

Министерство образования и науки Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет

Кафедра прикладной механики,
динамики и прочности машин

539.3/.6(07)
H553

А.С. Несмейнов, О.С. Садаков

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.
НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ
И ПОДХОДЫ К ИХ РЕШЕНИЮ**

Учебное пособие

2-изд., перераб. и дополненное

Допущено учебно-методическим объединением вузов по образованию в области машиностроения и приборостроения в качестве учебного пособия для студентов специальности 071100 – “Динамика и прочность машин”

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2005

УДК 539.3/.6(075.8)

Несмелянов А.С., Садаков О.С. Сопротивление материалов. Нестандартные задачи и подходы к их решению: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2001. – 96 с.

В пособии напоминаются теоретические основы и основные методы решения задач сопротивления материалов. Особое внимание уделено задачам, решение которых допускает (иногда требует) нетривиальный подход. Описаны также методы, разработанные авторами. Методы иллюстрируются примерами решений нестандартных олимпиадных задач.

Пособие предназначено студентам, изучающим сопротивление материалов, а также инженерам, пополняющим образование, и преподавателям, в частности, при проведении олимпиад.

Ил. 239, список лит. – 7 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией факультета прикладной математики и физики.

Рецензенты: Иванюк В.Х., Ильин А.В.

Издательство ЮУрГУ, 2001.
А.С.Несмелянов, О.С.Садаков, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Раздел I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	5
I. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ.....	5
I.I. Симметричные конструкции.....	5
I.2. Воздействия на конструкцию.....	6
I.3. Реакция конструкции	6
I.4. Примеры использования свойств симметрии.....	8
I.5. Скрытая симметрия	10
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	12
3. СУММИРОВАНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ	18
4. КОНСТРУКЦИИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	23
5. МЕТОД СИЛ И МЕШАЮЩИЕ СВЯЗИ.....	27
5.1. Понятие "мешающие связи"	27
5.2. Эквивалентная система в статически неопределеных задачах ...	30
5.3. Суперпозиция внутренних силовых факторов	32
5.4. Условия совместности деформаций	32
5.5. Физические уравнения	34
5.6. Каноническая система уравнений.....	35
5.7. Определение перемещений.....	37
5.8. Температурные смещения.....	41
5.9. Метод фиктивных нагрузок	42
6. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ФЕРМ	47
7. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНС- РУКЦИЙ	51
8. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ.....	59
8.1. Что такое критическая сила?	59
8.2. Как найти критическую силу?	60
8.3. Приближенный энергетический метод.....	62
9. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕ- ЛА	66
9.1. Напряженное состояние	66
9.2. Круг Мора	67
9.3. Теория деформаций	69
Раздел 2. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ	76
Раздел 3. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ	83
ЛИТЕРАТУРА	94

ВВЕДЕНИЕ

Значение курса сопротивления материалов в подготовке инженеров хорошо известно. Известно также, что в практике прочниста чаще всего встречаются нестандартные задачи, решение которых требует несколько более глубокого понимания теории, чем то, которого удается достичь в обычном процессе обучения. Об этом свидетельствуют и результаты олимпиад, где предлагаются нестандартные задачи.

Кафедрой ПМиДПМ ЮУрГУ накоплен определенный опыт несколько расширенной (в порядке факультатива) подготовки студентов. Подбор специальных задач, их обсуждение на семинарах кафедры, работа комиссии по подготовке олимпиад, работа со студентами способствовали расширению кругозора и развитию творческого подхода к решению задач. Студенты Южно-Уральского государственного университета традиционно показывают хорошие результаты на олимпиадах страны.

Впервые они принимали участие в олимпиаде в 1966 году (в рамках викторины "Знаешь ли ты сопротивление материалов?", проводимой в МВТУ кафедрой "Сопротивление материалов"). С тех пор кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин ЮУрГУ ежегодно проводит по два тура очной институтской олимпиады, с 1975 года участвует во Всероссийских и Всесоюзных олимпиадах "Студент и научно-технический прогресс", а с 1993 г. – в олимпиадах, проводимых в Российской Федерации. В 1975 году команда заняла 3-е место в Западно-Сибирской зоне (г. Омск), в 1977 г. студент ЮУрГУ Бакалинский А. занял в личном зачете 3-е место; с 1979 г. студенты нашего университета часто занимали первые места во Всероссийских олимпиадах: Швецов А. (1979 г.), Шамраков Э. (1981 г.), Чернявский А. (1982 г.), Либерман В. (1983 г.), Потапов А. (1984 г.), Абызов А. (1985 г.), Баранов С. (1987 г.), Сакулин А. (1988 г.), Лобанов О. (1989 г.), Слива О. (1990 г.), Слива О. (1993 г.), Терешин Д. (1994 г.). Гун А. занял в 1996 г. 3-е место.

На Всесоюзном уровне студенты ЮУрГУ выступали довольно успешно: Абызов А. (1985 г.) – 3-е место, Баранов С. (1987 г.) и Лобанов О. (1989 г.) – 1-е места, Слива О. (1990 г.) – 3-е место, Лобанов О. (1991 г.) – 1-е место. В последнее десятилетие проводятся олимпиады стран СНГ, в которых наши студенты выступали также удачно: Слива О. (1993 г.) – 1-е место, Соколов В. (1997 г.) – 3-место, Борозенец А. (1998 г.) – 7-е место, Савиных А. (2000 г.) – 3-е место, Форенталь М. и Перевалов В. (2001 г.) – поделили два вторых места.

При подготовке студентов к олимпиадам на кафедре работает семинар по решению нестандартных задач. Используются методические разработки МГТУ, ГПИ и других вузов. В настоящее время накоплено значительное количество новых олимпиадных задач, разработанных сотрудниками ЮУрГУ, а также решений известных задач нетрадиционными методами. В предлагаемом пособии обобщаются результаты этой деятельности кафедры ПМиДПМ ЮУрГУ.

В пособии выделены девять наиболее актуальных теоретических разделов. В каждом дается краткий обзор основных идей теории, иллюстрированный приме-

рами. Приведены решения некоторых задач нетривиальными методами, а также собраны задачи, представляющие, на наш взгляд, наибольший методический интерес. Полагаем, что данное пособие окажется полезным не только студентам, но и преподавателям и, возможно, профессиональным расчетчикам.

Авторы будут благодарны читателям за любые замечания и предложения. Их можно направить по адресу: 454080, г.Челябинск, проспект им. В.И.Ленина, 76, ЮУрГУ, кафедра "Прикладная механика, динамика и прочность машин" или по электронной почте – sadakov@sopro.susu.ac.ru.

Раздел 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Основы механики и методы сопротивления материалов, используемые для решения задач прочности конструкций, излагаются в соответствующих учебниках и мы полагаем, что читатели знакомы с ними. Однако для практического применения методов такое знакомство часто оказывается недостаточным; это обнаруживается при решении нетиповых задач. Поэтому мы включили небольшой теоретический раздел, который, не повторяя учебников, выделяет некоторые важные особенности известных методов и в ряде случаев несколько выходит за рамки обычных курсов сопротивления материалов. Приведенные здесь тематические разделы поясняются примерами.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ

Элементы большинства конструкций обладают теми или иными свойствами симметрии; эти свойства существенно влияют на результаты расчетов. Роль симметрии часто (даже в учебниках) недооценивают, хотя использование ее свойств иногда в несколько раз сокращает трудоемкость расчетов. Поэтому обзор методов решения задач мы начинаем с этой темы.

1.1. Симметричные конструкции

Видов симметрии довольно много; мы будем говорить лишь о трех:

- зеркальная,
- осевая (кратности k),
- сдвиговая (с шагом h).

Конструкция зеркально симметрична относительно плоскости A , если ее одна половина, отражаясь в плоскости A как в зеркале, совпадает с другой (рис.1.1).

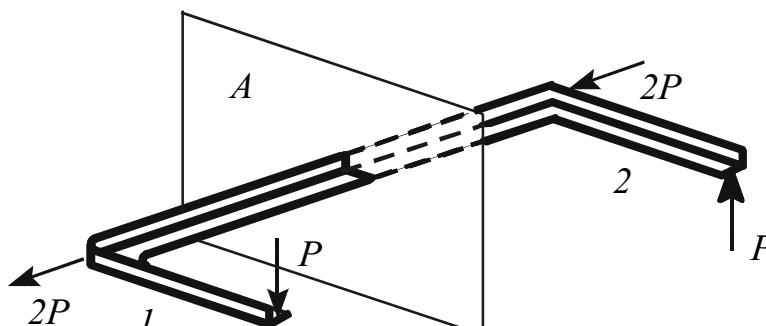


Рис.1.1

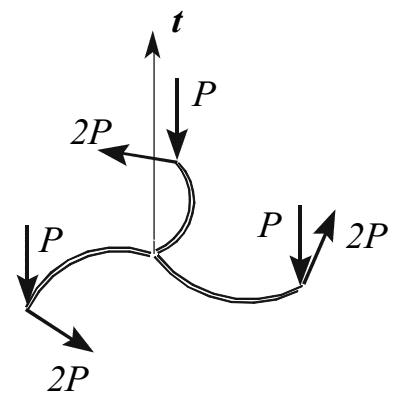


Рис.1.2

Такое отражение (мысленную замену местами половин конструкции) будем называть движением симметрии.

При осевой симметрии относительно оси t (см., например, рис.1.2) кратности $k \neq 1$ движением симметрии является поворот всей конструкции вокруг оси t на угол $2\pi/k$ (симметрия на рис.1.2 отвечает кратности $k=3$). Если конструкция при

таком движении совпадает со своим исходным положением, то она обладает этим свойством симметрии. Симметрию кратности $k=2$ обычно называют просто осевой симметрией.

В случае совпадения конструкции со своим исходным положением при сдвиге в направлении t на величину h система обладает сдвиговой симметрией (параметры симметрии: t, h). Например, бесконечный прямой стержень постоянного поперечного сечения симметричен относительно сдвига вдоль своей оси на произвольную величину h .

Возможно, следует уточнить: в симметричной конструкции в каждой паре (тройке и т.д.) симметричных точек механические свойства должны также совпадать (а в случае векторных свойств – быть симметричными, то есть векторы должны совпадать при движении симметрии).

1.2. Воздействие на конструкцию

Воздействие на симметричную конструкцию может быть симметричным, кососимметричным или несимметричным. Симметричное воздействие не изменяется при движении симметрии (когда вместе с конструкцией движутся нагрузки, температуры и другие виды воздействия). Кососимметричное при движении симметрии меняет знак. Если воздействие асимметрично (ни симметрично, ни кососимметрично), то его всегда можно представить в виде суперпозиции симметричного и кососимметричного. На рис.1.1 для примера показана кососимметричная нагрузка, на рис.1.2 – симметричная. Опоры на рис.1.1, 1.2 не показаны (чтобы не затенять рисунки); они должны отвечать симметрии конструкции.

Заметим: кососимметричным может быть только воздействие, но не конструкция. Анализ симметрии нагрузки на несимметричную конструкцию не имеет смысла.

1.3. Реакция конструкции

Классическая механика (в частности, сопротивление материалов) содержит принцип детерминизма: одинаковые воздействия на одинаковые конструкции вызывают одинаковые реакции. Принцип этот кажется очевидным, однако даже в курсе сопротивления материалов мы сталкиваемся с нарушением этого принципа – когда рассматриваем задачи о потере устойчивости. К ним этот принцип не применим: он относится только к устойчивым системам.

С небольшой оговоркой принцип детерминизма относится к предельному равновесию идеально пластических тел. Строго говоря, последние не относятся к устойчивым, а занимают промежуточное положение (безразличное равновесие). При кинематическом нагружении они ведут себя как устойчивые, при силовом – тоже, пока не выйдут в состояние предельного равновесия. Здесь их движение неоднозначно, хотя значение предельной нагрузки детерминировано.

Из этого принципа легко получить закон симметричного действия:

- *при симметричном воздействии (напомним, на симметричную конструкцию) реакция конструкции симметрична.*

Под реакцией мы понимаем все интересующие нас параметры: силы, напряжения, смещения, деформации, энергию и т.п. Понятие симметрии остается

прежним: совпадает при движении симметрии. Заметим: закон симметрии верен для устойчивых симметричных конструкций независимо от свойств материала. При определении предельной нагрузки в идеально пластических конструкциях можно не рассматривать несимметричные пластические механизмы.

С кососимметричным воздействием ситуация несколько сложнее. В отличие от симметричного, реакция на кососимметричное воздействие зависит от механических свойств материала конструкции. Если свойства материала таковы, что с изменением знака напряжения изменяется только знак деформации, то эти свойства называются нечетными. Нечетными являются свойство линейной упругости, идеальной пластичности – если пределы текучести на растяжение и сжатие одинаковы. Реальные пластические тела при невысоких уровнях деформации также обладают нечетными деформационными свойствами. Закон косой симметрии относится только к конструкциям из нечетного материала. Хрупкие тела часто не являются нечетными: пределы прочности при растяжении и сжатии обычно различаются.

Закон косой симметрии имеет вид:

- *реакция симметричной конструкции из нечетного материала при кососимметричном воздействии кососимметрична.*

Добавим, что это справедливо лишь при бесконечно малых смещениях. В геометрически нелинейных задачах принцип косой симметрии неверен.

Если материал является линейно упругим (справедлив закон Гука), то, с одной стороны, свойства материала нечетны и справедлив закон косой симметрии. С другой стороны, тогда справедлив принцип суперпозиции. Последнее приводит к тому, что и при несимметричном воздействии на симметричную конструкцию расчет может быть ускорен. Разделив воздействие на симметричное и кососимметричное (первое – полусумма двух воздействий: до

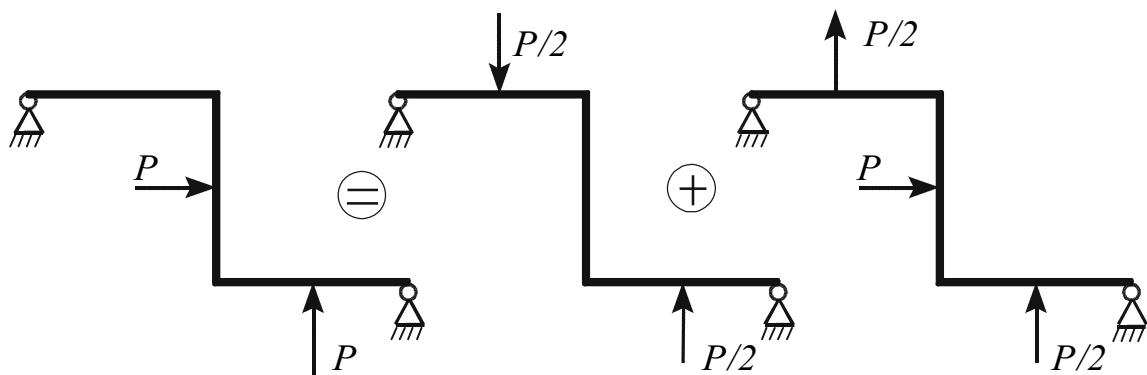


Рис.1.3

движения симметрии и после него; второе – их полуразность), можно решить две задачи: симметричную и кососимметричную и полученные реакции сложить. Пример разложения нагрузок на симметричную конструкцию показан на рис.1.3 (осевая симметрия, ось перпендикулярна плоскости чертежа).

Следует подчеркнуть, что понятие симметричности или кососимметричности не относится к терминам, для которых введены условные правила знака. Например, в симметричной задаче поперечная сила может изменять знак при движении

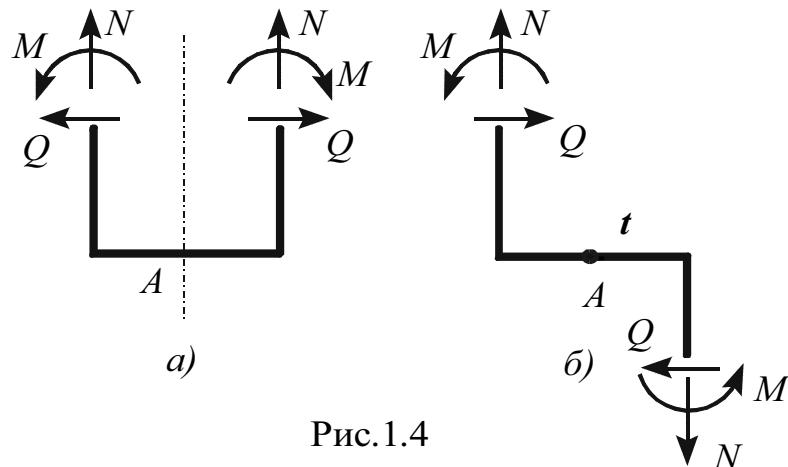


Рис.1.4

симметрии (т.е. вести себя как кососимметричный объект). Иногда говорят поэтому, что "поперечная сила – кососимметричный внутренний силовой фактор, а нормальная сила – симметричный". Это, однако, зависит от задачи. На рис.1.4а (зеркальная симметрия относительно плоскости A) поперечная сила, чтобы быть симметричной, должна менять знак; на рис.1.4б (осевая симметрия, ось t) – нет.

1.4. Примеры использования свойств симметрии

В теоретическом анализе и при решении конкретных задач сопротивления материалов свойства симметрии используются весьма широко, хотя и не всегда явно. Например, при получении выражений обобщенного закона Гука не принято обсуждать вопрос, почему при одноосном напряженном состоянии главные оси деформаций совпадают с главными осями напряжений, почему при нагружении чистого сдвига не возникает линейных деформаций в направлении сдвига и в поперечном направлении, или не возникает сдвигов в других направлениях. Может создаться впечатление (а иногда в учебнике об этом говорится прямо), что таковы экспериментальные данные. Однако нетрудно показать, что это – следствие принципов прямой и косой симметрии – и потому справедливо только в случае изотропного материала.

Гипотеза плоских сечений при чистом изгибе и растяжении следует из закона плоских сечений (для бесконечного прямого стержня постоянного поперечного сечения), который строго доказывается из симметрии задачи: а) зеркальной – относительно произвольного поперечного сечения и б) сдвиговой, упомянутой выше. Отсюда же следует отсутствие касательных напряжений в поперечном сечении, соответствующих сдвигов, напряжений в продольных сечениях. И, очевидно, эти свойства сохраняются за пределами упругости.

При кручении стержня круглого поперечного сечения (цилиндр, труба) обнаруживается пять видов симметрии, которые определяют поле тензора деформации в трубе с точностью до одного множителя:

- а) Осевая симметрия относительно продольной оси стержня, кратности $k=\infty$ (т.е. поворот на произвольный угол не меняет ситуации). Значит, напряжения и деформации не зависят от угловой координаты.
- б) Осевая симметрия относительно поперечной оси, кратности $k=2$. Отсюда следует прямолинейность диаметров, плоскостность поперечных сечений, отсут-

ствие радиальных касательных напряжений в поперечных и продольных (диаметральных) сечениях и соответствующих сдвигов.

в) Сдвиговая симметрия (вдоль оси стержня) – неизменность параметров вдоль оси, отсутствие окружных нормальных напряжений.

г) Зеркальная косая симметрия относительно продольного сечения – отсутствие нормальных продольных и радиальных напряжений.

д) Зеркальная косая симметрия относительно поперечного сечения (по оси стержня) – отсутствие окружных нормальных напряжений и соответствующих деформаций.

В связи с этой задачей полезно отметить особенность зеркального отражения вектора момента. Последний представляет по определению результат векторного произведения вектора плеча на вектор силы. В определении же векторного произведения входит несимметрия относительно того, в какой системе координат (правой или левой) последнее определяется. Но при зеркальном отражении правая и левая системы координат меняются местами. Поэтому при отражении вектора момента к обычному отражению в зеркале стрелки (если она параллельна зеркалу, то ее направление не меняется, если перпендикулярна – то меняется на обратное) необходимо добавить замену направления на обратное (рис.1.5а, векторы a , b , c , после отражения относительно плоскости A переходят в a' , b' , c'). На рис.1.5б показан случай кручения прямоугольного стержня, T – вектор крутящего момента. Если не учитывать отмеченную особенность, то данный вид нагружения покажется зеркально симметричным. В действительности здесь симметрия косая, а поперечное сечение оказывается неплоским.

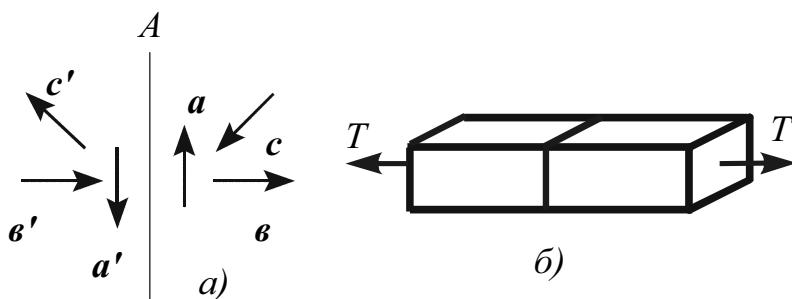


Рис.1.5

Отметим любопытный случай неявного использования свойств симметрии, который представляют статически неопределенные плоские рамы (плоскость, в которой лежит осевая линия рамы, обозначим A). Если ось симметрии поперечного сечения такой рамы лежит в плоскости A , то рама оказывается зеркально симметричной относительно этой плоскости. Если нагрузка тоже симметрична (все силы и пары сил лежат в плоскости A), то задача зеркально симметрична относительно A и из шести внутренних силовых факторов в сечении три («из плоскости») равны нулю по условиям симметрии. Если силы перпендикулярны плоскости A (задачу при этом иногда называют плоско-пространственной), то задача оказывается зеркально кососимметричной и, соответственно, равны нулю внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы.

Так и принято решать задачу, не задумываясь о причинах. Однако в задаче, показанной на рис.1.6, поперечное сечение (уголок) несимметрично относительно плоскости A и в сечениях следует рассматривать все шесть внутренних силовых факторов (хотя с учетом другой симметрии степень статической неопределенности в этой задаче равна только трем). Ситуацию несколько изменяет тот факт, что на

деформационные свойства рамы влияет не форма поперечного сечения, а его геометрические характеристики. Так, в случае, приведенном на рис.1.7 (поперечное сечение – равносторонний или даже равнобедренный треугольник), симметрия относительно плоскости A

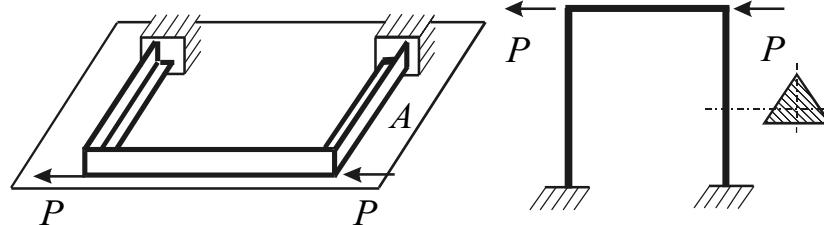


Рис.1.6

Рис.1.7

отсутствует, но главные оси сечений лежат в плоскости A (или ей перпендикулярны), и рама работает подобно симметричной относительно A . Этую задачу можно также отнести к группе, выделенной в следующем параграфе.

1.5. Скрытая симметрия

Конструкция может быть формально несимметричной, но симметричной по сути (или по используемым методам решения). Полезно учитывать симметрию и

в этих случаях.

Простейший пример дан на рис.1.8. Здесь симметрию нарушает лишняя связь на левой опоре. Однако легко видеть, что реакция связи равна нулю. Задача не изменится, если связь убрать, но тогда она станет симметричной. Так и следует ее решать.

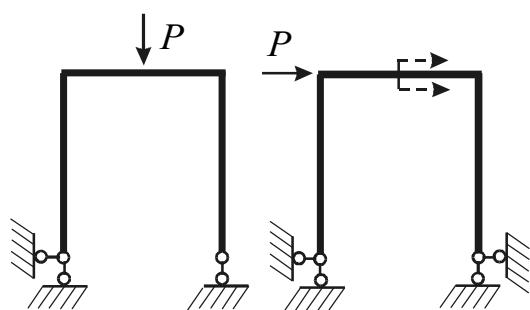


Рис.1.8

Рис.1.9

Более сложна ситуация на рис.1.9. Она отличается от кососимметричной только из-за переноса силы из положения, показанного штриховой стрелкой. Но при таком переносе изменится лишь эпюра нормальной силы N . При раскрытии статической неопределенности эпюра N не участвует (это эквивалентно допущению о бесконечной жесткости стержня на растяжение или сжатие – в отличие от жесткости на изгиб). Точка приложения силы на горизонтальном участке не влияет на эпюру изгибающих моментов. Поэтому при раскрытии статической неопределенности можно принять, что сила приложена в плоскости (или на оси) симметрии и задача кососимметрична. Но при построении эпюр внутренних силовых факторов верните силу на место!

Аналогичная ситуация встречается в задаче 12 (см. раздел 3). Другой тип скрытой симметрии иллюстрирует задача на рис.1.10.

Приведенная пространственная рама несимметрична, но может быть мысленно разделена на две плоские рамы, по два участка каждая. Одна из них статически определима и внутренние силовые факторы находятся методом сечений. Вторая – в плоскости A – кососимметрична относительно этой плоскости. Отсюда следует, что опорные реакции в свя-

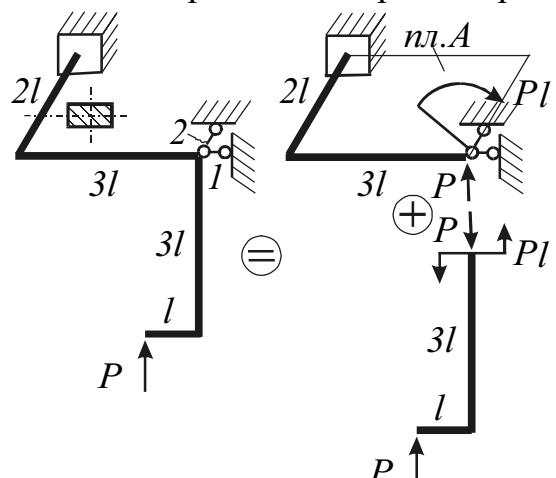


Рис.1.10

зах 1, 2 равны нулю, значит, и эта часть задачи (и вся задача в целом) оказывается статически определимой.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

При решении задач механики деформируемого тела сочетают три аспекта:

- статический (условия равновесия: силы и напряжения, иногда в сочетании с "силами" Д'Аламбера);
- геометрический (деформации, смещения и условия неразрывности последних, накладываемые на поля деформаций);
- физический. Если два первых аспекта не зависят от свойств рассматриваемого тела, то физический представляет связь между напряжениями и деформациями, силами и смещениями, зависящую от свойств упругости или неупругости, от тепловых деформаций. В том числе, здесь рассматриваются вопросы прочности.

Этими аспектами исчерпывается механика: все разрешающие выражения находят отсюда. Но часто весьма полезен еще один аспект, который не следует считать независимым от названных – *энергетический*. Например, решение задач устойчивости трудно представить без анализа преобразования энергии в процессе деформирования. К сожалению, этот аспект осваивается студентами с большим трудом.

Весьма широко в механике используется так называемый принцип возможных перемещений (принцип виртуальных работ, виртуальных мощностей). Этот принцип (ПВП) имеет видимость энергетического, однако, как следует из его вывода (он доказывается в теории упругости), ПВП представляет следствие условий статики и геометрии и не имеет отношения к физическим свойствам рассматриваемого тела. Важно помнить, что ПВП может относиться не только к упругим, но и к вязким и пластическим телам.

В соответствии с этим принципом:

если система тел находится в равновесии, то при любых (виртуальных, бесконечно малых) смещениях системы, разрешенных наложенными связями, работа внешних сил (δW) равна работе (виртуальной) деформирования. Последняя представляет собой интеграл по объему тела произведения действительных (связанных условиями равновесия с внешними силами) напряжений и виртуальных деформаций:

$$\delta W = \sum_i P_i \delta u_i = \delta W' = \int_v \sigma \delta \varepsilon dV. \quad (2.1)$$

Если в качестве виртуальных смещений задаются смещения, не связанные с деформацией ($\delta \varepsilon = 0$), то $\delta W' = 0$ и виртуальная работа внешних сил также равна нулю.

В стержневых деформируемых конструкциях, которыми, собственно, и занимается сопротивление материалов, работу деформирования вычисляют интегрированием не по объему, а по длине, то есть

$$\delta W' = \int_L \Phi \delta D dz, \quad (2.2)$$

где L – суммарная длина стержней конструкции, Φ – внутренний силовой фактор, D – деформация осевой линии, dz – элемент длины последней. Параметры Φ и D – это сопрягающиеся пары значений: N и ε_0 (нормальная сила и вытяжка осевой линии), M_x и χ_x , M_y и χ_y (изгибающие моменты и кривизны осевой линии), T и θ (крутящий момент и крутка осевой линии). В задачах эти силовые факторы обычно встречаются по отдельности, а если вместе, то правая часть выражения (2.2) представляет сумму соответствующих слагаемых. Априорно мы используем запись (2.2), рассматривая ее как символическую.

ПВП лежит на границе статики и геометрии: он может заменить условия равновесия (что чаще всего и делают), если задавать совместные деформации и смещения. И наоборот, ПВП может заменить условия совместности смещений и деформаций, если мы хорошо знаем систему внешних и внутренних сил, удовлетворяющих условиям равновесия. Именно эта сторона ПВП будет использована ниже для получения «канонических» разрешающих уравнений при раскрытии статической неопределенности задач методом сил (п.5.4).

Пример 1. Абсолютно жесткое тело на рис.2.1 может смещаться только вдоль оси x . Следовательно, работа всех приложенных к нему сил (на рисунке не показаны) на смещении δu вдоль оси x равна нулю. Поскольку работа силы есть произведение силы на путь и на косинус угла между ними, из ПВП получим, что сумма проекций на ось x всех сил, приложенных к телу, равна нулю (известное условие равновесия).

Пример 2 (рис.2.2). Тело в плоскости $\{x,y\}$ вращается вокруг оси z . Как в данный момент связаны угловая скорость тела и горизонтальная составляющая скорости точки A ?

Решение. Приложим в точке A горизонтальную силу P (рис.2.3). Чтобы тело находилось в равновесии, необходимо приложить к нему пару сил с моментом $M=2Pl$. Применим ПВП: на мгновенном смещении (поворот тела вокруг опоры

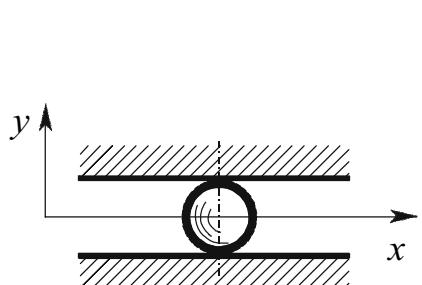


Рис.2.1

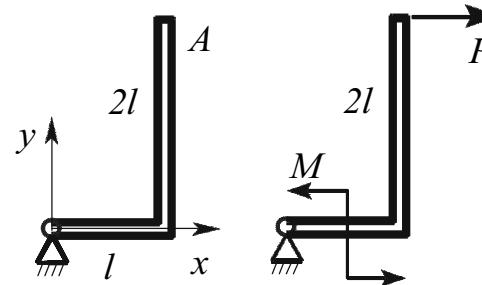


Рис.2.2

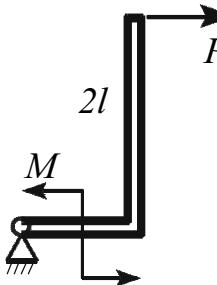


Рис.2.3

на угол ωdt , горизонтальная составляющая смещения точки A равна $v dt$) работа внешних сил $M \omega dt - P v dt$ равна нулю. Следовательно, $v = 2\omega l$.

Пример 3. Пусть

в задаче, показанной на рис. 2.4, требуется найти реакцию опоры A . Снимем опору и заменим ее реакцией (рис.2.5). Закрепленная конструкция превратилась в механизм (может двигаться без деформаций). Рассмотрим такое виртуальное (малое!) движение – показано на рис.2.5 штриховой линией. Точки B и C смещаются по горизонтали на одинаковую величину (обозначим ее Δ), вертикальные стержни

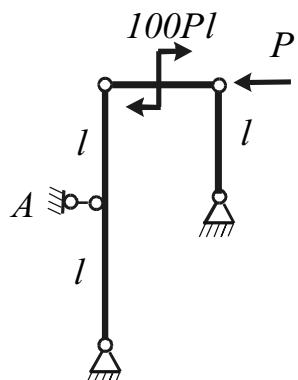


Рис.2.4

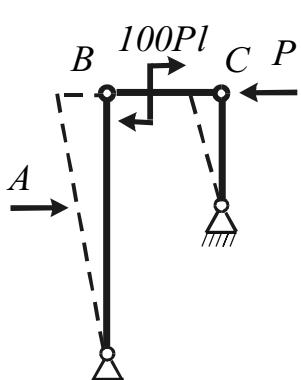


Рис.2.5

поворачиваются, горизонтальный – нет. Поэтому виртуальная работа пары сил $100Pl$ равна нулю. Работа остальных сил ($P\Delta - A\Delta/2$), в соответствии с ПВП, также равна нулю. Отсюда $A=P/2$.

Пример 4. Принцип возможных перемещений можно использовать и для определения внутренних силовых факторов. Пусть, например, требуется определить усилие в стержне I фермы (рис.2.6).

Решение. Разрежем стержень I и заменим связь внутренним усилием (рис.2.7). Конструкция превратилась в механизм, а силы N_I стали внешними. Считая все элементы жесткими, зададим точке C смещение Δ в направлении оси x . Таким же будет и горизонтальное смещение точки B . Анализируя движение жесткого тела ABC (вращение вокруг мгновенного центра A'), найдем, что полное смещение точки A меньше, поскольку расстояние $A'A$ меньше $A'C$ – в $\sqrt{2}$ раз. Значит, горизонтальное смещение точки A меньше Δ вдвое. Работа внешних сил (P, N_I) на этом движении должна быть равна нулю, откуда $N_I = P/2$ (растяжение).

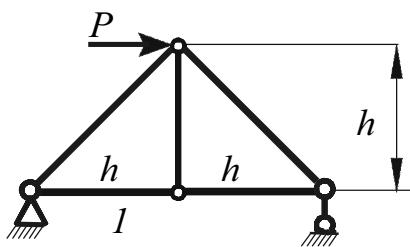


Рис.2.6

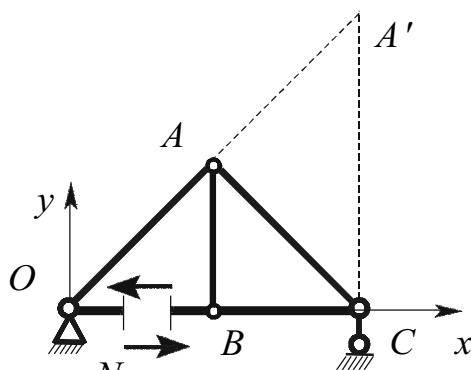


Рис. 2.7

ПВП ($\delta W=\delta W'$) можно записать в виде $\delta W/2=\delta W'/2$. Такой вид полезен, если рассматривается упругая конструкция, а в качестве виртуальных используются действительные смещения и деформации (мы их гипотетически полагаем бесконечно малыми, что позволяет считать их возможными). Энергия деформирования превращается в потенциальную энергию упругих деформаций ($\int \sigma^2/(2E)dV + \int \tau^2/(2G)dV = E\varepsilon^2/2dV + G\gamma^2/2dV$, где σ и τ – действующие напряжения в теле, E, G – модули упругости материала при растяжении-сжатии и сдвиге), а виртуальная работа внешних сил – в действительную – на всем процессе деформирования от нулевых значений сил до их конечных значений. Естественно, смещения в этом процессе растут пропорционально силам, откуда и получаем работу в виде $P\Delta/2$.

В случае линейной упругости тела (и только в этом случае!) при малых смещениях и деформациях из ПВП следует принцип взаимности работ, весьма полезный для решения некоторых задач деформирования упругих тел.

Рассмотрим два различных состояния одного и того же тела при одинаковых

условиях закрепления, но при разных системах внешних сил: $\{P_1\}$ и $\{P_2\}$. Каждая из них приводит к своим напряжениям $\{\sigma_1\}$ и $\{\sigma_2\}$, деформациям $\{\varepsilon_1\}$ и $\{\varepsilon_2\}$, и смещениям $\{u_1\}$ и $\{u_2\}$, которые являются действительными для своей системы сил и возможными – для другой. Пусть W_{12} – работа первой системы сил на смещениях от второй, W_{21} – наоборот. Из ПВП следует:

$$W_{12} = W'_{12} = \int \sigma_1 \varepsilon_2 dV, \quad W_{21} = W'_{21} = \int \sigma_2 \varepsilon_1 dV.$$

Но если $\sigma = E\varepsilon$, то $\sigma_1 \varepsilon_2 = E\varepsilon_1 \varepsilon_2 = E\varepsilon_2 \varepsilon_1 = \sigma_2 \varepsilon_1$ и интегралы в этих выражениях равны. Естественно, то же справедливо и для напряжений сдвига, и при произвольном напряженном состоянии. Таким образом, $W'_{12} = W'_{21}$ и $W_{12} = W_{21}$.

Пример 5 (рис.2.8). Пусть требуется найти изменение площади поверхности пластины толщиной h , нагруженной силами P . Эта задача впрямую не может быть решена методами сопротивления материалов, но можно использовать принцип взаимности работ. Рассмотрим другое состояние пластины – под действием равномерного давления q по контуру (рис.2.9). В соответствии с принципом взаимности работ, $W_{qp} = W_{pq}$, где W_{qp} – работа нагрузки q на перемещениях, вызванных силами P ($W_{qp} = qh\Delta S_p$, здесь ΔS_p – изменение площади пластины под действием силы P), а W_{pq} – работа сил P на перемещениях, вызванных нагрузкой q ($W_{pq} = P\Delta l_q$, где Δl_q – изменение длины отрезка l между точками приложения сил P от давления q).

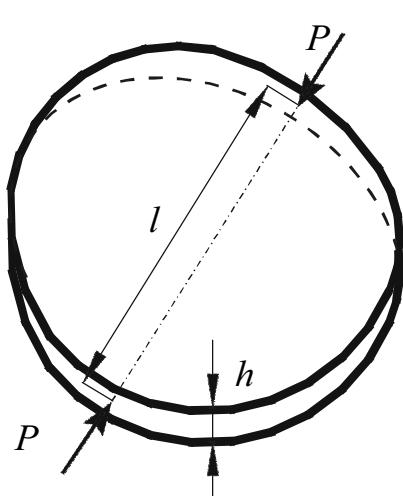


Рис. 2.8

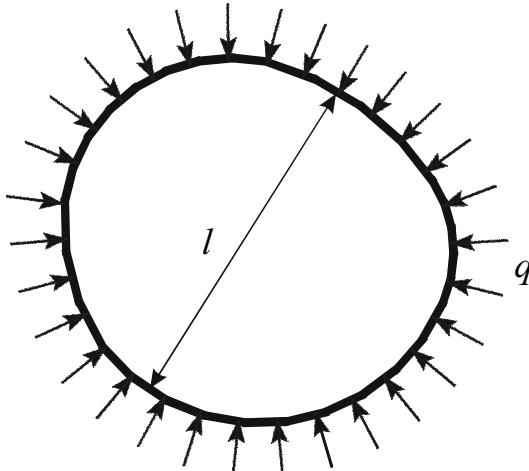


Рис. 2.9

В связи с тем, что при нагружении пластины давлением q в ней реализуется однородное плоское напряженное состояние $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -q$, найдем, в соответствии с законом Гука,

$$\Delta l_q = -ql(1 - \mu)/E.$$

Здесь E , μ – модуль

упругости и коэффициент Пуассона материала пластины. В итоге

$$\Delta S_p = -Pl(1 - \mu)/(Eh).$$

К одному из важнейших следствий ПВП относят интеграл Мора. Для его получения достаточно полагать, что действительные смещения (естественно, не бесконечно малые) можно считать возможными, то есть бесконечно малыми. Так и полагают, это – одно из главных допущений сопротивления материалов (и не только этой науки). В рассмотрение вводится вспомогательная (фиктивная) задача: та же конструкция при тех же связях, но внешняя нагрузка заменена единичной силой (если мы ищем линейное смещение) или единичным моментом, если

ищем угловое смещение, и т.д. Подставив в ПВП внешние и внутренние силы из вспомогательной задачи, а в качестве возможных смещений и деформаций – действительные смещения и деформации из исходной задачи, получим

$$\Delta = \int_L \Phi^{sc} D dz, \quad (2.3)$$

где Δ – виртуальная работа фиктивной внешней нагрузки (она же – искомое смещение), Φ^{sc} – внутренние силовые факторы во вспомогательной задаче, а D – деформации осевой линии конструкции, которые и приводят к появлению смещения Δ . Если речь идет об упругих деформациях, то $D = \Phi / K$ (закон Гука для элемента длины стержня), если о тепловых – то D представляет либо удлинение осевой линии $\varepsilon_0^T = \alpha T$ (T – изменение температуры, α – коэффициент теплового расширения), либо тепловую кривизну $\chi_x^T = -\alpha \text{grad}_y T$ (χ_x – искривление стержня относительно оси x , $\text{grad}_y T$ – градиент, или скорость роста температуры с возрастанием координаты y рассматриваемой точки). В общем случае – это сумма

$$D = \Phi / K + D^T + D^0, \quad (2.4)$$

где D^0 – монтажная деформация осевой линии или деформация, связанная с неточностью изготовления стержня или пластическая деформация.

Из ПВП с легкостью следует обобщение метода Мора на случай, когда, кроме деформации осевой линии, происходит смещение опор. Перед записью выражения для работы фиктивных внешних сил во вспомогательной задаче следует удалить все смещающиеся опоры и соответствующие опорные реакции R_i^{sc} (i – номер связи) рассматривать также как фиктивные внешние силы (их величины находятся из условий равновесия). В итоге получим обобщение выражения (2.3):

$$\Delta = \int_L D \Phi^{sc} dz - \sum_{i=1}^n \Delta_i R_i^{sc} \quad (2.5)$$

Здесь Δ_i – смещение i -й опоры.

Пример 6 (рис.2.10а). Требуется найти горизонтальное смещение точки A статически определимой рамы (ЭМ показана на рис.2.10б), все опоры которой могут смещаться на величины δ_i (а могут и не смещаться, если соответствующее $\delta_i = 0$).

Решение. Для решения рассматриваем вспомогательную задачу: та же рама без внешней нагрузки, с горизонтальной единичной силой, приложенной в точке A . Снимаем все связи, которые могут смещаться и заменяем их реакциями R_i^{sc} (рис. 2.10в). Это – механизм с 4 степенями свободы; соответствующие условия равновесия имеют вид:

$$1 - R_2^{sc} - R_3^{sc} - R_4^{sc} = 0, \quad R_1^{sc} = 0, \quad R_2^{sc} = 0, \\ \sum M_A = (R_2^{sc} + R_3^{sc}) \cdot 2l + R_4^{sc} \cdot 4l = 0.$$

Находим: $R_1^{sc}=0$, $R_2^{sc}=0$, $R_3^{sc}=2$, $R_4^{sc}=-1$. Эпюра ЭМ^{sc} показана на рис.2.10г.

В соответствии с ПВП работа внешних сил, показанных на рис.2.10в, на смещениях в исходной задаче (рис.2.10а) равна работе деформирования (работе

внутренних сил M^{sc} на деформациях в задаче рис.2.10а). Деформации в задаче рис.2.10а находятся по изгибающим моментам (рис.2.10б). Отсюда и следует выражение (2.5). В итоге получим

$$I \cdot u_A + \sum R_i \delta_i = u_A + 2\delta_3 - \delta_4 = \int_{14} MM^{sc}/(EI) dz = 4Pl^3/(EI).$$

Отсюда искомое перемещение точки A равно

$$u_A = 4Pl^3/(EI) - 2\delta_3 + \delta_4.$$

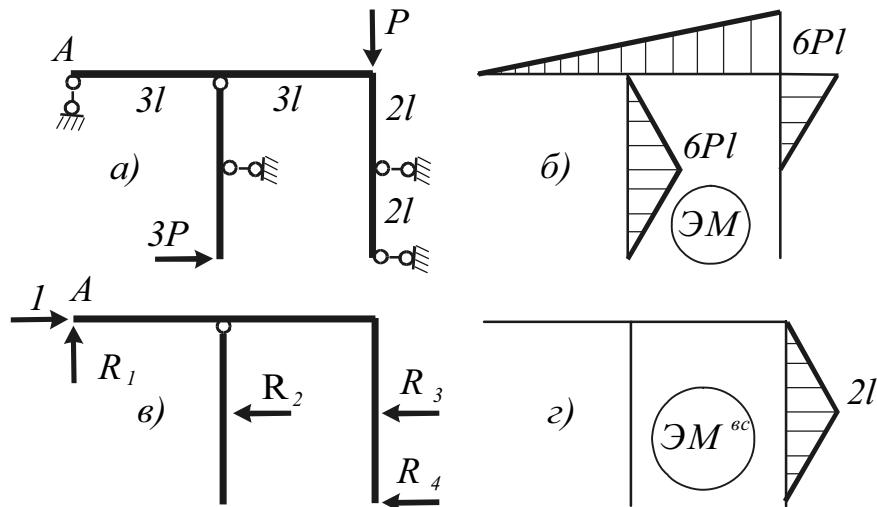


Рис.2.10

Решите следующие задачи

Задача 1. Сопоставьте изменение объемов шара и куба (рис.2.11).

Задача 2. Определите изменение объема внутри тонкостенной сферической оболочки при нагружении ее тремя сосредоточенными силами, действующими в одной плоскости (рис.2.12).

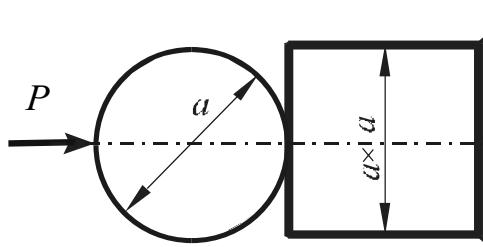


Рис.2.11

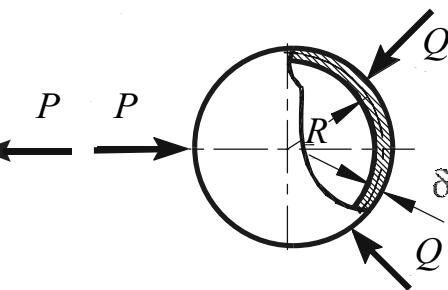


Рис.2.12

3. СУММИРОВАНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ

На науку сопротивления материалов, рассматривающую преимущественно работу упругих стержневых конструкций, существует и такой взгляд: это наука о суммировании жесткостей. Этот взгляд может оказаться полезным, в частности, при расчете статически неопределенных конструкций.

В расчетной модели конструкции (да и любой ее части) есть переменные параметры – напряжения, деформации, силы, перемещения, внутренние силовые факторы и деформации осевой линии – и постоянные характеристики конструкции – жесткости, связывающие силовые параметры с геометрическими (кинематическими). Закон Юнга ($\sigma = E\varepsilon$) в качестве параметра жесткости содержит модуль Юнга; нормальная сила связана с деформацией осевой линии (ее вытяжкой) коэффициентом жесткости поперечного сечения ES ; другие жесткости сечения – EI_x , EI_y , GI_k – связывают аналогично другие внутренние силовые факторы и соответствующие виды деформации осевой линии. Наконец, внешние силы и перемещения точек конструкции (линейные или угловые) связаны ортодоксальным законом Гука: "какова сила – таково перемещение" – через соответствующие коэффициенты жесткости, которые определяются методами сопротивления материалов (например, с помощью интеграла Мора). Универсальные методы расчета не выделяют (нет необходимости) закономерностей расчета коэффициентов жесткости, но еще из школы студенты знают, что при параллельном соединении упругих элементов их жесткости складываются, а при последовательном – складываются их податливости (величины, обратные жесткостям). Многие задачи сопротивления материалов могут решаться на основании этих теорем весьма эффективно. Только не всегда легко определить, когда соединение параллельное, а когда – последовательное.

Общее правило таково: в первом случае нагрузка распределяется (частями, пропорциональными жесткостям) по всем элементам, которые испытывают одинаковые смещения точки приложения нагрузки. В случае последовательного соединения одна и та же нагрузка последовательно передается всем элементам, а смещение точки приложения нагрузки суммируется из деформаций всех элементов.

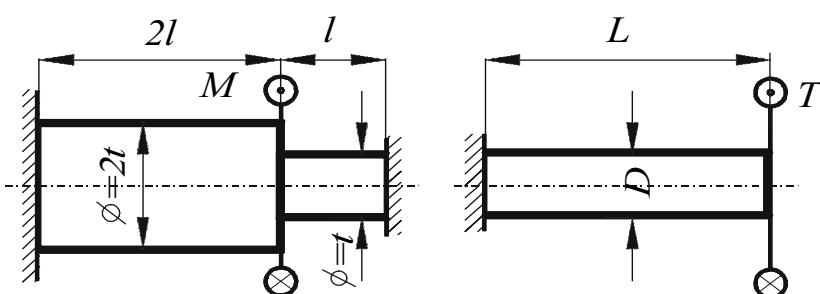


Рис.3.1

Рис.3.2

Простейший пример показан на рис.3.1. Эта статически неопределенная задача легко решается стандартным методом, но сейчас ее полезно рассмотреть как задачу о закручивании двух валов (длиной $2l$ и l). Жесткость вала при кручении (рис.3.2), как известно,

есть $GI_p/L = 0.1D^4/L$; именно этот коэффициент связывает крутящий момент T с поворотом крайнего сечения (L – длина вала, D – его диаметр). В задаче на рис.3.1 жесткость левого стержня $c_l = 0,1(2t)^4G/(2l) = 0,8t^4G/l$, правого – $c_n = 0,1t^4G/l$. Поскольку их крайние сечения поворачиваются одинаково под действием общей нагрузки, видим, что валы работают параллельно, их жесткости складываются и связь между общим моментом M и углом поворота сечения A определяется суммой $c = c_l + c_n = 0,9t^4G/l$. Угол поворота φ равен M/c ; крутящий момент в левом стержне – $c_l\varphi = c_l M/c$, в правом – $c_n M/c$, то есть в восемь раз

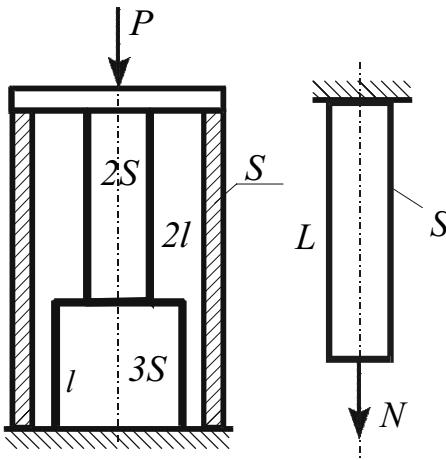


Рис.3.3

Рис. 3.4

меньше ($M/9$). Случайно максимальные напряжения в обоих валах одинаковы ($W_p^n = 8W_p^m$).

Тем же способом решается задача о сжатии стержня (конструкция на рис.3.3, представляющая концентрические трубку и шпильку, сжимаемые через жесткий элемент). Жесткость стержня при растяжении (сжатии) определяется, как известно, коэффициентом ES/L (рис.3.4). Трубка и шпилька работают параллельно (сжимаются на одну величину под действием общей сжимающей силы), но шпилька

состоит из двух участков разной жесткости $c_B = E2S/(2l) = ES/l$ – верхняя часть и $c_H = 3ES/l$ – нижняя. Эти две части работают последовательно: сила в них одинакова, а удлинения (укорочения) суммируются. Значит, суммируется и податливость шпильки:

$$\lambda_{uu} = 1/c_{uu} = \lambda_B + \lambda_H = l/(3ES) + l/(ES) = 4l/(3ES), \quad c_{uu} = 3ES/(4l).$$

Жесткость трубы $c_T = ES/(3l)$; суммарная жесткость конструкции $c = 13ES/(12l)$. Следовательно, осадка всей конструкции происходит на величину $\Delta = P/c = -12Pl/(13ES)$. Зная осадку и жесткости элементов, найдем распределение усилий $N_T = -c_T \Delta = -4P/13$, $N_{uu} = -c_{uu} \Delta = -9P/13$. Наибольшие напряжения, как нетрудно видеть, в верхней части шпильки.

Несколько сложнее анализ в следующей задаче (рис.3.5): найти работу силы P , приложенной в другом месте той же конструкции.

Как известно, работа силы в упругом теле равна половине произведения силы на перемещение точки ее приложения. Так что задача опять сводится к определению жесткости – связи между силой и перемещением сечения A . Но здесь труднее понять, где соединение является параллельным и где – последовательным. На рис.3.6 сила P разделена на P_1 и P_2 – такие, что смещение точки приложения P_1 и

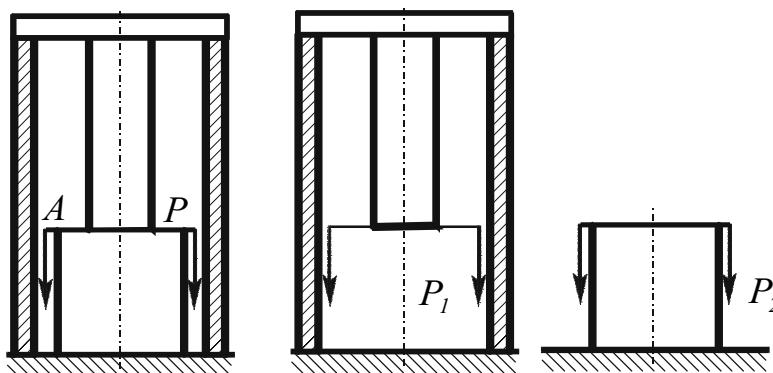


Рис.3.5

Рис. 3.6

точки приложения P_2 (как бы не связанных между собой) одинаковы. Это типичная ситуация с параллельным соединением жесткости нижней части шпильки ($c_H = 3ES/l$) и остальной части конструкции. В последней соединение последовательное: сила в трубке и в верхней части шпильки одинакова, а смещение сечения A суммирует сжатие трубы и растяжение шпильки. Для этой части

$$c' = 1/(\lambda_T + \lambda_B)^{-1} = ((3l/(ES) + 2l/(2ES))^{-1} = ES/(4l),$$

общая жесткость $c = c' + c_H = ES/(4l) + 3ES/l = 13ES/(4l)$ (естественно, другая, чем в предыдущей задаче) и работа силы P (она же потенциальная энергия деформации в конструкции после нагружения силой P) есть

$$W = P\Delta/2 = P^2/(2c) = P^2l/(6.5ES).$$

К закономерностям работы упругих тел относится и то, что при параллельной работе конструкций нагрузка распределяется между ними пропорционально жесткостям (что наблюдалось, например, в рассмотренных выше задачах). Это соображение позволяет быстро решить, например, следующую задачу.

Дана рама с квадратным поперечным сечением $t \times t$ (рис.3.7), нагруженная силой P . Найти максимальное напряжение.

Задача статически неопределенна, но решается буквально устно. Перед нами

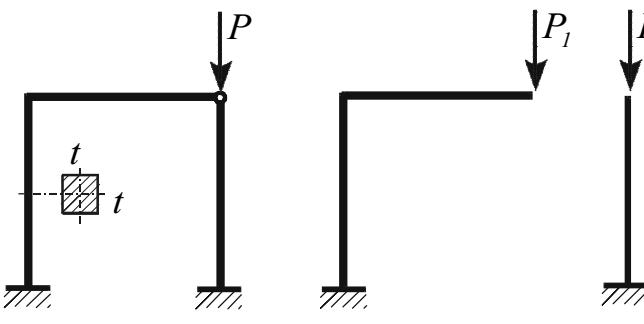


Рис. 3.7

Рис. 3.8

опять две параллельно нагруженные конструкции (рис.3.8, $P_1 + P_2 = P$). Одна работает на изгиб, другая на сжатие. Но жесткость рамы на сжатие существенно выше, чем на изгиб, поэтому сила P_2 значительно больше, чем P_1 . Пренебрегая последней, получим $\sigma_{max} = P/t^2$.

Однако не во всех задачах следует считать, что жесткость при растяжении

(сжатии) значительно выше, чем при изгибе. В некоторых случаях это приводит к качественно неверному результату.

Так в показанной на рис.3.9 конструкции с бесконечным числом балок 1 и растягиваемых стержней 2 требуется найти потенциальную энергию (равную, как известно, работе силы P на перемещении Δ точки ее приложения $P\Delta/2$). В отличие от других задач подобного типа, жесткостью на растяжение стержней 2 здесь пренебрегать нельзя: иначе мы получим, что все балки изгибаются на одинаковую величину, то есть их жесткости складываются, в сумме давая, естественно, бесконечную величину; при конечном значении силы P величина Δ равна нулю.

Представим конструкцию в виде двух параллельных (рис.3.10). Жесткость одной из них мы знаем: прогиб консольной балки от силы на конце равен $PL^3/(3EI)$, откуда жесткость в задаче (а) равна $3EI/l^3$. Задача (б) решается подобно предыдущей: она разбивается на две, показанные на рис.3.11, причем жесткость правой та же, что и у конструкции (б). Рис.3.12 показывает соответствующую расчетную схему.

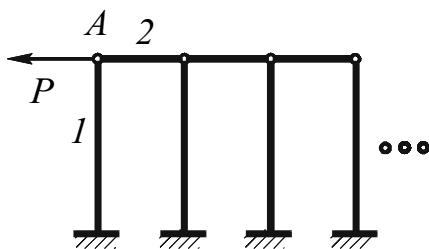


Рис.3.9

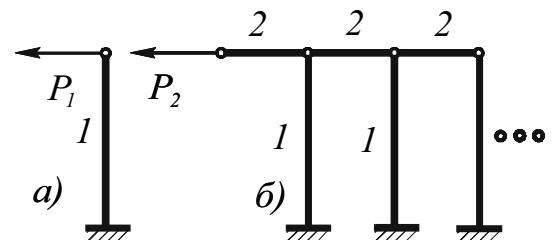


Рис.3.10

Обозначив силу в пружине через R (в точке B приложена сила P_3), можно записать следующие выражения:

$$\Delta_B = P_3/c_6, \quad \Delta_D = R/c_6 = (P_3 - R)l^3/(3EI), \quad \Delta_B - \Delta_D = \Delta l_1 = P_3 l_1 / (ES).$$

Решение системы сводится к квадратному уравнению и имеет вид

$$c_6 = (\sqrt{(4k+1)} - 1)/(2\lambda_B),$$

где

$$\lambda_B = l^3/(3EI), \quad k = \lambda_B/\lambda_\Phi, \quad \lambda_\Phi = l_1/(ES).$$

Возвращаясь к рис.3.10, заметим, что искомая жесткость c суммируется из двух частей (а) и (б):

$$c = c_a + c_b = 1/\lambda_B + 1/\lambda_b = (\sqrt{(4k+1)} + 1)/(2\lambda_B).$$

Значит,

$$u = P^2/(2c) = P^2 \lambda_B / (\sqrt{(4k+1)} + 1).$$

Нетрудно заметить, что при $k=\infty$ (как принято обычно считать при расчетах перемещений в рамках) из полученного результата следует, что смещение u равно нулю. Это было отмечено выше, исходя из общих соображений о нерастяжимости горизонтальных стержней.

Решение задач существенно упрощается, если удается использовать свойства симметрии.

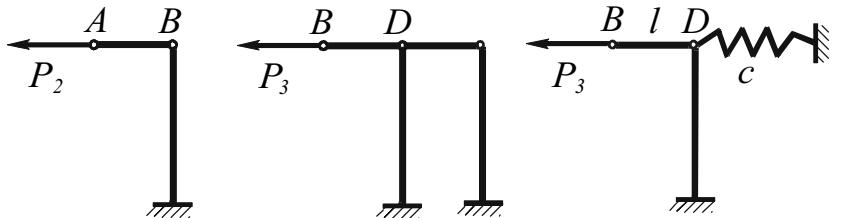


Рис.3.11

Рис.3.12

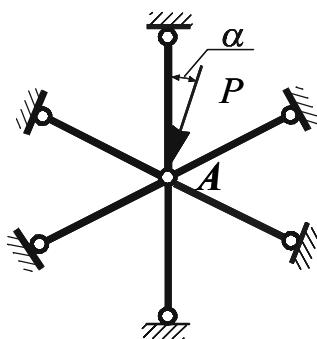


Рис.3.13

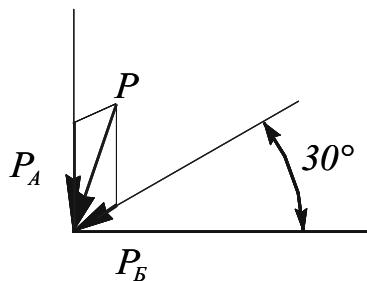


Рис.3.14

две задачи о жесткостях при разных видах воздействия. Полезнее, однако, разложить ее на неортогональные слагаемые (рис.3.14): в этом случае жесткости в направлениях сил P_A и P_B одинаковы (конструкция не изменяется при повороте вокруг оси A на угол 60°). Однако задача упростится, если для разложения силы P использовать две другие оси симметрии (рис.3.15). Жесткости по направлениям 1 и 2 также одинаковы (симметрия конструкции при повороте на 60°), но расчетная схема для их определения оказывается проще (рис.3.16). Задача зеркально кососимметрична относительно плоскости AB , и в стержнях, лежащих в этой плоско-

Пусть ферма из шести одинаковых симметрично расположенных стержней (рис.3.13) нагружена силой P . Найти перемещение точки A .

Несимметричную нагрузку P можно разложить на симметричные составляющие – вертикальную и горизонтальную и решить

сти, усилия отсутствуют. Та же косая симметрия позволяет утверждать, что искомая жесткость вдвое выше, чем жесткость половины оставшейся конструкции (рис.3.17). Приложив единичную силу вместо P_1 , найдем податливость (перемещение) из интеграла Мора, «перемножив» эпюру N_1 саму на себя (усилия в стержнях равны $1/(2\cos 30^\circ) = 1/\sqrt{3}$)

$$\lambda = \mathcal{E}N_1 \times \mathcal{E}N_1 = 2(1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{3} \cdot l/(ES)) = 2l/(3ES),$$

откуда искомая жесткость фермы $c = 2/\lambda = 3ES/l$.

Возвращаясь к рис.3.15, используя принцип суперпозиции, найдем, что вектор смещения будет складываться (по правилам сложения векторов) из вектора вдоль \mathbf{P}_1 , равного $|P_1|/c$ и вектора вдоль \mathbf{P}_2 , равного $|P_2|/c$.

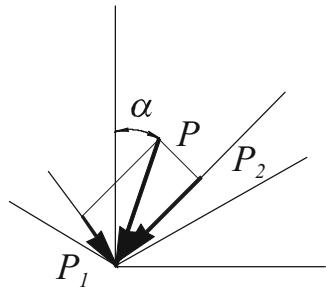


Рис.3.15

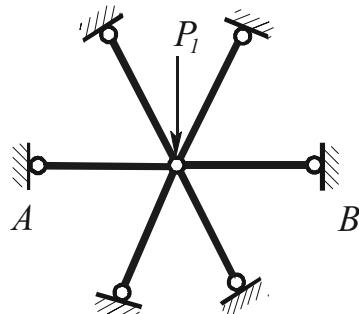


Рис.3.16

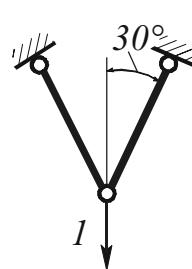


Рис.3.17

Соотношение между слагаемыми то же, что и между силами, значит, и сумма окажется направленной под углом α .

Окончательно, для векторов смещения и силы справедливо выражение

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}/c = \mathbf{Pl}/(3ES).$$

4. КОНСТРУКЦИИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В инженерной практике часто встречаются конструкции, в которых жесткость некоторых элементов (например, опор) значительно больше жесткости других. В таких случаях первые элементы удобно считать абсолютно жесткими. Это допущение не приводит к значительным ошибкам, но может существенно упростить решение. Трудность в таких задачах связана с некоторой необычностью возникающих в контакте с абсолютно жестким телом сил.

Задача 1 (рис.4.1). Требуется найти силу P , которая позволит вставить стержень в криволинейное отверстие абсолютно жесткого тела (трением пренебречь). Стержень постоянной жесткости EI имеет длину L .

Решение. Рассмотрим состояние стержня, когда он вошел в отверстие на длину l (рис.4.1). Его прямая часть сжата, остальная – изогнута и имеет постоянную кривизну $\chi = 1/R$; соответственно, она испытывает чистый изгиб моментом $EI\chi = EI/R$. Нетрудно заметить, что реакциями абсолютно жесткой криволинейной опоры являются две сосредоточенные пары сил с указанным моментом – на конце стержня и на входе в отверстие.

Поскольку плечо каждой пары не отличается от нулевого, значения сил бесконечны. В этом состоит упомянутая странность реакции жесткой опоры, логично вытекающая из обычных допущений расчетной схемы.

Потенциальная энергия деформации определяется выражением

$$U = \int \chi^2 EI dz / 2 = EI l / (2R^2) \quad (4.1)$$

(энергией сжатия стержня пренебрегаем по сравнению с энергией изгиба). При изменении длины l на малую величину Δ энергия U возрастает на величину $(EI/(2R^2))\Delta$ и дополнительная работа силы P равна $P\Delta$. Из закона сохранения энергии следует равенство этих величин, откуда

$$P = EI / (2R^2). \quad (4.2)$$

Сила P не зависит от l , пока $l < L$. На рис.4.2 показаны графики зависимости P и U

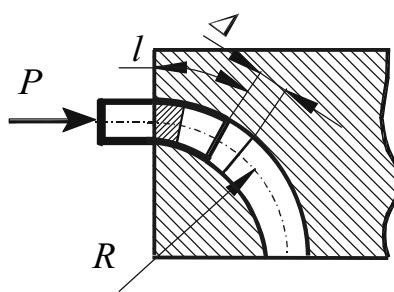


Рис.4.1

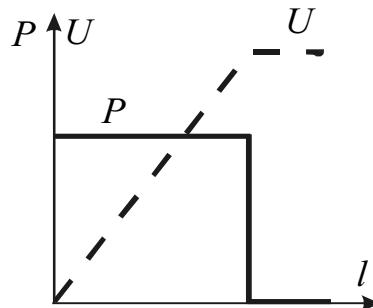


Рис.4.2

от длины l . Как видим, задача относится к геометрически нелинейным (краевые условия изменяются в процессе деформирования), поэтому здесь отсутствует привычное квадратичное возрастание потенциальной энергии и линейное возрастание

нагрузки. В момент, когда $l=L$, сила падает до нуля, и стержень вылетает из другого конца отверстия, превращая накопленную потенциальную энергию в кинетическую.

Задача 2 (рис. 4.3). Бесконечно длинный весомый стержень (погонный вес q) лежит на жестком основании. Определить высоту подъема h при нагружении силой P .

Решение. Задача симметрична; рассматриваем правую половину стержня ($z \geq 0$). Основание считаем абсолютно жестким. Полагаем (далее это можно проверить), что стержень контактирует с опорой на всем интервале $z \geq l/2$ – правее точки A . Следовательно, прогиб, поворот, кривизна стержня χ и, отсюда, изгибающий момент при $z \geq l/2$ равны нулю.

Рассмотрим остальную часть стержня ($z \leq l/2$). Для нее должны выполняться следующие краевые условия (рис.4.4). На левом краю поперечная сила (по условиям симметрии) равна $P/2$, прогиб $v(0)=h$, поворот dv/dz равен нулю и, по-видимому, имеется ненулевой изгибающий момент $M(0)$. На правом краю ($z=l/2$)

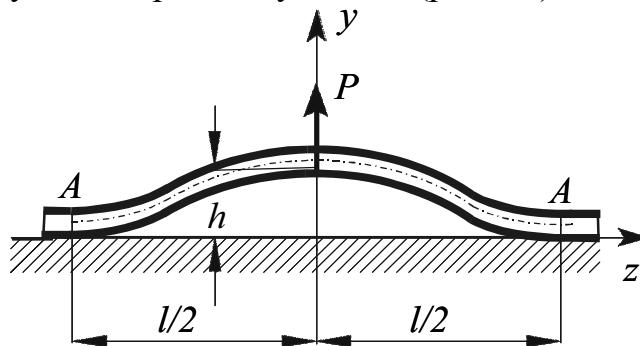


Рис.4.3

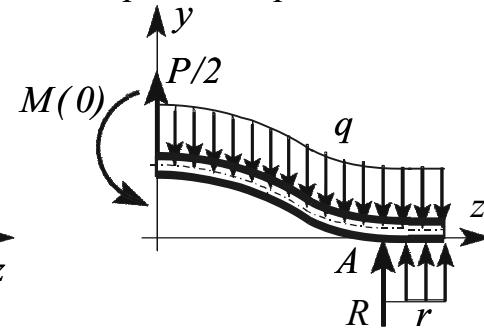


Рис.4.4

виям симметрии) равна $P/2$, прогиб $v(0)=h$, поворот dv/dz равен нулю и, по-видимому, имеется ненулевой изгибающий момент $M(0)$. На правом краю ($z=l/2$)

изгибающий момент равен нулю, так как правее точки A стержень не изгибается, а односторонняя опора, в отличие от двусторонней, как в предыдущем примере, не может создать сосредоточенной пары сил.

Зато эта опора может дать другую реакцию: сосредоточенную силу R , направленную вверх. Это кажется неправдоподобным, поскольку контакт стержня с опорой происходит по линии и реакция, казалось бы, может быть только распределенной, однако геометрические условия ($v(l/2)=0$, $dv/dz(l/2)=0$) и условия равновесия не оставляют другой возможности.

Если бы опора была податливой, реакция опоры могла быть лишь распределенной по закону, связанному с ее осадкой. Чем выше жесткость опоры, тем более резко может изменяться интенсивность опорной реакции; в пределе сосредоточенная R не только возможна, но в данном случае необходима: иначе поворот сечения $z = l/2$ не мог бы быть нулевым.

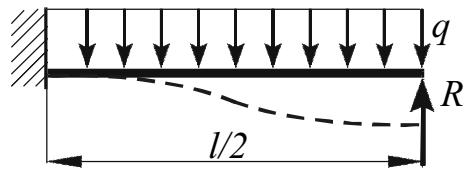


Рис.4.5

Условие равновесия ($\Sigma Y = 0$) имеет вид

$$(ql - P)/2 - R = 0. \quad (4.3)$$

Для записи еще одного условия удобно видоизменить схему задачи (рис.4.5), полагая неподвижным левый край. Тогда прогиб правого края равен h , его поворот равен нулю. Две последние величины находятся из интеграла Мора, откуда, с учетом (4.3), следует:

$$l=3P/(2q), h=4.39 \cdot 10^{-3} P^4/(q^3 EI).$$

Еще более странный результат получаем в следующей задаче.

Пример 3. Требуется найти напряжения в поперечных сечениях стержня (рис.4.6), прижимаемого нагрузкой $q(\varphi)$ к абсолютно жесткому цилиндрическому основанию радиуса R . Трение между соприкасающимися поверхностями отсутствует, стержень касается опоры по всей длине. Нагрузка q является строго радиальной. Поперечной сжимаемостью стержня пренебрегаем.

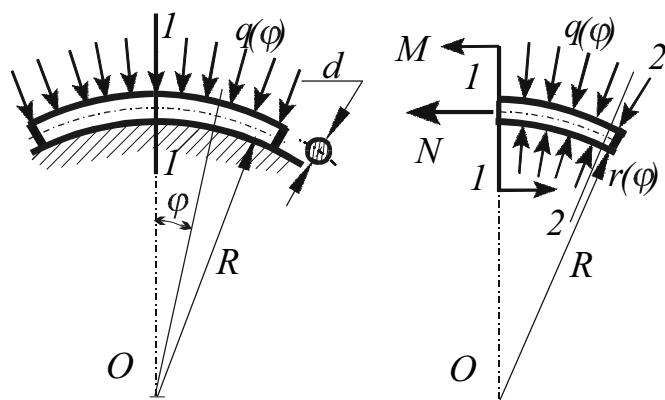


Рис.4.6

Рис.4.7

Решение. На изогнутый стержень действуют строго радиальные внешние силы: активные $q(\varphi)$, направленные к центру цилиндра, и реакции опоры $r(\varphi)$, направленные от центра. Под действием этих сил стержень прижат к цилиндрической поверхности и, следовательно, имеет постоянную кривизну (радиус ее $\rho=R+d/2$). Значит, в стержне действует постоянный изгибающий момент $M=EI/(R+d/2)$ (чистый изгиб). Это возможно лишь в случае, когда по концам стержня приложены внешние сосредоточенные пары сил с моментом M . Таким образом, какой бы ни была распределенная нагрузка по длине стержня, она уравновешивается такой же распределенной реакцией со стороны цилиндрической опоры. Но на концах стержня интенсивности внешней нагрузки $q(\varphi)$ и реакции $r(\varphi)$ стремятся к бесконечности с бес-

конечностью

конечно малым сдвигом по углу. Этот сдвиг и позволяет получить две сосредоточенные пары сил с моментом M . Нормальная сила отсутствует, поскольку внешняя нагрузка эквивалентна этим двум парам сил.

Таким образом, в сечении 1–1 действуют нормальные напряжения, определяемые выражением

$$\sigma = E y / (R + 0.5d),$$

координата y отсчитывается от центральной оси сечения стержня.

Возникновение сосредоточенных пар сил по краям этого стержня связано с принятymi допущениями и весьма неочевидно. Например, в работах [1,2], где была рассмотрена аналогичная задача, наличие пар сил не было замечено и в результате, после рассмотрения момента сил, действующих на часть стержня правее сечения 1–1 (рис.4.7), относительно центра кривизны O (моменты от радиальной нагрузки и реакции здесь считаются нулевыми вследствие их радиальности) получено, что в сечении 1–1 должна действовать уравновешивающая сжимающая нормальная сила $N = -M/\rho$ ($\rho = R + d/2$).

Решите самостоятельно

Задача 1 (рис.4.8). Криволинейный стержень квадратного ($h \times h$) поперечного сечения с радиусом кривизны $R \gg h$ зажимается между двумя абсолютно жесткими и гладкими (трение отсутствует) поверхностями. Нагружение осуществляется до полного выпрямления стержня. Требуется построить эпюры внутренних силовых факторов.

Задача 2. Стальная полоса стягивается вокруг абсолютно жесткого цилиндра радиуса R (рис.4.9). Определить величину сил, возникающих на поверхности контакта двух тел (принять ширину полосы $b=1$).

Задача 3. Прямой стержень круглого поперечного сечения ($d=1 \text{ мм}$), выполненный из идеально пластического материала ($\sigma_T=200 \text{ МПа}$), изогнут и без зазора вставлен в абсолютно гладкий паз круглого поперечного сечения со средним

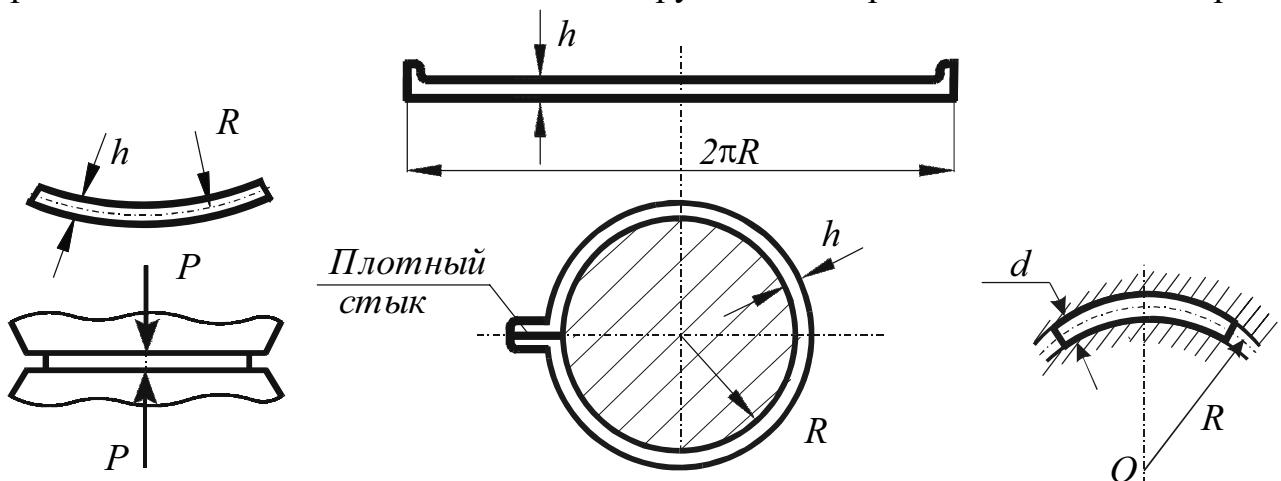


Рис.4.8

Рис.4.9

Рис.4.10

радиусом $R=4 \text{ м}$ (рис.4.10). Определить величину пластических деформаций. Модуль упругости материала стержня $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

5. МЕТОД СИЛ И МЕШАЮЩИЕ СВЯЗИ

Статически неопределеные задачи представляют важную группу задач сопротивления материалов и доставляют студентам много неприятностей. Ниже предложена оригинальная методика реализации метода сил, отличающаяся от стандартной более свободным выбором основной системы. Последняя не должна быть кинематически неизменяемой, хотя и может быть такой. Эта методика естественным образом развивает метод сечений в статически определенных задачах на задачи статически неопределеные и имеет, на наш взгляд, ряд преимуществ перед традиционной.

5.1. Понятие "мешающие связи"

Вспомним технику определения внутренних силовых факторов (Φ) в *статически определимой* задаче. Для этого используется метод сечений, в соответствии с которым необходимо:

- разрезать стержень;
- отбросить одну из частей вместе со связями и действующими на нее силами;
- заменить ее действие внутренними силовыми факторами ;
- уравновесить, то есть записать условия равновесия оставшейся части, из решения которых находятся значения Φ .

Студенты иногда кодируют эту последовательность литерами РОЗУ.

Отметим, что оставшаяся часть тела не должна иметь связей с "землей", иначе записать необходимые условия равновесия не удастся. Поэтому, не всегда отчетливо это формулируя, решение задачи производят в два этапа:

- предварительный (устранение помех – снятие мешающих связей и определение соответствующих опорных реакций; здесь используется тот же метод РОЗУ);
- основной (определение Φ – по названной выше схеме).

Конструкцию, полученную из заданной задачи после снятия всех нагрузок и *мешающих связей*, назовем, по известной аналогии, основной системой ("О"). Задачу, полученную из основной системы путем возвращения всех внешних воздействий и реакций (возможно, еще не найденных) мешающих связей, будем называть эквивалентной ("Э"). Предварительный этап включает получение основной, затем эквивалентной системы, кинематический анализ основной системы, запись на основе последнего условий равновесия и решение этих уравнений – для последующего построения эпюров в основном этапе метода сечений.

Из сказанного следует, что "мешающими" являются связи, не позволяющие в основном этапе получать после любого необходимого разреза не связанную с землей оставшуюся часть.

Пример 1. Задача на рис.5.1 вполне готова для выполнения основного этапа метода сечений: проведя любое сечение, отбросим левую часть и оставим правую. Следовательно, можно считать, что мешающих связей нет и данная схема одновременно представляет «эквивалентную» систему. Но в задаче на рис.5.2а этого

сделать сразу нельзя. Необходимо предварительно найти либо левую опорную реакцию (рис.5.2б), либо правую (рис.5.2в). Заметим сразу, что можно отбросить обе связи: иногда это удобнее для последующего построения эпюры Φ . И наоборот:

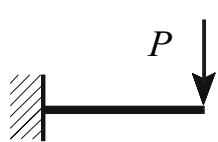
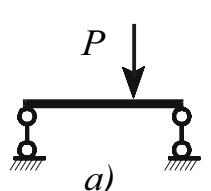
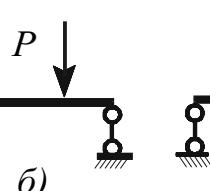


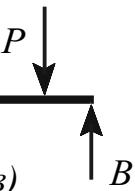
Рис.5.1



а)



б)



в)

Рис.5.2

в задаче на рис.5.3 связи не мешают построить эпюру изгибающего момента M и затем – поперечной силы $Q=dM/dz$. Таким образом, понятие мешающей связи весьма свободно. Например, для задачи рис.5.3 на рис.5.4 показан ряд эквивалентных задач (опорные реакции здесь и далее обозначаются латинскими буквами). Последний вариант неудобен, но возможен; он показывают большую свободу понятия мешающих связей.

Мешающие связи могут быть не только внешними (связывающими с "землей"), но и внутренними.

Пример 2. В задаче на рис.5.5а отbrasывание внешних связей еще не подготавливает основной этап метода сечений: необходимо "разомкнуть" раму. На рис.5.5б показана система "Э" при выборе минимального числа мешающих связей; на рис.5.5в – более удобная для построения эпюр, но требующая более громоздкого предварительного этапа определения реакций мешающих связей. Заметим, что в данной задаче (как и в некоторых других) и предварительный этап удобно разбить на два: вначале отбросить только внешнюю связь и найти реакцию A (рис.5.6, $A=P$), а затем снять внутренние мешающие связи. Варианты таких эквивалентных систем показаны на рис.5.5б,в;

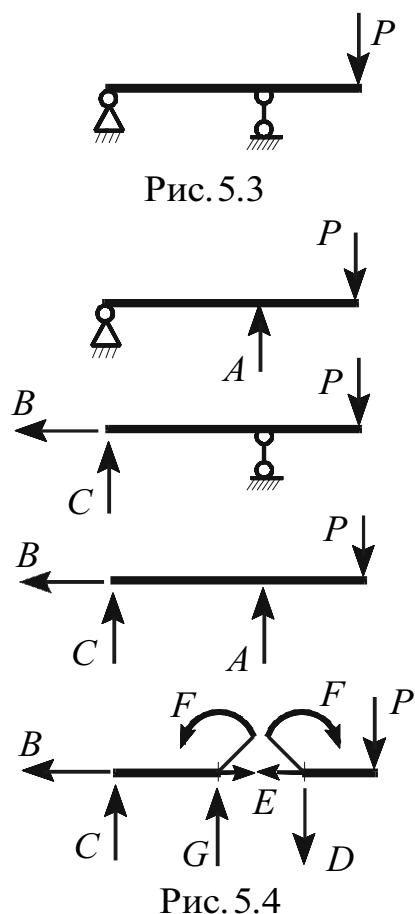
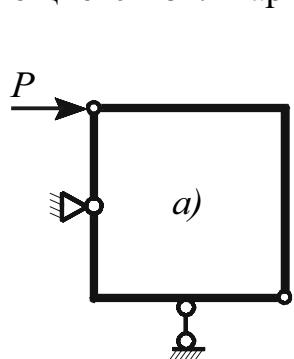
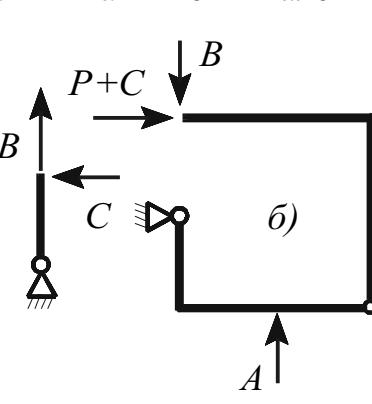


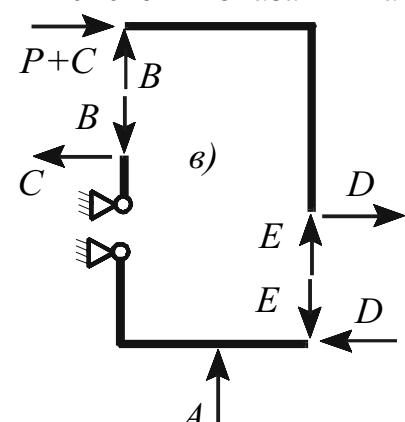
Рис. 5.4



а)



б)



в)

Рис. 5.5

возможно еще более дробное деление – для тех, кто не ошибается в записи и решении условий равновесия, но не любит строить эпюры Φ в громоздких рамках.

Добавим две рекомендации, облегчающие решение:

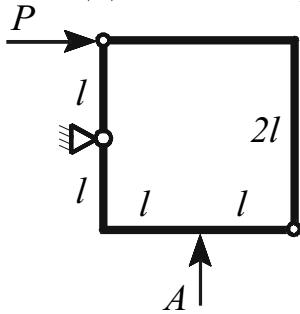


Рис.5.6

1. При расчетах ферм (то есть стержневых конструкций, элементы которых работают в условиях растяжения-сжатия) рекомендуется получать систему "Э" следующим стандартным способом: разрезать все стержни. Тогда предварительный этап является одновременно основным, поскольку реакциями мешающих связей являются искомые значения нормальных сил (рис.5.7).

Добавим: чтобы не было ошибок в знаках, все реакции N_i (i – номер стержня) необходимо направлять в сторону растяжения, даже если очевидно, что стержень работает на сжатие. Решение дает не только абсолютные значения, но и знаки искомых величин N_i .

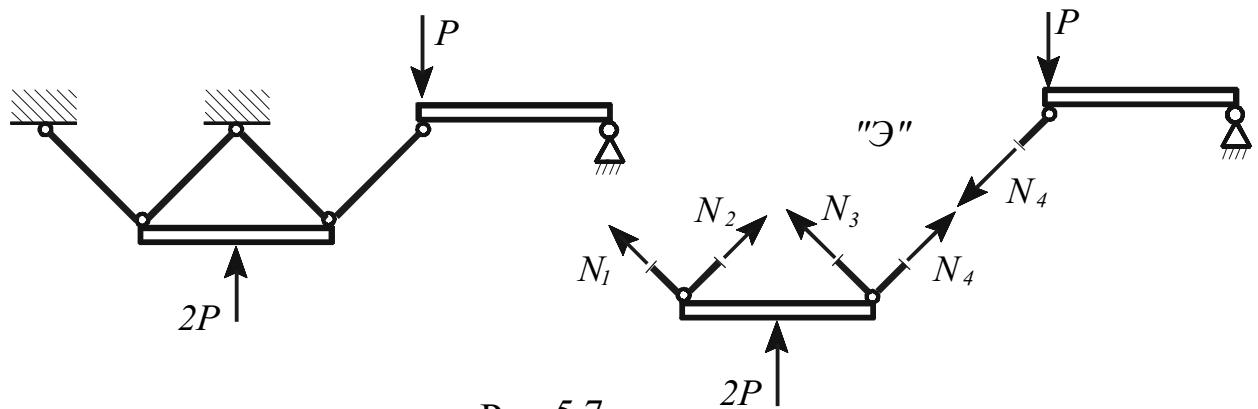


Рис. 5.7

2. Если задача (конструкция и воздействие) симметрична, то "Э" следует выбирать также симметричной; если кососимметрична, то следует сохранять косую симметрию.

Пример 3. Рама, показанная на рис.5.8, симметрична относительно вращения вокруг точки C на угол π . Нагрузка при этом меняет направление, значит задача кососимметрична. Следовательно, кососимметричны и опорные реакции (рис.5.8б), откуда легко установить, что $A=P/2$, $B=0$.

Отметим, что если при выборе эквивалентной системы нарушить условие симметрии (на рис.5.8в мешающие связи сняты, и в этом смысле система "Э" допустима), то задача окажется статически неопределенной и ее решение потребует особого метода (например, метода сил), чтобы получить в итоге тот же ответ.

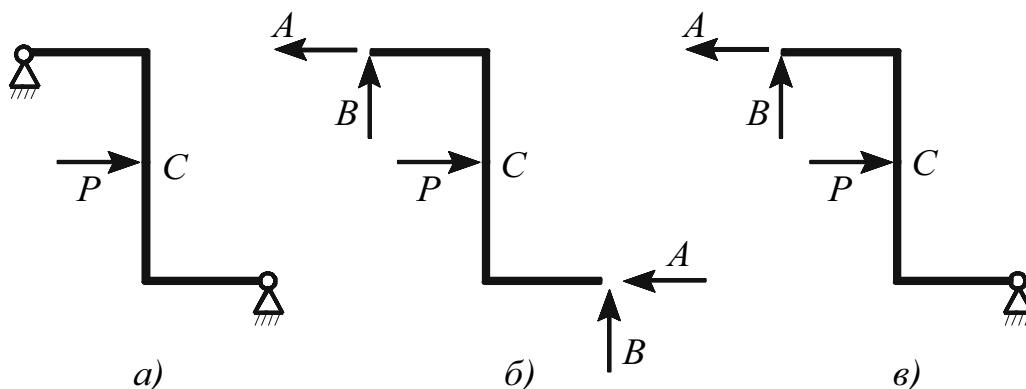


Рис. 5.8

шающие связи сняты, и в этом смысле система "Э" допустима), то задача окажется статически неопределенной и ее решение потребует особого метода (например, метода сил), чтобы получить в итоге тот же ответ.

Свободный выбор мешающих связей требует особенно внимательного отношения к выбору условий равновесия. Если отбросить все связи, то можно записывать без раздумий обычные условия равновесия (суммы проекций сил, моменты относительно произвольных осей), но если ограничиться необходимым минимумом, то совершенно обязательен предварительный *кинематический анализ* механизма, получающегося после снятия мешающих связей: необходимо определить количество и *качество* полученных степеней свободы. Следует помнить, что условия равновесия – это всегда условия равновесия *механизма*, то есть конструкции, имеющей возможность перемещаться, но не перемещающейся именно вследствие равенства нулю движущей нагрузки. В симметричной задаче при симметричной "Э" следует рассматривать только симметричные движения (и записывать соответствующие условия равновесия), в кососимметричной – только кососимметричные.

В последней задаче (рис.5.8) симметричным движением "Э" (рис.5.8б) является только поворот вокруг точки C ; кососимметричным – поступательное движение в любом направлении. Соответственно, кососимметричные условия равновесия – равенство нулю суммы проекций сил на две оси.

5.2. Эквивалентная система в статически неопределеных задачах

Может показаться, что понятие мешающих связей достаточно очевидно и не заслуживает стольких слов (оно практически используется всегда, только, может быть, без отчетливой формулировки). Эти слова были подготовкой к тому, чтобы убедить читателя не менять техники расчета при переходе к *статически неопределенным* системам. Принимаемое обычно требование кинематической неизменяемости эквивалентной системы в методе сил – не необходимость, а просто традиция. Гораздо удобнее для получения эквивалентной задачи снимать не "лишние", а *мешающие* связи. Вопрос о степени статической неопределенности откладывается при этом до того момента, когда это будет действительно необходимо (в задаче на рис.5.8 этого не понадобилось вообще; можно считать ее или не считать статически неопределенной).

Итак, по схеме, описанной в предыдущем пункте, выполняем предварительный этап метода сечений:

- отбрасываем мешающие связи,
- заменяем их реакциями,
- производим кинематический анализ полученного механизма,
- записываем соответствующие условия равновесия.

Далее возможны следующие ситуации:

a). Реакции мешающих связей определяются из условий равновесия однозначно (выражаются через параметры внешней нагрузки).

б). Для их определения нехватает еще k условий. Тогда вводят k произвольных величин $x_1 \dots x_k$, называемых неизвестными метода сил. Реакции связей выражают через параметры внешней нагрузки и неизвестные x_i . Число неизвестных

k будем называть степенью статической неопределенности. Оно не всегда соответствует принятому в учебниках термину.

в). Условия равновесия не выполняются ни при каких значениях реакций мешающих связей; система уравнений равновесия не имеет решения. Это означает, что мы имеем дело с механизмом, находящимся в равновесии при данной нагрузке. Это – динамическая задача.

г). Условия равновесия выполняются только при данной системе внешних сил. Это означает, что мы имеем дело с механизмом, находящимся в равновесии.

д). Условия равновесия выполняются только при данной системе внешних сил, но для определения реакции нехватает k условий. Это означает, что мы имеем дело со статически неопределенным (степень неопределенности k) механизмом, находящимся в равновесии.

Случай а) рассматривался в предыдущем пункте (см., например, задачу на рис.5.8).

Случай б) возникает в той же раме, если ее нагружать симметрично (рис.5.9).

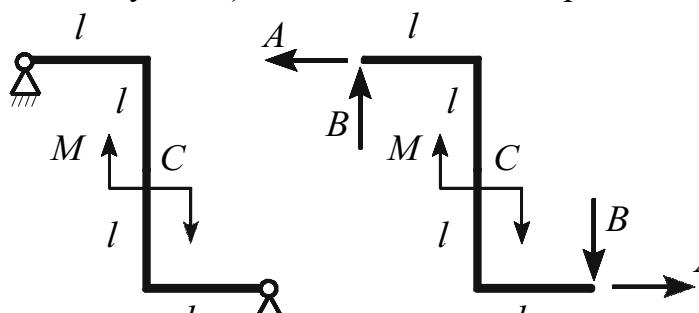


Рис. 5.9

Здесь единственное симметричное условие равновесия – сумма моментов относительно точки C – включает две неизвестные $M_c = M + 2Bl - 2Al = 0$ и имеет бесконечное множество решений, например, $A = X_1$, $B = X_1 - -M/(2l)$, или $A = M/l + X_1$, $B = M/(2l) + X_1$.

Возможны многие другие решения, каждое из которых должно включать некоторую (свою) произвольную переменную X_1 .

Ситуация в) возникает, например, в ферме, приведенной на рис.5.10 (в ферме девять, а не двенадцать стержней!). С учетом симметрии и рекомендации для ферм (разрезать в "Э" все стержни) получаем "Э" в виде пары фрагментов (рис.5.10б), повторяющихся трижды. Ни при каком значении силы P (кроме $P=0$) равновесие обоих фрагментов не достижимо, что следует из двух условий равновесия:

$$N_1 + N_2 = 0, \quad (5.1)$$

$$N_1 + N_2 + P = 0. \quad (5.2)$$

Таким образом, данная ферма представляет собой механизм (оставим читателю его кинематический анализ: определите относительное движение стержней). Этот механизм статически неопределен. Это, в частности, следует из того, что при другой нагрузке, с более высокой степенью симметрии (рис.5.10в) имеется единственное условие равновесия (5.2). Его решение может иметь, например, вид

$$N_1 = X_1, \quad N_2 = P - X_1 - (\text{случай д}).$$

Случай г) достаточно стандартен (см., например, рис.5.2, где стержень имеет возможность перемещаться горизонтально, или рис.2.9, где внешних связей нет и

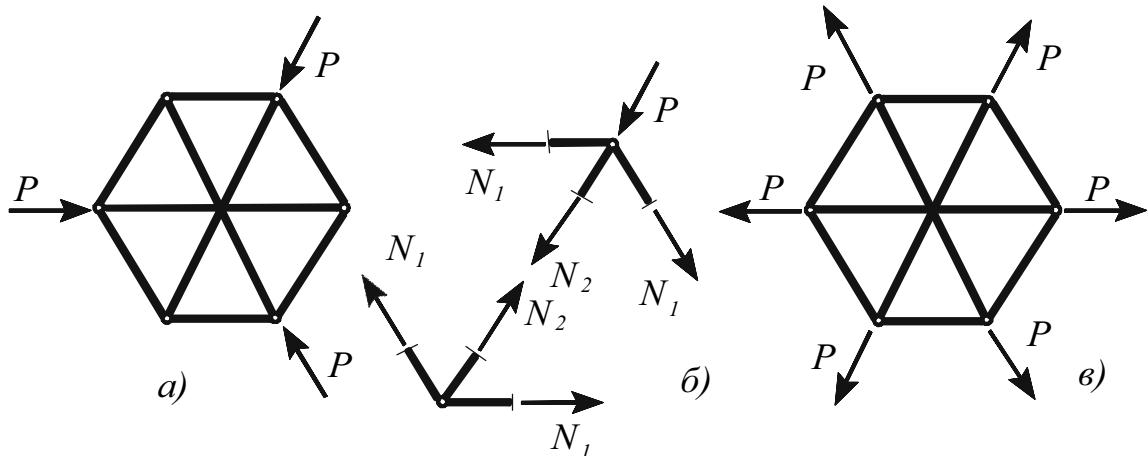


Рис. 5.10

конструкция может двигаться как жесткое тело).

5.3. Суперпозиция внутренних силовых факторов

Решив систему уравнений равновесия в статически неопределенной задаче (в ответ входят произвольные величины x_1, x_2, \dots, x_k , k – степень статической неопределенности), можно строить эпюры Φ методом сечений. Удобно использовать суперпозицию:

$$\Phi = \Phi_p + X_1 \Phi_1 + X_2 \Phi_2 + \dots, \quad (5.3)$$

где Φ – некоторый силовой фактор в произвольном сечении z конструкции, Φ_p – тот же фактор в предположении, что все неизвестные X_i равны нулю; Φ_1 – при нулевой внешней нагрузке и нулевых X_i , кроме одного $X_1=1$; Φ_2 – только от $X_2=1$ (внешние силы и остальные X_i равны нулю) и т.д. Подчеркнем, что все единичные эпюры Φ_i отвечают состояниям *самоуравновешенности*. Этот термин означает наличие внутренних сил при отсутствии внешних.

5.4. Условия совместности деформаций

Статическая неопределенность задачи означает, что условий равновесия недостаточно для определения реакций в мешающих связях. Необходимо привлекать две другие стороны механики – геометрическую и физическую.

Геометрические условия – это условия совместности деформаций осевой линии $D(z)$. В отличие от статически определимых задач, в статически неопределенных не всякое распределение деформаций осевой линии оказывается возможным, то есть совместным (соответствующим наложенным на конструкцию связям). Для записи условий совместности удобно использовать ПВП: как отмечалось (глава 2), этот принцип заменяет геометрические ограничения, если нам известны условия равновесия. Выражение (5.3) с отвечающими условиям равновесия эпюрами Φ_p, Φ_i предлагает множество равновесных состояний, среди которых эпюры Φ_i

удобны тем, что они самоуравновешены. Поскольку $W=W'$ (см. пункт 2) и для самоуравновешенных состояний работа внешних сил равна нулю, то

$$\oint \Phi_i dz = 0. \quad (5.4)$$

Это и есть условия совместности – k уравнений (столько имеется независимых самоуравновешенных эпюор Φ_i). Как видим, число уравнений (5.4) в точности равно недостающему количеству условий равновесия.

Однако следует иметь в виду, что так изящно выглядят условия совместности деформаций осевой линии (то есть ее отклонений от чертежа) лишь в случае, когда все опоры выполнены идеально по чертежу. В противном случае в эти условия должны входить соответствующие отклонения (их называют смещениями опор).

Для записи таких корректированных условий совместности деформаций следует, еще на стадии выбора основной системы, считать *мешающими* (и снимать их) все *смещающиеся* связи. Тогда в i -м самоуравновешенном состоянии (при $X_i=1$) реакции этих связей R_{im} (m – номер связи) становятся “внешними силами” для основной системы и ПВП записывается в обычном виде $W'=W$, или

$$\oint \Phi_i dz = \sum_m R_{im} \Delta_m \quad (5.5)$$

Это и есть условие совместности $\bar{D}(z)$, согласованное со смещениями опор Δ_m .

Пример 4. В дважды статически неопределенной задаче на рис.5.11 смещаются все три связи в правой заделке. Записать условия совместности для $\bar{D}(z)$ при

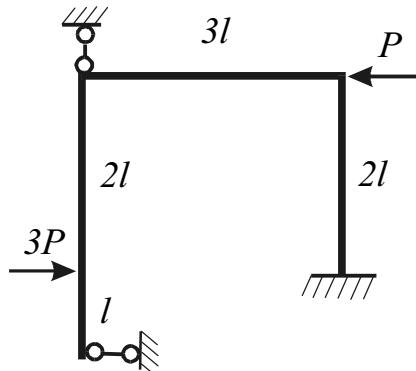


Рис.5.11

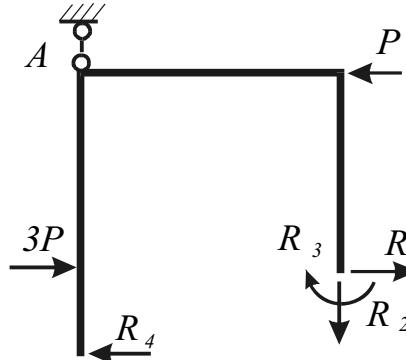


Рис.5.12

заданных $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Решение. Выбирая основную систему, отбросим эти три связи и одну из двух оставшихся – допустим, нижнюю (рис.5.12). Кинематический анализ дает две простейшие степени свободы: двигаться по горизонтали или вра-

щаться вокруг точки A . Условия равновесия:

$$\begin{aligned} -R_4 + 3P - P + R_1 &= R_1 - R_4 + 2P = 0; \\ -R_4 \cdot 3l + 3P \cdot 2l - R_2 \cdot 3l + R_1 \cdot 2l - R_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для определения R_i придется ввести две произвольные величины X_1 и X_2 . Например,

$$R_4 = 3X_1, R_1 = 3X_1 - 2P, R_3 = 3X_2l, R_2 = 2P/3 - X_1 - X_2$$

(проверяется подстановкой в условия (5.6)). Два самоуравновешенных состояния – для $X_1=1$ и для $X_2=1$ – иллюстрируются рис.5.13 и 5.14: показаны реакции

опор и внутренние силовые факторы. Условия совместности (5.5) принимают вид (Δ_4 по условию задачи равно нулю):

$$\int_{8l} N^{(1)}(z) \varepsilon_0(z) dz + \int_{8l} M^{(1)}(z) \chi(z) dz = 3\Delta_1 - \Delta_2,$$

$$\int_{8l} N^{(2)}(z) \varepsilon_0(z) dz + \int_{8l} M^{(2)}(z) \chi(z) dz = 3l\Delta_3 - \Delta_2.$$

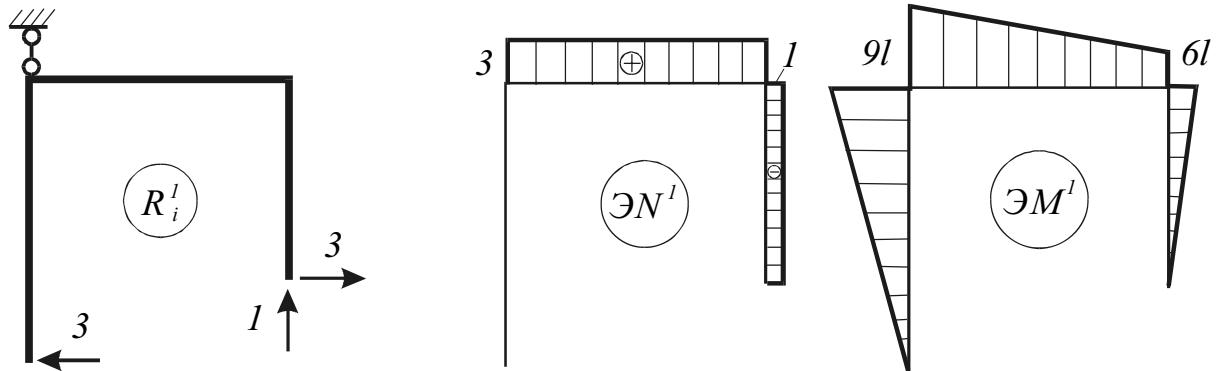


Рис.5.13

В частности, нулевые кривизна осевой линии χ и продольная деформация ε_0 со-

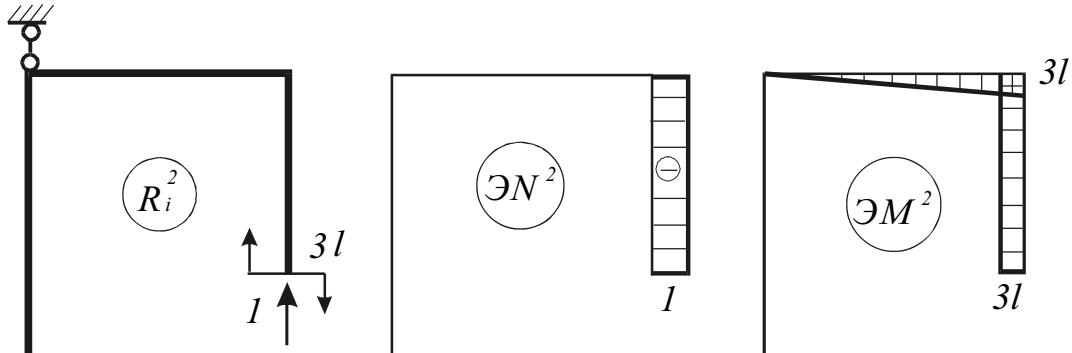


Рис.5.14

вместны только тогда, когда

$$3\Delta_1 - \Delta_2 = 0, \quad 3l\Delta_3 - \Delta_2 = 0. \quad (5.7)$$

Решение этой последней системы уравнений имеет вид

$$[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3] = X_3 [1, 3, 1/l], \quad (5.8)$$

где X_3 – произвольная величина. При таких смещениях опор в случае отсутствия нагрузки и нагрева напряжения в раме, изготовленной идеально по чертежу, отсутствуют.

5.5. Физические уравнения

Физические уравнения связывают в каждом сечении стержня внутренние силовые факторы Φ с деформациями осевой линии \mathcal{D} . Если справедлив закон Гука, то

$$\mathcal{D} = \Phi / \mathcal{K}.$$

Здесь \mathcal{K} – "жесткость поперечного сечения" стержня, равная ES (если $\Phi=N$, а $\Delta=\varepsilon_0$ – вытяжка осевой линии) или EI_x (если $\Phi=M_x$, а $\Delta=\chi_x$ – кривизна, или относительный угол поворота вокруг оси x) или GI_k (если $\Phi=T$ – крутящий момент, а $\Delta=\theta$ – крутка, то есть относительный угол закручивания – поворота сечения вокруг оси z). При нагреве возникают тепловые деформации Δ^T . Обычно рассматривают два вида тепловой деформации осевой линии стержня:

$$\varepsilon_0^T = \alpha T_{cp}, \chi_x^T = \alpha \Delta_y T,$$

где T_{cp} – средняя по сечению стержня температура, $\Delta_y T$ – средний градиент температуры по оси y (dT/dy). Физическое уравнение в этом случае принимает вид

$$\Delta = \Phi/\mathcal{K} + \Delta^T.$$

Наконец, если имеются дополнительные деформации Δ^0 (а в качестве дополнительных принимаются все другие отклонения оси стержня от чертежа), то в последнем выражении добавляется Δ^0

$$\Delta = \Phi/\mathcal{K} + \Delta^T + \Delta^0. \quad (5.9)$$

5.6. Каноническая система уравнений

Физические уравнения замыкают систему уравнений, необходимых для «раскрытия статической неопределенности» определения неизвестных X_i метода сил. Напомним, что эта система включает одно статическое уравнение (5.3) – суперпозицию внутренних силовых факторов; о равновесии каждого слагаемого мы заботимся при построении соответствующих эпюров. В систему уравнений входят также k уравнений совместности деформаций (5.5) и физическое уравнение (5.9). Легко убедиться, что это полная система: подставив выражение (5.3) в (5.9), а последнее – в уравнения (5.5), получим k разрешающих линейных уравнений относительно k неизвестных. Они записываются в каноническом виде: например, при $k=2$

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} + \Delta_1^T + \Delta_1^0 &= \sum R_{1m}\Delta_m, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_2^T + \Delta_2^0 &= \sum R_{2m}\Delta_m. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь

$$\delta_{ij} = \int_L (\Phi_i \Phi_j / \mathcal{K}) dz, \Delta_{iP} = \int_L (\Phi_i \Phi_P / \mathcal{K}) dz, \Delta_i^T = \int_L \Phi_i \Delta^T dz, \Delta_i^0 = \int_L \Phi_i \Delta^0 dz,$$

(L – суммарная длина стержней конструкции). Напомним, что при выборе основной системы все смещающиеся опоры считаются мешающими и снимаются, и R_{jm} представляет реакцию в m -й связи при действии только $X_j=1$.

Пример 5. Требуется найти силовые факторы в конструкции на рис.5.15.

Сохранив симметрию и убрав все внешние связи, получим "Э" (рис.5.15б) с двумя неизвестными A , B . Единственное симметричное уравнение равновесия – сумма моментов сил $2Al+2Bl-2M=0$ – можно решить, например, так:

$$A=X_1, B=M/l-X_1.$$

Заметим, что при кососимметричной нагрузке (см., например, рис. 5.15в) равновесия в данной конструкции не будет ни при каких значениях опорных реакций – из-за шарнира на оси симметрии; перед нами статически неопределеный механизм. Единичная эпюра изгибающих моментов M_u^l ($X_l=1, M=0$) и "грузовая" эпюра ($X_l=0, M=M$) показаны на рис. 5.15г, д. Для рамы постоянной жесткости на изгиб EI найдем: $\delta_{ll}=4l^3/(3EI)$, $\Delta_{lp}=Ml^2/(3EI)$,

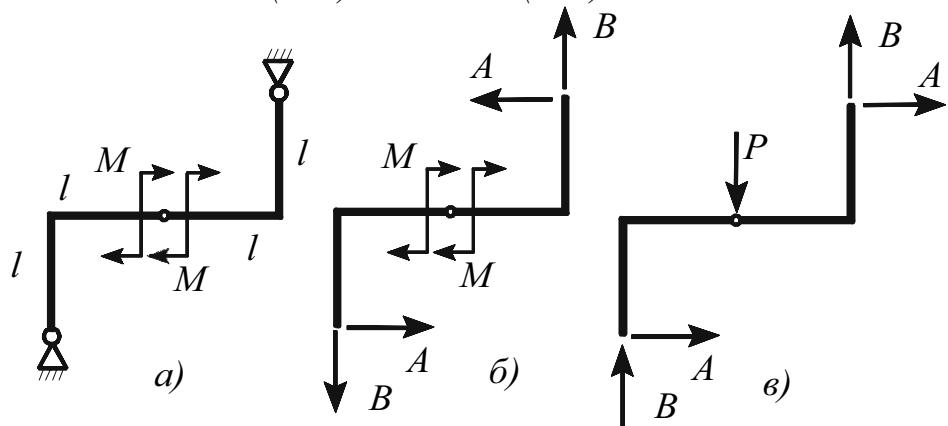


Рис. 5.15

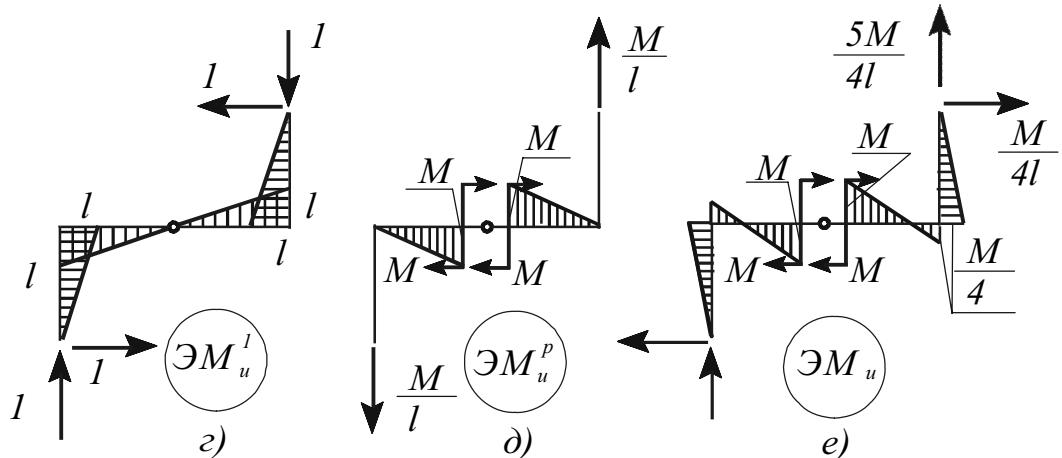


Рис. 5.15

$X_l = -\Delta_{lp}/\delta_{ll} = -M/(4l)$ и, наконец, получим \mathcal{EM}_u (рис. 5.15е). Стоит упомянуть, что традиционным методом при кинематически неизменяемой основной системе эта задача не может быть решена, так как конструкция изначально представляет собой механизм.

Пример 6. В задаче, показанной на рис. 5.16, нет внешних сил и конструкция выполнена идеально ($\bar{\Delta}^0(z)=0$), но опоры – с отклонением от чертежа: при сборке обнаружилось, что заделка A повернута на угол φ_A по часовой стрелке, а опора B смешена влево на величину Δ_B . Требуется определить напряжения в раме, если эти смещения несовместны.

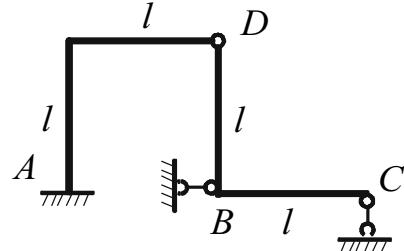


Рис. 5.16

При выборе основной системы снимаем смещающиеся связи (в сечениях A и B); уберем также связь C , чтобы справа от любого сечения все связи отсутствовали. Тем самым получим основную систему (рис. 5.17). Ее кинематический анализ показывает, что она имеет две степени свободы: поворачивается как жесткое це-

лое вокруг точки A и – при неподвижной части AD – участок DC , в свою очередь, может поворачиваться вокруг точки D . Покажем реакции отброшенных связей R_1 , R_2 , R_3 , чтобы получить эквивалентную задачу (рис.5.18). Внешних нагрузок в

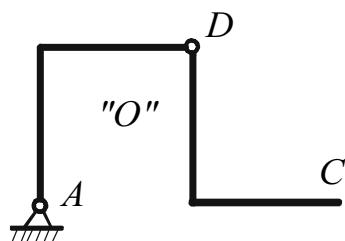


Рис. 5.17

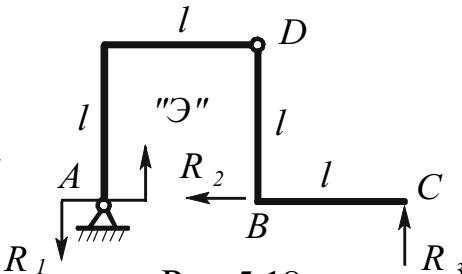


Рис. 5.18

этой задаче нет. Реакции R_1 и R_2 направляем не произвольно (в отличие от R_3): чтобы не ошибиться при вычислении правой части канонического уравнения, их направление отвечает направлению заданных смещений.

В соответствии с проведенным кинематическим анализом записываем два уравнения равновесия:

$$R_3l - R_2l = 0, \quad R_3 \cdot 2l + R_1 = 0.$$

Решаем эту систему относительно неизвестных R_1 , R_2 , R_3 :

$$R_3 = X_1, \quad R_2 = X_1, \quad R_1 = -2X_1l.$$

Приняв $X_1 = 1$, строим эпюру изгибающих моментов (рис.5.19а,б) и вычисляем $\delta_{11} = 10l^3/(3EI)$. Влиянием на этот коэффициент нормальной и поперечной силы пренебрегаем ввиду его малости по сравнению с изгибом. Каноническое уравнение для этой задачи

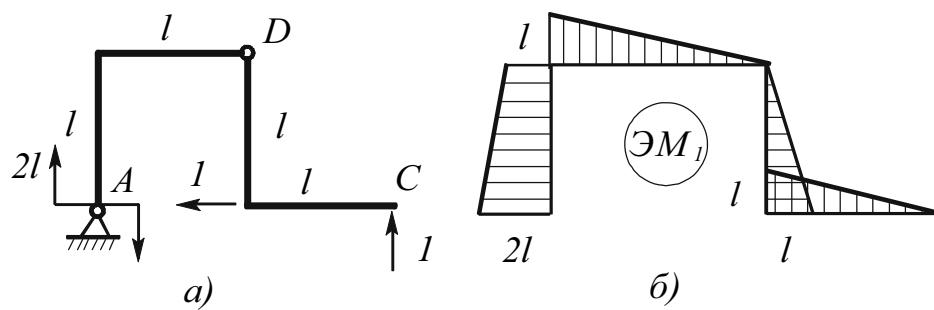


Рис. 5.19

имеет вид $\delta_{11}X_1 = \sum_{i=1}^3 R_{1m}\Delta_m$, правая часть (при $X_1 = 1$) равна $-2l\varphi_A + 1\cdot\Delta_B$. Таким

образом, если, случайно, $\Delta_B = 2\varphi_A l$, то напряжений в конструкции не возникает; иначе – $X_1 = (\Delta_B - 2l\varphi_A)/\delta_{11}$. Умножив единичную эпюру (рис.5.19б) на X_1 , найдем M , а затем – напряжения.

5.7. Определение перемещений

При определении перемещений в статически неопределенной задаче, как и в статически определимой, рационально использовать метод Мора: формулировать вспомогательную задачу, удалив все внешние воздействия на конструкцию и приложив фиктивную единичную нагрузку требуемого типа. Подчеркнем, что конструкция (вместе с опорами) во вспомогательной задаче должна быть прежней, то есть вспомогательная задача также статически неопределенна.

Однако анализ показывает, что второй раз раскрывать статическую неопределенность (при фиктивной нагрузке) не нужно. Это связано с тем, что величины

X_i характеризуют самоуравновешенное состояние внутренних сил, а деформации в конструкции всегда совместны (речь идет о полных деформациях, а не о монтажных, или тепловых, или силовых составляющих деформации). Работа же самоуравновешенных сил на совместных деформациях всегда равна нулю – независимо от величин X_i .

Рассмотрим, например, случай один раз статически неопределенной конструкции. Во вспомогательной задаче для внутренних силовых факторов и для реакций опор (смещающихся или не смещающихся, но мешающих) справедлива суммированная (перпозиция):

$$\begin{aligned}\Phi^{sc} &= \Phi_p^{sc} + X_1^{sc} \Phi_1^{sc}, \\ R_m^{sc} &= R_m^{sc}(P) + R_m^{sc}(X_1^{sc}).\end{aligned}$$

После подстановки этих выражений для внешних и внутренних сил в определение Мора для перемещения при наличии смещающихся опор (2.5) получим

$$\Delta = \int_L \Delta \Phi^{sc} dz - \sum_{i=1}^n \Delta_i R_i^{sc} = \int_L \Delta \Phi_p^{sc} dz - \sum_{i=1}^n \Delta_i R_i^{sc}(P) + X_1^{sc} \left[\int_L \Delta \Phi_1^{sc} dz - \sum_{i=1}^n \Delta_i R_i^{sc}(X_1^{sc}=1) \right]$$

(учтено, что при отсутствии фиктивной нагрузки во вспомогательной задаче реакции отброшенных связей пропорциональны параметру X_1^{sc}). Однако выражение в последней скобке равно нулю – в связи с требованием совместности (5.5) для деформации $\Delta(z)$ в основной задаче. Таким образом, при вычислении перемещения определять значение X_1^{sc} нет необходимости, оно все равно будет умножено на ноль. Можно записать

$$\Delta = \int_L \Delta \Phi_p^{sc} dz - \sum R_i^{sc}(P) \Delta_i, \quad (5.11)$$

(что соответствует приравниванию X_1^{sc} нулю), но бывает удобно, не раскрывая второй раз статическую неопределенность, принять для этой неизвестной какое-нибудь другое значение и использовать выражение (2.5).

Пример 7. Рама на рис.5.20 выполнена идеально ($\Delta^0=0$), но крепится на опоры, изготовленные неточно. Насколько сместится точка A по сравнению с чертежом?

Решение. Первая часть задачи – определение упругих деформаций (построение эпюры изгибающих моментов) решается стандартно. Поскольку предполагается, что смещаются все опоры, в основной системе придется снять все внешние связи. Появятся три обычные степени свободы (рис.5.21, неизвестных четыре, степень статической неопределенности равна единице). Каноническое уравнение имеет вид $\delta_{II} X_I = \sum R_i^{(I)} \Delta_i$ (смещения считаются положительными, если их направления отвечают стрелкам на рис.5.21). Полученная после раскрытия статической неопределенности эпюра кривизн показана на рис.5.22, где обозначено $a = 0.6(\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4)/l^2$. Для определения положения точки A следует найти ее горизонтальное и вертикальное смещение, вызванное смещениями опор Δ_i . Очевидно, что горизонтальное смещение равно Δ_4 (продольной деформацией стержня, как обычно, пренебрегаем по сравнению с изгибной).

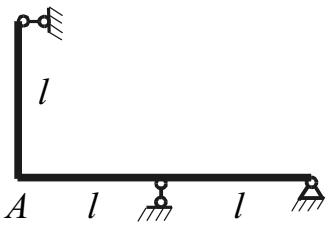


Рис.5.20

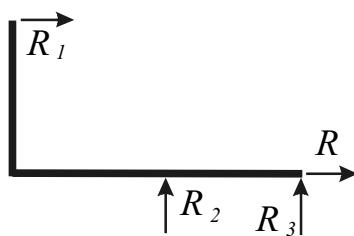


Рис.5.21

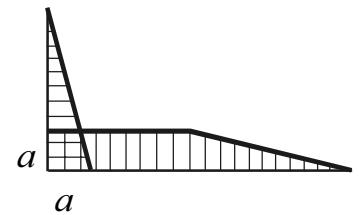


Рис.5.22

Чтобы найти вертикальное перемещение v , следует решить вспомогательную задачу: приложить в точке A вертикальную единичную силу (рис.5.23, ищем перемещение вверх). Для решения нам понадобятся изгибающие моменты и все опорные реакции во вспомогательной задаче (рисунок 5.24 – эквивалентная система во вспомогательной задаче). Поскольку значение неизвестной X_1^{sc} нам не важно, можно выбрать любое из бесконечного множества решений системы уравнений равновесия во вспомогательной задаче, то есть она как бы превращается в статически определимую. Покажем это, выбрав два варианта решения вспомогательной задачи.

Решение а. Примем значение R_1^{sc} на рис.5.24 равным нулю, тогда $R_2^{sc} = -2$, $R_3^{sc} = 1$, $R_4^{sc} = 0$. Эпюра изгибающих моментов во вспомогательной задаче в этом случае показана на рис.5.25;

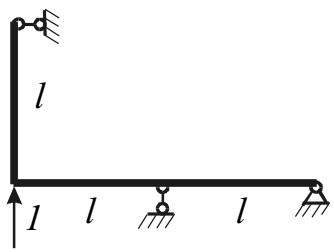


Рис.5.23

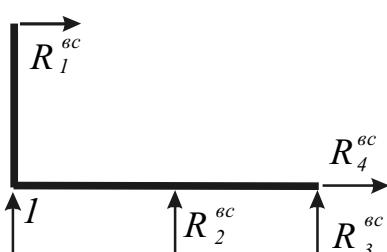


Рис.5.24

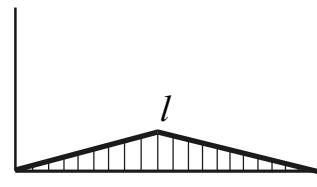


Рис.5.25

$$v = 5/6l^2a - (-2\cdot\Delta_2 + 1\cdot\Delta_3) = (\Delta_1 + 3\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4)/2.$$

Как видим, результат не зависит от жесткости рамы, если последняя постоянна.

Решение б. Если приравнять нулю не R_1^{sc} , а R_3^{sc} , то получим $R_1^{sc} = -1$, $R_2^{sc} = -1$, $R_3^{sc} = 0$, $R_4^{sc} = 1$. Эпюра M^{sc} показана на рис.5.26, из выражения (2.5) получаем

$$v = -5/6l^2a - (-1\cdot\Delta_1 - 1\cdot\Delta_2 + 1\cdot\Delta_4) = (\Delta_1 + 3\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4)/2.$$

Ответ тот же.

В приведенных вариантах «решения» вспомогательной задачи мы приравнивали одну из реакций нулю – чтобы получить попроще эпюру изгибающих моментов. Можете для упражнения приравнять одну из реакций, например, 13,5. Если правильно найдете остальные и не ошибетесь при построении эпюры M^{sc} , получите прежний ответ.

Пример 8. В ферме, показанной на рис.5.27, пары обозначенных стержней одинаковы, их длины равны l и $\sqrt{2}l$. Требуется найти угол поворота стержня I .

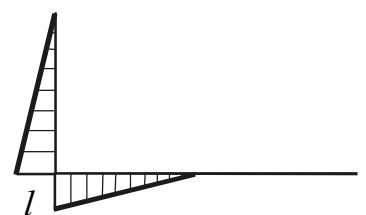


Рис.5.26

Решение. Задача кососимметрична; это нетрудно увидеть, сместив точку приложения силы P к центру абсолютно жесткого горизонтального стержня (рис.5.28). По рекомендации для ферм, при построении эквивалентной системы разрезаем все стержни и обозначаем неизвестные реакции снятых связей с учетом косой симметрии (рис.5.28). Из условий равновесия найдем $B = P\sqrt{2}/2$, $A = P/2$; тем самым найдены нормальные силы.

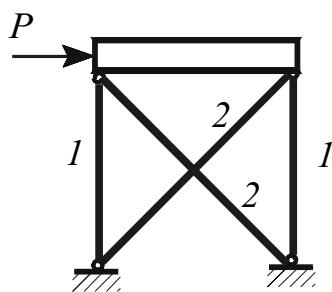


Рис. 5.27

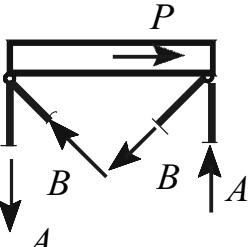


Рис. 5.28

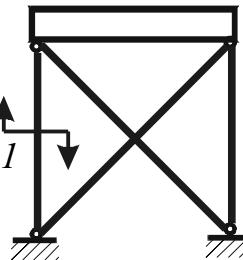


Рис. 5.29

Для поиска угла поворота φ возвращаемся к исходной задаче (рис.5.27), снимаем нагрузку P и прикладываем пару сил моментом 1 (рис.5.29). Чтобы воспользоваться интегралом Мора, нужно построить эпюру нормальных сил в этой вспомогательной задаче.

Здесь симметрии нет ("Э" показана на рис.5.30). Нетривиальных условий равновесия – четыре, неизвестных – пять; задача статически неопределенна.

Пользуясь разрешением принять во вспомогательной задаче неизвестную метода сил произвольно (что бы она собой ни представляла), примем, например, что $N_4^{ec}=0$. Из равновесия жесткого стержня следует, что и $N_3=0$. Равновесие левого стержня требует значения $A=-1/l$ и, возвращаясь к горизонтальному, найдем остальные неизвестные: $N_2^{ec}=-\sqrt{2}/l$, $B=1/l$. Все нормальные силы найдены ($N_1^{ec}=B=1/l$), из интеграла Мора находим φ :

$$\varphi = \sum N_i N_i^{ec} l_i / (ES)_i = (\sqrt{2}/(ES)_2 + 1/(2ES)_1)P.$$

Чуть менее громоздко эту задачу можно было решить, используя симметрию (косую) исходной задачи: поворот обоих стержней 1 одинаков. Найдем сумму углов поворота этих стержней, приложив, во вспомогательной задаче, соответственно, две единичные одинаково направленные пары сил (рис.5.31, 5.32). Равновесие вертикальных стержней требует $A^{ec}=1/l$; горизонтального – $C^{ec}=\sqrt{2}/l$, $B^{ec}=-1/l$. Интеграл Мора:

$$2\varphi = \sum N_i N_i^{ec} l_i / (ES)_i = 2(P/2 \cdot 1/l \cdot l / (ES)_1) + 2 \cdot (\sqrt{2} P/2 \cdot \sqrt{2}/l \cdot l \sqrt{2} / (ES)_2),$$

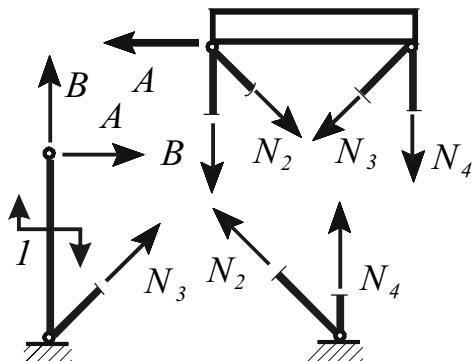


Рис. 5.30

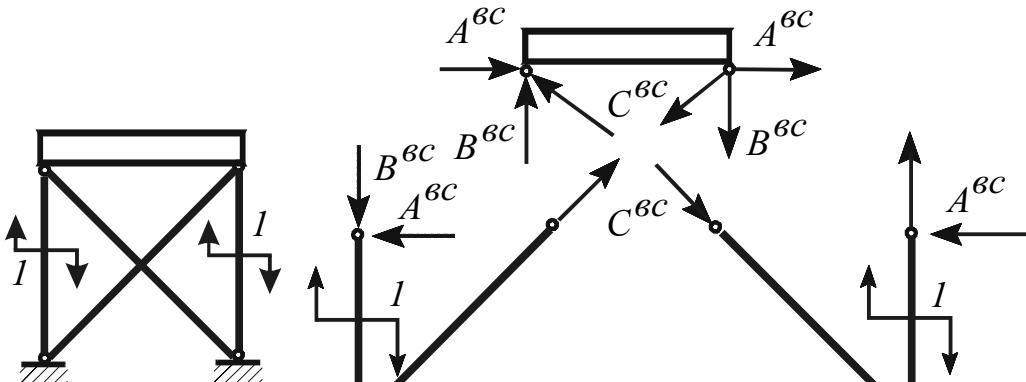


Рис. 5.31

Рис. 5.32

что совпадает с предыдущим ответом.

5.8. Температурные смещения

В предыдущем параграфе был рассмотрен общий случай определения смещений с помощью интеграла Мора. На практике часто приходится иметь дело с тепловыми смещениями. Ниже показаны два приема, облегчающих это дело.

Пусть внешним воздействием на статически неопределенную конструкцию является только нагрев (нет силовых воздействий), а лимитирует работоспособность не прочность, а жесткость конструкции. Температурные напряжения в этом случае можно не определять и, оказывается, статическую неопределенность в основной задаче можно не раскрывать, но следует полностью решить вспомогательную (изотермическую) статически неопределенную задачу. Покажем это.

Интеграл Мора (если опоры на месте)

$$\Delta = \int_L \bar{D} \Phi^{bc} dz \quad (5.12)$$

требует, казалось бы, знания полной деформации в основной задаче:

$$\bar{D} = \bar{D}^e + \bar{D}^T, \quad \bar{D}^e = \Phi / \mathcal{K},$$

где, ввиду отсутствия внешних сил, $\Phi = \sum \Phi_m X_m$ (см. выражение (5.3)). Следовательно, выражение (5.12) принимает вид

$$\Delta = X_m \int_L \Phi_m \Phi^{bc} dz / \mathcal{K} + \int_L \bar{D}^T \Phi^{bc} dz. \quad (5.13)$$

Учтем, что $\Phi^{bc} / \mathcal{K} = \bar{D}^{bc}$ (вспомогательная задача упруга) и

$$\int_L \bar{D}^{bc} \cdot \Phi_m dz = 0 \quad (5.14)$$

(деформации во вспомогательной задаче совместны: при ее решении мы добросовестно раскрыли статическую неопределенность, игнорируя рекомендации предыдущего параграфа). Это позволяет получить

$$\Delta = \int_L \bar{D}^T \Phi^{bc} dz \quad (5.15)$$

то есть в исходной задаче достаточно знать лишь температуры, но статическую неопределенность вспомогательной задачи следует раскрыть.

Пример 9. Пусть балка прямоугольного поперечного сечения подвергается тепловому воздействию, представленному на рис. 5.33. Требуется определить угол поворота сечения A .

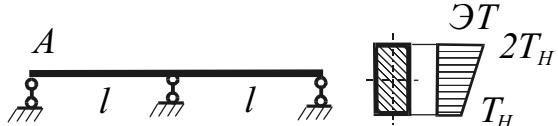


Рис.5.33

Решение. В исходной задаче следует определить лишь тепловые деформации осевой линии – χ^T и ε_0^T . Поскольку горизонтальных связей нет, деформация ε_0^T не влияет ни на силы, ни на изгиб. Кривизна постоянна по длине и равна $-\alpha T_H/h$.

Вспомогательная задача показана на рис.5.34а. Это – статически неопределенная задача; раскрытие статической неопределенности (стандартным образом, методом сил) дает эпюру M^{sc} (рис.5.34б). Интеграл M^{sc} по длине $2l$ равен $-l/4$. Соответственно, интеграл Мора определяет ответ

$$\theta_A = \int_L^L \Phi^{sc} dz = \int_{2l} \chi^T M^{sc} dz = (-\alpha T_H/h) \cdot (-l/4) = \alpha T_H l / (4h).$$

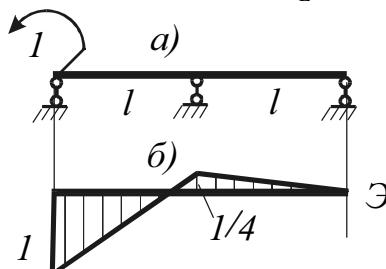


Рис.5.34

Данный прием эффективен в случаях, когда в конструкции могут варьироваться тепловые поля, а нас интересует смещение конкретной точки (например, положение рабочего органа). Тогда вспомогательная задача решается как следует, но один раз; решать температурные задачи для каждого поля температур не нужно.

Метод обобщается на произвольные тела:

$$\Delta = \int_V \varepsilon_{ij}^T(x) \sigma_{ij}^{sc}(x) dV$$

или, если материал изотропен,

$$\Delta = 3 \int_V \alpha T(x) \sigma_0^{sc}(x) dV,$$

где $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ – среднее нормальное напряжение в точке конструкции x .

5.9. Метод фиктивных нагрузок

Заслуживает внимания другой нестандартный подход к решению температурных задач, предложенный в теории упругости [3]. Было показано, что задача термоупругости может быть заменена изотермической, если добавить фиктивные объемные и поверхностные нагрузки и условия равновесия записывать для *фиктивных напряжений*, которые связаны с деформациями (действительными, *не фиктивными*) обычным изотермическим законом Гука. После решения такой задачи остается лишь от найденных фиктивных напряжений перейти к действительным, а деформации и смещения корректировать не нужно.

Фиктивные объемные (отнесенные к единице объема) силы равны $-m \mathbf{T}'$, где \mathbf{T}' – вектор-градиент температуры. Он направлен в сторону скорейшего возраста-

ния температуры, и равен по модулю скорости роста температуры при смещении в этом направлении. Под температурой T , как обычно, понимается нагрев (в градусах) в данной точке; $m = \alpha E / (1 - 2\mu)$, μ – коэффициент Пуассона.

Фиктивные поверхностные (распределенные по поверхности тела) силы направлены по нормали к поверхности и их интенсивность равна mT . Если $T > 0$, эти силы направлены в сторону растяжения, при $T < 0$ – в сторону сжатия. Отсюда следует, в частности, что на границе раздела двух материалов (с характеристиками $m = m_1$ и $m = m_2$) по нормали к этой поверхности должна быть приложена фиктивная распределенная по поверхности сила интенсивностью $(m_1 - m_2)T$, направленная, если эта величина положительна, в сторону второго материала.

При решении обычных задач сопротивления материалов эта несколько громоздкая схема заметно упрощается. Пусть стержень прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) подвержен переменному по высоте нагреву. Рассмотрим элемент длины стержня dz (рис.5.35). Фиктивные объемные силы, действующие на элемент, сводятся к элементарной вертикальной (направленной вниз) силе

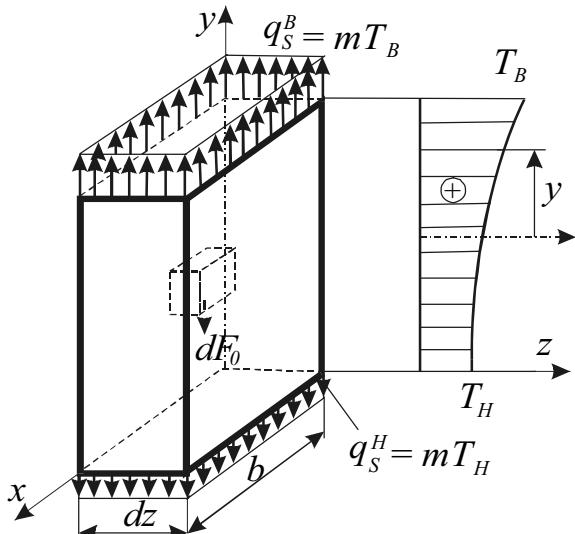


Рис.5.35

По четырем поверхностным граням элемента длины стержня «приложены» фиктивные поверхностные силы (интенсивность mT) – по нормали к поверхности. На боковых гранях они уравновешиваются друг друга, их суммарная сила равна нулю. Но на верхней и нижней действуют mT_B (вверх) и mT_H (вниз). В итоге оказывается, что сумма объемной и поверхностной силы, действующей на элемент длины, равна нулю.

Остается рассмотреть фиктивные поверхностные силы по торцам стержня (если они не защемлены): они имеют интенсивность, равную mT , то есть изменяются по закону изменения температуры. В итоге они сводятся к фиктивной внешней силе, действующей по нормали

$$N^* = \int_S mT ds = mS T_{cp} \quad (5.16)$$

($T_{cp} = 1/S \int_S T ds$, S – площадь сечения, T_{cp} – средняя по сечению температура), и к

фиктивному внешнему моменту относительно центральной оси x

$$\begin{aligned} dF_0 &= bdydz(dT/dy)m = bmdz \int_h (dT/dy)dy \\ &= = bmdz(T_B - T_H). \end{aligned}$$

Таким образом, интенсивность фиктивной поперечной нагрузки dF_0/dz зависит лишь от разности температур – в верхней точке (T_B) и в нижней точке поперечного сечения. Это справедливо лишь для данного случая: если температура изменяется и по x , или сечение не является прямоугольным, то выражение для фиктивной силы будет иным.

$$M^* = \int_S mTy ds = mS_x^T, \quad S_x^T = \int_S Ty ds. \quad (5.17)$$

Здесь S_x^T – статический момент температуры относительно оси x .

То же относится и к случаю биметаллической балки: если она нагрета равномерно по длине (и, возможно, неравномерно по высоте), то объемные и поверхностные силы по всей длине можно считать нулевыми, а на торцах каждому из металлов следует приложить фиктивные нагрузки (5.16), (5.17). Далее решение обычной изотермической задачи позволяет найти напряжения, деформации и смещения; последние – истинны, а напряжения – фиктивны, их нужно корректировать.

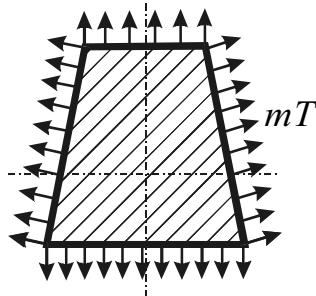


Рис.5.36

Фиктивные напряжения σ^* отличаются от истинных σ на всестороннее равномерное растяжение величиной mT . Однако в задачах сопротивления материалов, объектом которых являются стержневые конструкции, нормальные напряжения в продольных площадках равны нулю, поэтому схему пересчета напряжений можно упростить.

Рассмотрим стержень произвольного сечения (вариант сечения показан на рис. 5.36), защемленный по концам и равномерно нагретый. Фиктивные объемные силы отсутствуют, фиктивные поверхностные – постоянные по длине стержня и по боковой поверхности (рис.5.36), равны mT . Они создают в плоскости поперечного сечения фиктивные напряжения – равномерное растяжение $\sigma_x^* = \sigma_y^* = mT$. Фиктивные продольные напряжения σ_z^* и истинные поперечные деформации ε' находим из закона Гука, зная, что продольные деформации ε_z равны нулю по условиям закрепления:

$$\sigma_z^* = 2\mu E\varepsilon'/(1 - \mu - 2\mu^2), \quad \sigma_x^* = mT = E((-\mu)\varepsilon' + \mu\varepsilon) = E\varepsilon'/(1 - \mu - 2\mu^2), \\ \varepsilon' = (1 - \mu - 2\mu^2)mT/E, \quad \sigma_z^* = 2\mu E\varepsilon'/(1 - \mu - 2\mu^2) = 2\mu mT.$$

Действительные напряжения в продольных сечениях: $\sigma' = \sigma_x^* - mT = mT - mT = 0$, в поперечных – $\sigma_z = \sigma_z^* - mT = 2\mu mT - mT = -(1 - 2\mu)mT = -\alpha ET$.

Итак, при решении подобных задач фиктивные объемные силы следует считать нулевыми; фиктивные поверхностные силы прикладывать только на торцах стержня (если они свободны) и считать их равными $E\alpha T$. Фиктивные напряжения в поперечных сечениях связаны с истинными продольными деформациями по формуле $\sigma^* = E\varepsilon$; после их определения находим истинные напряжения:

$$\sigma = \sigma^* - E\alpha T. \quad (5.18)$$

Пример 10. В равномерно нагретом биметаллическом стержне (рис.5.37а), имеющем одинаковые размеры поперечных сечений (прямоугольник $b \times h$), но различные значения коэффициентов теплового расширения, определить вертикальное перемещение точки A .

Решение. Модули упругости металлов одинаковы, поэтому наиболее удобен для решения задачи метод фиктивных нагрузок: в изотермической задаче фигурирует один стержень (а не два) сечением $b \times 2h$. Правый конец свободен, поэтому в фиктивной задаче к нему должна быть приложена фиктивная нагрузка

интенсивностью $E\alpha T$. Она дает две равнодействующие $E\alpha_1 TS_1$ и $E\alpha_2 TS_2$ (рис.5.37б), где $S_1=S_2=S=bh$. Методом сечений найдем внутренние силовые факторы, постоянные по длине (рис.5.37в):

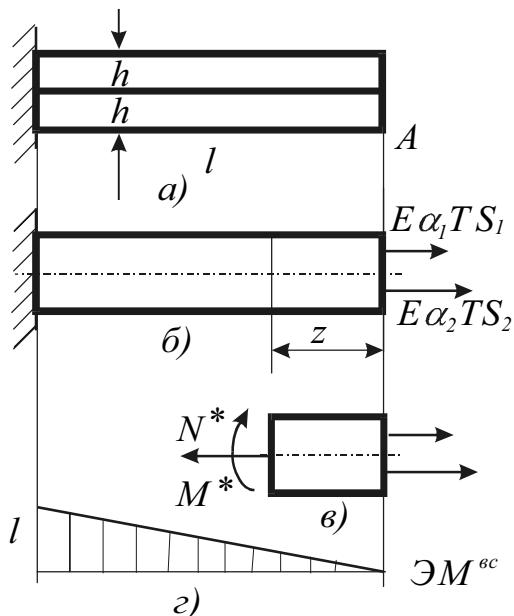


Рис.5.37

$$N^* = \sum E\alpha_i TS = ETS(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$M^* = ETS h (\alpha_2 - \alpha_1)/2.$$

Нормальная сила не влияет на вертикальные перемещения; изгибающий (фиктивный) момент определяет обычным образом кривизну $\chi = M^*/(EI)$ ($I = b(2h)^3/12$), кривизна в этом выражении является действительной.

Соответствующая поставленному вопросу вспомогательная эпюра показана на рис.5.37г. В соответствии с интегралом Мора

$$\nu_A = \int \chi M^{ec} dz = \chi \cdot l^2/2 = M$$

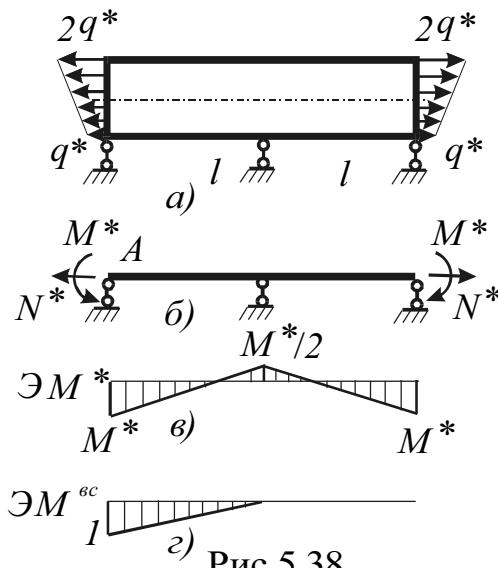
$$^*l^2/(2EI) = 3(\alpha_2 - \alpha_1)l^2T/(8h).$$

Найденное перемещение является истинным (не фиктивным).

В случае, когда $E_1 \neq E_2$, $S_1 \neq S_2$ и $T \neq const$ задача несколько более громоздка, но это почти стандартная задача сопротивления материалов. Пример решения такой задачи приведен в разделе 3 (задача 9).

Пример 11. Пусть требуется определить угол поворота сечения A в задаче из примера 9 (рис.5.33).

Решение. К торцам балки прикладываем фиктивную распределенную нагрузку интенсивности $q^* = \alpha TE$ (рис.5.38а). Она может быть заменена силами $N^* = 3q^*S/2$ и моментами $M^* = q^*bh^2/12$ (рис.5.38б). Раскрываем статическую неопределенность, находим эпюру фиктивных изгибающих моментов (рис.5.38в). Для определения перемещений строим эпюру M^{ec} (рис.5.38г) во вспомогательной задаче, приложив единичный момент в сечении A и приняв, для простоты, что правая опорная реакция равна нулю (поскольку основная задача решена полностью, то во вспомогательной значение X_1^{ec} произвольно). Ответ, естественно, получаем тот же, что и в примере 9.



Решите самостоятельно

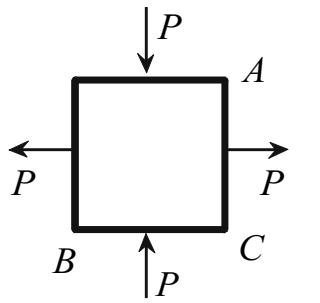


Рис. 5.39

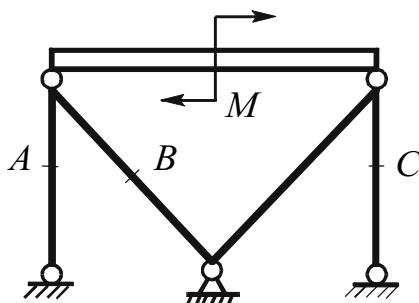


Рис. 5.40

Для систем, изображенных на рис.5.39 и 5.40, постройте эпюры Φ (задачи, с учетом симметрии, статически определимы). Чему равен относительный угол поворота сечений A и B , A и C ?

6. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ФЕРМ

Конструкции, работающие в условиях растяжения-сжатия (фермы), занимают важное место среди других стержневых систем. Однородность напряженно-деформированного состояния в пределах каждого стержня значительно упрощает расчеты и позволяет решать весьма разнообразные задачи, в том числе системы, требующие нетривиального кинематического анализа.

Простейшая ферма – это набор стержней, шарнирно скрепленных друг с другом по концам (узлам) и нагруженных (или закрепленных) только в узлах (например, рис.6.1, рис.6.2). Фермы могут включать так называемые жесткие диски – элементы, работающие не только на растяжение (сжатие), но и на изгиб или кручение, но их жесткость намного больше жесткости стержней. Диски считают абсолютно жесткими (например, стержень, выделенный двойной линией на рис.6.3, заштрихованный элемент на рис.6.4).

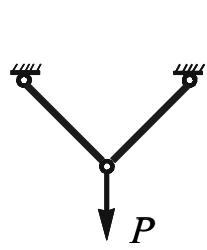


Рис.6.1

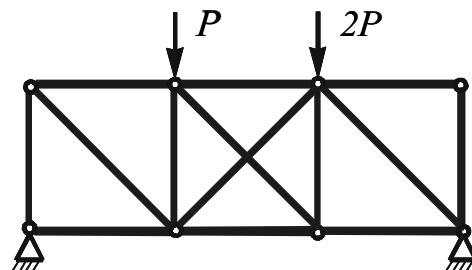


Рис.6.2

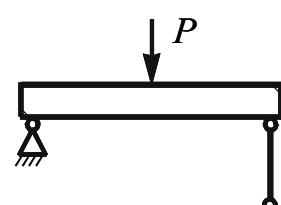


Рис.6.3

Встречаются рамы, работающие, как фермы. Они состоят из прямых участков и нагружены сосредоточенными силами (в том числе, опорными реакциями) на концах участков (рис.6.5, 6.6). Строго говоря, это статически неопределенные

рамы. Однако из-за того, что жесткость стержней на сжатие обычно существенно выше, чем на изгиб, при определении внутренних силовых факторов (раскрытие статической неопределенности) податливостью стержней на растяжение-сжатие пренебрегают по сравнению с изгибной. Это допущение и приводит к отмеченному странному на первый взгляд результату (вполне согласующемуся, однако, с той моделью, которую мы используем для рам).

Пример 1 (рис.6.7 – плоская статически неопределенная рама). Для решения задачи выбираем эквивалентную систему, удовлетворяющую условиям симметрии исходной задачи (рис.6.8). Условия равновесия:

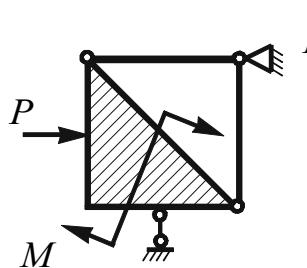


Рис.6.4

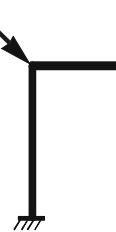


Рис.6.5

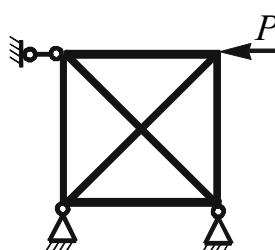


Рис.6.6

$$\sum X = \sum Y = P - A + B = 0, \quad \sum M_{\alpha} = 2Bl - 2C = 0.$$

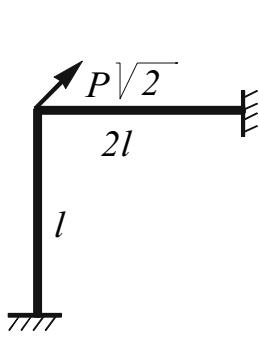


Рис.6.7

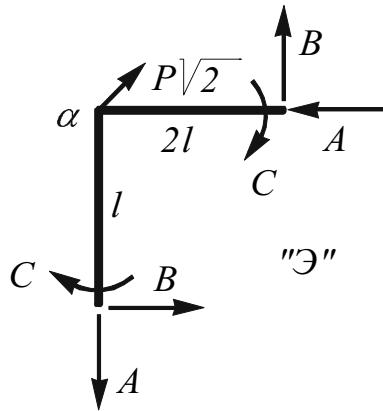


Рис.6.8

Рама работает как ферма. По концам участков могут быть поставлены шарниры (снято запрещение поворота), это задачи не изменяет.

Оценим погрешность, с которой решена данная задача. Для этого, вычисляя Δ_{IP} и δ_{II} , учтем податливость при сжатии. Получим:

$$\Delta_{IP} = \int N_I N_P / (ES) dz = 2Pl / (ES), \quad \delta_{II} = \int M_I^2 / (EI) dz + \int N_I^2 / (ES) dz = 2l(\lambda^2/3 + 1) / (ES).$$

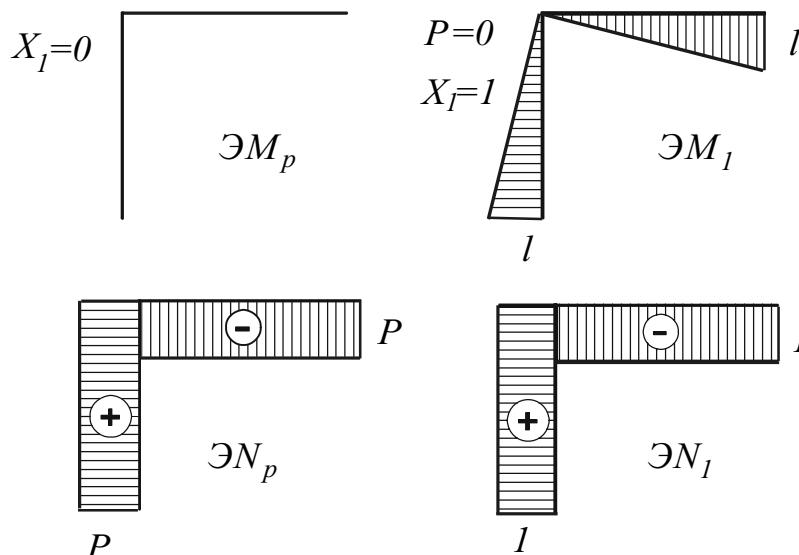


Рис.6.9

момент (в заделках) равен $(M_I)_{max} X_I = -3Pl/\lambda^2$ при нормальной силе, практически равной P (точнее, $A=P+X_I=P(1-3/\lambda^2)$).

Максимальное напряжение в раме

$$\sigma_{max} = N/S + M_{max}/W = P/S + 3Pl/(\lambda^2 W)$$

для случая круглого поперечного сечения равно $P(1+6/\lambda)/S$, и, например, при $\lambda=200$ ($l/d=50$) найдем

$$\sigma_{max} = 1.03P/S.$$

Значит, пренебрегая податливостью на сжатие, мы ошибаемся в данной задаче на 0,01% в величине опорной реакции, а в значении максимального напряжения – на 3% (при $\lambda=200$). В менее гибких стержнях ошибка окажется большей.

Одно из множества решений этой системы имеет вид:

$$A=P+X_I, \quad B=X_I, \quad C=X_I l.$$

Коэффициенты канонического уравнения ($\delta_{II} X_I + \Delta_{IP} = 0$) находим с использованием соответствующих эпюр (рис.6.9). Пренебрегая, как обычно, податливостью стержней на сжатие, получаем $\Delta_{IP} = 0$, то есть $X_I = 0$; грузовая эпюра и представляет решение.

Здесь λ – гибкость шарнирно опертого стержня l/i , где i – радиус инерции сечения, равный $\sqrt{I/S}$.

При вычислении δ_{II} вторым слагаемым можно пренебречь, так как даже для очень жестких стержней погрешность не будет большой: при $\lambda=20$ она составляет 0,75%, при $\lambda=200$ – меньше сотой процента. Значит,

$$X_I = -\Delta_{IP} / \delta_{II} = -3P/\lambda^2$$

и максимальный изгибающий

В отличие от рассмотренного примера, конструкция, показанная на рис.6.10, представляет обычную раму: здесь пренебрежение податливостью на сжатие практически не изменяет значений неизвестных метода сил и величин изгибающих моментов. Чтобы это увидеть, достаточно при выборе основной системы врезать в концы участков шарниры. Если в предыдущем случае получается обычная ферма, то здесь – механизм, не находящийся в равновесии. Но при другой нагрузке (рис.6.5) эта рама работает как ферма.

В рамках иногда встречаются отдельные элементы фермы, которые полезно выявить для упрощения построения эпюров Φ . Это стержни, шарнирно закрепленные по концам и не испытывающие поперечной нагрузки (или пар сил) по своей длине. Например, в таких условиях находятся элементы 1 и 2 на рис.6.11а,б. Выбирая

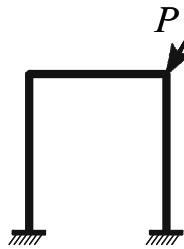


Рис.6.10

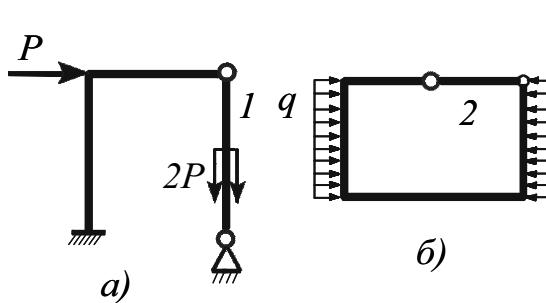


Рис.6.11

основную систему, полезно такие элементы разрезать, учитывая сразу, что изгибающие моменты и поперечные силы в них равны нулю. Заметим, что в задаче на рис.5.5 мы не догадались этого сделать, отчего появилась лишняя неизвестная ре-

акция отброшенной связи C , равная, как это выяснится из условий равновесия, нулю.

Эквивалентные задачи для рам, представленных на рисунках 6.11а и б, могут иметь вид, показанный на рис.6.12 и 6.13. Это заметно облегчает решение задач.

В разделе 5 была дана рекомендация: при определении внутренних силовых факторов в фермах разрезать все стержни. Однако если по отношению к внешним связям задача статически определима, то вначале полезнее рассмотреть их глобально (т.е. не разрезая и не интересуясь, есть ли, скажем, стойки и раскосы в фермах) и определить эти

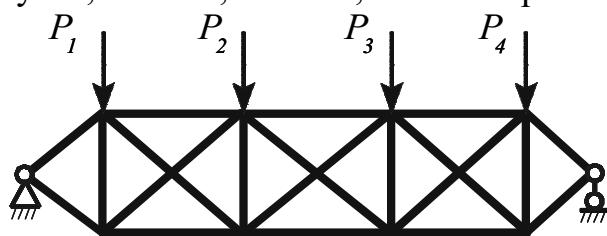


Рис.6.14

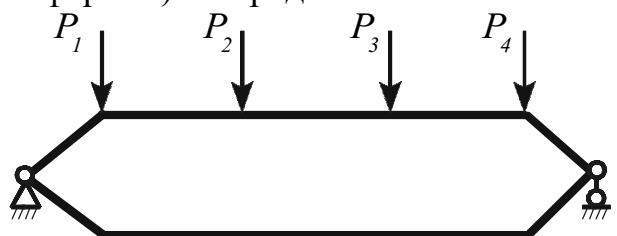


Рис.6.15

реакции. Например, ферму на рис.6.14 представим вначале так, как показано на рис.6.15, определим реакции внешних связей, а затем, рассматривая их как внешнюю нагрузку, решаем задачу обычным методом. Подобным же образом в раме на

рис.5.5 можно найти вначале реакцию A (рис.5.6, очевидно, $A = P$) и затем – строить эквивалентную задачу (рис.5.5).

7. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Идеально пластический материал (или идеально упругопластический) может иметь любое значение деформации, но его напряжение по модулю не превышает значения σ_T , если речь идет о растяжении-сжатии. Деформацию ε разделяют на упругую $\varepsilon_e \equiv \sigma/E$ и пластическую $\varepsilon_p \equiv \varepsilon - \varepsilon_e$. Если напряжение по модулю не достигло значения σ_T , то пластическая деформация постоянна; при начальном нагружении она равна нулю. При $\sigma = \sigma_T$ увеличение деформации равно увеличению ε_p , уменьшение ε равно уменьшению ε_e . При $\sigma = -\sigma_T$, наоборот, уменьшение ε равно уменьшению ε_p , но если деформация возрастает, то изменяется только упругая деформация. Одной из главных особенностей неупругого материала является неоднозначность связи между напряжением и деформацией. Соответственно, при расчетах следует знать не только текущее значение нагрузки, но и историю ее изменения.

При монотонном возрастании параметра нагрузки (например, P) конструкция вначале работает упруго – пока самое большое напряжение (которое находится, соответственно, из обычного упругого расчета) не достигнет предельного значения. Величина параметра P в этот момент обозначается индексом: $P = P_T$. С этого момента стадия упругой работы конструкции сменяется упругопластической: в части конструкции напряжения достигли предельных значений, и возрастание нагрузки уравновешивается возрастанием напряжений в других частях конструкции. Происходит перераспределение напряжений – по сравнению с полем напряжений в упругой стадии работы конструкции. Наконец, возникает предельное состояние ($P = P_0$ – предельная нагрузка), когда возрастание перемещений соответствует возрастанию пластических деформаций при постоянных упругих деформациях (и, соответственно, при постоянных напряжениях и постоянной нагрузке). Достижение состояния конструкции, при котором возможно такое движение частей тела – только за счет пластических деформаций – называют образованием пластического механизма. При этом изменения пластических деформаций кинематически возможны, а напряжения статически допустимы: они удовлетворяют условиям равновесия и не превышают предельных.

Существуют два экстремальных признака предельной нагрузки: статический и кинематический. По первому предельная нагрузка – это наибольшая из таких, которые уравновешиваются статически допустимыми напряжениями. По второму – это наименьшая из таких, при которых возможен пластический механизм. Соответственно, есть два метода определения предельной нагрузки: статический и кинематический.

В статическом методе задают возможные распределения напряжений в конструкции. Каждому из них отвечает некоторое значение P ; наибольшее из всех возможных и есть предельное значение P_0 .

Часто рассматривают не все множество таких распределений напряжений, а лишь некоторый легко задаваемый набор. В этом случае получают приближенное значение параметра предельной нагрузки, заведомо не превышающее истинное

(т.е. оценку "снизу" для последнего). Ошибка в таком приближенном методе идет в запас прочности.

Пример 1 – ферма на рис.7.1. Требуется найти предельную нагрузку.

Решение статическим методом. Ищем максимум

$$P_{max}=? \quad (7.1)$$

при условиях и ограничениях:

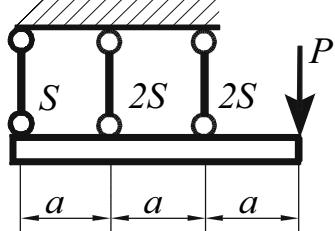


Рис.7.1

$$N_1 + N_2 + N_3 = P, \quad (7.2)$$

$$2N_1 + N_2 + P = 0, \quad (7.3)$$

$$|N_1/S| \leq \sigma_T, |N_2/2S| \leq \sigma_T, |N_3/2S| \leq \sigma_T. \quad (7.4)$$

Здесь (7.2) и (7.3) – условия равновесия; (7.4) – условия ограниченности напряжений; стержни пронумерованы слева направо.

Решение системы уравнений равновесия имеет вид:

$$N_1 = X_1, \quad N_2 = -P - 2X_1, \quad N_3 = 2P + X_1.$$

Соответственно, ограничения (7.4) принимают форму:

$$-\sigma_T S \leq X_1 \leq \sigma_T S, \quad -2\sigma_T S \leq -P - 2X_1 \leq \sigma_T S, \quad -2\sigma_T S \leq P + 2X_1 \leq 2\sigma_T S. \quad (7.5)$$

На плоскости $\{X_1, P\}$ им отвечает область допустимых значений, показанная на рис.7.2. Нетрудно найти самое большое значение P (это и есть предельная нагрузка) и соответствующее значение N_1 : $P_0 = 1,5\sigma_T S$ при $X_1 = -\sigma_T S = N_1$, $N_2 = \sigma_T S/2$, $N_3 = 2\sigma_T S$.

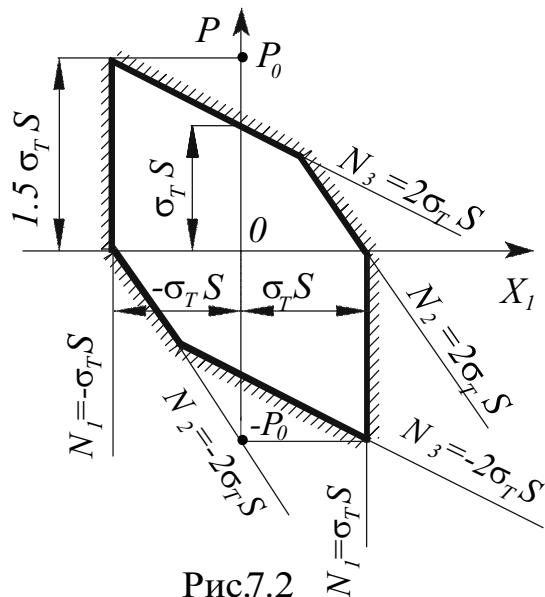


Рис.7.2

Кинематический метод более нагляден и чаще используется в инженерной практике. Условия равновесия и допустимость напряжений при этом не рассматриваются. Для определения нагрузки P_0 используют принцип возможных перемещений: в предельном состоянии работы внешних сил ΔW на элементарном движении пластического механизма равна работе внутренних сил – а именно, рассеянию энергии ΔD на пластическое деформирование

$\Delta\varepsilon_p$. Последняя в условиях растяжения-сжатия представляет интеграл

$$\Delta D = \int_V \sigma \Delta \varepsilon_p dV.$$

В ферме этот интеграл записывается в виде суммы

$$\Delta D = \sum_i \sigma_T S_i |\Delta l_{pi}|,$$

где i – номер стержня, S – площадь его поперечного сечения, $\Delta l_{pi} = \varepsilon_{pi} l_i$, l_i – длина стержня. Когда пластический механизм очевиден, нахождение предельного значения нагрузки оказывается несложным. Но если возможны несколько механиз-

мов разрушения, то приходится находить предельную нагрузку для каждого из них. Результат для любого механизма, кроме действительного, получается с завышением.

В приближенном кинематическом методе рассматривают не все, а только некоторый набор механизмов. Наименьшая из найденных нагрузок дает оценку предельной нагрузки "сверху".

Иногда целесообразно сочетание приближенных статического и кинематического методов. Оно дает "вилку", внутри которой находится точное решение. Если "вилка" не слишком широка с прикладной точки зрения, то поиск более точных решений можно прекратить.

Пример 2 (рис.7.3а). Степень статической неопределенности k в этой задаче равна единице и для образования механизма достаточно пластического течения в двух стержнях ($k+1$). Поскольку стержней три, то существуют три возможных пластических механизма.

Пусть "текут" два крайних стержня, средний остается упругим (или, что то

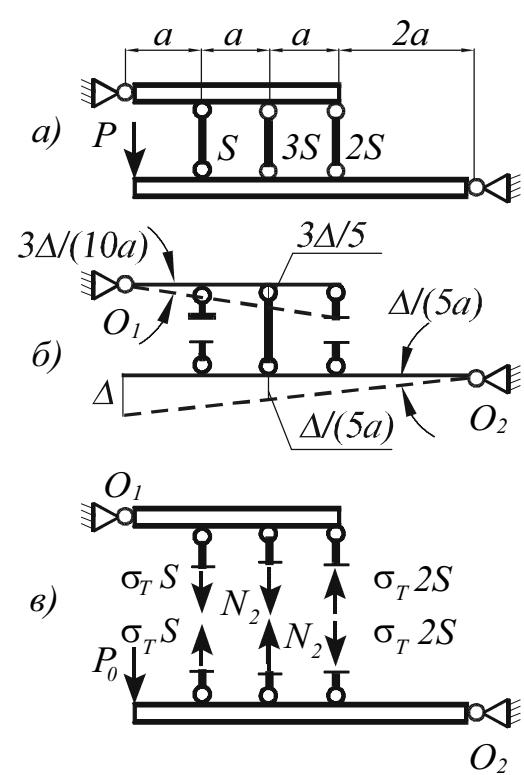


Рис.7.3

же, жестким) – рис.7.3б. Обозначим: Δ – смещение конца нижнего жесткого стержня. Он повернется вокруг опоры O_2 на угол $\Delta\varphi = \Delta/(5a)$, при этом средний, недеформируемый, стержень переместится вниз на величину $\Delta\varphi \cdot 3a = 3\Delta/5$. Соответственно, верхний жесткий стержень должен повернуться на угол $3\Delta/(5 \cdot 2a) = 3\Delta/(10a)$. Зная углы поворота жестких стержней, нетрудно вычислить удлинение левого и укорочение правого «текущих» стержней:

$$\Delta l_{p1} = \Delta/(5a) \cdot 4a - 3\Delta/(10a) \cdot a = \Delta/2,$$

$$\Delta l_{p3} = 3\Delta/(10a) \cdot 3a - \Delta/(5a) \cdot 2a = \Delta/2.$$

Уравнение баланса работ дает

$$P_0\Delta = \sigma_T S \Delta/2 + \sigma_T 2S \Delta/2,$$

$$\text{или } P_0 = 3\sigma_T S/2. \quad (7.6)$$

Однако это еще не решение задачи: рассмотрен лишь один возможный механизм. Такие же расчеты следует произвести и для двух других, и из трех значений предельной нагрузки выбрать минимальную.

Иногда механизм почти очевиден, и перебор всех других представляется почти напрасной тратой времени. Тогда возможен иной путь: найдя для очевидного механизма предельную нагрузку, проверить, удовлетворяет ли полученное решение статическим ограничениям. Если да, то решение найдено, иначе – ничего не потеряно, нужно рассмотреть другой механизм (другие механизмы).

Например, в рассмотренном примере нам показалось, что значение (7.6) должно быть верно. При данном значении $P = 1,5\sigma_T S$ из условия равновесия верхнего стержня найдем усилие в среднем:

$$\sigma_T S a + N_2 2a - 2\sigma_T S 3a = 0,$$

то есть $N_2 = 2.5\sigma_T S$. Нетрудно проверить, что и условие равновесия нижнего стержня удовлетворяется при том же значении N_2 . Это усилие меньше соответствующего усилия текучести ($N_{02} = 3\sigma_T S$). Значит, выполняются не только кинематические, но и статические условия (равновесие) и ограничения ($|\sigma| \leq \sigma_T$). Решение, полученное на основе данного механизма, оказалось верным; другие механизмы рассматривать не нужно.

Пример 3 (рис.7.4а) – случай, когда простой перебор механизмов невозможен. Задача однажды статически неопределенна и потому для образования механизма требуются два пластических шарнира. Один из них – в защемлении, но координату x второго, который образуется в пролете (рис.7.4б), сразу указать нельзя.

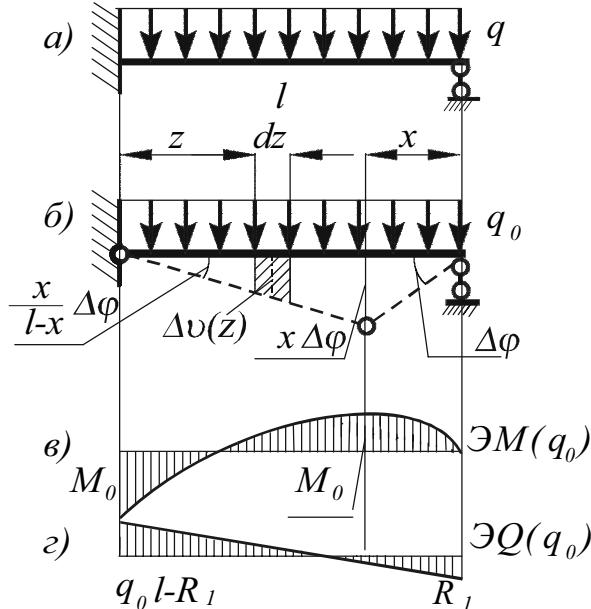


Рис. 7.4

зя.

Запишем уравнение баланса работ. В левом пластическом шарнире происходит поворот на угол $\Delta\varphi x/(l-x)$; в среднем шарнире поворот равен сумме $\Delta\varphi + \Delta\varphi x/(l-x)$. Заметим, что в правом шарнире, где происходит поворот на угол $\Delta\varphi$, диссипации нет, поскольку там обычный, а не пластический шарнир. Сила $q_0 dz$, приходящаяся на элемент длины dz (координата элемента – z , q_0 – предельное значение параметра нагрузки), при перемещении элемента вниз на величину $\Delta v(z)$ производит работу $q_0 dz \Delta v(z)$.

Работа всей нагрузки

$$\int_l q_0 dz \Delta v(z) = q_0 \int_l \Delta v(z) dz.$$

Интеграл $\int_l \Delta v(z) dz$ есть площадь, ограниченная начальным и новым положениями осевой линии стержня (рис.7.4б).

Уравнение баланса работ

$$0.5q_0 lx \Delta\varphi = M_0 x \Delta\varphi / (l-x) + M_0 (\Delta\varphi + \Delta\varphi x / (l-x))$$

после сокращения на $\Delta\varphi$ дает значение q_0 как функцию координаты x :

$$q_0 = 2M_0(x^{-1} + l^{-1}) / (l-x). \quad (7.7)$$

Истинный механизм разрушения соответствует наименьшему значению предельной нагрузки; отсюда следует путь к определению величины x :

$$dq_0/dx = 2M_0(-(l-x)x^{-2} + (x^{-1} + l^{-1})) / (l-x)^2 = 0, \quad x^2 + 2lx - l^2 = 0, \quad x = -l \pm l\sqrt{2}.$$

Один из корней явно противоречит физическому смыслу задачи ($x < 0$). Таким образом, $x = l(\sqrt{2} - 1)$ и из (7.7) получим:

$$q_0 = 2M_0(3 - 2\sqrt{2})^{-1}/l^2.$$

Пример 4. Приведем решение той же задачи статическим методом. Из условий равновесия следует, что эпюра изгибающих моментов должна иметь вид, показанный на рис.7.4в; механизм, изображенный на рис.7.4б, подсказывает, что в заделке момент равен предельному, и нижние слои балки сжаты; в правом пластическом шарнире момент также равен предельному, но сжаты верхние слои. В точке экстремума момента поперечная сила, по условиям равновесия, равна нулю. Эпюра поперечных сил показана на рис.7.4г; опорная реакция R_1 связана с расстоянием x уравнением равновесия

$$dQ/dz = -R_1/x = -q_0, \quad R_1 = q_0x.$$

Учитывая, что момент в правом пластическом шарнире равен площади части эпюры $Q(z)$, расположенной справа от шарнира, получим

$$R_1x/2 = M_0, \quad x = \sqrt{2M_0/q_0}.$$

Площадь эпюры $Q(z)$ слева от правого шарнира равна изменению момента на этом участке ($2M_0$):

$$(q_0l - R_1)(l - x)/2 = 2M_0.$$

Подстановка в это выражение величин $R_1 = q_0x$ и $q_0 = 2M_0/x^2$ дает уже знакомые выражения для координаты x и предельной нагрузки q_0 .

При решении задач полезно учитывать, что вплоть до достижения предельной нагрузки конструкция устойчива, и потому остается справедливым закон симметрии: предельное состояние симметричной конструкции при симметричном воздействии симметрично. Если учесть дополнительно, что пределы текучести при растяжении и сжатии принимаются обычно одинаковыми и диаграмма деформирования оказывается нечетной, то увидим, что справедлив и закон косой симметрии: при кососимметричном воздействии на симметричную конструкцию предельное состояние (как и любое промежуточное) кососимметрично. Следует, однако, иметь в виду, что при несимметричном нагружении разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную возможно, но бесполезно: принцип суперпозиции в нелинейных задачах не выполняется.

Специфический класс задач предельного равновесия представляет расчет несущей способности заклепок. Заметим, что упругие расчеты заклепок и условные схемы распределения в них усилий, встречающиеся в некоторых учебниках и пособиях по сопротивлению материалов, физически мало оправданы. Расчеты по предельному состоянию представляются нам более корректными.

Пример 5 (рис.7.5): требуется оценить несущую способность конструкции из двух полос, скрепленных четырьмя заклепками. Форма полосы, полагаемой в предельном состоянии упругой (или, что то же, абсолютно жесткой), не имеет значения, и задача эквивалентна показанной на рис.7.6, являющейся кососиммет-

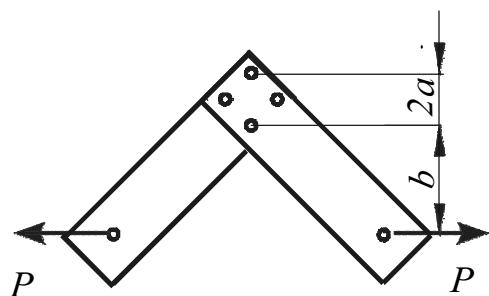


Рис. 7.5

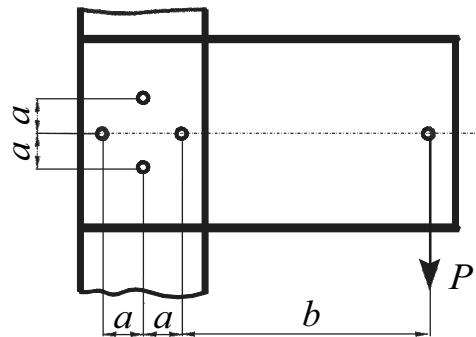


Рис. 7.6

ричной. Последнее обстоятельство позволяет при анализе ограничиться кососимметричными механизмами предельного равновесия – это поворот относительно некоторой точки C , лежащей на оси симметрии конструкции. Центр поворота из очевидных соображений равновесия не может быть ни левее, ни правее отрезка длиной a , показанного на рис.7.7 (достаточно рассмотреть направления сил, действующих на полосу в этих двух случаях; значения сил при этом не играют роли). Поворот возможен либо вокруг левой заклепки (срезаются три заклепки), либо вокруг точки внутри квадрата, образованного заклепками (срезаются четыре заклепки).

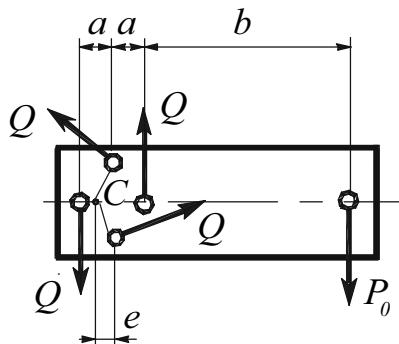


Рис.7.7

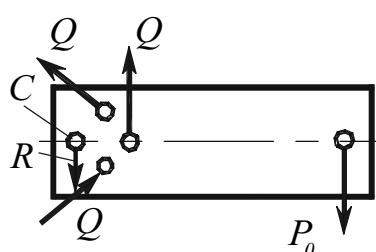


Рис.7.8

Первая ситуация достаточно проста для расчета; на рис.7.8 показаны силы, действующие на полосу, сила среза заклепки обозначена Q . Принцип возможных перемещений здесь эквивалентен условию равновесия для момента сил относительно точки C :

$$P_0(b + 2a) = Q2a + 2Qa\sqrt{2},$$

или

$$P_0 = Q\alpha\beta/(1+\beta), \quad \alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 2a/b.$$

Из суммы проекций сил на вертикальную ось найдем усилие в четвертой заклепке

$$R = Q + Q\sqrt{2} - P_0 = \alpha/(\beta + 1)Q.$$

Это усилие не превышает Q , если

$$1 + \beta \geq \alpha, \quad a \geq b/\sqrt{2};$$

в этих случаях полученнное решение является истинным.

Однако при большем удалении заклепок от точки приложения силы ($b > a\sqrt{2}$) предположение о том, что левая заклепка не разрушается, не отвечает расчету и рассмотренный механизм оказывается недействительным. Как ни кажется парадоксальным, при этом срезаются все заклепки одновременно (рис.7.7).

При расчете этого пластического механизма появляется новая неизвестная, характеризующая положение центра вращения (размер e), зато усилия во всех заклепках известны. Уравнение принципа возможных перемещений сводится к равенству нулю суммы моментов сил относительно точки C

$$P_0(b+a+c) = 2aQ + 2Q\rho, \quad \rho = \sqrt{e^2 + a^2}.$$

Каждому из таких механизмов, определяемых заданием положения центра вращения e , отвечает свое значение предельной нагрузки P_0 (сила Q полагается известной – это характеристика заклепки); истинному механизму отвечает минимальное значение силы P_0 .

Выражение для производной dP_0/de в этой задаче громоздко; проще воспользоваться вторым условием равновесия (поскольку для истинного механизма условия равновесия справедливы) – по силам:

$$P_0 = 2Q \sin \alpha, \quad \sin \alpha = e/\rho. \quad (7.8)$$

Совместное решение условий равновесия определяет

$$e = 2a^2(a+b)/(2ab+b^2).$$

Найдя e , нетрудно определить P_0 из выражения (7.8).

Проверка: расчет показывает, что при всех значениях параметра e в упомянутых пределах $0 \leq e \leq a$ значение P_0 для второго механизма (7.8) ниже, чем для первого.

Самостоятельный круг задач представляют расчеты предельного изгибающего момента при косом изгибе. Эта задача тривиальна, если задана нейтральная линия (напряжения в этом случае известны и найти их момент достаточно просто). Если, однако, заданы изгибающие моменты, то определение положения нейтральной линии сильно усложняется.

Пример 6 – изящное исключение из этого правила. Прямоугольный стержень из идеально пластического материала изгибается так, что плоскость суммарного момента проходит по диагонали поперечного сечения (рис.7.9). Найти предельное значение момента.

Стандартное решение состоит в том, чтобы для произвольного положения нейтральной линии найти изгибающие моменты, плоскость их равнодействующей и по заданному положению этой плоскости найти положение этой линии. Дальше задача тривиальна.

Эта задача, однако, обладает следующей особенностью: при заданном изгибе упругой балки нейтральная линия проходит по другой диагонали прямоугольника. Это может (но, естественно, не обязательно должно) оказаться справедливым и для случая предельного состояния.

Предположим, что это справедливо. Тогда в предельном состоянии растягивающие напряжения, равные σ_T , охватывают треугольную область (рис.7.10); их равнодействующая P_1 располагается в центре тяжести треугольника – то есть на медиане. То же относится и к равнодействующей P_2 сжимающих напряжений. Как видим, плоскость изгибающего момента действительно отвечает диагонали.

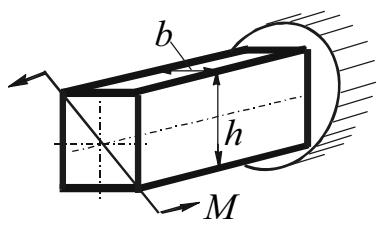


Рис.7.9

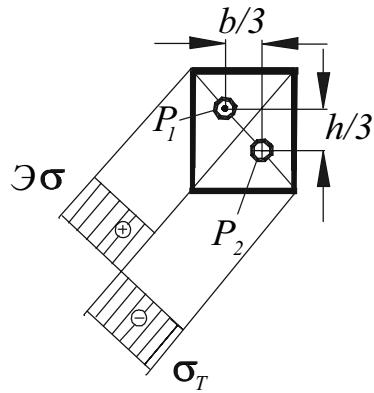


Рис.7.10

Остается лишь найти момент пары сил P_1, P_2 : это и есть искомое значение M_0 . Величина силы P_1 равна произведению $\sigma_T b h/2$; положение центров тяжести прямоугольных треугольников известно (см. рис.7.10). Отсюда находим

$$M_0 = \sigma_T b h \sqrt{b^2 + h^2} / 6.$$

8. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ

8.1. Что такое критическая сила?

Рассматривая этот раздел сопротивления материалов, следует обратить внимание на следующие его особенности. Во-первых, если раньше нас интересовало лишь, при каких условиях конструкция находится в равновесии, то сейчас мы анализируем качество равновесия: оказывается, для прочности конструкции это бывает крайне важно. Если равновесие неустойчиво, то при любом малом возмущении (а избежать его практически невозможно) система переходит в другое положение, не предусмотренное условиями ее работы; при этом происходит нежелательное перераспределение усилий в ее элементах.

Во-вторых, приходится отказаться от одной из основных гипотез сопротивления материалов – гипотезы малости перемещений (называемой принципом начальных размеров), так как в рамках этой гипотезы равновесие всегда устойчиво, если устойчив материал конструкции. Таким образом, изучая по-прежнему относительно малые смещения точек тела при его нагружении, мы уже не рассматриваем их как бесконечно малые. С этим связана третья особенность: даже в пределах закона Гука задача перестает быть линейной; становится несправедливым и принцип суперпозиции.

Типы равновесия проще всего увидеть на примере весомого шарика, лежащего на поверхности, рельеф которой показан на рис.8.1. Здесь P – высота рельефа как функция координаты x ; одновременно, это потенциальная энергия шарика, деленная на постоянную величину – вес шарика.

Нетрудно видеть, что равновесие наблюдается лишь в четырех положениях из показанных пяти.

Положение 3 наиболее типично для механических систем (простейшую из которых мы рассматриваем): это устойчивое равновесие. Малые возмущения,

смещающие шарик влево или вправо, выводят его из начального положения равновесия и переводят в смежное положение – бесконечно близкое к исходному, но после их снятия шарик возвращается в исходное положение.

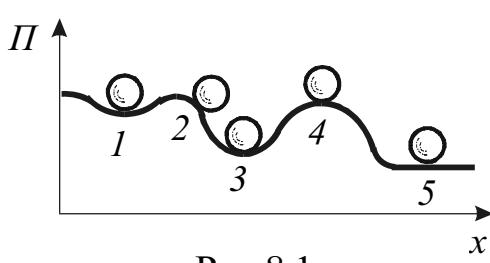


Рис.8.1

Положение 4 в этом отношении наиболее неприятно: любое малое возмущение выводит шарик из положения равновесия, и он скатывается до нахождения другого. Такое состояние системы называется неустойчивым равновесием.

Особое место занимает состояние безразличного равновесия 5. Это – единственная ситуация, когда смена положения не нарушает равновесия. Переход конструкции из устойчивого состояния в неустойчивое (при росте нагрузки) происходит через эту фазу, называемую критической; определение соответствующего (критического) значения нагрузки и представляет обычно задачу расчетчика.

Наконец, встречается "устойчивое в малом" состояние 1; оно в механике почти не изучается. Здесь при малых возмущениях шарик устойчив, однако, если

возмущения больше некоторых небольших, но конечных величин, то происходит потеря данной формы равновесия.

Нетрудно заметить, что в устойчивом положении шарик обладает *минимальной* потенциальной энергией. В *безразличном* состоянии потенциальная энергия не изменяется при смене положения.

Для деформируемых конструкций ситуация аналогична, если считать, что величина Π состоит из «потенциальной энергии силы» (связанной с текущим положением точки приложения силы) и потенциальной энергии деформации. Эту сумму называют полной потенциальной энергией системы. Все приведенные выше соображения о видах равновесия (или неравновесия) остаются в силе, но рельеф поверхности Π зависит от значений действующих сил. При невысоких нагрузках конструкция обычно устойчива, но при возрастании нагрузки (или температуры, или параметра кинематического воздействия) до некоторой величины ситуация может измениться: появляется новое, близкое к начальному (смежное), состояние равновесия конструкции, причем прежнее остается равновесным (бифуркация) или оказывается неравновесным, и конструкция, меняя свою форму, переходит в новое состояние равновесия. Это значение параметра нагрузки называют *критическим*.

В частности, при сжатии прямого вертикального стержня

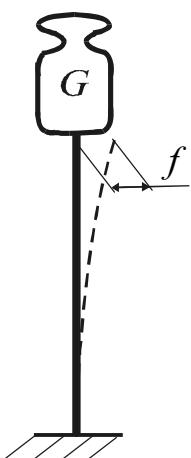


Рис.8.2

(задача Эйлера, рис.8.2) грузом G состояние системы «стержень – груз» характеризуется стрелой прогиба f . При невысокой нагрузке устойчиво состояние $f=0$. Это можно увидеть из энергетического рельефа (рис.8.3а), где Π – потенциальная энергия груза в сумме с энергией сжатия стойки (практически не зависящей от f) и энергией изгиба стойки, пропорциональной квадрату f . Уменьшение высоты стойки при ее изгибе (и, соответственно, уменьшение потенциальной энергии груза) также пропорционально квадрату f , поэтому рельеф описывается квадратичной параболой. Пока груз невелик, с ростом прогиба величина Π возрастает (потенциальная энергия изгиба растет быстрее, чем убывает потенциальная энергия груза, рис.8.3а), но при большом весе груза ситуация обратна (рис.8.3в). Критическому значению нагрузки $G = G_*$ отвечает промежуточная ситуация (рис.8.3б).

8.2. Как найти критическую силу?

Рассмотренная ситуация подсказывает два пути решения задачи. Один – энергетический, он опирается на равенство потенциальных энергий Π в смежных состояниях (рис.8.3б). Другой называют обычно методом Эйлера. Он реализует замеченную Эйлером особенность состояния $G = G_*$: только при такой нагрузке

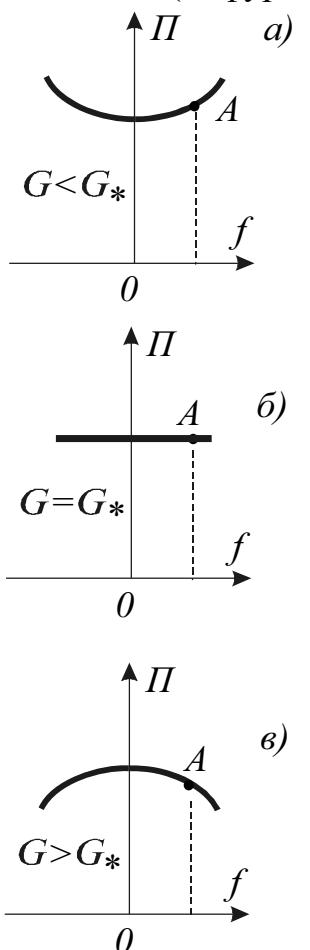


Рис.8.3

изогнутый стержень находится в равновесии (сравните состояния $f \neq 0$ – точка A – в трех вариантах нагрузки на рис.8.3). Достаточно записать условие равновесия для смежного состояния системы, чтобы получить значение G_* .

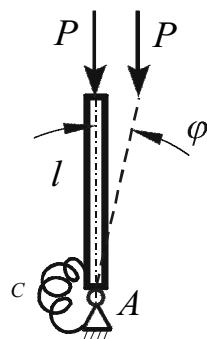


Рис. 8.4

Пример 1 (рис.8.4) [4]. Требуется исследовать устойчивость системы, состоя-

щей из абсолютно жесткого стержня длиной l и связанной с ним пружины жесткости c . На свободный конец стержня действует сила P . При переходе системы в смежное положение сила не меняет своего направления.

Решение. Используем вначале энергетический способ: найдем зависимость полной потенциальной энергии системы от угла поворота стержня φ :

$$\Pi = c\varphi^2/2 + Pl\cos\varphi.$$

Здесь первое слагаемое – потенциальная энергия деформации, запасаемая пружиной при повороте стержня на угол φ , второе – потенциальная энергия «груза» P , если за ее нулевой уровень принять состояние при $\varphi = \pi/2$. Удобно использовать относительные параметры:

$$\Pi' = \varphi^2/2 + P'\cos\varphi, \quad (8.1)$$

где Π' – относительная потенциальная энергия Π/c , P' – относительная нагрузка Pl/c . График функции $\Pi'(\varphi)$ (8.1) представлен на рис.8.5. Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям P' , равным 1, 1.09 и 1.2. При $P'=1$ (кривая 1) равновесие отвечает значению $\varphi = 0$; это положение равновесия устойчиво. При $P' > 1$ равновесными являются два состояния, причем состояние $\varphi = 0$ неустойчиво, а отклоненное (минимум Π' смещается по оси φ на рис.8.5 вправо) – устойчиво. Таким образом,

критическое значение P' равно единице; соответственно, $P_* = c/l$.

Методом Эйлера эта задача решается чуть проще. Условие равновесия для стержня, повернутого на угол φ (сумма моментов сил, действующих на жесткий стержень, относительно точки A – рис.8.4 – должна быть равна нулю) имеет вид

$$Pl\sin\varphi = c\varphi.$$

Отсюда, естественно, получаем то же значение критической силы P_* при условии малости угла φ ($\sin\varphi \approx \varphi$).

Названные методы определения критической нагрузки можно применять и для стержней, не подверженных сжатию.

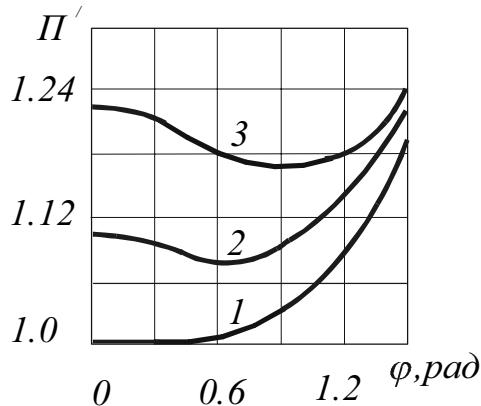


Рис.8.5

Пример 2 (рис.8.6) [5]. По тонкостенной трубке (толщина t , диаметр D) протекает жидкость плотности ρ . Требуется определить критическое значение скорости w_* , при котором возможна смежная (искривленная) форма равновесия трубы.

Решение. Применим метод Эйлера. Рассмотрим искривленное состояние трубы (рис.8.7). При протекании жидкости по изогнутому участку трубы, кривизна которого равна $\chi = 1/R$ (R – радиус кривизны), на элемент длины трубы dz

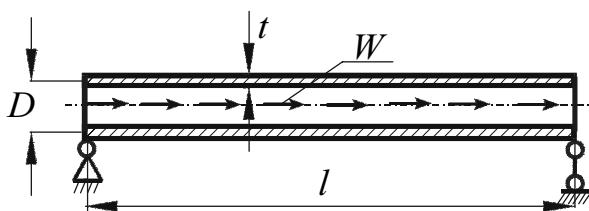


Рис.8.6

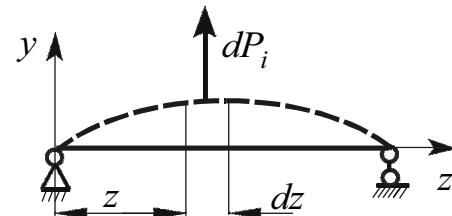


Рис. 8.7

со стороны жидкости действует инерционная сила

$$d\mathbf{P}_i = -dm\mathbf{a}, \quad (8.2)$$

где \mathbf{a} – вектор ускорения части жидкости массой $dm = \rho S dz$, (S – площадь сечения потока). Полагая (при малом искривлении), что линейная скорость потока остается постоянной, найдем, что ускорение направлено перпендикулярно оси трубы, а величина его $a = w^2/R = \chi w^2$. Отсюда находится интенсивность распределенной по длине трубы центробежной силы

$$q_i = dP_i/dz = \rho S w^2 \chi.$$

Условие равновесия $q_i = d^2 M/dz^2$ с учетом закона Гука $\chi = M/(EI)$ принимает вид

$$\nu'' + k^2 \nu''' = 0, \quad (8.3)$$

где ν – прогиб трубы, штрихом обозначена производная по длине, $k^2 = \rho S w^2 / (EI)$.

Решение уравнения (8.3) (при граничных условиях $z = 0, l$: $\nu = 0$, $\nu''' = 0$) имеет вид

$$\nu = A \sin kz, \quad A \neq 0 \text{ при } kl = \pi. \quad (8.4)$$

Отсюда найдем, что критическое значение скорости, при котором изогнутая трубка ($A \neq 0$) так же находится в равновесии, как и прямая ($A = 0$), равна

$$w_* = \pi / l (EI / (\rho S))^{0.5}. \quad (8.5)$$

8.3. Приближенный энергетический метод

При решении многих задач – методом Эйлера или энергетическим методом – возникают значительные трудности математического характера, связанные с получением вида функции $\nu(z)$. Эти трудности можно обойти, задаваясь видом функции $\nu(z)$ приближенно, стараясь лишь удовлетворить граничным условиям. Полученная критическая нагрузка будет иметь при этом завышенное значение:

упругий стержень с бесконечным числом степеней свободы заменяется системой с одной степенью свободы, которой разрешается изгибаться только пропорционально вполне определенной кривой $v(z)$. На стержень как бы накладывается корсет. Дополнительные связи (которые в действительности отсутствуют) приводят к увеличению значения критической нагрузки.

Пример 3 (рис.8.8). Определить критическую длину шарнирно опертой стойки, нагруженной собственным весом (погонный вес – q).

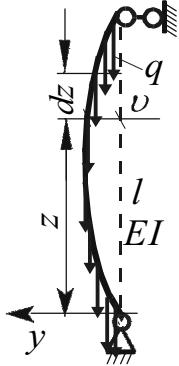


Рис. 8.8

Решение. На рисунке показано смежное положение стойки, которая вначале была прямой. При критическом значении нагрузки величина P при переходе в смежное положение не меняется. Поэтому для решения задачи следует приравнять изменение потенциальной энергии деформации изменению потенциала внешних сил (сил веса).

Примем, что упругая линия стойки представляет полуволну синусоиды $v = b \sin(\pi z/l)$, где амплитуда b неизвестна. Тогда потенциальная энергия деформации изгиба равна

$$U = 0.5 \int_0^l EI v''^2 dz = 0.25 EI b^2 \pi^4 / l^3 \quad (8.6)$$

Уменьшение потенциала силы веса при переходе в это смежное положение определяется выражением

$$U' = \int_0^l q \lambda(z) dz, \quad (8.7)$$

где $\lambda(z)$ – вертикальное перемещение элемента длиной dz вследствие изгиба стержня:

$$\lambda(z) = \int_0^z (1 - \cos \theta) dz \approx 1/2 \int_0^z v'^2 dz = 1/4 b^2 (\pi/l)^2 (z + l/(2\pi) \sin(2\pi z/l)). \quad (8.8)$$

Здесь $\theta = v'$ – угол поворота элемента dz . Подставляя (8.8) в (8.7) и приравнивая полученное значение у потенциальной энергии (8.6), найдем критическую длину стойки

$$l_* = (2\pi^2 EI/q)^{1/3}. \quad (8.9)$$

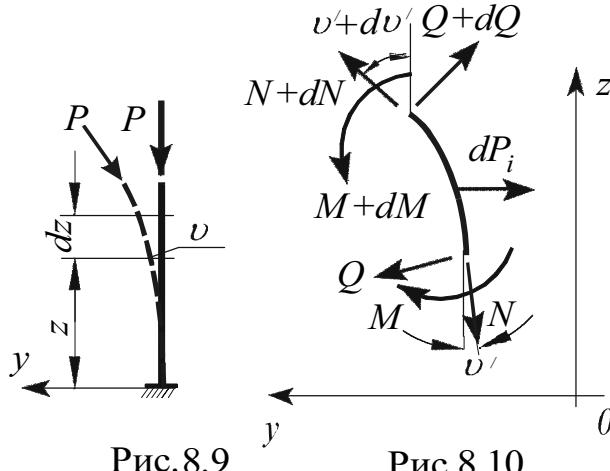
Рассмотренные методы решения задач устойчивости позволяют найти критические значения внешних воздействий в большинстве случаев. Однако существует класс задач, в которых при достижении силой некоторого значения (критического) происходит переход не к новой форме равновесия, а к определенной форме движения. В этих случаях следует записывать уравнение движения системы, т.е. применять статический метод Эйлера, но в рассмотрение вводить Д'Аламберовы силы инерции.

Пример 4 (рис.8.9) [5]. Найти критическое значение "следящей" силы P (сила всегда направлена по касательной к изогнутой оси на свободном конце стойки).

Решение. Вырежем из стойки, находящейся в смежном (изогнутом) положении, элемент dz (рис.8.10). Проецируя все действующие на него силы ($dP_i = \rho S \partial^2 v / \partial t^2 dz$ – сила инерции, S – площадь поперечного сечения), на ось y и считая нормальную силу, ввиду предполагаемой малости перемещений, равной P , получим уравнение движения стержня:

$$EI \partial^4 v / \partial z^4 + P \partial^2 v / \partial z^2 + \rho S \partial^2 v / \partial t^2 = 0, \quad (8.10)$$

решение которого следует искать в виде



$$v = Y(z) \cdot e^{irt},$$

где r – неизвестная, вообще говоря, комплексная постоянная. От ее значения зависит общий характер движения стержня. Если окажется, что r – действительное число, то решение будет содержать слагаемые типа $e^{i\Omega t}$ и $e^{-i\Omega t}$, которые в сумме определяют гармонические колебания. В этом случае систему принято считать устойчивой. Однако, если Ω будет комплексным или чисто мнимым числом, то в

решении появятся слагаемые, содержащие множители e^{at} и e^{-at} (a – действительное число). Это означает периодическое движение с возрастающим размахом, то есть неуклонный уход системы от положения исходного равновесия (неустойчивое поведение стойки).

Введя обозначения $k^2 = Pl^2/(EI)$, $\omega = \Omega l^2(\rho S/(EI))^{0.5}$, $\xi = z/l$ и решая совместно (8.10) и (8.11), найдем:

$$d^4 Y / d\xi^4 + k^2 d^2 Y / d\xi^2 - \omega^2 Y = 0. \quad (8.12)$$

Решение этого уравнения:

$$Y = A \sin s_1 z + B \cos s_1 z + C \sinh s_2 z + D \cosh s_2 z, \quad (8.13)$$

где $s_1^2 = k^2/2 + (k^4/4 + \omega^2)^{0.5}$, $s_2^2 = s_1^2 - k^2$.

Границные условия:

$$Y = 0; Y' = 0 \text{ при } z = 0; Y'' = 0 \text{ и } Y''' = 0 \text{ при } z = l (\xi = 1).$$

При подстановке этих граничных условий в выражение (8.13) приходим к системе 4-х однородных линейных уравнений относительно A , B , C и D . Определитель этой системы должен равняться нулю, если она имеет отличные от нуля решения; отсюда следует уравнение, связывающее параметр нагрузки k и частоту колебаний ω

$$k^4 + 2\omega^2 + k^2 \omega \sin s_1 \sinh s_2 + 2\omega^2 \cdot \cos s_1 \cosh s_2 = 0. \quad (8.14)$$

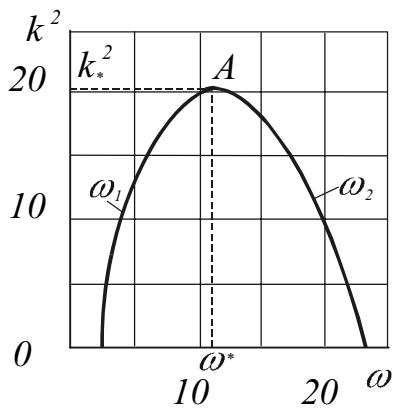


Рис. 8.11

График полученной зависимости показан на рис.8.11. Видно, что при каждом значении нагрузки (до критического) имеются две собственные частоты (ω_1 и ω_2). При возрастании нагрузки частоты сближаются. Кривые зависимостей $k^2(\omega_1)$ и $k^2(\omega_2)$ пересекаются в точке A , т.е. при этом значении силы P корни уравнения (8.14) становятся кратными. Это означает, что две формы колебаний соответствуют одной частоте, колебания становятся непериодическими. При нагружении силой выше той, которой отвечает точка A , в решении появляются комплексные корни, то есть движение стержня происходит с возрастающей амплитудой. Найдено:

$$P_* = 20,05EI/l^2.$$

Таким образом, решение методом Эйлера с учетом инерционных сил сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных, достаточно сложных даже в этом простом примере.

Решите самостоятельно.

1. Абсолютно жесткий стержень постоянного поперечного сечения имеет

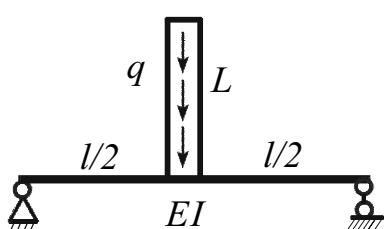


Рис. 8.12

погонный вес q и приварен к балке длиной l , жесткостью EI (рис.8.12). Определить, при какой длине L система потеряет устойчивость.

2. Стержень длиной l , жесткостью EI несет по концам массы $m/2$ и нагружен следящей силой P (рис.8.13). Пренебрегая массой стержня, определить, при каком значении силы P стержень потеряет устойчивость.

Рис.8.13

Рис.8.13

9. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

9.1. Напряженное состояние

Центральным элементом теории напряжений является вектор напряжений \mathbf{p} – интенсивность силы действия одной части тела на другую через разделяющую их (мысленно) поверхность. Этот вектор можно проецировать на оси декартовой системы координат, получая матрицу-столбец проекций $[p] = [p_x, p_y, p_z]^T$ (знак « T » означает транспонирование матрицы), или проецировать на нормаль \mathbf{n} к площадке и касательную, получая нормальное напряжение σ и касательное τ . Напряженным состоянием в точке тела называют совокупность векторов \mathbf{p} на бесчисленном количестве площадок \mathbf{n} , которые можно провести через эту точку. Это множество упорядочено: рассмотрев равновесие произвольного тетраэдра, вырезанного из тела в малой окрестности рассматриваемой точки, легко увидеть, что достаточно знать напряжения на трех площадках, чтобы найти напряжение на любой четвертой. Эти три площадки удобно брать ортогональными (пусть нормали к ним $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ направлены вдоль декартовых осей x, y, z), напряжения на них – векторы $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$. Из условия равновесия (по силам) получим выражение для напряжения \mathbf{p} на любой площадке, нормаль которой обозначена \mathbf{n} :

$$p(\mathbf{n}) = p_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) + p_y \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}) + p_z \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}), \quad (9.1)$$

или, в матричной форме,

$$[p] = [T_\sigma] \cdot [n]. \quad (9.2)$$

Здесь $[T_\sigma]$ – матрица напряжений, ее столбцы представляют координаты векторов $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; $[n]$ – матрица косинусов, или координат вектора \mathbf{n} в том же базисе. Матрица $[T_\sigma]$ однозначно определяет напряженное состояние в точке тела.

Дополнительное условие равновесия по моментам показывает, что матрица $[T_\sigma]$ симметрична (парность касательных напряжений).

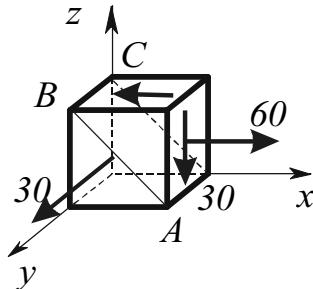


Рис. 9.1

Пример 1. На рис. 9.1 показаны напряжения на гранях кубика (в МПа). Требуется определить нормальное напряжение σ на площадке ABC , равнонаклоненной к двум граням кубика.

Для решения вводим систему координат (x, y, z), формируем матрицы $[T_\sigma]$ и $[n]$, находим сначала полное напряжение на площадке ABC (выражение (9.2))

$$[p] = \begin{vmatrix} 60; & 0; & -30 \\ 0; & 30; & 0 \\ -30; & 0; & 0 \end{vmatrix} \text{МПа} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{vmatrix} 30 \\ 0 \\ -30 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \text{МПа.}$$

Нормальное напряжение находится проецированием вектора полного напряжения на вектор нормали \mathbf{n} . В матричной форме это означает перемножение двух матриц

$$\sigma = [p]^T \cdot [n] = [30 \ 0 \ -30] \frac{1}{\sqrt{2}} \text{МПа} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Задача. Найдите величину касательного напряжения на этой площадке.

9.2. Круг Мора

Выражение (9.2) удобно для решения задач типа последнего примера, но не наглядно, не позволяет увидеть все множество напряжений в площадках, проходящих через рассматриваемую точку. В значительной мере последнего удается достичь при использовании плоскости $\{\sigma, \tau\}$. На этой плоскости откладываются точки $[\sigma, \tau]$, каждая из которых показывает значения нормального и касательного напряжения на некоторой площадке при заданном матрицей $[T_\sigma]$ напряженном состоянии. В случае простейшего напряженного состояния – растяжения (сжатия) – легко найти, что пары значений σ и τ для всех площадок образуют на этой плоскости точки, лежащие на одном круге. С ростом угла между осью растяжения и нормалью \mathbf{n} к площадке точка $[\sigma, \tau]$ бежит по кругу со скоростью (вокруг центра круга), вдвое большей, чем скорость роста угла.

Следует особо оговорить знак касательных напряжений для данной круговой диаграммы. Правило знаков здесь принимают таким же, как для поперечной силы (на рис. 9.2 касательное напряжение на площадке перпендикулярной оси x равно $+50 \text{ МПа}$, на площадке y – равно -50 МПа).

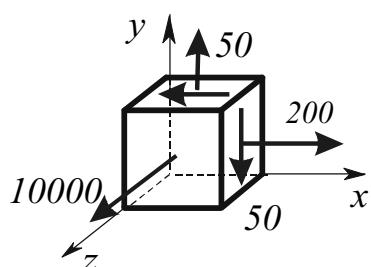


Рис. 9.2

В общем случае картина несколько сложней: точками $[\sigma, \tau]$ на плоскости $\{\sigma, \tau\}$ охватывается область между тремя касающимися кругами, центры которых лежат на оси σ . Таким образом, на ось σ попадают лишь три точки, отвечающие трем главным площадкам (слово “главный” обозначает отсутствие касательного напряжения на такой площадке). Главные площадки взаимно ортогональны. Главные нормальные напряжения обозначают $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ – в порядке возрастания напряжения, с учетом знака.

Каждый круг отвечает площадкам, параллельным одному из главных напряжений.

Отметим, что если все три главные напряжения не равны нулю, то напряженное состояние (НС) называют объемным. Если одно из главных напряжений равно нулю – это плоское НС. При ненулевом значении только одного главного напряжения НС называют линейным.

Пример 2. На рис.9.2 показаны напряжения на трех гранях кубика (в МПа); видно, что площадка с самым большим напряжением – главная. Требуется построить круг напряжений для всех ортогональных ей площадок (в частности, такими площадками являются площадки x и y).

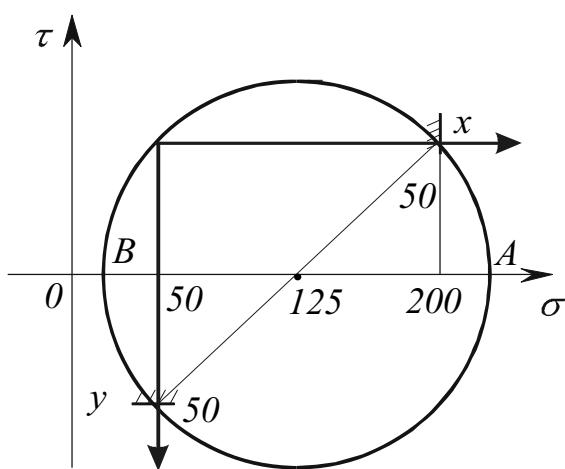


Рис. 9.3

Точки x и y на рис.9.3 показывают нормальные и касательные напряжения на площадках x и y (в соответствии с рис.9.2); отрезки прямых со штриховкой символизируют расположение этих площадок на плоскости $\{\sigma, \tau\}$: x – вертикальная, y – горизонтальная площадка. Угол между площадками равен 90° , значит, центральный угол между точками x и y на круге равен $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$. Это однозначно определяет круг Мора и, в частности,

два главных напряжения – точки A и B . Величины этих напряжений находят из геометрических соображений; в нашем случае они равны 215 и 35 МПа. Заметим, что величина главного напряжения 10000 МПа (первое главное напряжение) никак не повлияло на полученный круг.

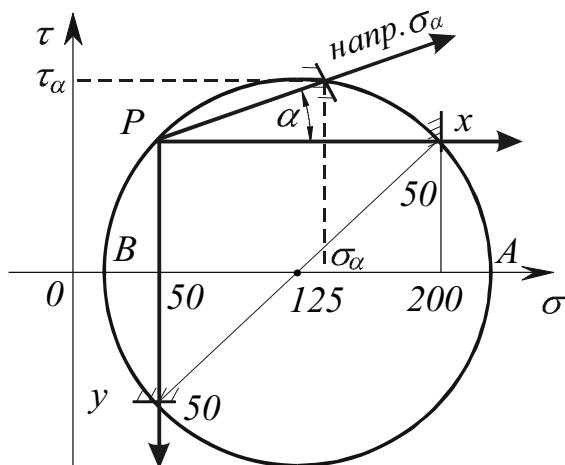


Рис. 9.4

Удобна следующая графическая интерпретация [6]: можно выделить полюс (точку P на рис.9.4) – на пересечении линий, отвечающим нормалем к показанным площадкам x и y . Если из точки P провести луч, параллельный нормали к любой другой площадке, то его пересечение с кругом дает точку, отвечающую напряжениям на этой площадке.

Пример 3. Определить величину и направление главных напряжений для элемента, изображенного на рис.9.5 (напряжения даны в МПа).

Решение. Строим круг Мора для площадок параллельных оси z (рис.9.6).

Ответ: $\sigma_1=95$ МПа, $\sigma_2=50$ МПа, $\sigma_3=5.2$ МПа, $\alpha=32^\circ$.

Здесь имеет место объемное напряженное состояние, так как все три главных напряжения отличны от нуля.

Пример 4. Для элемента, изображенного на рис.9.5, найти величину и направление напряжений в площадках, где действуют τ_{max} .

Решение. Используя круг Мора, изображенный на рис.9.6, видим что максимальным касательным напряжениям отвечают точки A и B на круге. В этих площадках действуют $\tau_{max}=45$ МПа, $\sigma_\alpha=50$ МПа, а угол $\alpha=32^\circ+45^\circ=77^\circ$. Соответствующее положение элемента показано слева внизу на рис.9.6.

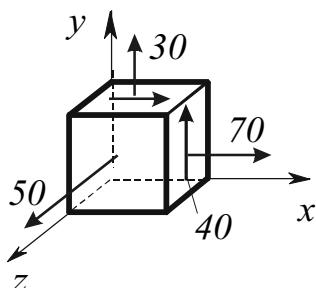


Рис. 9.5

Пример 5. Пусть задано объемное напряженное состояние: $\sigma_1=90 \text{ МПа}$, $\sigma_2=-30 \text{ МПа}$, $\sigma_3=-10 \text{ МПа}$. Требуется определить диапазон изменения касательных напряжений во всех тех площадках, где нормальное напряжение равно σ_2 .

Решение. Строим круг Мора (рис.9.7). Рассмотрев треугольник O_2BC , находим, что касательное напряжение по модулю не превышает 49 МПа (что соответствует линии AC на круге Мора).

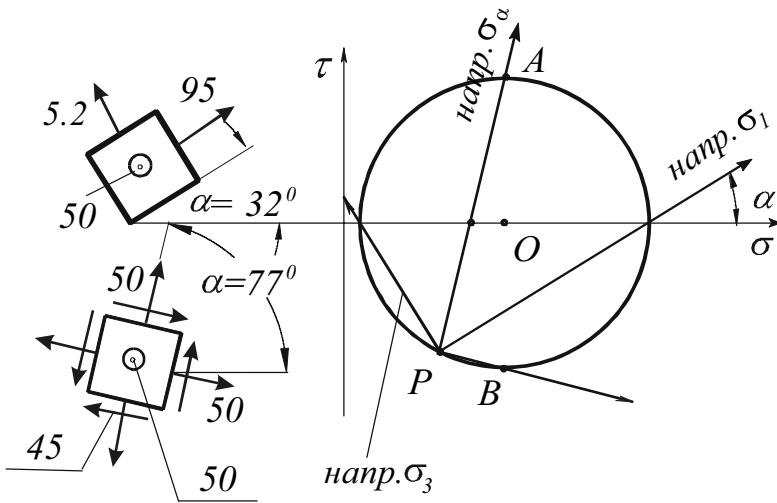


Рис. 9.6

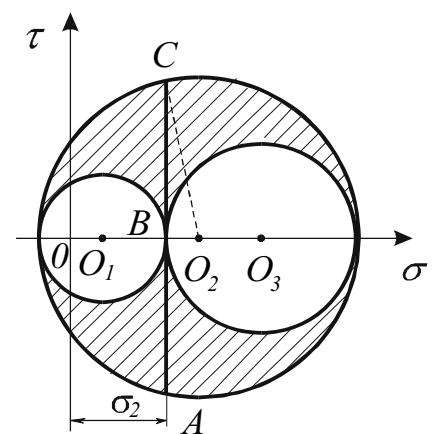


Рис.9.7

9.3. Теория деформаций

Теорию деформаций можно рассматривать как обобщение известного определения $\varepsilon=\Delta l/l_0$, в котором $\Delta l=l-l_0$, где l_0 , l – длина некоторого материального волокна в начальном (недеформированном) и в текущем (деформированном) состояниях, ε – линейная деформация этого волокна. Запишем это выражение под другому:

$$\Delta l \equiv l - l_0 = \varepsilon \cdot l_0. \quad (9.3)$$

Если рассматривать l_0 как аргумент, а Δl – как функцию, то в выражении (9.3) можно увидеть линейную зависимость $\Delta l(l_0)$ для произвольно выбираемых длин l_0 . Оператором этой зависимости является деформация.

Обобщение состоит в том, что аргументом считается вектор \mathbf{l}_0 , характеризующий не только длину, но и направление волокна в малой окрестности рассматриваемой точки тела, а функцией является вектор разности

$$\Delta \mathbf{l} \equiv \mathbf{l} - \mathbf{l}_0 = \Delta \mathbf{l}(\mathbf{l}_0) \quad (9.4)$$

(\mathbf{l} – вектор, характеризующий текущие длину и направление того же волокна). Этот вектор определяет не только изменение длины, но и поворот волокна, который в начальном состоянии характеризовался вектором \mathbf{l}_0 (рис.9.8). На рисунке

показаны две материальные точки – в недеформированном (A, B) и в деформированном (A', B') состояниях. Ниже показано “изменение” волокна (9.4). На рисунке величина Δl утрирована; в действительности деформация и поворот обычно весьма малы. Гипотетически их считают бесконечно малыми, тогда проекция Δl на направление \mathbf{l}_0 (скалярное произведение $\Delta l \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор вдоль \mathbf{l}_0) определяет деформацию волокна, а проекция на вектор \mathbf{t} , ортогональный \mathbf{n} – угол поворота φ :

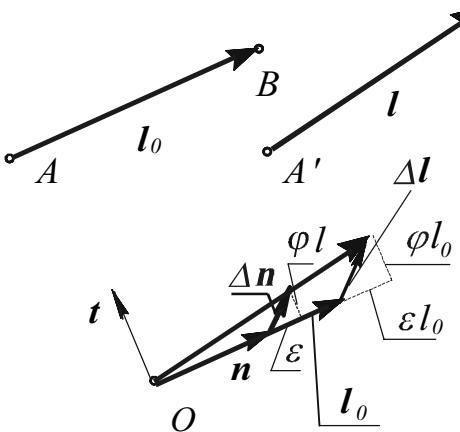


Рис. 9.8

Исходя из обычных соображений дифференцируемости полей смещений доказывают, что для бесконечно коротких волокон \mathbf{l}_0 функция (9.4) линейна. Это означает, что если взять вдвое более длинное волокно, то и его изменение будет вдвое большим. Поэтому достаточно рассмотреть волокна определенной длины – например, единичной. В частности, изменение $\Delta \mathbf{n}$ единичного волокна \mathbf{n} (рис.9.8) при проецировании на оси \mathbf{n} и \mathbf{t} сразу определяет те же, что и в (9.5) деформацию и поворот:

$$(\Delta \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \varepsilon, \quad (\Delta \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = \varphi. \quad (9.5')$$

Естественно, что для различно ориентированных волокон эти величины различны. Если в окрестности интересующей нас точки тела рассмотреть пучок единичных волокон с общим началом, то их концы лягут на окружность (мы пока ограничимся деформированием в одной плоскости) радиуса l . Из линейности функции (9.4)

следует, что в деформированном состоянии начало этих волокон перейдет, возможно, в новую точку, а концы образуют эллипс (рис.9.9). Полуоси эллипса показывают, какие волокна получили наибольшую и наименьшую деформации и каковы именно эти значения ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Эти направления и деформации называют главными.

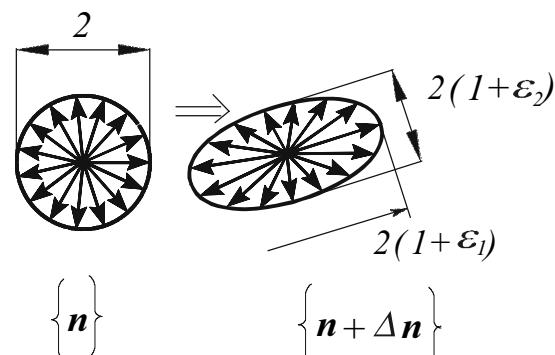


Рис. 9.9

Введем декартовы координаты x, y и будем отображать векторы матрицами-столбцами координат (например, $\mathbf{n} \rightarrow [n_x, n_y]^T$). Тогда функция (9.4), как и всякая линейная вектор-функция вектора, отобразится матрицей

$$\begin{bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{ox} \\ l_{oy} \end{bmatrix}. \quad (9.4')$$

Матрицу D называют матрицей дисторсии. Полученное выражение, с одной и той же матрицей дисторсии, справедливо для любых (бесконечно коротких) векторов

\mathbf{i}_0 в окрестности рассматриваемой точки тела. В частности, для единичного волокна вдоль оси x (вектор \mathbf{i} , координаты: 1, 0) получим

$$[\Delta \mathbf{i}] = [D] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} \\ D_{yx} \end{bmatrix}.$$

Из рис.9.10 видно, что первая проекция вектора $\Delta \mathbf{i}$, $-D_{xx}$ – представляет деформацию волокна \mathbf{i} , а вторая – поворот (в направлении оси y , то есть против часовой стрелки). Аналогично, второй столбец матрицы дисторсии

представляет поворот единичного волокна \mathbf{j} в направлении оси x (то есть по часовой стрелке) и деформацию этого волокна (рис.9.10). Таким образом, зная изменение всего двух волокон, мы имеем всю матрицу дисторсии и возможность найти изменения любых волокон из выражения (9.4').

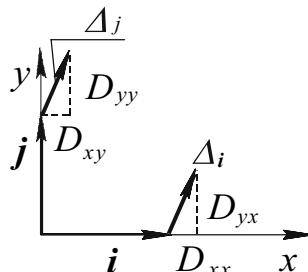


Рис. 9.10

Пример 6. Точки O, A, B, C тела после деформирования попали в положения O, A', B', C (рис.9.11). Найти матрицу дисторсии.

Решение. Волокна, ориентированные параллельно оси x , (например, OC, AB) не деформируются и не поворачиваются, следовательно, первый столбец D – нулевой. Для определения второго столбца подставим в выражение (9.4') векторы AA' и OA :

$$\begin{bmatrix} 0.1\text{мм} \\ 0 \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} 0 \\ 5\text{см} \end{bmatrix},$$

или

$$0.1\text{мм} = D_{xy} \cdot 0 + D_{yy} \cdot 5\text{см}, \quad 0 = D_{yx} \cdot 0 + D_{yy} \cdot 5\text{см}.$$

Отсюда $D_{xy} = 2 \cdot 10^{-3}$, остальные D_{ij} равны нулю.

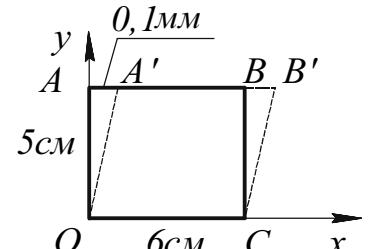


Рис. 9.11

Заметим, что второй столбец матрицы D представляет изменение единичного волокна, ориентированного вдоль оси y , и для его определения достаточно разделить вектор AA' (изменение волокна OA длиной 5 см) на 5 см.

Пример 7. Для приведенного примера найти вектор BB' (координаты точки B известны).

Решение. Дисторсия найдена раньше, значит, можно прямо воспользоваться формулой (9.4'):

$$[BB'] = [D] ([6\text{ см}; 5\text{ см}])^T = [D_{xy} \cdot 5\text{ см}; 0]^T = [0,1\text{ мм}; 0]^T.$$

Таким образом, вектор BB' равен AA' (и размер 6 см ни на что не повлиял). Это естественно, поскольку волокно AB параллельно оси x ; оно не деформируется и не поворачивается.

Пример 8. Прямоугольник $OABC$ из предыдущей задачи на этот раз повернулся на угол $\omega = 10^{-3}$ без деформации (рис. 9.12). Найти соответствующую дисторсию.

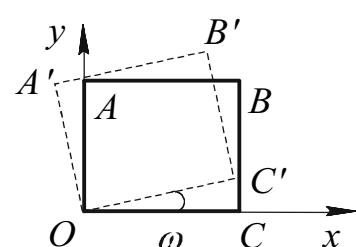


Рис. 9.12

Решение. При жестком повороте тела все его волокна имеют одну и ту же деформацию (ноль) и один и тот же

угол поворота (ω). Это позволяет найти изменения двух единичных волокон (рис.9.10) и тем самым – матрицу D . Получим $D_{xx}=0$, $D_{yx}=\omega$, $D_{yy}=0$, $D_{xy}=-\omega$. Матрица D кососимметрична. Заметим, что размеры прямоугольника не вошли в решение.

Итак, при жестком повороте любого тела матрица D кососимметрична и ее элемент $D_{yx}=-D_{xy}$ показывает угол поворота. При этом пучок единичных волокон (рис.9.9) остается пучком единичных волокон; $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$.

Для теории деформаций более интересен другой крайний случай, когда матрица D симметрична. Ее называют матрицей деформаций и обозначают ε или T_ε . На рис.9.13а показаны изменения единичных волокон в случае симметричной матрицы дисторсии. Приведена четверть схемы рис.9.9, остальные три четверти симметричны (вся фигура симметрична относительно главных осей деформации). Главные волокна не поворачиваются; повороты остальных (обозначены α) и их деформации ε легко увидеть на круге Мора (рис.9.13б); точками выделены значения

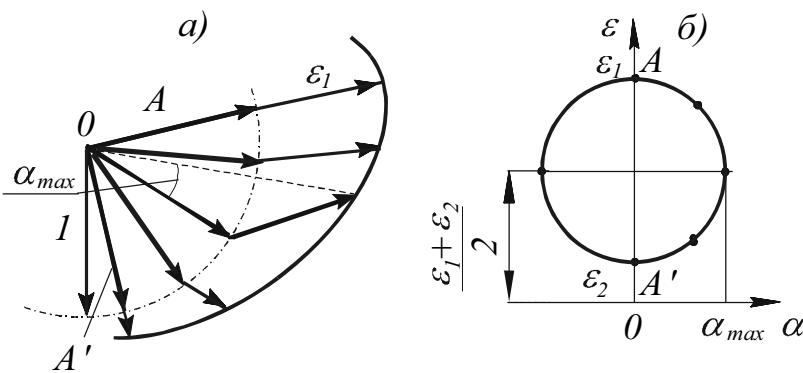


Рис. 9.13
ным под углом 45° ; он равен полуразности главных деформаций, а деформация этого волокна – их полусумме. Положительные углы на круге Мора соответствуют повороту против часовой стрелки.

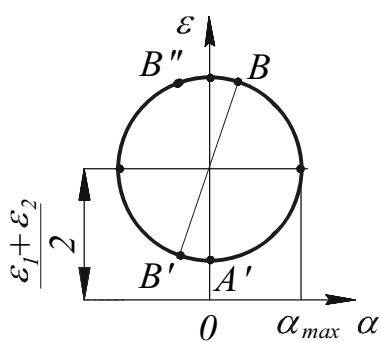


Рис. 9.14

Круг Мора позволяет установить закон парности поворотов: любые два волокна, если угол между ними 90° , поворачиваются на один и тот же угол, но в разные стороны (на круге Мора угол между соответствующими точками – 180° , они лежат на одном диаметре – например, точки B и B' , рис.9.14). Естественно, из симметрии то же следует и для двух волокон, одинаково наклоненных к главным (например, точки B и B'').

В общем случае матрица D асимметрична. Круг Мора, характеризующий деформации и повороты φ различных волокон, имеет вид, показанный на рис.9.15. Центр круга имеет координаты $\varepsilon_{cp}=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $\varphi_{cp}=\omega$ – средние по всем волокнам деформацию и поворот. Закон парности поворотов, естественно, в общем случае несправедлив.

Асимметричная матрица легко делится на два слагаемых – симметричное и кососимметричное:

значения ε и α для пяти волокон, изображенных на рис.9.13а. При равномерном распределении волокон по четверти круга на рис.9.13а соответствующие точки равномерно распределены по половине круга Мора. Нетрудно видеть, что наибольший поворот отвечает волокну, наклоненному к главным

оси на 45° .

$$D = D_S + D_k, D_S = (D + D^T)/2, D_k = (D - D^T)/2. \quad (9.6)$$

Такое деление соответствует представлению о двух последовательных изменениях окрестности материальной точки: симметричное деформирование

$$\varepsilon = D_S = (D + D^T)/2 \quad (9.7)$$

и жесткий поворот всех волокон

$$D_\omega = D_k = (D - D^T)/2. \quad (9.8)$$

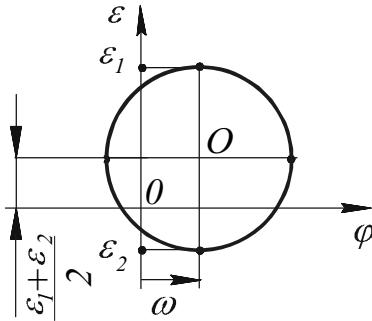


Рис. 9.15

Следовательно, изменение произвольного волокна складывается из изменения, связанного с деформированием и – с жестким поворотом, одинаковым для всех волокон:

$$[\Delta l] = [\Delta l_\varepsilon] + [\Delta l_\omega] = [\varepsilon][l_0] + [D_\omega][l_0]$$

(рис.9.16). Деформация волокна не зависит от поворота ω , но поворот волокна φ зависит от деформации (значение α различно для различных волокон и равно 0 для двух главных) и от жесткого поворота ω , одинакового для всех волокон $\varphi = \alpha + \omega$.

Пример 9. Для состояния чистого сдвига (рис.9.11) найти матрицу деформации и общий поворот ω .

Решение. Полученную ранее матрицу дисторсии

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

разделим на симметричную и кососимметричную части:

$$[\varepsilon] = [D_S] = ([D] + [D]^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad [D_\omega] = ([D] - [D]^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Жесткий поворот ω равен $(D_\omega)_{yx} = -10^{-3}$; знак “–” показывает, что поворот происходит по часовой стрелке. В связи с деформацией волокно “ x ” поворачивается против часовой ($\alpha_{yx} = 10^{-3}$), а “ y ” – по часовой ($\alpha_{xy} = 10^{-3}$ – закон парности углов поворота). Изменение прямого угла между волокнами “ x ” и “ y ” равно $\alpha_{xy} + \alpha_{yx} = 2\alpha_{xy} = \gamma_{xy} = 2 \cdot 10^{-3}$ – это и называют в сопротивлении материалов сдвиговой деформацией. Рис.9.17 показывает изменение контура прямоугольника

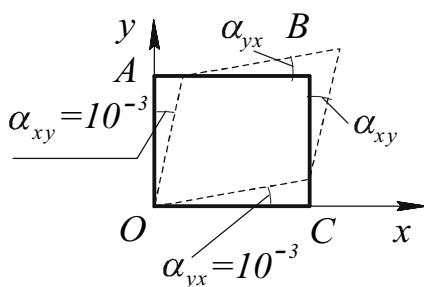


Рис. 9.17

(рис.9.11) в связи с деформацией, без учета жесткого поворота. Зная две точки на круге Мора (первый столбец T_ε – деформация и поворот волокна “ x ”, второй столбец – поворот и деформация волокна “ y ”, с учетом того, что положительное значение компоненты ε_{xy} означает поворот “ y ” по часовой стрелке, то есть на круге Мора это отрицательный поворот), можно построить круг и найти повороты и деформации всех волокон (рис. 9.18). Нетрудно видеть, что

главные деформации равны 10^{-3} и -10^{-3} ; ось ε_1 расположена под углом 45° к оси "x" (на круге это 90°). Рис.9.11 отличается от рис.9.17 жестким поворотом $\omega = -10^{-3}$.

Круг Мора удобен для решения задач о плоском деформированном состоянии – например, для расшифровки показаний розеток датчиков. Сдвиговые де-

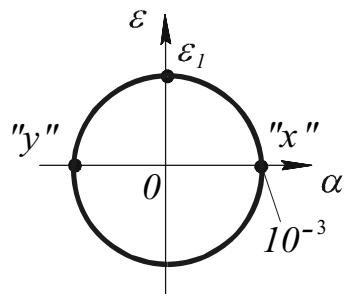


Рис. 9.18

формации экспериментально получать не научились, поэтому принято измерять линейные деформации в трех различных направлениях (плоская деформация определяется тремя числами, например, ε_x , ε_y , $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$). Если розетка показывает деформации ε_x , ε_y , ε_{45} (рис. 9.19), то на круге Мора (рис. 9.20) этим направлениям отвечают некоторые точки x , y , t – под углами, вдвое большими. Измерения не дают этих точек, и мы знаем лишь их ординаты; остальное

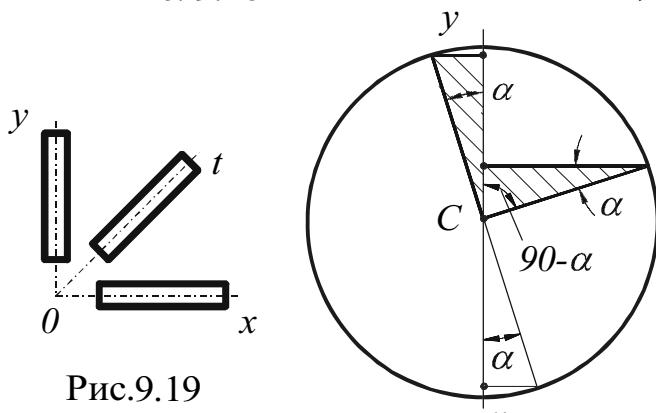


Рис.9.19

дополняют геометрические построения. Легко находится центр круга $[0, (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2]$. А далее между точками C , y , t обнаруживаются два равных треугольника (заштрихованы). Из равенства треугольников находим: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_t - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$. Тем самым тензор деформа-

Рис. 9.20

ций (на плоскости) определен.

С точки зрения представительности эксперимента такая розетка не очень удачна: все три датчика собираются в одной половине круга. Лучше розетка, где все датчики одинаково наклонены друг к другу. На круге Мора (рис. 9.21) они выделяют три точки A , B , C под углами 120° .

Предлагаем читателю по замерен-

ным значениям ε_A , ε_B , ε_C найти компоненты тензора деформаций в какой-либо декартовой системе координат – например, направив ось x по направлению датчика A . Подскажем, что центр круга найдется как центр тяжести равновеликих точек A , B , C , а остальную информацию предоставит рассмотрение треугольников – аналогичных тем, что были рассмотрены выше. Как и на круге Мора для напряжений, здесь полезно ввести в рассмотрение полюс. Например, для деформации, иллюстрируемой рис.9.22, построен круг (рис.9.23) и через точки x , y (характеризующие судьбу волокон, ориентированных вдоль осей x и y) провели прямые, параллельные соответствующим осям. Эти прямые пересекаются,

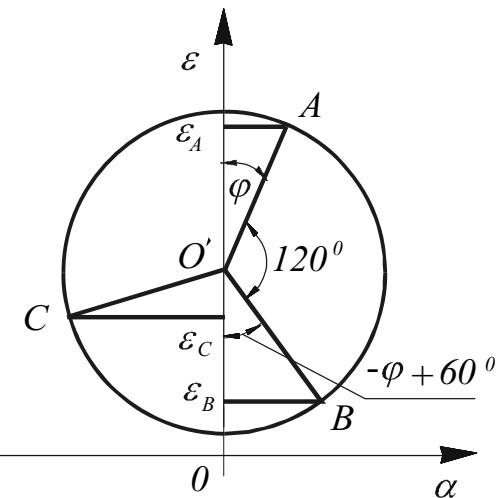


Рис. 9.21

естественно, в точке круга, которая и представляет полюс (P). Пря-мая, проведенная из P параллельно некоторому волокну на рис.9.22, пересекаясь с кругом Мора, определяет деформацию и поворот этого волокна. Для примера на

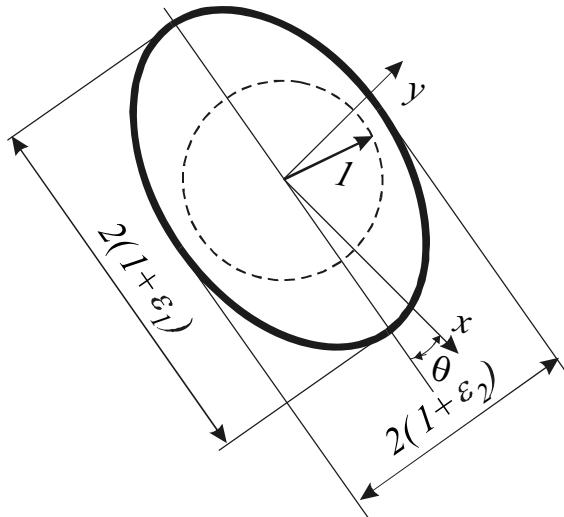


Рис.9.22

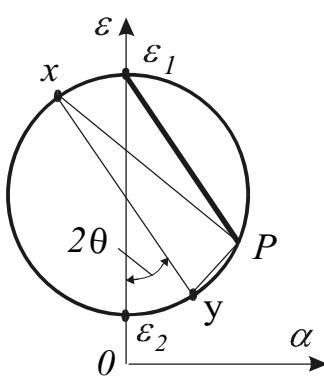


Рис.9.23

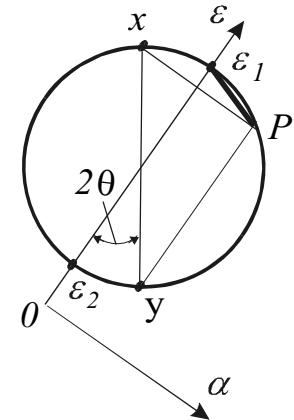


Рис.9.24

рис.9.23 утолщенной линией показана ориентация главного волокна, деформация которого равна ε_1 (а поворот отсутствует).

Заметим, что ориентация осей круга Мора может быть любой (например, как на рис. 9.24). Положение полюса при смене ориентации изменяется, но он продолжает выполнять прежние функции: утолщенной линией на рис.9.24 показана ориентация того же главного волокна, что и на рис.9.23.

Решите самостоятельно

1. Для напряженного состояния $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$ требуется определить диапазон изменения касательных напряжений во всех площадках, в которых нормальное напряжение равно нулю.

2. На поверхности стержня (рис.9.25) нарисован квадрат со стороной a . Насколько изменится его площадь при нагрузке стержня силой P ?

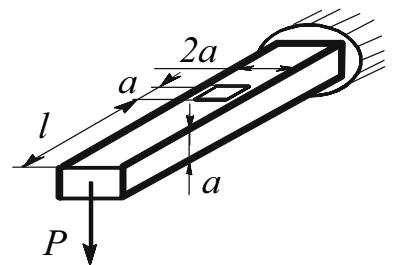


Рис. 9.25

Раздел 2. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

В этом разделе собраны задачи, не объединенные общей тематикой. Некоторые из них ранее давались на олимпиадах ЮУрГУ и других вузов РФ, некоторые разработаны авторами в процессе подготовки пособия. Решения задач не приводятся. Номера рисунков соответствуют номерам задач.

Если в задаче просят найти максимальные напряжения, то хорошим тоном считается показать эпюры – силовых факторов и напряжений, чтобы пояснить ответ.

Задачи

1. Найти величину момента M_y , при котором балка будет изгибаться в вертикальной плоскости. Величина M задана.

2. Стержень прямоугольного поперечного сечения нагревается равномерно на $\Delta T = 100^{\circ}\text{C}$. Определить вертикальное перемещение сечения, расположенного на оси симметрии. Дано: $h=2b=50 \text{ мм}$, $l=1 \text{ м}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$.

3. Стержень прямоугольного поперечного сечения $h \times b$, защемленный с одной стороны и опирающийся на пружину жесткости $C_n = 3EI_x/l^3$ с другой, нагружен силой P . Определить максимальное напряжение.

4. Конструкция, представленная на рис.4, нагружена силами $P=10 \text{ кН}$. Определить диаметр заклепок, если $[\tau]_{cp} = 100 \text{ МПа}$.

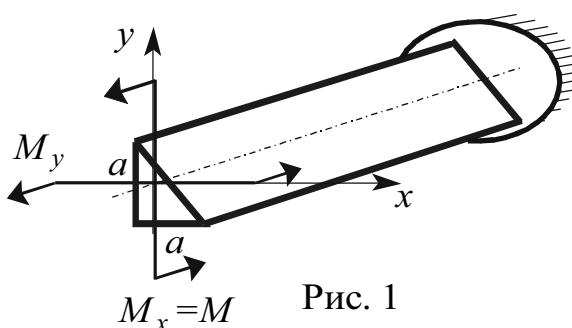


Рис. 1

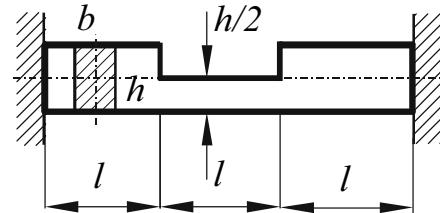


Рис. 2

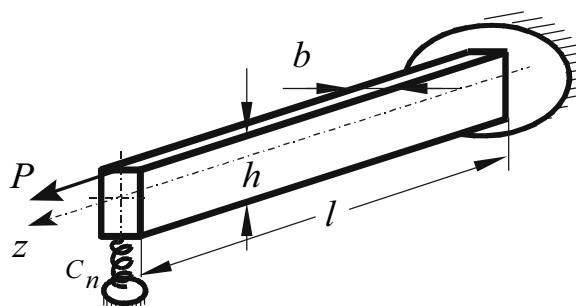


Рис. 3

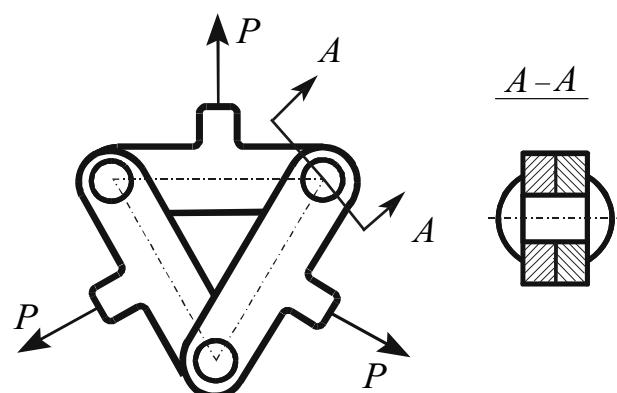


Рис. 4

5. Стержень треугольного поперечного сечения нагружен силой P , линия действия которой проходит через центр тяжести торцевого сечения. Доказать, что максимальное нормальное напряжение, возникающее в стержне, определяется из выражения $\sigma_{max} = Ply_{max}/I_x$.

6. Ферма изготовлена из стержней площадью S . Определить работу силы P , полагая, что сжатые элементы устойчивости не теряют.

7. Стержень, спаянный из трех полос (1 – сталь, 2 – медь), нагрет до температуры T . Найти напряжения, если $\alpha_1=0.7\alpha_2=\alpha_0$, $E_1=1.5E_2=E_0$.

8. Ферма, выполненная из элементов площадью S , нагружена силой P . Определить угол поворота абсолютно жесткого стержня AB .

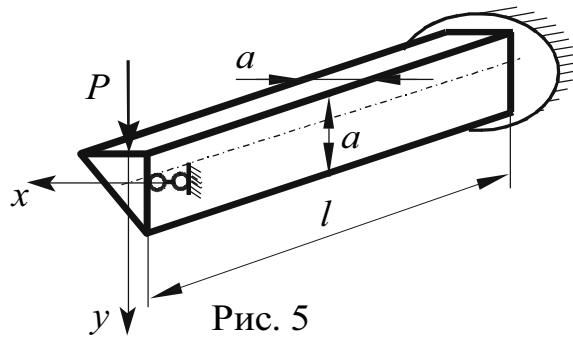


Рис. 5

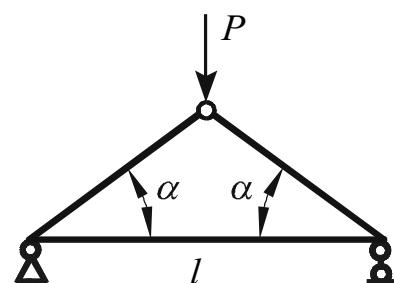


Рис. 6

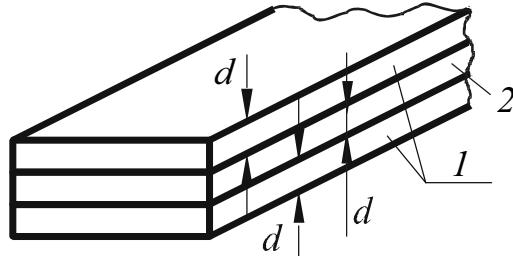


Рис. 7

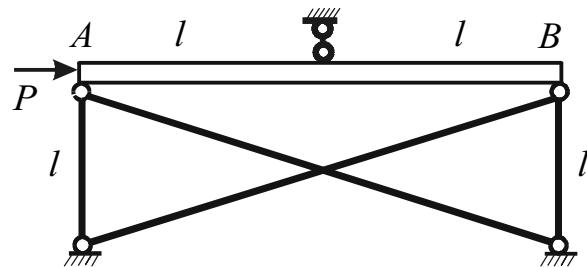


Рис. 8

9. Балка длиной l , жесткостью EI опирается на податливые опоры. Жесткость левой опоры $C_n=5EI/l$, правой $C_n=10EI/l^3$. Найти угол поворота сечения A относительно B .

10. Балка нагружена распределенной нагрузкой интенсивности q . Найти максимальное напряжение.

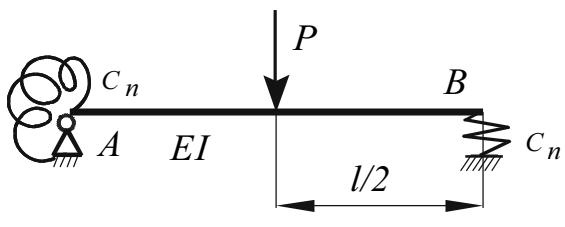


Рис. 9

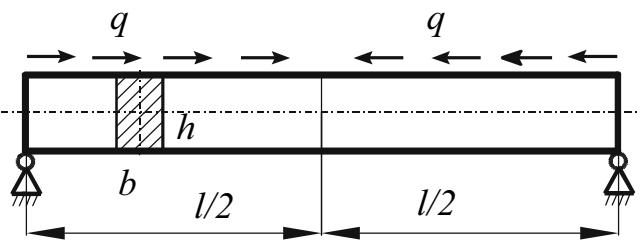


Рис. 10

11. Найти внутренние силовые факторы.

12. Найти максимальное вертикальное перемещение.

13. Концы стержня, выполненного из различных идеально пластических материалов ($\sigma_T^1=2\sigma_T^2=\sigma_T$), приварены к жестким плитам. Найти величину предельной нагрузки.

14. Длина пружины, имеющей жесткость $C=2EI/l^3$, на Δ больше расстояния между балками. Найти внутренние силы, возникающие при сборке конструкции.

15. Нагрузка перпендикулярна плоскости рамы. Найти ВСФ, считая $G=0.4E$.

16. Стержень сжат силами, приложенными по торцам. С помощью тензодат-

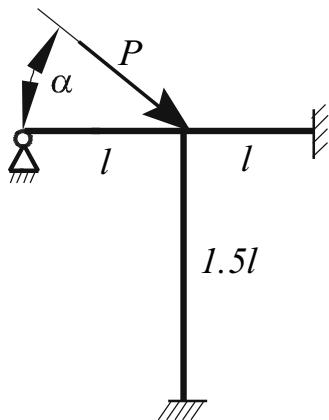


Рис. 11

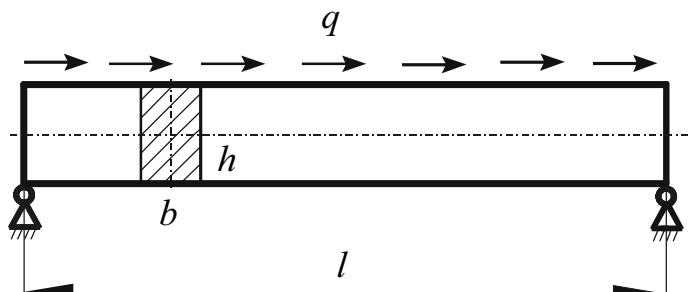


Рис. 12

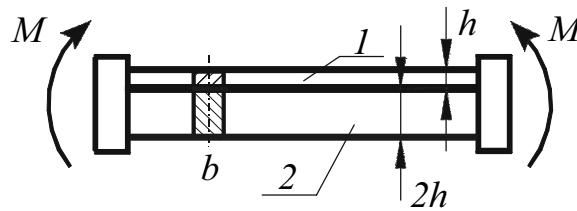


Рис. 13

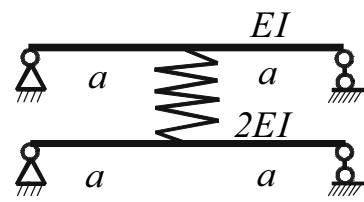


Рис. 14

чиков 1 и 2 измерены продольные деформации наружных слоев $\varepsilon_1 = -3 \cdot 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = -9 \cdot 10^{-4}$. Найти радиус кривизны искривленной оси стержня, если $h=60$ мм.

17. Стержень нагружен только собственным весом. Построить эпюру перемещений.

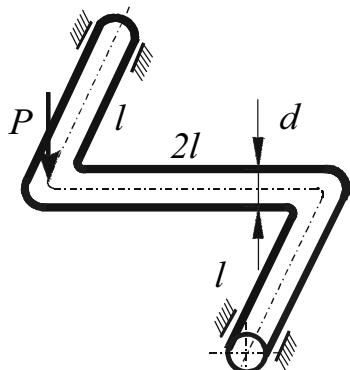


Рис. 15

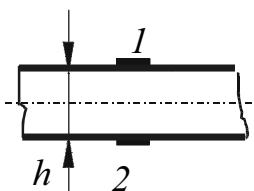


Рис. 16

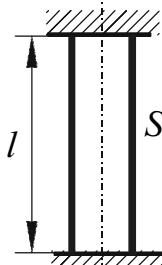


Рис. 17

18. Напряженное состояние в теле характеризуется матрицей напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как изменился размер за штрихованной площади?

19. Найти диаметр стержня BD , если он изгото-

твлен из материала с допускаемым напряжением $[\sigma] = 100$ МПа. Вес стержней AB , BC , CD и DA одинаков и равен $Q = 15,7$ кН. Стержень BD считать невесомым.

20. Используя принцип возможных перемещений, найти усилие в стержне 1 фермы.

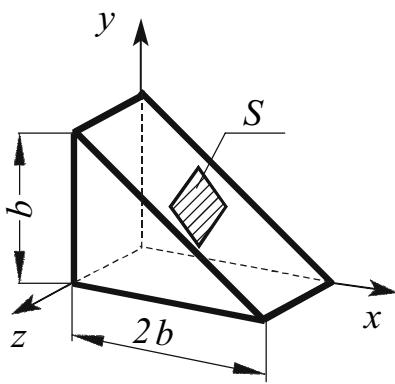


Рис. 18

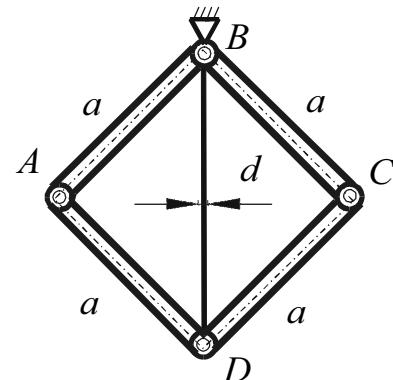


Рис.19

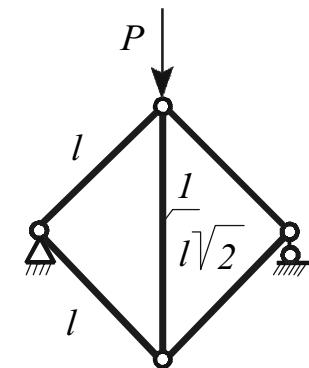


Рис.20

21. Стержни соединены между собой шарнирно в точке A . Определить усилие в шарнире.

22. Два вала AB и BC соприкасаются в сечении B . После нагрева вала BC на величину ΔT к валу AB прикладывается момент M . Определить угол поворота сечения B , при котором валы будут проскальзывать друг относительно друга.

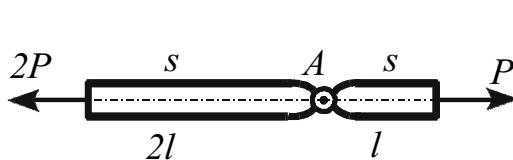


Рис.21

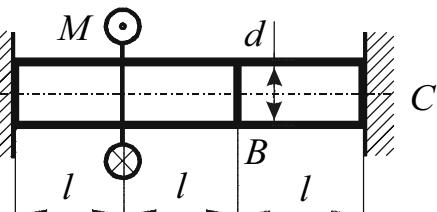


Рис.22

23. Абсолютно жесткий элемент AB висит на пятнадцати одинаковых стержнях. Определить наибольшее напряжение.

24. Длина стержня равна l . Найти перемещение точки крепления пружины к стержню, если $C_n = 2Ebh/l$. Считать, что пружина воспринимает только продольное усилие.

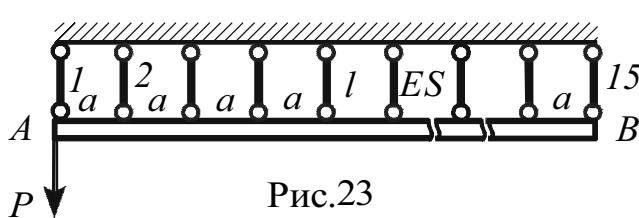


Рис.23

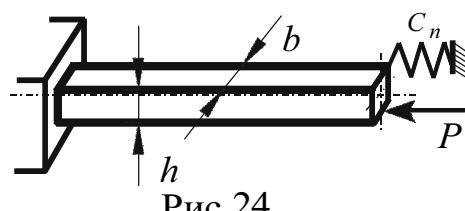


Рис.24

25. Найти критическое значение силы P .

26. Стержень нагревается равномерно по высоте и неравномерно по длине ($T(z) = T_0 z^2/l^2$). Определить напряжения, возникающие в стержне, а также перемещение среднего сечения.

27. Какой должна быть жесткость средней опоры, чтобы прочность балки была максимальной?

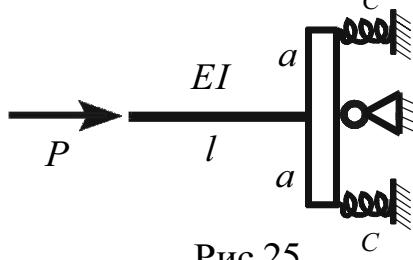


Рис.25

28. Определить перемещение среднего сечения балки.

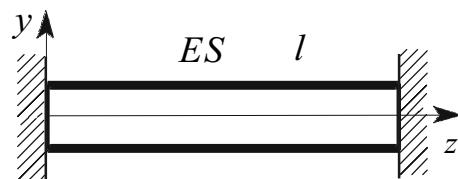


Рис.26

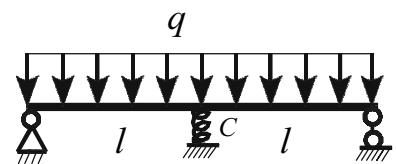


Рис.27

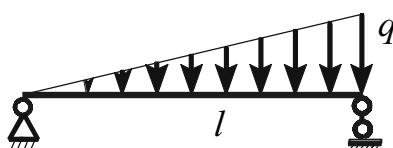


Рис.28

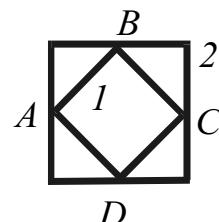


Рис.29

29. Рама 1 вставлена без зазора в раму 2. Определить относительное перемещение сечений A и C , если рама 1 нагрета на ΔT . Жесткости поперечных сечений рам одинаковы.

30. Элементы 1, 2 рамы подвергаются

температурному воздействию. Определить допустимый перепад температуры по высоте сечения, если $l=1 \text{ м}$, $a=20 \text{ мм}$, $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $[\sigma]=90 \text{ МПа}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

31. Полубесконечная полоса, лежащая на абсолютно жестком основании, подвергается воздействию температуры, изменяющейся по линейному закону. Определить максимальное вертикальное перемещение ($h=5 \text{ мм}$, $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $T_0=100^\circ\text{C}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\gamma=80 \text{ кН/м}^3$ – удельный вес материала).

32. Две одинаковые консольные балки связаны на конце шарниром и нагружены силой P . Вычислить потенциальную энергию, накопленную системой.

33. При какой жесткости горизонтальной опоры B несущая способность рамы максимальна?

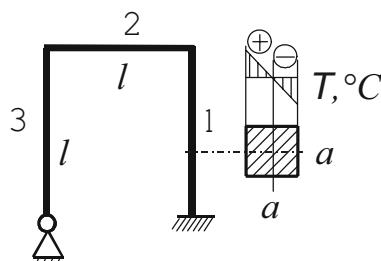


Рис.30

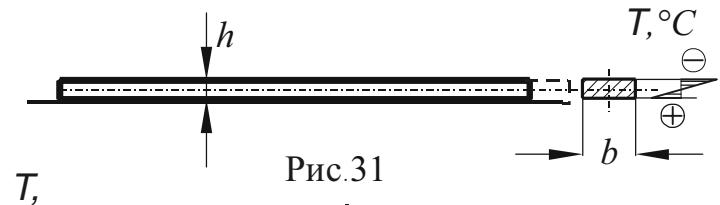


Рис.31

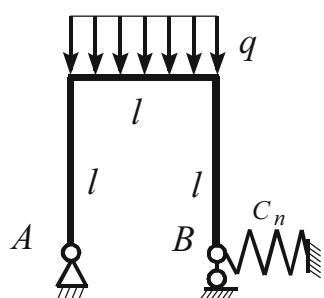


Рис.33

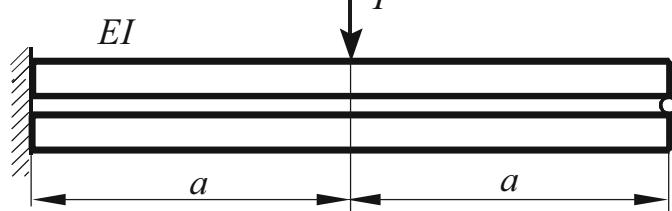


Рис.32

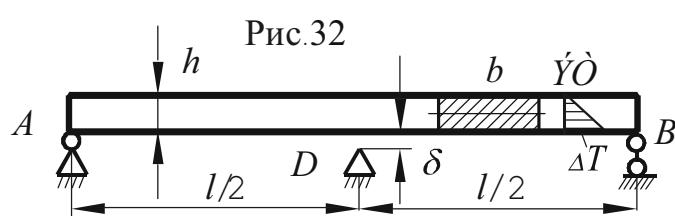


Рис.34

34. Пластина прибора AB используется для замыкания контакта D при нагревании ее с перепадом температуры $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Определить напряжения, возникающие в пластинке. Известно: $l=0.1 \text{ м}$, $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $h=2 \text{ мм}$, $b=5 \text{ мм}$, $\Delta=0.1 \text{ мм}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

35. Балка склеена из двух стержней квадратного сечения, предел прочности материала которых 100 МПа , $l=20a$. Какой предел прочности должен иметь клей, чтобы конструкция была равнопрочной?

36. Определить относительное перемещение точек рамы A и B .

37. Найти внутренние силовые факторы.

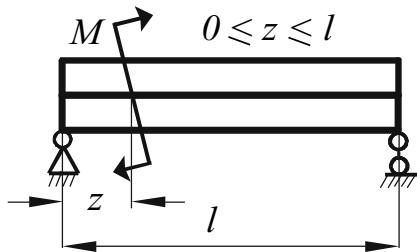


Рис. 35

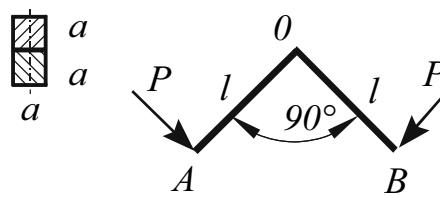


Рис.36

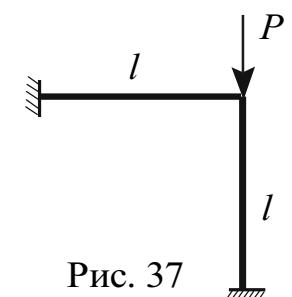


Рис. 37

38. Стержни фермы имеют одинаковую площадь поперечного сечения. Материал идеально пластичен. Определить предельную величину параметра нагрузки.

39. Две пластинчатые пружины установлены без зазора (рис. а). Определить положение линии контакта и величину силы взаимодействия между пружинами при опускании правой опоры на величину Δ (рис.б).

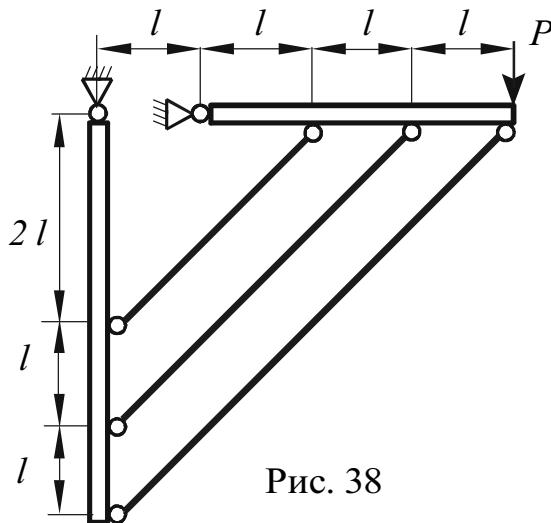


Рис. 38

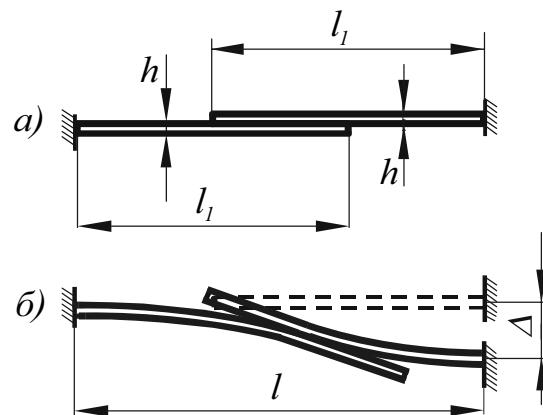


Рис. 39

40. Подсчитать работу силы P .

41. Определить угол поворота среднего сечения, если жесткость балки EI , а зазор $\Delta=Pl^3/(8EI)$.

42. Найти работу силы P к моменту касания балками основания AB .

43. Груз весом 1 кН висит на трех нитях диаметром $d=2 \text{ мм}$. Длины нитей: $l_a=9.99 \text{ м}$, $l_b=10 \text{ м}$, $l_c=10.006 \text{ м}$. Определить напряжения в нитях.

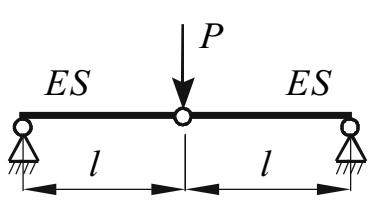


Рис. 40

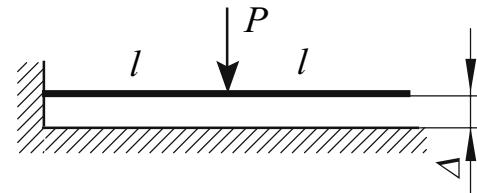


Рис. 41

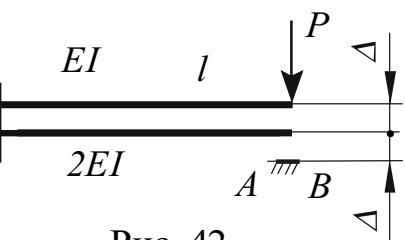


Рис. 42

44. Стержень C оказался длиннее чертежного размера на величину Δ . Найдите повороты стержней A и B после сборки.

45. При нагреве выше T_0 стойка изогнула. Как выглядит эпюра изгибающих моментов?

46. Рама равномерно нагрета. Как сместить опоры, чтобы напряжения отсутствовали? Укажите все возможные варианты таких смещений опор.

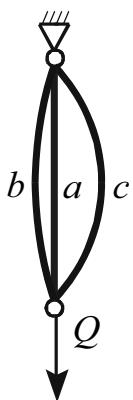


Рис. 43

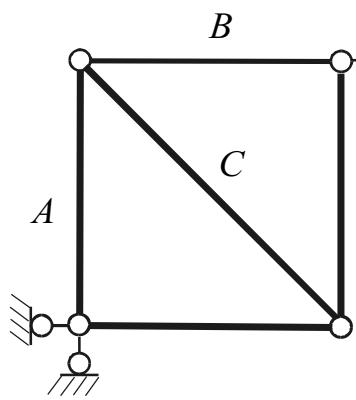


Рис.44



Рис.45

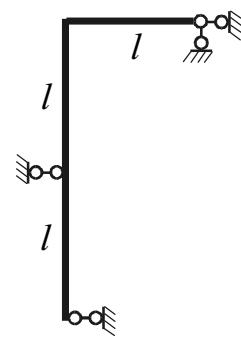


Рис.46

47. Рама нагружена распределенной нагрузкой. Определите изменения углов α и β .

48. Стержень AB охладили на T^0 . Найдите тепловые напряжения.

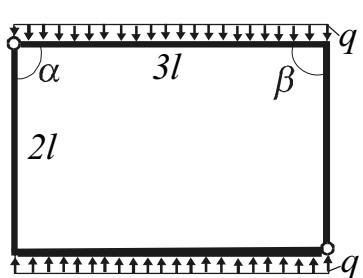


Рис.47

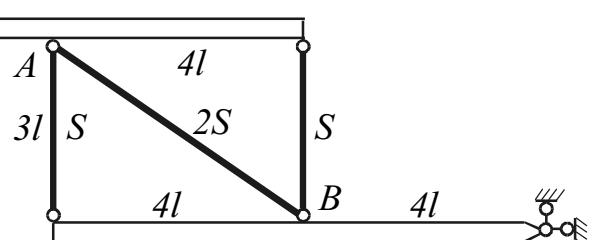


Рис.48

49. Вычислите потенциальную энергию деформации.

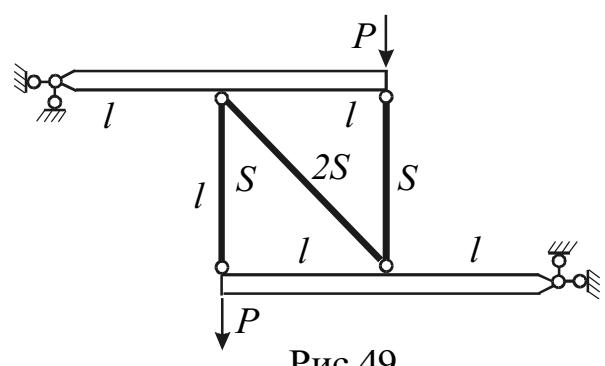


Рис.49

Раздел 3. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ

Ниже приведен ряд задач, которые трудно отнести к одной какой-либо теме, но решение которых, на наш взгляд, может дать полезную информацию о некоторых нестандартных способах расчетов. Часть приведенных задач взята из литературы, но здесь они решены методами, несколько отличающимися от известных.

Задача 1. Гибкий стержень лежит на абсолютно твердой поверхности (рис.1). Требуется найти минимальное отношение b/a , при котором стержень касается поверхности только в двух сечениях [7].

Решение. При большом значении b (рис.1) стержень касается поверхности в двух сечениях; при этом размер b может быть увеличен без изменения схемы контакта. Заметим, что сечение A на рис.1 повернуто на некоторый угол $\alpha \neq 0$. На рис.2 показан случай, когда размер b меньше искомого b_{min} . В этом положении касание происходит в бесчисленном числе сечений. Напомним: возможность появления со средоточенной реакцией R обсуждалась ранее в задаче, представленной на рис.4.4 (глава 4). Между

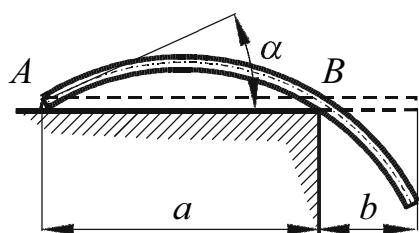


Рис.1

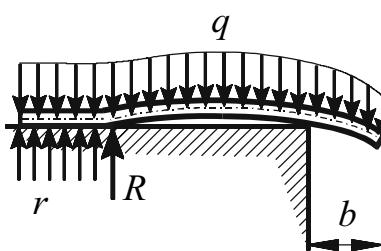


Рис.2

двоумя показанными состояниями, очевидно, есть такое, когда контакт происходит только в двух точках, но дальнейшее уменьшение размера b приводит к ситуации на рис.2. Таким образом, при искомом значении b_{min} справедлива схема на рис.1, в которой угол поворота сечения A равен нулю. Расчетная схема представлена на рис.3. С помощью интеграла Мора находим угол α и приравниваем его нулю. Ответ: $b_{min} \approx 0.71a$.

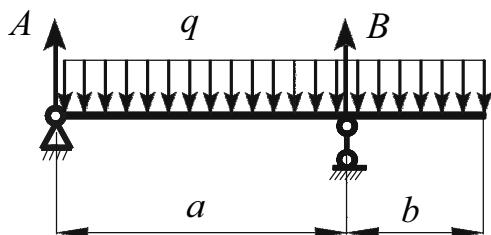


Рис.3

между двумя показанными состояниями, очевидно, есть такое, когда контакт происходит только в двух точках, но дальнейшее уменьшение размера b приводит к ситуации на рис.2. Таким образом, при искомом значении b_{min} справедлива схема на рис.1, в которой угол поворота сечения A равен нулю. Расчетная схема представлена на рис.3. С помощью интеграла Мора находим угол α и приравниваем его нулю. Ответ: $b_{min} \approx 0.71a$.

Задача 2. Стержень BD шарнирно закреплен в точке B и до приложения нагрузки свободно лежит на балке AC (рис.4). Определить угол поворота сечения B при нагружении верхнего стержня моментом M . Поперечные сечения стержней одинаковы.

Решение. На рис.5а показана конструкция в деформированном состоянии. В зоне контакта прогибы и углы поворота совпадают, поэтому правая часть верхней и левая часть нижней балок могут рассматриваться как одна балка, защемленная в левом сечении и шарнирно закрепленная в правом (рис.5б). Задача о повороте сечения B такой балки решается стандартным путем – с использованием интеграла Мора. Построение эпюры изгибающего момента может быть ускорено следующим образом.

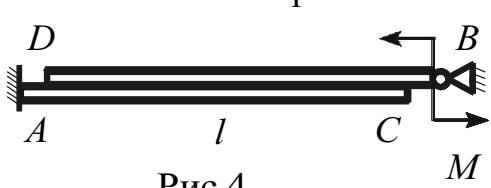


Рис.4

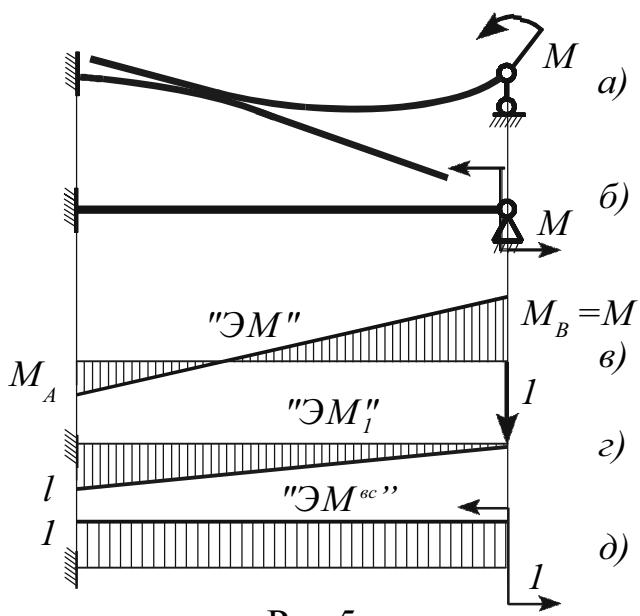


Рис.5

Так как в пролете балки нагрузка отсутствует, то изгибающий момент является линейной функцией z (рис.5в). Единичная эпюра метода сил имеет вид, показанный на рис.5г. В соответствии с контролем правильности построения эпюр в статически неопределенных системах, производимым по правилу Верещагина, нужно умножить площадь $\mathcal{E}M_1$, на ординату $\mathcal{E}M$ под центром тяжести $\mathcal{E}M_1$. Результат должен равняться нулю (смысл канонического уравнения). Это возможно только в случае, если упомянутая ордината равна нулю. Отсюда следует, что $\mathcal{E}M$ пересекает ось балки в сечении, находящемся на расстоянии $l/3$ от левой опоры. Тогда $M_A = -0.5M_B = 0.5M$.

Для определения угла поворота перемножаем эпюры $\mathcal{E}M$ и вспомогательную $\mathcal{E}M^{sc}$ (рис.5д). Находим $\theta_B = Ml/(4EI)$.

Задача 3. Найти внутренние силовые факторы в раме постоянного поперечного сечения, нагруженной силой P (рис.6).

Решение. Задача девять раз статически неопределенна, если решать ее традиционным образом. Однако, пренебрегая перемещениями от растяжения (сжатия) по сравнению с перемещениями от изгиба, получим, что элементы рамы работают только на растяжение-сжатие (подобно ферме). Учтем также кососимметричность задачи (рис.7).

Записав сумму проекций всех сил на горизонтальную ось, найдем

$$\sum x = 2A \cos \alpha - P = 0; \quad A = P/(2 \cos \alpha).$$

Из равенства нулю суммы моментов относительно точки C получим $2Ba - 2Aa \sin \alpha = 0$, откуда $B = P \operatorname{tg} \alpha/2$. Усилия на горизонтальном участке, как следует из косой симметрии, равны: $-P/2$ (левая часть) и $P/2$ (правая).

Задача 4. Ферма имеет бесконечное множество одинаковых стержней (рис.8). Найти максимальное напряжение.

Решение. В задаче бесконечное число неизвестных и степень статической неопределенности также бесконечна; стандартные методы здесь не годятся.

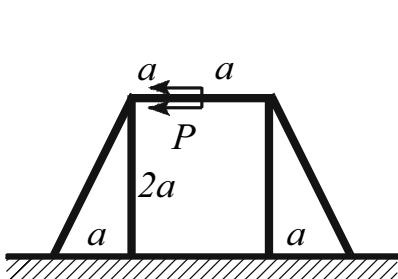


Рис.6

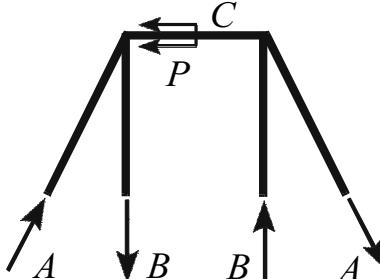


Рис.7

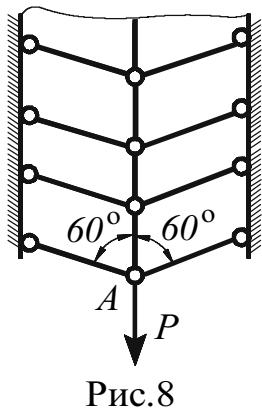


Рис.8

Но с этим же связана особенность, помогающая ее решить. Разобьем конструкцию на две части: элемент из трех стержней и остальное (рис.9, 10). Точка A смещается под действием силы P в соответствии с жесткостью фермы c ($\Delta_A = P/c$), но жесткость фермы на рис.10 та же, что и исходной фермы (то же бесчисленное множество стержней), т.е. $\Delta_B = P_1/c$. Можно считать, что трехстержневая ферма (рис.9) в точке B имеет упругую опору (рис.11) с жесткостью c . Она может рассматриваться как параллельное соединение двух конструкций (рис.12); приложив вместо F , F' единичные силы, найдем податливости λ_n , λ_n этих конструкций как перемещения точек A , A' в левой и в правой конструкциях. Нормальные силы в обоих стержнях левой фермы равны единице;

$$\lambda_n = \Delta_A = \\ = l/(ES) + l/(ES) = 2l/(ES)$$

(для левой фермы) и

$$\lambda_n = \Delta_{A'} = 1/c + l/(ES)$$

(суммируем вытяжку пружины и стержня).

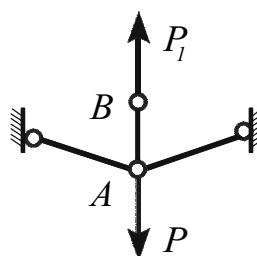


Рис.9

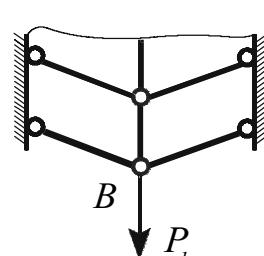


Рис.10

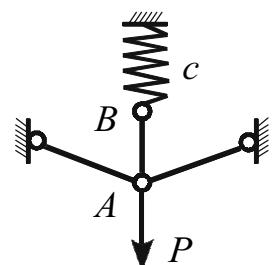


Рис.11

Общая жесткость равна сумме жесткостей этих двух ферм, т.е.

$$c = 1/\lambda_n + 1/\lambda_n = ES/(2l) + 1/(1/c + l/(ES)),$$

откуда нетрудно найти c (решив квадратное уравнение и отбросив отрицательный корень) $c = ES/l$. То же значение жесткости можно было получить, раскрыв методом сил статическую неопределенность в задаче на рис 11.

Зная жесткость фермы, найдем смещение точки A ($\Delta_A = P/c = Pl/(ES)$) и силу

F' на рис.12 (она же – P_1 на рис.10) в соответствии с податливостью $\lambda_n = 1/c + l/(ES) = 2l/(ES)$:

$$P_1 = F' = \Delta_{A'} c_n = \Delta_{A'} / \lambda_n = Pl \cdot ES / (ES \cdot 2l) = P/2.$$

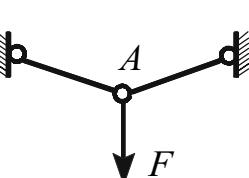


Рис.12



Таким образом, часть конструкции, показанная на рис.10, нагружена вдвое меньше, чем на рис.9 и максимальные усилия – в трех нижних стержнях – равны по $P/2$. Максимальное напряжение равно $P/(2S)$.

Задача 5. Консольный стержень (рис.13) выполнен из двух металлов; модуль упругости в верхней половине вдвое меньше, чем в нижней. Найти напряжения.

Решение. Соображения, приводящие к гипотезе плоских сечений в стержнях, остаются в силе и для биметаллической балки. Значит, деформации линейно изменяются по высоте, но нейтральная линия может уже не находиться на половине высоты (симметрия

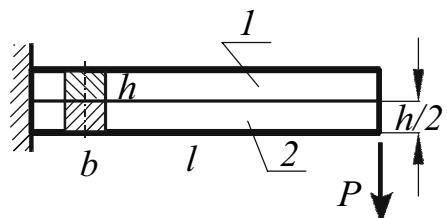


Рис. 13

стержня относительно горизонтального среднего сечения здесь отсутствует). Обозначив Δ – смещение нейтральной линии с середины вниз, запишем

$$\varepsilon = \chi(y + \Delta), \quad (1)$$

где χ , как и раньше, кривизна балки, а величина y отсчитывается от средины вверх. Соответственно,

$$\sigma = E\chi(y + \Delta), \quad E = E_0 \text{ при } y > 0; \quad E = 2E_0 \text{ при } y < 0. \quad (2)$$

Нормальная сила равна нулю, что позволяет найти Δ :

$$\int_0^{h/2} E_0 \chi(y + \Delta) dy + \int_{-h/2}^0 2E_0 \chi(y + \Delta) dy = 0,$$

откуда $\Delta = h/12$. Зная Δ , нетрудно найти связь изгибающего момента с кривизной

$$M = \int_S \sigma y dS = \chi \int_0^{h/2} E_0 y(y + \Delta) dS + \chi \int_{-h/2}^0 2E_0 y(y + \Delta) dS = 11/8 E_0 I \chi, \quad (3)$$

или

$$\chi = 8M/(11E_0 I), \quad I \equiv bh^3/12. \quad (4)$$

Заметим, что мы искали момент относительно средней, а не нейтральной линии (величина y отсчитывается от спая). Это не ведет к ошибке, поскольку равнодействующая (нормальная) сила равна нулю и момент напряжений относительно любой оси одинаков.

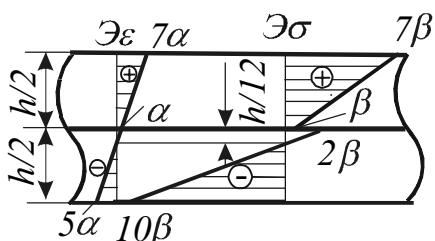


Рис. 14

Таким образом, найдена зависимость кривизны от величины изгибающего момента. Зная ее, из выражения (2) находим напряжения. Их эпюра показана на рис.14, здесь для краткости опущен множитель $\beta = h/12 \cdot (8M/(11I)) = 4M/(33W)$, $W \equiv bh^2/6$. Построив эпюру изгибающих моментов (обычным образом), отсюда находим все напряжения.

Добавим к сказанному, что если, наоборот, в точке $y = -h/12$ приложить рас-

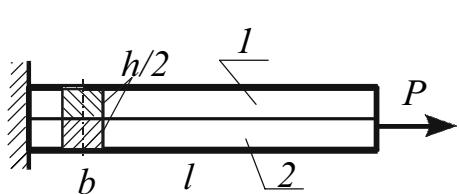


Рис. 15

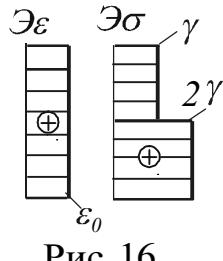


Рис. 16

тягивающую силу (рис.15), то стержень не будет изгибаться, он будет вытягиваться равномерно по высоте: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\sigma = E\varepsilon_0$ (эпюры ε и σ показаны на рис.16). Нетрудно установить, что равнодействующая показанных напряжений приложена

именно в точке $y = -h/12$. Она равна $3/2 E_0 \varepsilon_0 S = N$ (обозначено $S = bh$). Отсюда находим множитель γ на рис. 16 ($\gamma = \varepsilon_0 E_0 = 2N/(3S)$) и связь между силой и деформацией: $\varepsilon_0 = N/(3E_0 S/2)$. Это позволяет вести расчеты на прочность и жесткость. В частности, максимальное напряжение равно $2\gamma = 4N/(3S)$ – выше среднего N/S .

В общем случае внешняя нагрузка может определять в каждом сечении нормальную силу и изгибающий момент. Напряжения при этом складываются из показанных двух эпюр (рис. 14, 16) с соответствующими множителями $\beta = 4M/(33W)$ и $\gamma = 2N/(3S)$.

Задача 6. Балка прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ нагревается по закону, показанному на рис.17. Определить максимальное напряжение.

Решение. Задачу удобно решить методом фиктивных нагрузок (см. п.5.9 первого раздела). Для этого следует нагрузить свободный торец фиктивной нагрузкой интенсивности $q^* = E\alpha T b$ (на единицу высоты h , а не площади) – рис.18а –

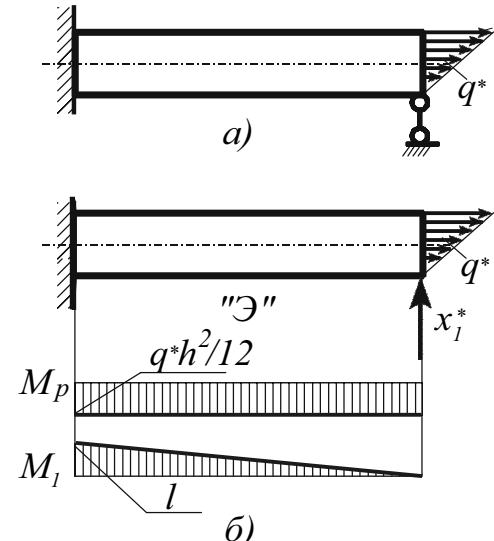


Рис.18

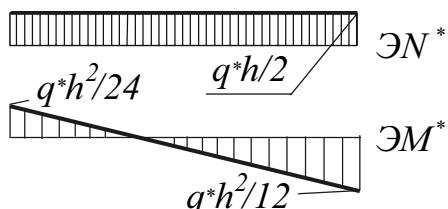


Рис.19

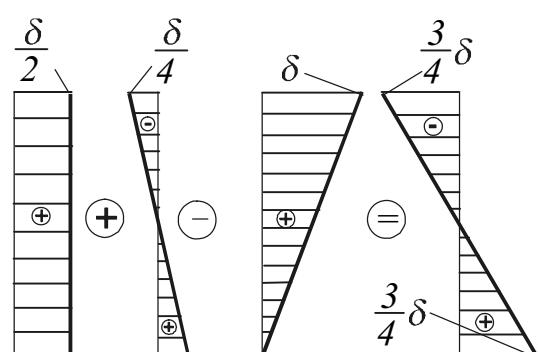


Рис.20

мечалось в п. 5.8 раздела 1, если известно точное решение вспомогательной задачи, то не нужно беспокоиться о совместности деформаций (в нашем случае, тепловых) в исходной задаче, считая, что смещение находится как интеграл

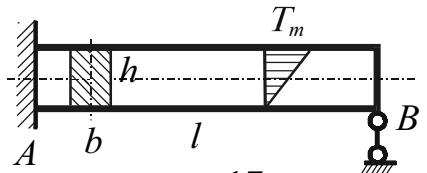


Рис.17

и найти соответствующие фиктивные нормальные напряжения в поперечных сечениях. На рис.18б показана эквивалентная задача, грузовая и единичная эпюры. После перемножения последних находим X_1^* из канонического уравнения ($X_1^* = q^* h^2 / (8l)$) и строим соответствующие эпюры фиктивных внутренних сил (рис. 19).

Заметим, что составлять и решать каноническое уравнение нет необходимости, если еще раз использовать прием, примененный в задаче 2 (рис.5): значение момента слева должно быть в два раза, меньше, чем справа, чтобы под центром тяжести единичной эпюры был ноль на суммарной эпюре.

Из получающихся фиктивных напряжений $\sigma^* = N^*/S + M^*(z)y \cdot 12/(bh^2)$ следует вычесть величину $E\alpha T = E\alpha(y+h/2)T_m/h$. Например, в сечении A получим эпюру напряжений, показанную на рис.20. Здесь $\delta = E\alpha T_m$.

Задача 7. Термореле, расчетная схема которого приведена на рис.21, нагревается на ΔT . Определить максимальный прогиб ($\alpha_1=2\alpha_2=2\alpha_0$, $E_1=E_2=E$).

Решение. Для определения перемещения используется интеграл Мора: деформации и смещения берутся из исходной задачи, а силы и напряжения из вспомогательной (рис.22б). Как от-

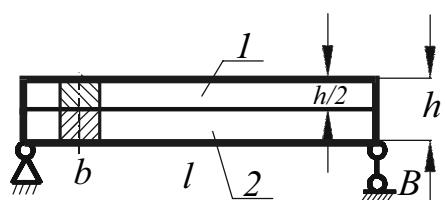


Рис. 21

$$v = \iint_{IS} \sigma^{sc} \epsilon^T dz dS.$$

Здесь $\sigma^{sc} = M^{sc}/I \cdot y$, $\epsilon^T = 2\alpha_0 \Delta T$ при $y > 0$ и $\alpha_0 \Delta T$ при $y < 0$.

Интегрируя по сечению на участке балки длиной dz , получим

$$dv \equiv dz \int_{-h/2}^{h/2} M^{sc}/I \cdot y \epsilon^T dS = M^{sc}/I \cdot dz b \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon^T y dy.$$

Последний интеграл содержит два слагаемых:

$$\int_0^{h/2} 2\alpha_0 \Delta T y dy = 2\alpha_0 \Delta T (h^2/2) \cdot 1/2 = \alpha_0 \Delta T h^2 / 4;$$

$$\int_{-h/2}^0 \alpha_0 \Delta T y dy = -\alpha_0 \Delta T (-h/2)^2 \cdot 1/2 = -\alpha_0 \Delta T h^2 / 8.$$

В итоге

$$dv = M^{sc}/(bh^3) \cdot 12b\alpha_0 \Delta Th^2/8 dz = 3/2 M^{sc} \alpha_0 \Delta T / h dz.$$

Поскольку, в нашем случае, сила во вспомогательной задаче прикладывается посередине,

$$\int_l M^{sc} dz = l/4 \cdot l \cdot 1/2 = l^2 / 8,$$

получаем значение прогиба в середине пролета

$$v_c = \int_l dv = 3/(16h) \cdot \alpha_0 \Delta T l^2. \quad (5)$$

Если эту задачу решать *методом фиктивных нагрузок*, то решение оказывается проще. Вместо нагрева следует приложить на торцах фиктивные растягивающие силы $P_1^* = 2\alpha_0 \Delta T E_0 S / 2$, $P_2^* = \alpha_0 \Delta T E_0 S / 2$ ($S = bh$, рис.22а).

Модули упругости полос одинако-

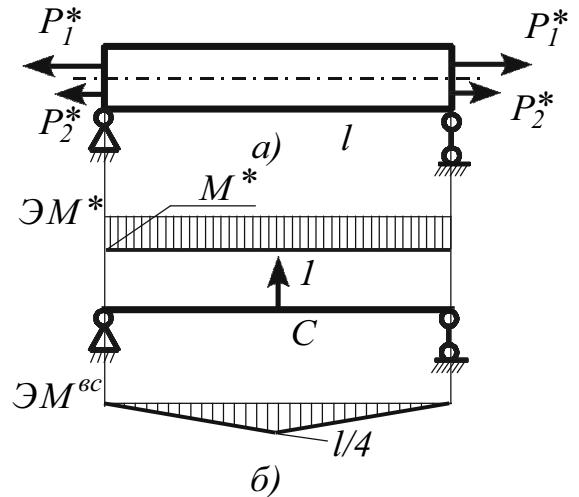


Рис.22

вы, поэтому рассматриваем их как одну балку сечением $b \times h$ (то есть $I = bh^3/12$). Во вспомогательной задаче (рис.22б) возникает только изгибающий момент, поэтому фиктивная нормальная сила нас не интересует; фиктивный изгибающий момент $M^* = (P_1^* - P_2^*) \cdot h / 4$. Перемножив эти эпюры, получим

$$v_c = 2(P_1^* - P_2^*)h/4 \cdot l/2 \cdot l/8/(EI).$$

Отсюда следует ответ (5).

Напомним, что, несмотря на фиктивность нагрузки (и напряжений), смещения и деформации в этом методе отнюдь не фиктивны.

Задача 8. Найти в предыдущей задаче максимальное напряжение.

Решение. Фиктивные напряжения $\sigma^* = M^*/I \cdot y + N^*/S$ ($N^* = P_1^* + P_2^*$) в этой задаче постоянны по длине, значит, все сечения равноопасны. Истинные меньше фиктивных на $E\alpha\Delta T$ (см. раздел 1, п. 5.8). В итоге (рис.23, где $\delta = \alpha_0 E \Delta T$) к напряжениям от фиктивного изгиба $M^*/I_x \cdot y$, изменяющимся по высоте линейно, добавляются кусочно-постоянные напряжения от двух других слагаемых (они, как и

первое слагаемое, отвечают нулевой нормальной силе). Находим: максимальное напряжение равно $\alpha_0 E \Delta T / 2$ – на стыке металлов.

Задача 9. Пусть в термореле (рис.21) модули упругости двух металлов различаются: $E_2 = 2E_1 = 2E_0$. Требуется найти σ_{max} и прогиб в середине v_c .

Решение. В этой задаче можно использовать результаты, полученные при решении предыдущих задач 5, 7, 8. Фиктивные нагрузки при равномерном нагреве сводятся к силам по торцам (рис.22а), которые, в отличие от задачи 7, оказываются одинаковыми:

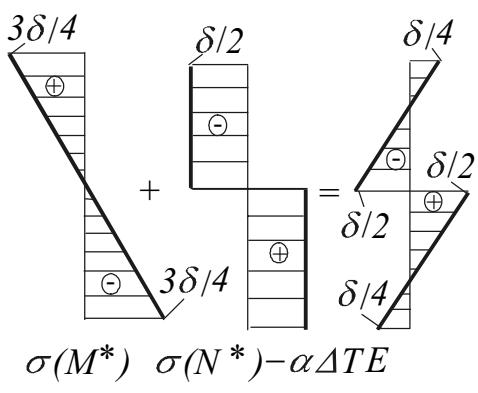


Рис.23

$P_1^* = E_1 \alpha_1 \Delta T S / 2 = E_0 \alpha_0 \Delta T S = E_2 \alpha_2 \Delta T S / 2 = P_2^*$. Значит, фиктивная нормальная сила N^* равна $P_1^* + P_2^* = 2E_0 \alpha_0 \Delta T S$. Но при заданном различии модулей упругости (таком же, как и в задаче 5) фиктивный изгибающий момент не равен нулю, его следует искать относительно оси, проходящей в поперечном сечении на величину $h/12$ ниже средины (см. рис.14). Отсюда, в нашем случае, $M^* = N^* h/12 = E_0 \alpha_0 \Delta T S h/6$.

Вычисляя перемещение v_c с помощью интеграла Мора, следует иметь в виду, что одним из сомножителей в интеграле является деформация осевой линии (в нашем случае, когда во вспомогательной задаче – рис.22б – имеется лишь изгибающий момент, такой деформацией является кривизна). Например, кривизна в исходной задаче (фиктивный изгибающий момент M^*) определяется для биметаллической балки с заданным распределением модулей упругости выражением (4), где искомый изгибающий момент следует заменить на фиктивный. Тогда, используя интеграл Мора, найдем:

$$v_c = \int \chi M^{sc} dz = l^2 / 8 \cdot M^* 8 / (11 E_0 I) = l^2 E_0 \alpha_0 \Delta T S h / (11 E_0 I \cdot 6) = 2 / (11 h) \alpha_0 \Delta T l^2.$$

При определении напряжений удобно начать с фиктивных, отображаемых эпюрами на рис. 14 и 16 с множителями $4M^*/(33W)$ и $2N^*/(3S)$ (из решения задачи 5). Истинные находятся после вычитания отсюда величины $E\alpha\Delta T$, в нашей задаче постоянной по высоте ($2E_0\alpha_0\Delta T$). В итоге получим эпюру, показанную на рис. 24, где $\delta = 2/11 E_0 \alpha_0 \Delta T$. Разные металлы имеют обычно и различные допускаемые напряжения, поэтому следует находить максимальное напряжение в каждой из половин стержня; найдем $\sigma_{max} = 10/11 E_0 \alpha_0 \Delta T$ – для нижней половины и $6/11 E_0 \alpha_0 \Delta T$ – для верхней.

Задача 10. При изготовлении конструкции (рис.25) раму удалось сделать точно, но опоры 1, 2 и 3 оказались смещеными на величины Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Как сместить последнюю опору (4), чтобы собрать конструкцию без усилий?

Решение. Задача статически неопределенна ($k=1$) и неизвестная X_1 – единственная нагрузка, действующая на раму – находится из канонического уравнения

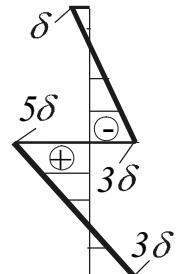


Рис.24

$\delta_{11}X_1=\sum R_i^1\Delta_i$. Податливость δ_{11} не равна нулю, значит, для того, чтобы X_1 была равна нулю, нужно, чтобы сумма $\sum R_i^1\Delta_i$ была нулевой. Выбрав основную систему, отбрасывая все четыре смещающиеся связи, и записав условия равновесия

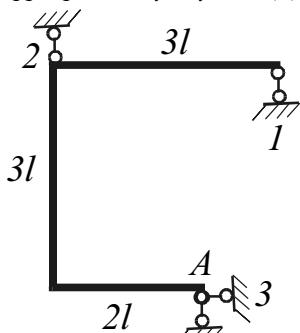


Рис.25

$$\sum X=R_3=0, \sum Y=R_1-R_2+R_4=0, \sum M_A=R_2 \cdot 2l + R_1 \cdot l = 0,$$

найдем:

$$R_3=0, R_1=2X_1, R_2=-X_1, R_4=-3X_1.$$

Задав $X_1=1$, находим реакции R_i^1 : 2, -1, 0, -3. Отсюда условие равенства нулю внутренних сил имеет вид

$$\sum R_i^1\Delta_i=2\Delta_1-\Delta_2-3\Delta_4=0.$$

$$\text{Ответ: } \Delta_4=(2\Delta_1-\Delta_2)/3.$$

Задача 11. Пластина (рис.26) прикреплена к стойке тремя заклепками. Заклепка срезается при силе $Q=15 \text{ kH}$. Нагрузка P на пластину равна 10 kH . Определить коэффициент запаса прочности конструкции.

Решение. Форма пластины и точка приложения силы P на линии ее действия безразличны для существа задачи, поэтому конструкция может рассматриваться как симметричная (рис.27), а нагрузка – кососимметрична. Для определения коэффициента запаса нужно найти предельное значение силы P , при котором образуется пластический механизм: срез двух или трех заклепок (срез одной механизма не образует). Механизм должен быть также кососимметричным: это поворот пластины вокруг точки, лежащей на оси симметрии.

Если этой точкой является средняя заклепка, то срезаются две, и силы, действующие на пластину, показаны на рис.28. Равновесие (сумма моментов относительно, например, средней заклепки) требует, чтобы $2lQ$ было равно $1.5lP_0$, откуда $P_0=4Q/3=20 \text{ kH}$. Но это означает, что средняя заклепка не разрушаясь, выдерживает силу 20 kH , что противоречит условию задачи.

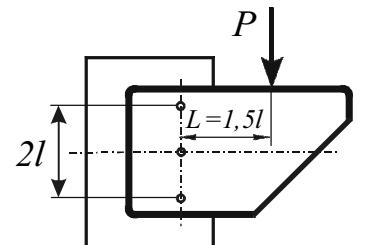


Рис. 26

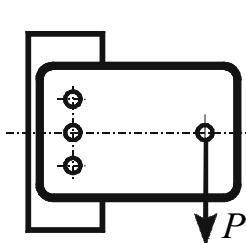


Рис. 27

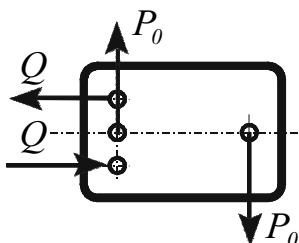


Рис. 28

В полном соответствии с кинематическим методом определения предельной нагрузки рассмотрим другой механизм: срез всех трех заклепок и поворот пластины вокруг некоторой точки A (рис.29). Условия равновесия:

$$1.5P_0l=2lQs; \quad Q(1+2c)=P_0.$$

Здесь s – синус, а c – косинус угла α (показанного на рис.29а). Исключая угол ($s^2+c^2=1$), найдем

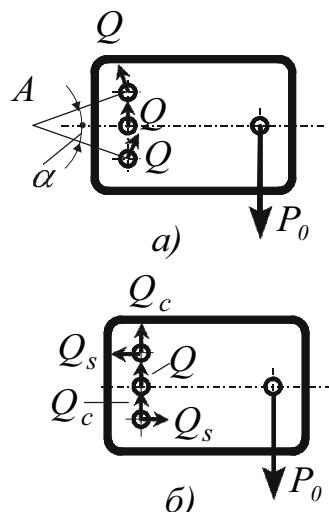


Рис. 29

$$P_0 = Q(4 + \sqrt{16 + 12 \cdot 13})/13 = 1.32Q$$

(отрицательный корень отброшен). Предельная нагрузка равна 19.8 kH ; коэффициент запаса P_0/P оказывается равным 1.98.

Заметим, что поворот вокруг средней заклепки (первый механизм, рис.29б), казалось, представляет частный случай второго рассмотренного механизма, однако это справедливо лишь для приведенных в задаче размеров. При $L > 2l$ первый механизм оказывается действительным, а второй даст более высокое значение предельной нагрузки. Полное решение требует анализа всех возможных механизмов.

Задание 1. Рассмотрите ситуацию с двумя заклепками. В чем будет отличие при решении задачи?

Задание 2. Увеличится ли запас прочности, если среднюю заклепку сдвинуть вправо?

Задача 12. Портальная рама (рис.30) нагружена силой P в точке B . Определить угол поворота сечения A , если жесткость EI всех участков постоянна.

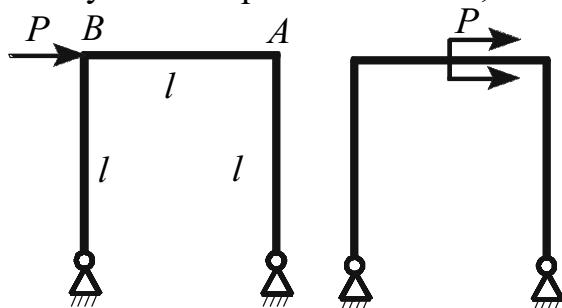


Рис.30



Рис.31

Решение. Жесткость участков рамы при растяжении-сжатии ES будем считать (как обычно) бесконечной по сравнению с жесткостью на изгиб (EI), тогда характер перемещений в раме не изменится, если силу перенести в середину участка AB (рис.31). Задача оказывается кососимметричной, поэтому выберем симметричную основную систему (сняв все внешние связи) и построим кососимметричную эквивалентную задачу на рис.32 (реакции найдены из двух кососимметричных условий равновесия).

Ввиду указанной симметрии поворот сечений A и B одинаков и происходит в одну сторону. На рис.33 приведена соответствующая вспомогательная задача метода Мора – также кососимметричная. Эквивалентная последней задача показана на рис.34, вместе с найденными из условий равновесия реакциями (как и исходная

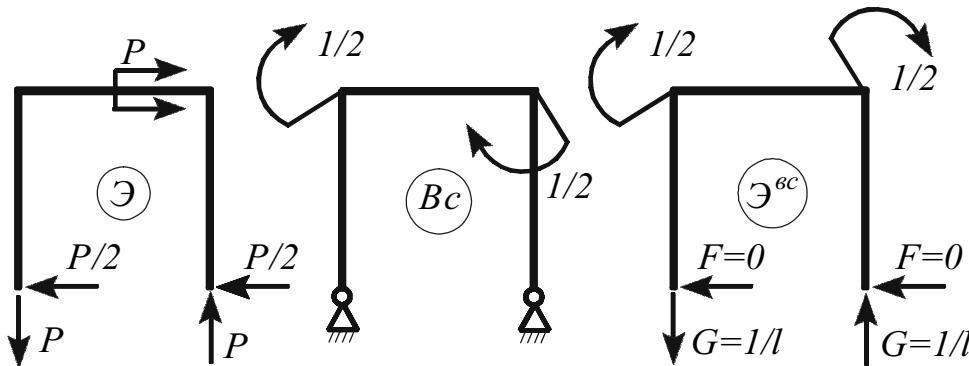


Рис.32

Рис.33

Рис.34

задача, вспомогательная статически определима). Эпюры изгибающих моментов весьма просты; после вычисления интеграла Мора получим $\varphi_A = \varphi_B = Pl^2/(12EI)$.

Задача 13. Определить потенциальную энергию, запасенную системой бесконечного числа одинаковых балок длиной $2a$ и жесткостью EI (рис.35) при нагружении ее силой P [2].

Решение. Для вычисления энергии удобно подсчитать работу силы P , совершенную при нагружении – на перемещении точки A . Другими словами, следует найти жесткость системы (c) при данном нагружении. Особенностью задачи является то, что при удалении верхней балки жесткость системы не меняется – ввиду бесконечного числа балок. Это свойство можно использовать для вычисления жесткости c . Найдем силу, которую нужно приложить к балке (рис.36), чтобы

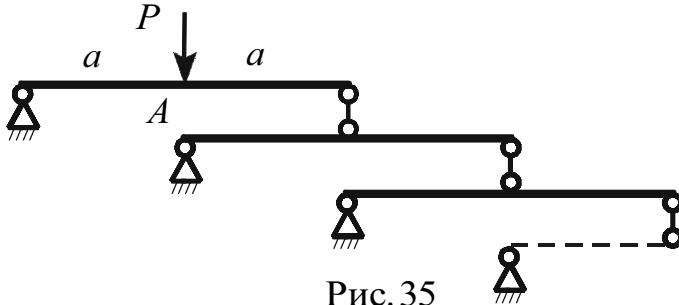


Рис. 35

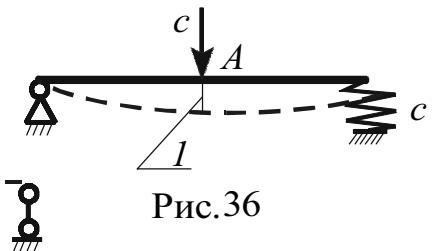


Рис.36

прогиб в точке A был равен единице – если правый конец опирается на пружину искомой жесткости. Величина этой силы и есть жесткость c – по определению.

Прогиб сечения A на рис.36 равен сумме прогиба балки на жестких опорах и половины осадки пружины. Первую величину найдем из интеграла Мора, перемножив похожие эпюры в исходной и вспомогательной задачах (здесь их не имеет смысла приводить), это $ca^3/(6EI)$. Отсюда следует:

$$ca^3/(6EI) + 1/2 \cdot c/2 \cdot 1/c = 1$$

и, значит,

$$c = 9EI/(2a^3).$$

Перемещение точки A под действием силы P равно

$$v_A = P/c = 2Pa^3/(9EI)$$

и работа силы P (переходящая в потенциальную энергию системы W) равна $Pv_A/2$, откуда следует ответ: $W = P^2a^3/(9EI)$.

Задача 14. Элементы фермы, представленной на рис.37, имеют круглое поперечное сечение ($d=40$ мм). Дано: $l=1.2$ м, $\alpha=30^\circ$, $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T=300$ МПа.

Найти допустимое значение силы P , если нормативный коэффициент запаса прочности равен двум.

Решение. Задача кососимметрична и потому стержень 2 не нагружен, усилия

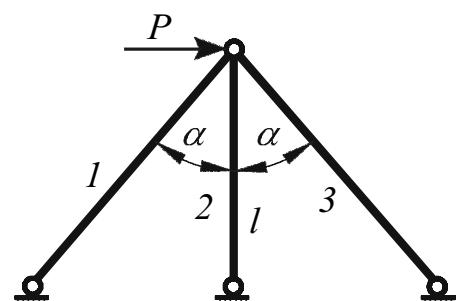


Рис. 37

в 1 и 3 стержне находятся из условия равновесия. Однако, когда нормальная сила в стержне 3 достигает своего критического значения R_3^* , исчерпания несущей способности, вследствие статической неопределенности конструкции, не происхо-

дит. При дальнейшем росте силы P нормальная сила в третьем стержне постоянна (следствие гипотезы малости перемещений), а догружаются стержни 1 и 2. Работа конструкции перестает быть симметричной, но задача остается статически определимой (R_3^* – известно).

Возможны два механизма разрушения: а) потеря устойчивости стержня 2 (рис.38) и б) достижение напряжением в стержне 1 предела текучести (рис.39).

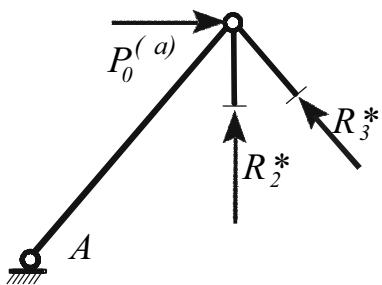


Рис.38

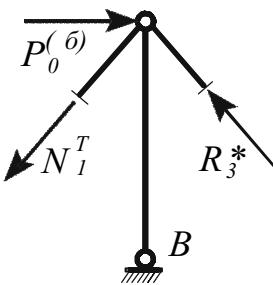


Рис.39

Записав условия равновесия (суммы моментов относительно точек A и B), получим соответствующие предельные нагрузки. Предварительно находим гибкости стержней ($\lambda_2=120$, $\lambda_3=138$); нетрудно видеть (по данным в задаче E , и σ_T), что справедлива формула Эйлера: $R_i^*=\pi^2ES/\lambda_i^2$. Найдем: $P_0^{(a)}=0.228 \text{ MN}$, $P_0^{(b)}=0.257 \text{ MN}$. Значит, происходит полное исчерпание несущей способности по устойчивости; допускаемая нагрузка – 114 kN .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Методические указания по решению задач 1-го тура Всесоюзной олимпиады по сопротивлению материалов. – М.: МВТУ им. Н.Э.Баумана, 1977. – 10 с.
2. Предметные олимпиады. Организация и задачи. Методические указания. – Горький: ГПИ им. А.А.Жданова, 1986. – 104 с.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 520 с.
4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
5. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967.– 376 с.
6. Рубинин М.В. Сопротивление материалов. – М.: Машгиз, 1961. – 468 с.
7. Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу "Сопротивление материалов": Учеб. пособие для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.