4 (39), 1955.
206. Эблер Г., Кручение тонкостенной коробчатой балки в случае несимметричного искажения поперечных сечений. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций в самолетостроении, Сборник рефератов и переводов под ред. А. А. Уманского и П. М. Знаменского, 1937.
207. Ягя Ю. И., Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля, Гостехиздат, 1952.
208. Ягя Ю. И. и Ковалев К. Ф., Особенности стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля, Инженерный сборник, т. 24, М., изд. АН СССР, 1956.
209. Agent R., Folosirea metodei Cross in calculul plăcilor subțiri cilindrice și prismatice după teoria lui Vlasov, Industria Construcțiilor și a Materialelor de construcție, 1957, № 2, 3.
210. Austin W. J., Vegian S., Jung T. P., Lateral buckling of elastically end restrained I beams, Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1955, 81, № 673, стр. 25.
211. Bach-Baumann, Elastizität und Festigkeit, стр. 369—381 и 268—271, Berlin, 1924; VDI, 1909, т. 53, стр. 1710; VDI, 1910, т. 54, стр. 385.
212. Benscoter S. V., A theory of torsion bending for multicell beams, J. Appl. Mech., 1954, 21, № 1, стр. 25—34.
213. Boskin L., Stress analysis of open cylindrical membranes, Journal of the Aeronautical Sciences, October 1944, т. 11, стр. 348—355.
214. Bleich F. und Bleich H., Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden, Vorbericht Zweiter Kongress Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Oktober 1936, Berlin.
215. Bornscheuer F. W., Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbekinderten Querschnitt, Stahlbau, 1953, № 2, стр. 32—44.
216. Brezina V., Okrajove podminky uľohy stability tenkostennych dostredne tlacenych prutu otvoreného prerezú s jednou osou soumernosti, Inzen. stavby, 1954, 2, № 7, стр. 266—270.
217. Budiansky B., Kruszewski E. T., Transverse vibrations of hollow thinwalled cylindrical beams, Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Rept., 1953, № 1129, стр. 10.

218. Cadambe V., Kaul R. K., Torsional rigidity of narrow bars and tubes of twisted shape, *J. Scient. and Industr. Res.*, 1954, B 13, № 10, стр. 673—677.
219. Campus F. et Massonnet C., Recherches sur le flambement des colonnes etc. *Comptes Rendus de Recherches, I.R.S.I.A.*, № 17, Bruxelles, 1956.
220. Chilver A. H., The stability and strength of thinwalled steel struts, *«Engineers»*, 1953, 196, № 5089, стр. 180—184.
221. Chilver A. H., A generalised approach to the local instability of certain thin-walled struts, *Aeronaut. Quart.*, 1953, 4, № 3, стр. 245—260.
222. Conway H. D., The nonlinear bending of thin circular rods, *J. Appl. Mech.*, 1956, № 1, стр. 7—10.
223. Graemer H., Design of Prismatic Shells. *Journal of the American Concrete Institute*, 1953, т. 24, № 6.
224. Davidson J. T., Упругая устойчивость двутавровой балки при изгибе, *Proceeding Royal Society—London, A.* 1952, № 1108, стр. 80—94.
225. Drucker D. C., Onat E. T., On the concept of stability of inelastic systems, *Journal of the Aeronautical sciences*, 1954, т. 21, № 8.
226. Eggenschwyler A., Neues über Biegung und Drehung, *Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics*, 1927, стр. 484, S. B. Z.; 1929, т. 76, № 23, стр. 166; 1924, т. 83, *Bauingenieur*; 1922, № 1 u № 2, *Eisenbau*, т. 12, стр. 207.
227. Engel H. L., Goodier J. N., Measurements of torsional stiffness changes and instability due to tension, compression, and bending, *J. Appl. Mech.*, 1953, 20, № 4, стр. 553—560.
228. Esslinger M., Flambage latéral des poutres en I courbes tenant compte de la torsion de flexion, *Annales ponts et chaussées*, 1954, № 3.
229. Flint A. R., The stability and strength of stocky beams, *Journal of Mechanics and Physics of solids*, т. 1, № 2, 1953.
230. Gere J. M., Torsional vibrations of beams of thinwalled open section, *J. Appl. Mech.*, 1954, 21, № 4, стр. 381—387.
231. Goldberg John F., On the application of trigonometric series to the twisting of J-type beams, *Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, Publ. Amer. Soc. Mech. Engrs, N. Y., 1952, стр. 281—284.
232. Goodier J., Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin-Walled open section under compressive and bending loads, *Journal of Applied Mechanics*, September 1942, стр. 103—107.
233. Grassam N. S. J., The shear centre of beam sections. Experimental determination, *Engineering*, 1955, 179, № 42, 45, 46.
234. Heilig R., Verbundbrücken unter Torsionsbelastung, *Statik des torsionsbeanspruchten Durchlaufträgers*, *Stahlbau*, 1954, 23, № 2, стр. 25—33.
235. Hill H. and Clark J., Lateral buckling of eccentrically loaded I and H-Section columns. *Proceedings First. V. S. National Congress for Applied Mechanics*, 1952.
236. Horne M. R., The flexural-torsional buckling of members of symmetrical J-section under combined thrust and unequal terminal moments, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1954, 7, № 4, стр. 410—426.
237. Jennings J., Shearing stress in thin section beams, *Mech. World and Engng Rec.*, 1953, 133, № 3406, стр. 198—201.
238. Jennings J., Angle sections in bending, *Engineering* 1956, 181, № 4712.
239. Johnston B., Eney W., Kubo G., Non-uniform torsion of plate girders. *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1954, 80, № 449, стр. 28.
240. Johnson W., The effect of curvature on the centre of shear, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 1955, 59, № 536, стр. 562—565.
241. Johnson W., The twist due to bending moment in cantilevers curved in plan, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 1956, 60, № 544, стр. 277—281.
242. Kappus R., Drehknicken zentrisch gedrückten Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich, *Luftfahrt. Forschung*, 14, № 9, 1937.
243. Kappus R., Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Stäben mit offenem Profil, *Stahlbau*, 1953, № 1, стр. 5—12.

244. Kenedi R. M., Shearer Smit W., Fahmy F. O., Light structures—research and its application to economic design. *Trans. Instn Engrs and Shipbuilders Scotland*, 1955—1956, 99, № 4, стр. 207—252.
245. Kordes E. E., Kruszewski E. T., Investigation of the vibrations of a hollow thin-walled rectangular beam, *Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, 1955, № 34, 63.
246. Krishnan S., Cadambe V., A note on the minimum weight design of a thinwalled stiffened rectangular cell subjected to torsion, *Aeronaut. Soc. India*, 1955, 7, № 3, стр. 43—47.
247. Kollar L., Vékonyfalú rudak csavarása V. Z. Vlaszov elmélete szerint, *Mélyépítéstudományi szemle*, 11, Évfolyam, 5 Szám, 1952, Május.
248. Krzeminski J., Nowe metody obliczania łupin walcowych. Warszawa, 1955.
249. Kuwahara Arifumi, Investigation on the lateral buckling behavior of deep I-beams affected by end condition (4th report) *Res. Repts. Fac. Eng. Meije Univ* 1956, № 7, стр. 1—7.
250. Langhaar H. L., On torsional-flexural buckling of columns, *The Journal of the Franklin Institute*, 1953, № 2, стр. 101—112.
251. Levy M., *J. mathem. pures et appl.*, Liouville, Ser. VX, 1884.
252. Lundquist E. and Fligg M., A theory for primary failure of straight centrally loaded columns, *N. A. C. A.* № 582, 1937.
253. Maillart R., Zur Frage der Biegung, *Schweizerische Bauzeitung*, 1921, № 18, стр. 195—197.
254. Maillart R., Über Drehung und Biegung, *Schweizerische Bauzeitung*, 1922, № 20, стр. 254—257.
255. Maillart R., Der Schubmittelpunkt, *Schweizerische Bauzeitung*, 1924, т. 83.
256. Maillart R., Zur Frage des Schubmittelpunktes, *Tam же*, стр. 176—177.
257. Massonet, *L'ossature métallique*, 1947, № 7, 8, 9.
258. Matteson F., Discussion of «Non-uniform torsion of plate girders» by Gerald G'Kubo, B. G. Johnston and W. J. Eney., *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1954, 80, № 563, стр. 21—24.
259. Mc Calley A., Discussion of designing aluminium alloy member for confined end load and bending *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs*, 1954, № 429.
260. Morse W., The warping of thin shells. A method of calculation derived and applied to particular cases, *Aircraft Engng*, 1953, 25, № 291.
261. Naleszkiewicz J., Zagadnienie deplanacji wrzeczywistym ustroja cienkościennym *Inzynierial Budownictwo*, Warszawa, Marzec 1957.
262. Neal B., The lateral instability of jibbed mild steel beams of rectangular cross-sections. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, A-242, № 846, 1950.
263. Nedderman W. H., Secondary buckling in hollow rectangular column sections of steel plates, *Iowa state Coll. J. Sci.*, 1953, 27, № 2, стр. 227—228.
264. Needham R. A., The ultimate strength of multiweb box beams in pure bending, *J. Aeronaut. Sci.*, 1955, 22, № 11, стр. 781—786.
265. Nowiński J., O zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do zagadnień skręcania prętów cienkościennych, *Arch. mech. stosowanej*, 1956, т. VIII, № 1.
266. Nowiński J., O pewnych charakterystycznych punktach przekrojów dwugarow cienkościennych, *Rozpr. mat.*, 1954, 7, стр. 52.
267. Nylander H., Torsion, bending and lateral buckling of I-beams, *Kgl. tekn. högskolans handl.*, 1956, № 102, стр. 140.
268. Onat E. T., Drucker D. C., Inelastic instability and incremental theories of plasticity *Journal of the Aeronautical sciences*, 1953, т. 20.
269. Ostenfeld A., *Politeknisk Laezean stats Laboratorium for Bygningsstatik*, Meddelelse, Kopenhagen, 1931.
270. Prandtl, *Kiperscheinungen*, Nürnberg, 1899.
271. Savona J. S., The design of tee-beams, *Concrete and Constr. Engng*, 1956, 51, № 7, стр. 433—434.

Пластина ортогональная приведенная 225
 — условная 226
 Площадь секторальная 25
 Поверхность средняя 13, 39
 Полюс главный секториальный 32
 — секториальной площади 25, 32
 Полтора устойчивости изгибно-крутильная 313
 Правая задача обобщенная 340
 Привидан Даламбера 48
 — возможных перемещений 171, 335
 — Сен-Венана 10, 12, 18, 29, 152, 284, 500
 Прогиб обобщенный 177, 230

Свойство взаимности разор в инфлексии 95
 Сен-Венана гипотеза 29
 — принцип 10, 12, 18, 29, 152, 284, 500
 Силы критические Эйлеровские 314
 Система пространственная ортогональная 197
 Состояние изгибно-крутильное 16
 — изгибное 14
 — напряженное начальное от арматуры 398
 — — — от продольной нагрузки 393
 — стержня критическое 303
 Стержень изгибный тонкостенный 339
 — тонкостенный 8, 11
 — — закрытого деформируемого профиля 11,
 12
 — — — жесткого профиля 12
 — — открытого деформируемого профиля 11
 — — — жесткого профиля 11, 12, 14

Теория устойчивости Эйлера 330
 Тимошенко задача, обобщение 376, 331
 Точка секторальная начальная 25, 32
 — — нулевая 54
 — — — главная 53

Угол поворота обобщенный 250
 Уравнение Бесселя 374
 — кручения 83, 85, 271
 — Лагранжа 478
 — неразрывности деформаций 230
 — трех бимоментов 163, 164
 Уравнения изгиба и кручения стержней в упру-
 гой среде 341

Уравнения колебания стержней 430
 — критических сил и моментов 312, 335, 342,
 385, 391, 413, 414, 416
 — предельные напряженного стержня 399
 — равновесия стержня 43, 46, 49
 — свободных колебаний 430
 — устойчивости 308, 311, 312, 313, 322, 338, 330,
 333, 369, 374, 433
 — — тонкостенного стержня в упругой сре-
 де 411
 — — — закрытого профиля с жестким кон-
 туром 306, 310
 — — — открытого профиля 306, 310

Факторы изгибно-крутильные 88, 93, 152
 Формула Мора для перемещений 209
 Функции балочные 343
 — влияния 55, 200
 — напряжений 199
 — температурные 514, 519
 — фундаментальные 336, 459

Характеристики сечения геометрические 48,
 194
 — — секторальные 49, 194
 — упругие 151, 155, 271, 310, 378

Центр вращения 317
 — — мгновенный 21, 318
 — изгиба 63
 — — для двугранного сечения 68
 — — для азового сечения 72
 — — для сплошного сечения 49
 — — для таврового сечения 69
 — — для швеллера 71
 — кручения 21, 32
 — секторальной диагональю 32, 33

Частоты колебаний 338, 452
 Числа фундаментальные 338, 459

Эйлера теория устойчивости 330

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
47	В шестой строке таблицы	$-\frac{GJ_d}{E} D^2$	$-\frac{GJ_d}{E} D^2$
339	1 стр.	$-\int_0^l \chi(z)^2 dz$	$-\int_0^l (\chi')^2 dz$

В. З. Бласов, «Тонкостенные и упругие стержни»